



浙江工商大学

本科生毕业论文（设计）

题目：重子声波振荡的理论研究

学 院：理学院

专 业：光电信息科学与工程

班 级：光信 2002

学 号：2020003170207

学生姓名：贺迎秋

指导老师：***

提交日期：二〇二四年六月

重子声波振荡的理论研究

学生姓名：贺迎秋 指导教师：***

浙江工业大学理学院

摘 要

重子声波振荡（BAO）是探测宇宙加速膨胀的重要探针之一，通过分析功率谱可以观测到 BAO 的特征尺度。在标准宇宙模型（ Λ CDM）框架下，通过线性和非线性理论模型分析，我们探讨了线性微扰理论到暗晕模型的宇宙结构演化，并详细研究了物质功率谱及其在不同尺度上的行为。研究发现，在大尺度上（低 k ），暗晕的聚集是主导因素，重子和暗物质的引力作用共同促进结构生长；在 $k \approx 0.1h \text{ Mpc}^{-1}$ 附近得到一系列 BAO 声波振荡，表明重子与光子的耦合对功率谱有显著影响，并且在实空间和红移空间中的两点相关函数的应均显示出在 $r \approx 100h^{-1}\text{Mpc}$ 处的声学尺度特征；在小尺度上（高 k ），单个晕内部的物质分布对结构形成主导作用。此外，通过变化宇宙学密度参数，可以改变功率谱的振幅和形状，进一步揭示了物质成分对宇宙结构增长的影响。

关键词：重子声波振荡，大尺度结构，物质功率谱，线性微扰理论，暗晕模型

THEORETICAL STUDY OF BARYON ACOUSTIC OSCILLATION

Student: He Yingqiu Advisor: ***

College of Science

Zhejiang University of Technology

ABSTRACT

Baryon acoustic oscillations (BAO) are one of the most important probes to detect the expansion of the universe, and the characteristic scales of BAO can be observed by analyzing the power spectrum. In the framework of the standard cosmic model (Λ CDM), we investigate the evolution of the cosmic structure from linear perturbation theory to the dark halo model by means of linear and nonlinear theoretical model analysis, and study in detail the matter power spectrum and its behaviors on different scales. It is found that on large scales (low k), the aggregation of the dark halo is the dominant factor, and the gravitational effects of baryons and dark matter jointly promote the structure growth; a series of BAO are obtained near $k \approx 0.1h \text{ Mpc}^{-1}$, indicating that the coupling of baryons and photons has a significant effect on power spectrum, and the two-point correlation function in both the real and the redshift spaces show a significant effect at $r \approx 100h^{-1} \text{ Mpc}$ at acoustic scales; on small scales (high k), the distribution of matter within individual halos dominates the structure. In addition, by varying the cosmological density parameters, the amplitude and shape of the power spectrum can be changed, further revealing the influence of the matter composition on the growth of the cosmic structure.

KEY WORDS: Baryon acoustic oscillation, Large-scale structure, Matter power spectrum, Linear perturbation theory, Halo Model

目 录

| | |
|----------------------------------|-----|
| 摘 要..... | I |
| ABSTRACT..... | II |
| 目 录..... | III |
| 表目录..... | IV |
| 图目录..... | IV |
| 第一章 引言..... | 1 |
| 第二章 宇宙学和重子声波振荡..... | 3 |
| 2.1 宇宙膨胀动力学..... | 3 |
| 2.2 宇宙的演化历史..... | 4 |
| 2.3 重子声波振荡..... | 7 |
| 2.3.1 物理机制..... | 7 |
| 2.3.2 BAO 和 CMB 功率谱..... | 7 |
| 2.3.3 BAO 和星系功率谱..... | 8 |
| 第三章 大尺度结构下的线性演化和物质功率谱..... | 10 |
| 3.1 线性微扰理论概述..... | 10 |
| 3.1.1 重子和暗物质的转移函数以及 BAO 声学峰..... | 12 |
| 3.1.2 增长因子和增长速率..... | 13 |
| 3.2 线性物质功率谱和两点相关函数..... | 16 |
| 3.2.1 物质扰动的方差..... | 16 |
| 3.2.2 分析不同参数对功率谱影响..... | 18 |
| 3.3 红移空间畸变对观测功率谱的影响..... | 20 |
| 第四章 非线性结构形成和暗晕模型..... | 23 |
| 4.1 暗晕模型概述..... | 23 |
| 4.1.1 暗晕质量和密度轮廓..... | 23 |
| 4.1.2 暗晕质量函数和暗晕偏差..... | 25 |
| 4.2 非线性物质功率谱..... | 27 |
| 4.2.1 结果与讨论..... | 27 |
| 4.2.2 BAO 和非线性演化..... | 29 |
| 第五章 结语..... | 30 |
| 参考文献..... | 31 |
| 附录 1 线性流体方程的推导..... | 34 |
| 附录 2 线性功率谱的拟合公式..... | 35 |
| 致 谢..... | 37 |

表目录

| | |
|--------------------------|---|
| 表 1-1 标准宇宙学模型下的基本参数..... | 2 |
| 表 1-2 部分符号说明..... | 2 |

图目录

| | |
|---|----|
| 图 2-1 宇宙的膨胀..... | 6 |
| 图 2-2 (a) <i>Planck</i> 宇宙微波背景 (b) 重建的 BAO..... | 7 |
| 图 2-3 <i>Planck</i> CMB 功率谱..... | 8 |
| 图 2-4 (a) 星系样本空间分布图 (b) 结合了所有 tracers 的 BAO 测量结果..... | 9 |
| 图 3-1 在标准宇宙模型下的转移函数..... | 14 |
| 图 3-2 在不同重子和物质密度参数下的四个转移函数..... | 14 |
| 图 3-3 不同宇宙学参数下第一个声学峰的位置，以 Mpc^{-1} 为单位 | 15 |
| 图 3-4 不同暗物质密度参数下的 (a) 增长因子 (b) 增长速率..... | 16 |
| 图 3-5 在不同红移下物质密度涨落随尺度变化的方差..... | 17 |
| 图 3-6 当 $z = 6$ 时的无量纲线性物质功率谱..... | 18 |
| 图 3-7 不同红移下的线性功率谱..... | 19 |
| 图 3-8 不同物质密度参数下的线性功率谱..... | 19 |
| 图 3-9 实空间和红移空间的线性物质功率谱..... | 21 |
| 图 3-10 不同红移下的(a)实空间和(b)红移空间两点相关函数 | 22 |
| 图 4-1 (a) 暗晕轮廓和 (b) 归一化的 Fourier 转化下的暗晕轮廓..... | 24 |
| 图 4-2 不同红移下的(a)暗晕质量函数和 (b) 暗晕偏差因子 | 26 |
| 图 4-3 当 $z = 0$ 时的无量纲物质功率谱，包括暗晕、1-晕项、2-晕项和线性 | 28 |

第一章 引言

宇宙的起源和演化一直是人类探索的最根本的问题之一。从古代文明的夜空观星，到现代物理学的进展和观测技术的突破，我们对宇宙的认识已经实现了革命性的发展。特别是 20 世纪，宇宙微波背景辐射的发现和 Ia 型超新星爆发的观测开启了现代宇宙学研究的新纪元。利用大型巡天望远镜和空间探测器，我们不仅能观测到宇宙的遥远角落，还能精确测量宇宙的大尺度结构。这些测量对于验证大爆炸理论、暴涨理论、宇宙加速膨胀以及暗物质和暗能量的假设等理论发挥着至关重要的作用。

在 21 世纪初，重子声波振荡（BAO）的发现标志着又一项突破性进展。它提供了一种独特的方法来测量宇宙大尺度结构的几何形态和膨胀历史，成为理解宇宙早期状态和演化过程的关键工具。在宇宙大爆炸后的最初 30 万年间，重子与光子组成了炽热的等离子体，其耦合产生了微小密度扰动表现为声波在空间中传播。在这一时期结束时，宇宙冷却，重子与光子解耦，微扰在物质功率谱中形成了振荡特征，即重子声波振荡。并随着宇宙的膨胀和演化，该特征尺度在星系大尺度分布中留下了可观测的印记，成为测量距离的重要标尺，进而为探测宇宙加速膨胀和暗能量的本质提供了有效工具。

在宇宙学标准模型中，重子物质约占宇宙总物质的 15%，而暗物质占 85%。暗物质不与光子或重子直接相互作用，仅通过引力影响可见宇宙。它在宇宙结构形成中起着关键作用，如推动星系的形成和星系分布框架的构建。通过暗物质晕模型，可以研究暗物质对宇宙结构演化的影响，以及分析在小尺度上的 BAO 特征。这些模型提供了一种手段来解释和预测暗物质在大尺度结构中的作用，从而加深我们对宇宙基本组成和演化的理解。

本课题利用微扰理论及暗物质晕模型研究物质功率谱中的 BAO 特征，探讨在大尺度结构下宇宙的线性和非线性演化。第二章介绍了宇宙学的基础知识，包括宇宙膨胀动力学和宇宙演化历史；重子声波振荡的基本概念，物理机制，当前研究进展及主要的巡天项和 BAO 的未来发展方向。第三章中分析了大尺度结构的线性演化过程和物质功率谱，应用拟合公式进行作图，提取了 BAO 振荡特征尺度，讨论了重子-光子耦合时期和物质-光子平衡时期，以及两点相关函数、红移畸变和宇宙学参数的分析。第四章则探讨了非线性结构形成过程中的暗晕模型的应用，推导了非线性物质功率谱的公式，并确认了在小尺度上 BAO 特征信号的缺失，同时分析了 1-晕项和 2-晕项的不同影响。最后，通过综合概述分析，本文总结了得出的结论，阐述了 BAO 对宇宙学的意义。

本文公式推导多参考《Modern Cosmology (Scott Dodelson)》^[1]一书。

表 1-1 标准宇宙学模型下的基本参数

Table 1-1 The basic parameters in the standard cosmological model

| 符号 | 意义 |
|------------------|----------|
| Ω_b | 重子能量密度 |
| Ω_c | 暗物质能量密度 |
| Ω_Λ | 暗能量能量密度 |
| Ω_K | 空间曲率能量密度 |
| τ | 再电离光学深度 |
| w | 状态方程 |
| n_s | 光谱指数 |
| b | 星系偏置因子 |

表 1-2 部分符号说明

Table 1-2 Notation description

| 符号 | 意义 |
|----------------------------------|--------------|
| \boldsymbol{x} | 共动坐标系 |
| η | 共形时间 |
| \boldsymbol{u} | 本动速度 |
| $\rho(\boldsymbol{x})$ | 能量密度 |
| $\delta(\boldsymbol{x})$ | 密度涨落 |
| $\phi(\boldsymbol{x})$ | 引力势能 |
| $P_{\text{lin}}(\boldsymbol{k})$ | 线性功率谱 |
| $P_{\text{NL}}(\boldsymbol{k})$ | 非线性功率谱 |
| $\Delta_{\text{lin}}(k)$ | 无量纲线性功率谱 |
| $\xi(r)$ | 两点相关函数 |
| s | 声学视界 |
| $\mathcal{R}(\eta)$ | 重子-辐射密度比率 |
| W_R | 尺度 R 下的窗函数 |
| σ^2 | 密度涨落的方差 |

第二章 宇宙学和重子声波振荡

宇宙学是一门研究宇宙的起源、结构、演化以及最终命运的科学。它结合观测数据和理论模型来探索从微观粒子到宏观结构的宇宙现象。现代宇宙模型基于两大原理：第一，宇宙学原理认为宇宙是一个填满全空间的、均匀且各向同性的介质；第二，宇宙介质的动力学行为遵循广义相对论。在宇宙微波背景辐射和星系分布的观测中，原始声波遗留下的印记对研究宇宙提供了宝贵信息，这些信息为解析宇宙加速膨胀的过程提供了重要的标准测量尺度。

2.1 宇宙膨胀动力学

Hubble 定律首先揭示了宇宙的膨胀现象，表明了星系正在远离我们。星系的红移测量，即测量过去星系的数密度，红移值增加则反映了更早期宇宙的星系分布密度，探测的也就越深，它随距离变化反映了宇宙的膨胀过程。通常采用共动距离 (x) 和共形时间 (η) 来描述宇宙膨胀，其中共动距离定义为：

$$x = \int_{t_e}^t \frac{cdt'}{a(t')} = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (2.1)$$

其中 c 是光速， t_e 是发射光子的时刻， t 是被观测到的时刻， $a(t) = 1/(1+z)$ 是描述宇宙膨胀的尺度因子， z 是宇宙学红移值， $H(z) = \dot{a}/a$ 是哈勃参数。共动距离反映了从光子发射到被观测通过的“固定”的空间距离，它不随宇宙膨胀而改变。共形时间又定义为：

$$\eta = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (2.2)$$

它们在后文用于简化某些宇宙学计算。

当前主流的标准宇宙模型为平坦的 Λ CDM 模型，它提供了对当前宇宙演化的整体框架，认为宇宙主要由非重子冷暗物质 (CDM，即暗物质) 和宇宙学常数 (Λ ，即暗能量) 为主导，并且具有 Euclidean (即平坦) 的几何特性；并认为在宇宙的极早期，暴涨理论可以解释原初微扰的形成，进而演化成大尺度结构。通过求解 Einstein 场方程：

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.3)$$

其中 $G_{\mu\nu}$ 是 Einstein 张量， $g_{\mu\nu}$ 是度规张量， G 是 Newton 常数， $T_{\mu\nu}$ 是能量-动量张量。此外，结合四维时空中 FLRW (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker) 度规：

$$ds^2 = -dt^2 + a(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right]. \quad (2.4)$$

其中 K 是空间曲率参数（在平坦 Λ CDM 模型中设为 0），可以导出在物质均匀分布、各向同性且膨胀宇宙空间条件下的两个相互独立的 Friedmann 方程：

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}(\rho + \Lambda), \quad (2.5)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.6)$$

其中 ρ 是宇宙中不同组成成分的能量密度， p 是压强。再引入哈勃参数，临界能量密度 $\rho_{\text{cr}} \equiv 3H_0^2/8\pi G$ ，以及物态方程 $w_s = p_s/\rho_s$ ，且考虑 $\Lambda = 0$ ，式(5)可以写作为：

$$\frac{H^2(t)}{H_0^2} = \frac{\rho(t)}{\rho_{\text{cr}}} = \sum_{s=r,m,\nu,\Lambda} \Omega_s [a(t)]^{-3(1+w_s)} + \Omega_K [a(t)]^{-2}. \quad (2.7)$$

它考虑了各成分能量密度和空间曲率的影响，解释了不同宇宙成分组成如何随时间影响宇宙的膨胀。其中 $H_0 = 100h \text{ km}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ 表示当前时刻的哈勃速率，因此也称为哈勃常数（ h 不是普朗克常数，在这里用于定义 H_0 ）； Ω_s 是各成分的能量密度参数 r 、 m 、 ν 、 Λ 分别表示辐射、物质、中微子、暗能量，定义为：

$$\Omega_s \equiv \frac{\rho_s(t_0)}{\rho_{\text{cr}}}, \quad \rho_{\text{cr}} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (2.8)$$

其中 s 表示成分之一， $\rho_s(t_0)$ 为当前时刻下的能量密度；物质能量密度参数 $\Omega_m = \Omega_b + \Omega_c$ ，表示包括重子物质和暗物质；式(2.7)还定义了曲率能量密度参数 $\Omega_K \equiv 1 - \sum_s \Omega_s$ （对于平坦宇宙， Ω_K 为零），意味着总能量密度严格等于能量临界密度。通过解 Friedmann 方程，我们可以了解不同成分随时间影响宇宙的膨胀演化。

暗物质和暗能量对宇宙的膨胀有着决定性的影响，它们占据了总能量密度的大约 95%，其中暗能量占据约 69%。根据 CDM 模型，暗物质由尚未被发现的弱相互作用的大质量粒子（WIMPs）或轴子^[2]等组成，它通过引力作用影响宇宙的结构形成，它虽然不和重子一样与光子产生相互作用，但是通过引力增强了星系和星系团内部的引力场，促使这些区域内的重子物质能够聚集并形成星系等结构，并一起减缓宇宙的膨胀。而暗能量对宇宙的膨胀起到了推动的作用，若视作宇宙学常数，其状态方程 $w_\Lambda = -1$ 意味着它提供了与其密度相等但符号相反的压力，从而导致宇宙的加速膨胀；它也可能是量子场的一种形态（如 Quintessence^[3]），随宇宙的膨胀而演化。下面一节将进一步讨论不同物质成分的形成时间。

2.2 宇宙的演化历史

宇宙的演化可按照其主要能量划分为三个主要时期：辐射主导、物质主导、暗能量主导时期。图 2-2-1 展示了宇宙从量子涨落时期开始的 137.7 亿年膨胀历史。其中 WMAP 是指 Wilkinson 微波各向异性探测器，其观测到的宇宙微波背景辐射（Cosmic Microwave

Background, CMB) 发生在暴涨结束后约 40 万年^[4]。

(1) 辐射主导时期和宇宙早期

宇宙最初阶段是 Planck 时期, 从时间零点开始, 持续到大约 10^{-43} 秒, 这一时期主要涉及量子引力理论的领域。Planck 时期之后, 宇宙进入了粒子宇宙学时期, 暴涨理论^[5]描述了宇宙作为一种标量场从极微小尺度的急速膨胀。这一阶段产生的原始量子涨落成为了构成中子和质子形成的基础, 且这些粒子的相互作用和演变遵循由 George Gamow 等人提出的大爆炸理论^[6,7]。这些由于引力不稳定性造成的初期量子涨落形成了宇宙大尺度结构的种子, 并在此时期形成了原初功率谱。

辐射主导时期开始于宇宙的前几秒, 持续到大约 5 万年后。大爆炸理论认为, 在这段时期, 电子与原子核分离, 光子作为辐射的主要组成部分, 和重子耦合共同形成流体, 通过 Compton 散射与电子频繁交互, 使宇宙成为高温、高密度的等离子体。大约在宇宙的前 3 分钟内, 即大爆炸核合成 (BBN) 阶段, 中子和质子通过核反应形成了氢和氦, 随着宇宙的膨胀和冷却, 这一过程放缓, 此时辐射的主导作用开始下降。

(2) 物质主导时期与黑暗时期

随着宇宙进入物质主导时期, 重子大约由 1/4 的氦-4, 和主要由中子, 并伴随有少量的氘、氦-3 和锂等轻核元素所构成。并随着宇宙进一步膨胀和冷却, 光子和电子之间的 Compton 散射急剧减少, 电子和质子开始结合形成中性氢, 这一时期被称作“再结合时期”, 大约在宇宙形成后的 38 万年。此时, 重子与光子的相互作用也将减少, 使得光子解耦于重子, 它不再散射而是自由传播, 最后形成了我们今天所观测到的 CMB (见图 2-2)。WMAP 对在该时期形成的 CMB 的温度进行了精确测量: $T_0 = 2.725 \pm 0.001$ K, 显示出宇宙温度在大约在 2.7K 左右上下波动, 反映了早期物质能量均匀分布。这说明了宇宙中各成分的能量密度在背景能量密度下也有涨落。密度和扰动的关系可以表示为:

$$\rho_m = \bar{\rho}_m(1 + \delta_m). \quad (2.9)$$

其中 δ_m 表示物质的密度的扰动, $\bar{\rho}_m$ 是背景宇宙物质密度。在物质主导的早期, 密度扰动较小 (即 $\delta_m/\bar{\rho}_m \ll 1$), 扰动随时间的增长是线性的。另外物质或辐射随时间的演化可通过 Boltzmann 方程:

$$\frac{df}{dt} = C[f]. \quad (2.10)$$

来描述。式中 f 是宇宙某组成成分的分布函数, $C[f]$ 代表粒子之间的相互作用。若在没有相互作用的情况下, 则说明分布函数守恒, 即粒子数密度保持不变。

在 CMB 形成之后, 宇宙进入了“黑暗时期”。在这一时期, 宇宙充满了中性氢原子和氦, 因为缺乏发光物体而显得暗淡和不透明。约 4 亿年后, 第一批恒星和星系的诞生标志着“再电离时期”的开始。这些早期天体的强烈辐射重新电离了周围的中性氢, 形成了光亮的电离区域。此阶段最重要的观测手段之一是中性氢的 21cm 发射线^[8], 它形成于氢原子中电子自旋与其质子自旋之间的相互作用, 且它的功率谱^[9]可以用于描绘宇宙大尺

度上的中性氢分布。

（3）暗能量主导时期和结构形成

随着宇宙从物质主导时期过渡到暗能量主导时期，大约在宇宙形成后的 70 亿年，宇宙的动力学和结构形成发生了显著变化。若宇宙中仅包含物质，理论上由于引力作用，宇宙可能会经历收缩或更慢的膨胀速率。然而，当暗能量超过物质密度，其具有的负压力的能量形式特性开始推动宇宙的加速膨胀。尽管暗能量抑制了新的大尺度结构形成，但物质在较小尺度上通过引力作用继续聚集，形成了星系、星系团以及更大的宇宙网状结构。此时，密度扰动已经变得显著（即 $\delta_m/\bar{\rho}_m \approx 1$ 或更高），进入非线性演化阶段，促使非线性结构的形成。

在这个过程中，物质功率谱是研究宇宙大尺度结构形成和演化的关键工具（具体见第三章）。它描述了不同尺度上物质密度扰动的分布，包括从原初功率谱形成，记录了物质在宇宙演化中如何聚集成今天观测到的结构。此外，重子声波振荡的特征尺度可以在物质功率谱中表现出来。通过大尺度结构的星系调查，我们能够测量并分析宇宙中星系的分布，用于反映物质的分布。

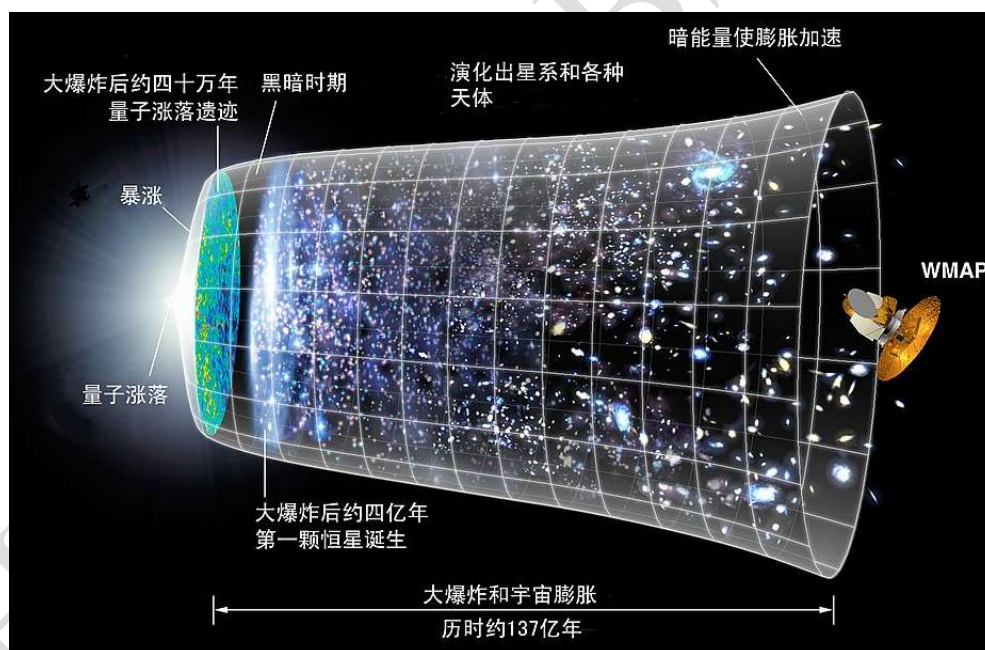


图 2-1 宇宙的膨胀

Figure 2-1 Expansion of the universe (Source: <https://map.gsfc.nasa.gov/media/060915/index.html>)

2.3 重子声波振荡

2.3.1 物理机制

结合宇宙的演化历史，重子声波振荡（Baryon Acoustic Oscillation, BAO）标志了再结合时期光子与重子解耦遗留下的印记。解耦前，光子-重子流体密度涨落引起压强的变化，类似声音在介质中传播的过程。这种动态导致了流体间膨胀和收缩，从而在宇宙中引发了周期性的密度、温度和压强振荡。大约在 $z \approx 1200$ ，重子和光子间的温度和压强降低，声波停止传播，这使得它在空间上留下了一个声学特征尺度，即为声波传播的距离，也被称为声学视界。在平坦的标准宇宙模型中，声学视界的表达式为

$$r_s = \int_0^{t^*} \frac{c_s(t)}{a(t)} dt. \quad (2.11)$$

其中 $c_s(t)$ 是不同时期的声学声速，这取决于流体中重子和光子的比例，约为光速的三分之一； t^* 是宇宙再结合时期，即 BAO 停止传播的时期。于此同时，不与光子耦合的暗物质的扩散速度要慢得多。因此 BAO 的特征尺度在 CMB 中可以直接观测到，并且由于这一尺度随宇宙的膨胀保持不变，它在大尺度结构中也可以从星系分布中观测到。因此，BAO 成为了宇宙学研究中观测的主要目标之一，功率谱包括 CMB 角功率谱和星系功率谱可以观测到 BAO 的特征尺度。

2.3.2 BAO 和 CMB 功率谱

BAO 的分布呈现 Gaussian 随机性，而 CMB 功率谱则用于测量宇宙背景温度波动的统计分布。如图 2-2(a)所示，CMB 温度仅在0.6 mK范围内微小变化，表明宇宙背景极高均匀性。CMB 可以被视为多个 BAO 效应的叠加，通过分析 CMB 中的极大值和极小值（即“热点”或“冷点”），可以重建出 BAO 模式，如图 2-2(b)。

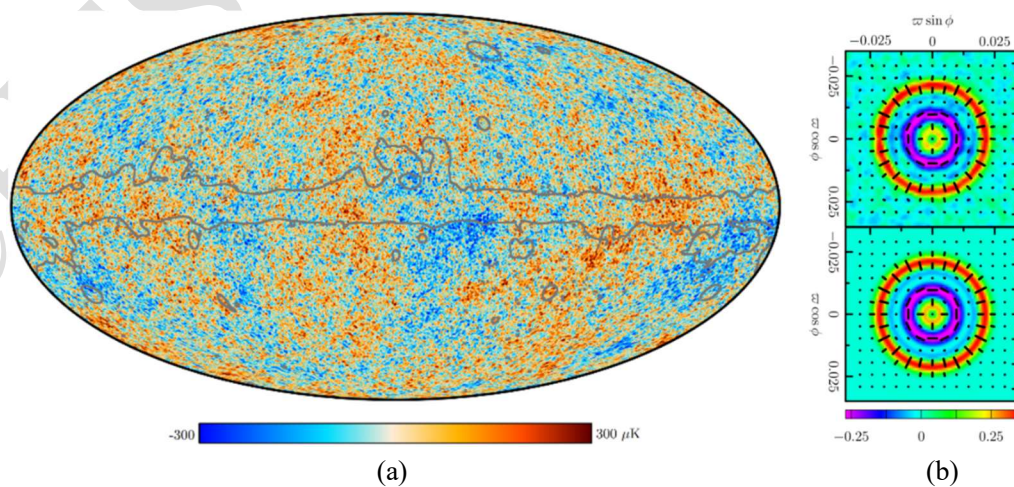


图 2-2 (a) *Planck* 宇宙微波背景 (b) 重建的 BAO

Figure 2-2 (a) *Planck* CMB sky (b) the reconstructed BAO shell (Source: [10])

通常，CMB 分析是在球谐空间中进行分析，图 2-3 展示了 CMB 的角功率谱，描述了不同角尺度上温度波动的强度。其峰值对应于特定的声波模式（多极矩： l ），BAO 特征通常表现为在大约 0.6 度处表现出尖峰。谱中声学尺度的第二峰与第一峰之比反映了重子在宇宙中的成分占比。WMAP 是首个利用 CMB 探测宇宙声波的任务，其后 Planck 卫星进一步细化了这些测量。

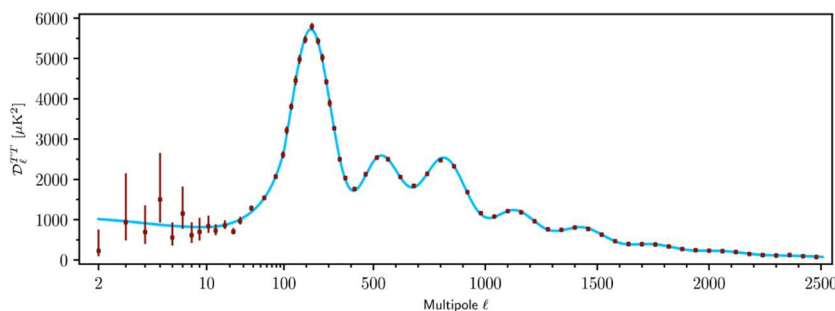


图 2-3 *Planck* CMB 功率谱

Figure 2-3 *Planck* CMB power spectrum (Source: [10])

2.3.3 BAO 和星系功率谱

星系功率谱通过观测大量星系的分布来获得，它记录了大尺度结构上的物质分布，星系红移巡天是其中最常用的方法之一。通过观测星系的红移来确定其位置，构建大尺度结构的密度场，并对场进行 Fourier 变换，从空间域转换为波数域，最后可以获得星系功率谱 $P_{g,obs}(\mathbf{k})$ 。2005 年，Eisenstein 等人^[11]在 SDSS Data Release (DR3) 光谱巡天观测数据中，通过分析红移范围 $0.16 < z < 0.47$ 的亮红星系大尺度两点自相关函数，首次以 3.4 倍标准偏差 (3.4σ) 检测到重子声学振荡的声学峰。这次观测为 BAO 的存在提供了直接证据，Eisenstein 也因此荣获 2014 年邵逸夫天文学奖^[12]。

BAO 的探测方法在统计学上面临诸多挑战。首先，由于重子在总物质中占比小，大尺度下的 BAO 信号很弱，需要绘制巨大的宇宙体积来检测 BAO 以获取精确的距离测量。其次，从过去的重子声波振荡光谱巡天^[13] (SDSS-III BOSS, 08~14 年) 和拓展的重子声波振荡光谱巡天^[14] (SDSS-IV eBOSS, 14~19 年)，到如今的暗能量光谱巡天^[15] (DESI, 21~26 年)、欧几里得联合会暗宇宙任务^[16] (Euclid, 24~29 年) 等国际合作项目的启动，过去数十年里巡天数据的数量和分辨率剧增，因此如何有效地分析数据又成为观测困难之二。

但随着探测技术的飞跃，新的 BAO 探测成果正在不断涌现。Ata 等人^[17]利用 eBOSS DR14 类星体样本，首次在红移范围 $0.8 < z < 2.2$ 测量到了 BAO (2.8σ)，标志着首次在 $1 < z < 2$ 范围内获得了 BAO 的观测，并开创性地使用了类星体作为数据样本。

Raichoor^[18]等人在 eBOSS DR16 发射线星系 (ELG) 样本中测量了 $0.6 < z < 1.1$ 范围内的 BAO 特征尺度, 获得了 3.2% 精确度, 且在有效红移 $z_{\text{eff}} = 0.845$ 处, BAO 球平均距离 $d_V(z_{\text{eff}})/r_s = 18.23 \pm 0.58$ 。Kono 等人^[19]利用拓扑数据分析对星系分布中的 BAO 信号进行处理, 证明了持续同调分析对研究宇宙大尺度拓扑结构的有效性。上海交通大学景益鹏院士课题组^[20]使用 BOSS 大红星系样本, 并结合 DESI 图像巡天数据, 首次在星系形状相关性中发现了 BAO 的存在证据 (3σ)。图 2-4 是 DESI 与 2024 年 4 月最新发布的, 利用 DR1 数据得到的星系样本空间分布图和各种 tracers 测量的得到的在两点相关函数中的 BAO^[21]。这些结果都很好的验证了宇宙的加速膨胀, 以及 Λ CDM 模型。

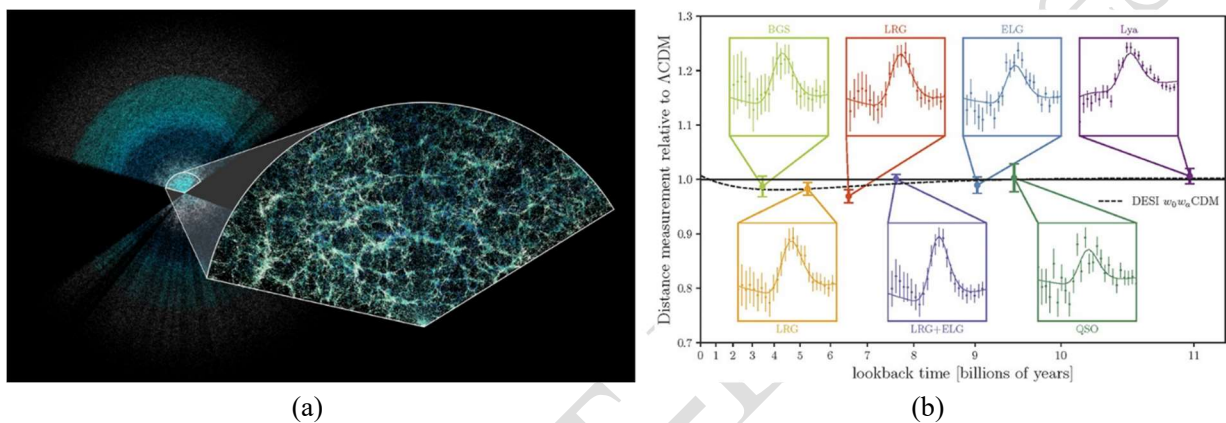


图 2-4 (a) 星系样本空间分布图 (b) 结合了所有 tracers 的 BAO 测量结果

Figure 2-4 (a) Galaxy sample distribution map (b) A Hubble diagram combining BAO measurements from all tracers (Source: <https://www.desi.lbl.gov/2024/04/04/desi-y1-results-april-4-guide/>)

第三章 大尺度结构下的线性演化和物质功率谱

宇宙的大尺度结构，如星系、星系团、超星系团及它们之间相互连接的空洞和细丝，共同构筑了宇宙的庞大框架。星系普遍分布于 $\sim 3h^{-1}\text{Mpc}$ 的尺度范围内的星系团中，而星系团则位于尺度 $> 10h^{-1}\text{Mpc}$ 的细丝交叉点上^[22]。大尺度结构从早期宇宙相对均一的状态开始形成并演化，其过程主要由因暴涨产生的微小密度扰动，以及引力不稳定所驱动的线性增长阶段所主导。在此过程中，物质功率谱作为一个关键工具，描绘了不同尺度上密度扰动的分布情况。通过分析大尺度结构对星系的性质（如光、颜色、恒星质量）与红移的依赖关系，我们来探索宇宙的演化。

本章首先介绍线性微扰理论的基础知识，其中包括转移函数、增长因子和密度扰动的方差等概念和计算。通过采用 Eisenstein & Hu (1998)^[23]提出的拟合转移函数，本章计算了实空间和红移空间中的物质功率谱以及两点相关函数，讨论了宇宙学参数如何影响其结果，并进一步分析了 BAO 在 Fourier 空间和实空间的特征尺度范围。

本章和第四章考虑 CDM 宇宙学模型，参数为： $\Omega_m = 0.31$ ， $\Omega_\Lambda = 0.69$ ， $\Omega_b/\Omega_m = 0.2$ ， $h = 0.7$ ， $n_s = 0.97$ 。

3.1 线性微扰理论概述

在研究宇宙的大尺度结构时，我们采用共形时间定义 $d\eta \equiv dt/a$ ，并使用共动坐标系 $\mathbf{x} = \mathbf{x}/a(t)$ ，以及本动速率 $u_m = a dx/dt = dx/d\eta = x'$ 。根据式(2.10)，我们可以重新表述物质的密度扰动为：

$$\delta_m(\mathbf{x}) = \frac{\rho_m(\mathbf{x})}{\bar{\rho}_m} - 1. \quad (3.1)$$

这里 m 表示物质，包含重子和暗物质。在 Fourier 空间中，密度扰动可以表示为：

$$\tilde{\delta}_m(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \delta_m(\mathbf{x}). \quad (3.2)$$

同时，我们有 $\tilde{\delta}_m(-\mathbf{k}) = \tilde{\delta}_m^*(\mathbf{k})$ ，后文将简写 $\tilde{\delta}(\mathbf{k})$ 为 $\delta(\mathbf{k})$ 。在 Newtonian 近似下广义相对论的框架内，我们可以导出到非相对论情况下在 Fourier 空间中的物质的三个流体方程：

$$\text{Continuity:} \quad \delta'_m + iku_m = 3\phi', \quad (3.3)$$

$$\text{Euler:} \quad u'_m + \frac{a'}{a}u_m = -ik\phi, \quad (3.4)$$

$$\text{Poisson:} \quad -k^2\phi = 4\pi G a^2 \rho_m \delta_m. \quad (3.5)$$

其中， $\phi(\mathbf{x}, \eta)$ 表示牛顿引力势，详细推导见附录 1。连续性方程描述物质的质量守恒，即物质的净流入等于其密度的增加率；欧拉方程描述物质的动量守恒，考虑了物质的速度

变化；泊松方程描述物质密度如何影响引力势场的分布，式(3.5)是广义相对论在 Newtonian 极限下的表达。通过流体方程，我们可以得到物质的分布、速度、和引力相互作用，继而用于研究物质在宇宙中的演化。在再结合时期，重子和光子耦合，式(3.4)应重新表述为：

$$u'_b + \frac{a'}{a} u_b = -ik\phi + \frac{\tau'}{\mathcal{R}} [u_b + 3i\Theta_1]. \quad (3.6)$$

其中 \mathcal{R} 反映了辐射和物质密度比率， τ' 表示光学深度的导数，它们定义为：

$$\frac{1}{\mathcal{R}(\eta)} \equiv \frac{4\rho_r(\eta)}{3\rho_b(\eta)}, \quad \tau'(\eta) \equiv -n_e \sigma_T a(\eta). \quad (3.7)$$

n_e 是电子数， σ_T 是 Thomson 散射截面， Θ_1 是光子单极子矩，代表了光子密度波动的一阶矩（即速度势）。式(3.6)中， $\tau' u_b / \mathcal{R}$ 描述了光子和重子之间通过 Thomson 散射交互作用的阻尼项，说明重子速度受到光子压力的影响。

在实际观测中，我们无法直接测量物质的密度涨落，因此通常采用两点相关函数 $\xi(r)$ 来间接获取密度涨落在空间上的分布信息：

$$\begin{aligned} \xi(r) &= \xi(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) \equiv \langle \delta(\mathbf{x}_1) \delta(\mathbf{x}_2) \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} |\delta(\mathbf{k})|^2 e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} P_{\text{lin}}(k) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

上式还定义了物质功率谱 $P_{\text{lin}}(k)$ ：

$$P_{\text{lin}}(k) \equiv \langle |\delta(\mathbf{k})|^2 \rangle \xrightarrow{\text{isotropic}} |\delta(k)|^2. \quad (3.9)$$

显然它与两点相关函数互为 Fourier 变换，箭头代表各向同性的情况下功率谱的简化形式。物质功率谱用于描述不同尺度下密度涨落的分布情况，还可以写作：

$$\langle \delta(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_2) \rangle = \delta_D^{(3)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) P_{\text{lin}}(k). \quad (3.10)$$

其中 $\delta_D^{(3)}(\mathbf{k})$ 是三维的 Dirac delta 函数。一般来说功率谱满足高斯分布，有 $\langle |\delta(\mathbf{k})|^2 \rangle \propto k^{n_s}$ ，其中 n_s 是扰动谱指标，决定了大尺度和小尺度间的平衡。对于线性演化阶段，可以引入增长因子 $D_+(z)$ 用于描述密度涨落从某一红移值 z 下到当前的演化：

$$\delta(\mathbf{x}, z) = D_+(z) \delta(\mathbf{x}, z=0). \quad (3.11)$$

可见当 $z=0$ 时， $D_+(z)$ 为 1。另外变量可以为 t 、 η 或 a 。功率谱是在对原初功率谱的修正下得到的：如自引力下的增长，压力的影响，耗散过程等。这些总体效果可以定义转移函数 $T(k)$ 表示：

$$T(k) \equiv \frac{\delta(k, z=0)}{\delta(k, z) D_+(z)}. \quad (3.12)$$

它量化了宇宙后期密度扰动的振幅与其初始值的比值。可见对于大尺度（低 k ）来说，

$T(k)$ 接近于 1。进而对比式(3.9)(3.11)(3.12)可得物质主导时期宇宙结构变化的物质功率谱:

$$P_{\text{lin}}(k, z) \propto T(k)^2 D_+(z)^2 k^{n_s}. \quad (3.13)$$

其中 k^{n_s} 为量子涨落时期的原初功率谱, 且当 $n_s = 1$ 时, 原初功率谱也称作为 Harrison-Zel'dovich 谱。

3.1.1 重子和暗物质的转移函数以及 BAO 声学峰

在物质主导时期 ($z \simeq 10$), 转移函数主要与重子和暗物质的分布有关。接下来, 我们可以分为三个时期讨论对应的特征尺度, 它与转移函数密切相关 (详见^[23]):

(1) 辐射-物质平衡时期 (z_{eq})

在宇宙早期, 辐射主导转为物质主导时期, 在辐射能量密度物质能量密度相等这一时期的关键尺度由 k_{eq} 给出, 它与宇宙的物质密度和 Hubble 参数有关:

$$k_{\text{eq}} \equiv a_{\text{eq}} H(a_{\text{eq}}) = \sqrt{2\Omega_m} H_0 a_{\text{eq}}^{-1/2} \approx \sqrt{2\Omega_m} H_0 z_{\text{eq}}^{1/2} \quad (3.14)$$

其中 a_{eq} 表示辐射-物质平衡时期的尺度因子。 k_{eq} 以及后文参数的拟合表达式见附录 2。

(2) 拉拽时期 (z_d)

如前文所述, 宇宙冷却后, 重子和光子不再紧密耦合, 声学视界尺度 s 确定, 它代表声波在宇宙早期能传播的最大距离, 可以将式(2.11)改写为^[24]:

$$s = \int_{z_d}^{\infty} \frac{c_s(z)}{H(z)} dz = \frac{2}{3k_{\text{eq}}} \sqrt{\frac{6}{\mathcal{R}_{\text{eq}}}} \ln \frac{\sqrt{1 + \mathcal{R}_d} + \sqrt{\mathcal{R}_d + \mathcal{R}_{\text{eq}}}}{1 + \sqrt{\mathcal{R}_{\text{eq}}}} \quad (3.15)$$

其中, $c_s = \sqrt{1/[3(1 + \mathcal{R})]}$ 是声波的传播速度, \mathcal{R}_{eq} 和 \mathcal{R}_d 反映了辐射-物质平衡时期和拉拽时期的辐射-物质的密度比率。且 BAO 声学峰峰值的位置和大小与声学视界尺度有直接的关系, 第一个声学峰的拟合表达式为:

$$k_{\text{peak}} = \frac{2\pi}{2s} (1 + 0.217\Omega_m h^2) \quad (3.16)$$

(3) Silk 衰减时期 (z_{silk})

由于光子的扩散, 声波的振幅开始减弱, 这一过程称为 Silk 衰减^[25], 因此较小尺度上密度扰动被抑制, Silk 阻尼尺度为:

$$\frac{1}{k_{\text{silk}}^2(\eta)} \approx \frac{1}{6} \int_0^\eta \frac{d\tilde{\eta}}{\tau'(\tilde{\eta})}. \quad (3.17)$$

k_{silk} 对应于由光子散射导致的重子扰动的阻尼。

由于重子和暗物质互相不受干扰, 因此转移函数可以写作:

$$T(k) = \frac{\Omega_b}{\Omega_m} T_b(k) + \frac{\Omega_c}{\Omega_m} T_c(k) \quad (3.18)$$

其中 $T_b(k)$ 和 $T_c(k)$ 分别表示重子和暗物质的转移函数，它说明了总转移函数是由 $T_b(k)$ 和 $T_c(k)$ 加权平均得到的，且有：

$$T_c \rightarrow \alpha_c \frac{\ln 1.8 \beta_c q}{14.2 q^2}, \quad T_b \rightarrow \alpha_b \frac{\sin(ks)}{ks} \mathcal{D}(k) \quad (3.19)$$

其中 α_c 和 α_b 为抑制因子，直接影响转移函数的振幅，可以调节以确保理论预测与观测数据之间的一致性。 $\sin(ks)/(ks)$ 反映了声波振荡的周期性振荡特征，而 $\mathcal{D}(k)$ 是 Silk 衰减作用项，描述了在较小尺度上由于 Silk 阻尼引起的扰动衰减。暗物质转移函数主要由引力效驱动，表明暗物质的密度扰动主要受引力聚集影响；重子转移函数反映了重子声学特性和 Silk 阻尼的双重作用下密度扰动演化，前者导致在其转移函数上出现了一系列的振荡模特征。另外考虑不含重子的转移函数，文献[]给出了另一种具体表达式。

图 3-1 为标准宇宙模型下的转移函数，可以算出 $k_{eq} = 0.0159h \text{ Mpc}^{-1}$ 、 $k_{peak} = 0.0815h \text{ Mpc}^{-1}$ 、 $k_{silk} = 0.1547h \text{ Mpc}^{-1}$ 。在大尺度下（ $k < k_{eq}$ ），重子和暗物质行为类似，在引力作用下一同促进了结构的生长，因此转移函数的曲线在这些尺度上几乎重合，且对绝热扰动，对较小的 k 值， $T(k) \rightarrow 1$ ；当 $k > k_{eq}$ ，由于重子声波振荡，转移函数出现负值，因此总转移函数比只有暗物质的情况下的绝对值要小。通常我们认为，BAO 的特征尺度为 $k \approx 0.1h \text{ Mpc}^{-1}$ 。图 3-2 分析了不同物质参数下（ $\Omega_m = 0.2, 1.0$ ）和重子在物质中的占比 $\Omega_b/\Omega_m = 1.0, 0.5$ 下的总转移函数以及只有暗物质的图，可见当重子占比越高，振荡越明显，但是 k_{eq} 和 k_{silk} 没有发生变化；当总物质密度参数增大时，特征尺度整体向更高的 k 移动，这是由于更高的物质密度增强了更小尺度上的引力聚集。根据式(3.16)，图 3-3 为不同宇宙学参数下，第一个声学峰的位置。

3.1.2 增长因子和增长速率

在物质主导的时期，根据式(2.7)物质密度随尺度因子的变化遵循 $\rho_m(a) = \rho_m a^{-3}$ 。同时，Hubble 参数与尺度因子之间的关系有

$$H(a)^2 = H_0^2 \Omega_m a^{-3}. \quad (3.20)$$

在此基础上，下面对 δ_m 的演化方程式(3.3)进行分析。通过对式(3.3)两边乘以 a 并在共形时间 $d\eta$ 上微分，再将式子与式(3.4)联立，我们得到：

$$[a\delta'_m]' = \frac{3}{2} \Omega_m H_0^2 \delta_m. \quad (3.21)$$

再将密度扰动随时间演化变为随尺度因子演化，通过 $1/d\eta = a/dt = a^2 H/da$ ，代入上式可得演化方程：

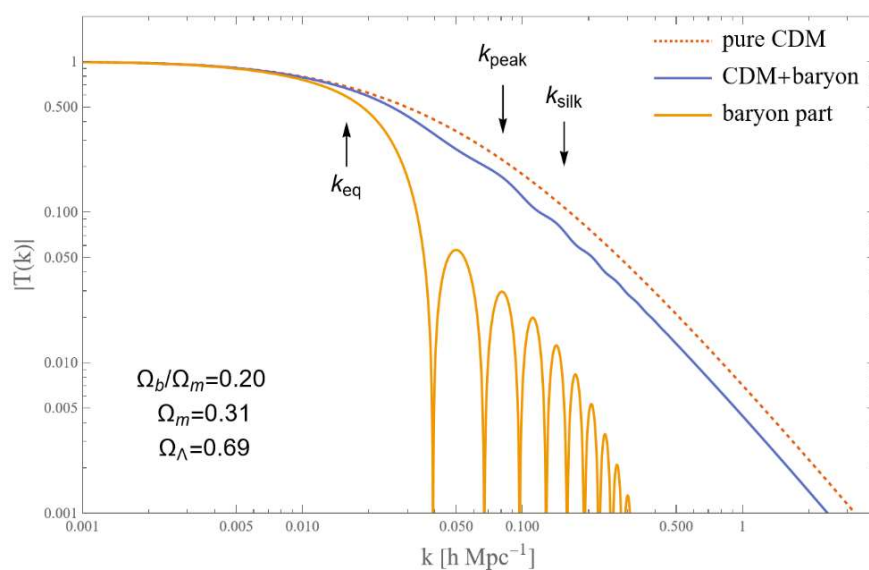


图 3-1 在标准宇宙模型下的转移函数

Figure 3-1 Transform Function with standard cosmological model

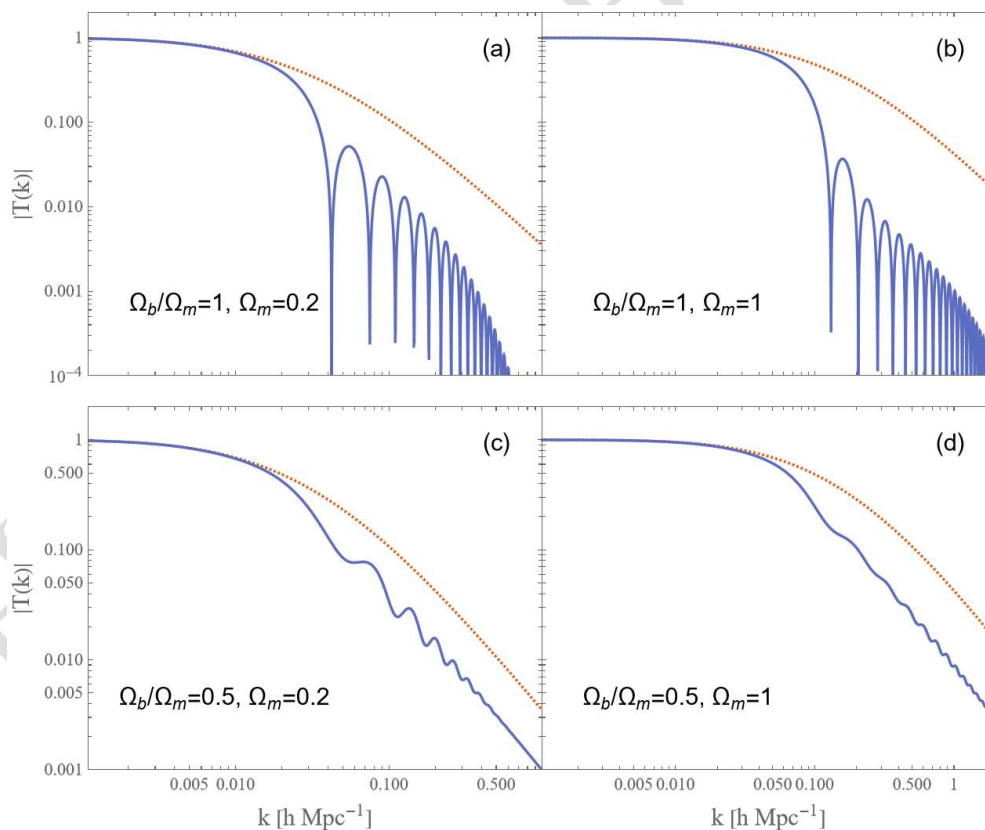


图 3-2 在不同重子和物质密度参数下的四个转移函数

Figure 3-2 Four examples of transform function in different baryon and matter density parameters

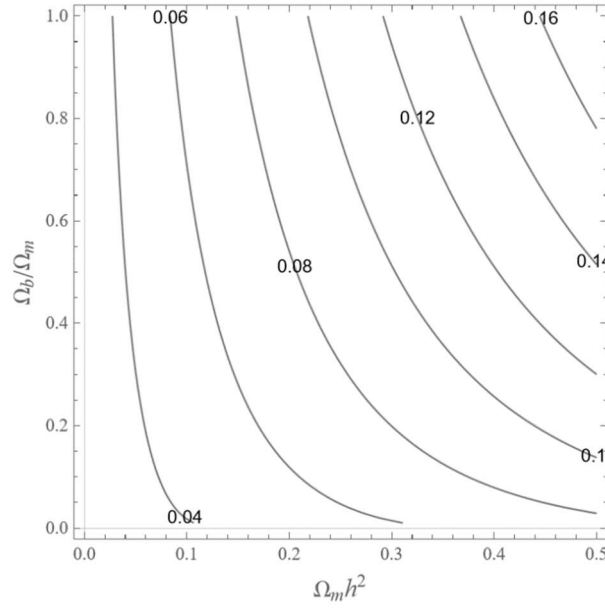


图 3-3 不同宇宙学参数下第一个声学峰的位置，以 Mpc^{-1} 为单位

Figure 3-3 Location of the first peak in Mpc^{-1} as a function of cosmological parameters

$$\frac{d^2 \delta_m}{da^2} + \frac{d \ln(a^3 H)}{da} \frac{d \delta_m}{da} - \frac{3 \Omega_m H_0^2}{2 a^5 H^2} \delta_m = 0. \quad (3.22)$$

通过引入变量替换 $\delta_m = uH$ 和 $du/da = w$ ，式(3.22)变为：

$$\frac{dw}{da} + 3 \left[\frac{d \ln H}{da} + \frac{1}{a} \right] w = 0. \quad (3.23)$$

分离变量后可解出 $w \propto (aH)^{-3}$ ，并重新代入替换。再对比增长因子定义式(3.11)，可以有：

$$D_+(a) \propto H(a) \int^a \frac{da'}{(a' H(a'))^3}. \quad (3.24)$$

考虑式(3.20)，并由边界条件如今 $D_+(a)$ 应该等于 a 来规定归一化常数，得到最终形式：

$$D_+(a) = \frac{\Omega_m}{2} \frac{H(a)}{H_0} \int_0^a \frac{da'}{(a' H(a')/H_0)^3}. \quad (3.25)$$

它描述了物质密度扰动随时间、尺度因子或红移的增长程度。另外，增长速率 $f(z)$ 定义为：

$$f(z) \equiv \frac{d \ln D_+(a)}{d \ln a} = - \frac{dD(z)}{dz} \frac{1+z}{D(z)}. \quad (3.26)$$

它是描述密度扰动增长速率相对于尺度因子变化的量，约等于 $[\Omega_m(a)]^{0.55}$ ，其中 $\Omega_m(a) \equiv 8\pi G \rho_m(a)/3H^2(a)$ 表示随时间变化的物质密度参数，不是 Ω_m （表示今天的物质密度参数），它反映了增长速率与宇宙中物质密度参数的依赖性。

图 3-4 显示了不同 Ω_Λ 情形下的 $(1+z)D_+(z)$ 和 $f(z)$ 随尺度因子 a 变化的曲线。考虑

$\Omega_\Lambda = 0$ 时, $D_+(z) = a$, 即在 $a = 0$ (即宇宙刚开始的时候) 附近, $D(z)$ 非常小, 表示早期宇宙的扰动幅度小, $f(z)$ 接近 1, 表明宇宙中的结构在快速形成; 随着 a 增大, $D(z)$ 增加, 表明扰动随时间的推移而增长, $f(z)$ 在下降, 说明物质密度扰动的增长速度减慢。当 Ω_Λ 越大, 暗能量密度越高, 导致宇宙加速膨胀, 因此降低了 $D_+(z)$ 和 $f(z)$, 而当 Ω_Λ 接近于 1 的宇宙, $D(z)$ 在晚期宇宙的增长会减缓甚至停止, 这是由于物质间的引力不能克服宇宙的快速膨胀来进一步聚集物质, 同样地, $f(z)$ 也随时间的推移下降得更快, 导致宇宙大尺度结构增长的显著减缓。

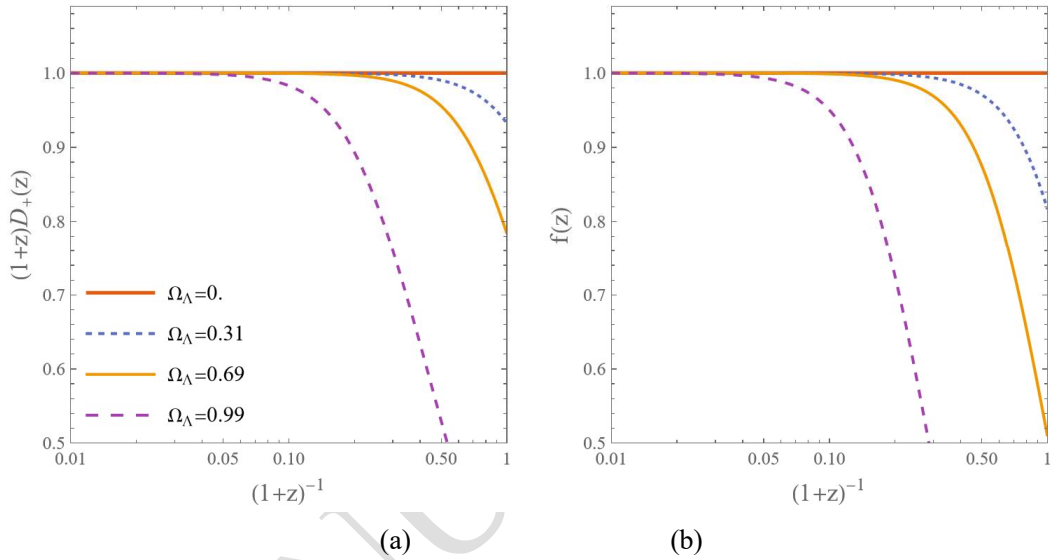


图 3-4 不同暗物质密度参数下的 (a) 增长因子 (b) 增长速率

Figure 3-4 The (a) growth factor and (b) growth rate in different CDM density parameters

3.2 线性物质功率谱和两点相关函数

为了构建线性物质功率谱 $P_{\text{lin}}(k, z)$, 我们除了以上得到的转移函数和增长因子外, 还确定一个归一化因子。这个归一化通常是基于物质扰动的方差为 σ_8 来设定的, 它是对应于 $8h^{-1}$ Mpc 尺度上物质密度扰动的均方根值。我们可以对功率谱进行在 Fourier 空间的变换, 进而得到两点相关函数, 它描述了不同位置间物质分布的关联性。

3.2.1 物质扰动的方差

物质密度扰动在空间的分布可以通过卷积过程用窗函数 $W_R(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)$ 进行过滤, 以得到在特定尺度 R 上平滑的密度场:

$$\delta_{m,R}(\mathbf{x}) \equiv \int d^3 x' \delta_m(\mathbf{x}') W_R(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|). \quad (3.27)$$

在 Fourier 空间内，有：

$$\delta_{m,R}(k) = W_R(k)\delta_m(k). \quad (3.28)$$

于是，通过窗函数滤过后的物质扰动密度场的方差 σ_R^2 可以通过物质功率谱表示：

$$\sigma_R^2 \equiv \langle \delta_{m,R}^2(\mathbf{x}) \rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} P_{\text{lin}}(\mathbf{k}) |W_R(\mathbf{k})|^2. \quad (3.29)$$

σ_R 通常用来描述某个尺度 R 上密度扰动的大小。在这里窗函数采用 Tophat 窗函数，并定义一个球形区域，在这个区域内研究不同尺度的物质密度波动。其在 Fourier 空间中的表达式可以通过对实空间形式的 Fourier 变换得到：

$$\begin{aligned} W_R(\mathbf{k}) &= \int d^3\mathbf{x} W_R(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{V_R} \int_0^R dr \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta x^2 \sin \vartheta \cdot e^{-ikr \cos \vartheta} \\ &= \frac{3}{k^3 R^3} [-kR \cos(kR) + \sin(kR)]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

式中 $V_R = 4\pi R^3/3$ 表示窗函数所覆盖的体积，可令 $\cos \vartheta = \mu$ 做变量代换，积分得到最终结果。可见图展示了 σ_R 随不同尺度 R 的变化情况，并且展示了不同红移值下的曲线。在红移 $z = 0$ 处，在 $R = 8$ 左右， σ_R 大约为 0.81。当 σ_R 大于 1，这表示在尺度 R 上的扰动非常大，意味着物质在这个尺度上已经塌缩形成了非线性结构；当 σ_R 小于 1，则表示密度扰动较小，物质的分布接近于均匀，尚未形成明显的结构，仍然处于线性或准线性演化阶段。

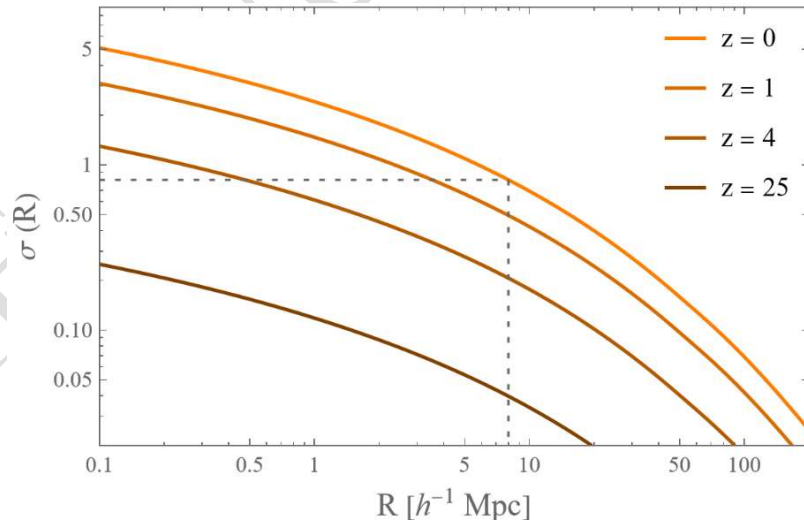


图 3-5 在不同红移下物质密度涨落随尺度变化的方差

Figure 3-5 Variance of matter density fluctuation in scales with different redshift

利用 σ_8 ，一个在 $R = 8h^{-1}\text{Mpc}$ 尺度上定义的方差，通常用来对物质功率谱进行归一化处

理，以得到无量纲的物质功率谱 $\Delta_{\text{lin}}^2(k, z)$:

$$\Delta_{\text{lin}}^2(k, z) = \frac{k^3 P_{\text{lin}}(k, z)}{2\pi^2}. \quad (3.31)$$

通常利用无量纲的功率谱强调物质分布中的特征尺度，并利用无量纲的扰动两来直接提供预测与实际观测的比较以简化数据分析。两点相关函数类似窗函数的做法进行积分运算，可以得到:

$$\xi(r) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty P_{\text{lin}}(k) \frac{\sin(kr)}{kr} k^2 dk \quad (3.32)$$

因为在再电离时期快结束 ($z \approx 6$) 之前，BAO 并未受到非线性结构的影响^[26]，因此，图 3-6 为在 $z = 6$ 下线性无量纲功率谱随 k 的变化趋势。类似转移函数所讨论的性质，在 $k \approx 0.1 h \text{ Mpc}^{-1}$ 附近有明显的振荡特征，表示重子和光子的耦合而产生的声波。关于相关函数下节将做分析。

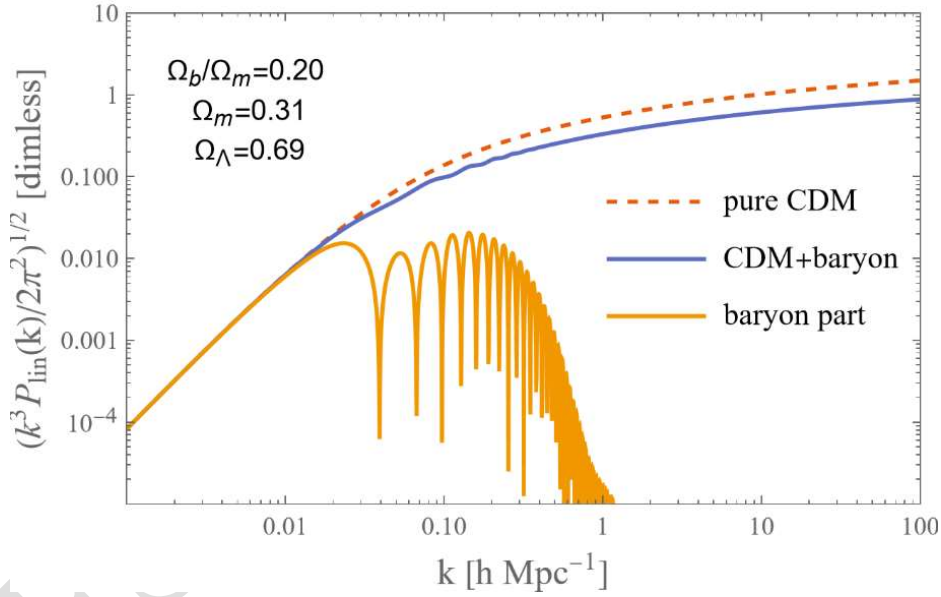


图 3-6 当 $z = 6$ 时的无量纲线性物质功率谱

Figure 3-6 Dimensionless linear matter power spectrum when $z = 6$

3.2.2 分析不同参数对功率谱影响

图 3-7 和图 3-8 分别展示了不同物质密度参数和红移对线性物质功率谱的影响。总体来看，在较大尺度上 ($k < 0.01 h \text{ Mpc}^{-1}$)，所有曲线趋于平缓，符合早期宇宙密度扰动的 Harrison-Zel'dovich 谱，描绘了初始密度扰动中，尺度越小，扰动幅度越大。在 $k \approx 0.01 h \text{ Mpc}^{-1}$ 附近出现的峰值对应辐射-物质平衡时期；而在 $k \approx 0.1 h \text{ Mpc}^{-1}$ 附近出现的一系列声波振荡，则与转移函数有关，标志着物质密度扰动从线性过渡到非线性的特征尺

度。在小尺度上，曲线呈现下降趋势，暗示了非线性效应在较小尺度上抑制了功率谱的幅度，非线性演化的详细分析将在下章进行。

在 $\Omega_m = 0.31$ 附近考虑不同物质密度参数的情况，可见较高的 Ω_m 值会增加引力势，从而促进物质聚集，这反映在功率谱的振幅上。振幅的增加意味着在该尺度上存在更强的密度扰动。随着 Ω_m 的增加，功率谱峰值的位置会向小尺度（更高的 k ）略微移动，并且在小尺度上的下降趋势变得更加平缓，这与转移函数也相符合。随着红移的增加，宇宙的体积增大，如 3.1.2 节所分析，密度扰动的增长速率减慢，因此在这些图中，功率谱的振幅较低。

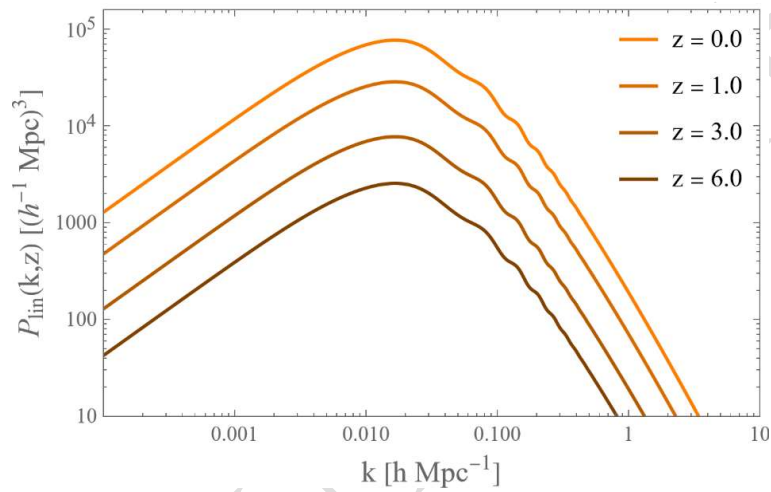


图 3-7 不同红移下的线性功率谱

Figure 3-7 Linear power spectrum with different redshift

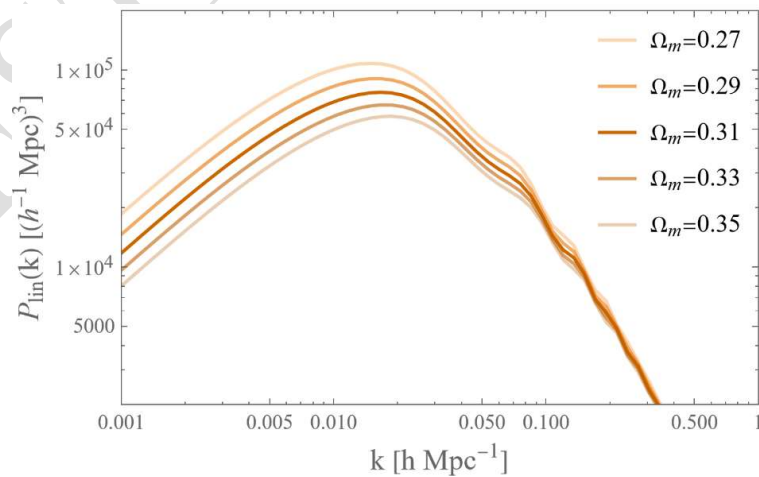


图 3-85 不同物质密度参数下的线性功率谱

Figure 3-8 Linear power spectrum with different matter density parameters

3.3 红移空间畸变对观测功率谱的影响

红移畸变（Redshift-Space Distortion, RSD）是宇宙学观测中的一个重要效应，由天体自身运动引起的 Doppler 效应产生。在一维情况下，视线方向上的本动速度 u 导致的红移变化可近似为：

$$1 + z_{\text{pec}} = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}} \approx 1 + u. \quad (3.33)$$

因此观测到的红移为 $1 + z_{\text{obs}} = (1 + u)/a$ ，其中 $1/a$ 为宇宙的膨胀信息， $(1 + u)$ 源自天体自身速度（如自转、公转）或是由于星系在重力场中的运动（如向重力势阱中心的引力运动或从高密度区域向低密度区域的流动）的成分。由于本动速度产生的红移被认为是观测到的共动距离 x_{obs} 的一部分，红移畸变导致的位移可以表示为：

$$\Delta x_{\text{RSD}} = \left(\frac{\partial x_{\text{obs}}}{\partial u} \right)_{u=0} u_{\text{m}} = \frac{u_{\text{m}}}{aH} \quad (3.34)$$

在在一体积下，红移畸变导致的密度扰动可以表示为：

$$\delta_{\text{m,RSD}}(x) = \delta_{\text{m}}(x) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{u_{\text{m}}(x)}{aH} \right] \quad (3.35)$$

忽略引力作用，对连续性方程进行分析可以得到在三维空间中，这种畸变导致的物质速度场：

$$u_{\text{m}}(\mathbf{k}, \eta) = \frac{i\mathbf{k}}{k^2} \frac{D_+'}{D_+} \delta_{\text{m}}(\mathbf{k}, \eta) = aHf \frac{i\mathbf{k}}{k^2} \delta_{\text{m}}(\mathbf{k}, \eta), \quad (3.36)$$

其中 D_+ 和 f 是式(3.26)增长因子和式(3.11)增长速率。将上述关系代入红移空间的密度扰动，并转换到 Fourier 空间，我们得到：

$$\begin{aligned} \delta_{\text{RSD}}(k) &= \int dx e^{-ikx} \left[\delta_{\text{m}} - if \frac{\partial}{\partial x} \left[\int \frac{dk'}{2\pi} e^{ik'x} \delta_{\text{m}}(k') \frac{k'}{k'^2} \right] \right] \\ &= \delta(k) + f \int \frac{dk'}{2\pi} \delta_{\text{m}}(k') \frac{k}{k'} \int dx e^{i(k'-k)x} \end{aligned} \quad (3.37)$$

因此，红移空间的密度扰动可以表示为：

$$\delta_{\text{RSD}}(k) = [1 + f] \delta_{\text{m}}(k) \quad (3.38)$$

由于三维空间需要考虑波数与视线方向的夹角余弦，记作 μ_k ，这在大尺度上导致功率谱沿视线方向的增强，可以得到 Kaiser 公式^[27]：

$$\delta_{\text{RSD}}(\mathbf{k}) = [1 + f\mu_k^2] \delta_{\text{m}}(\mathbf{k}) \quad (3.39)$$

此外红移畸变后的线性物质功率谱可以改写为：

$$P_{\text{RSD}}(k) = (1 + f\mu_k^2)^2 P_{\text{lin}}(k) \quad (3.40)$$

Kaiser 公式描述了由星系自身速度导致的红移畸变效应，说明了观测到的功率谱与真实谱之间的关系。

考虑从完全沿视线到完全横向的所有情况，即对 μ_k 从-1到1进行积分并除以 2，得到

图 3-9 实空间以及红移空间的线性物质功率谱。观察到红移空间的功率谱振幅整体高于实空间，这主要是由于红移畸变导致沿视线方向的星系聚集增强。这种效应也称为 **Kaiser** 效应，它反映了星系在其所在重力势阱的集群运动。另外，若再考虑星系的随机运动导致的 **Finger-of-God** 效应^[28]，则功率谱振幅可能减小。在图 3-9 中， P_{smooth} 代表没有重子时的平滑功率谱， P_{lin} 于它的比率更明显地展示了 **BAO** 特征，且这种特征不与红移有关，仅与尺度相关。图 3-10 是不同红移 ($z = 0, 1, 6$) 时实空间和红移空间的两点相关函数，观察到两个空间下的声学视界都在 $100h^{-1}$ Mpc 左右，且随着红移增大，两点相关函数振幅减小。这种振幅的减小反映了随着宇宙膨胀，密度波动的增长速度降低，导致在较高红移时，相关性弱化。

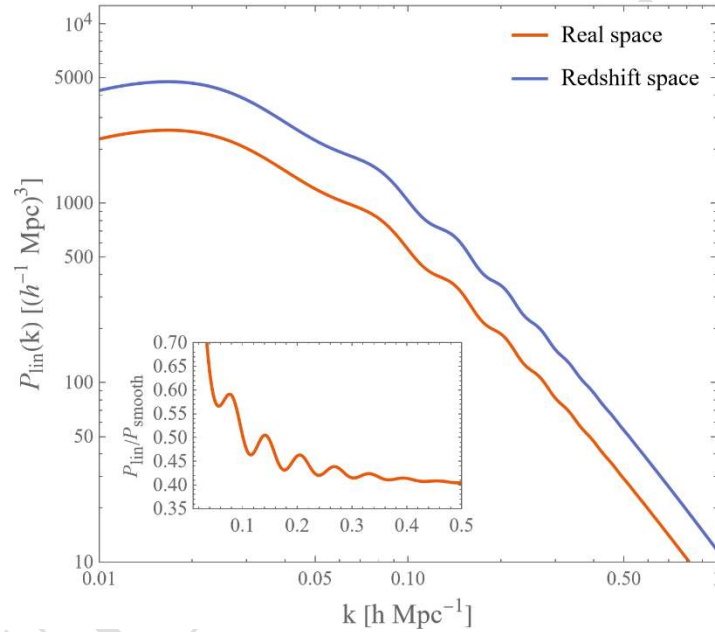


图 3-9 实空间和红移空间的线性物质功率谱

Figure 3-9 The linear matter power spectrum in real and redshift space

最后再考虑红移畸变的星系功率谱的线性模型中，我们有：

$$P_{\text{g,RSD}}(k, \mu_k, \bar{z}) = P_{\text{lin}}(k, \bar{z})[b_1 + f\mu_k^2]^2 + P_{\text{N}} \quad (3.41)$$

其中 b_1 是星系线性偏置参数，它描述了星系的偏离物质分布的程度； \bar{z} 是平均红移； P_{N} 是噪声功率谱。这就是线性的星系偏置理论，它通常假设星系是物质密度场的 **tracers** 并进行量化和校正^[29]。

以上理论得到的物质功率谱皆忽略了中微子的影响，且仅考虑了线性微扰理论。有研究表明中微子能够在宇宙早期影响物质的分布，尤其在强非线性区域，它的存在会抑制功率谱的幅度^[30]。另外，单纯的线性理论无法准确地描述各个尺度下和红移空间的功

率谱以及 BAO 的特征尺度。因此，对于非线性阶段，在下一章我们将运用暗物质晕模型来考量大尺度结构下的非线性演化，并进一步校正对物质功率谱的计算以及 BAO 的特征尺度分析。

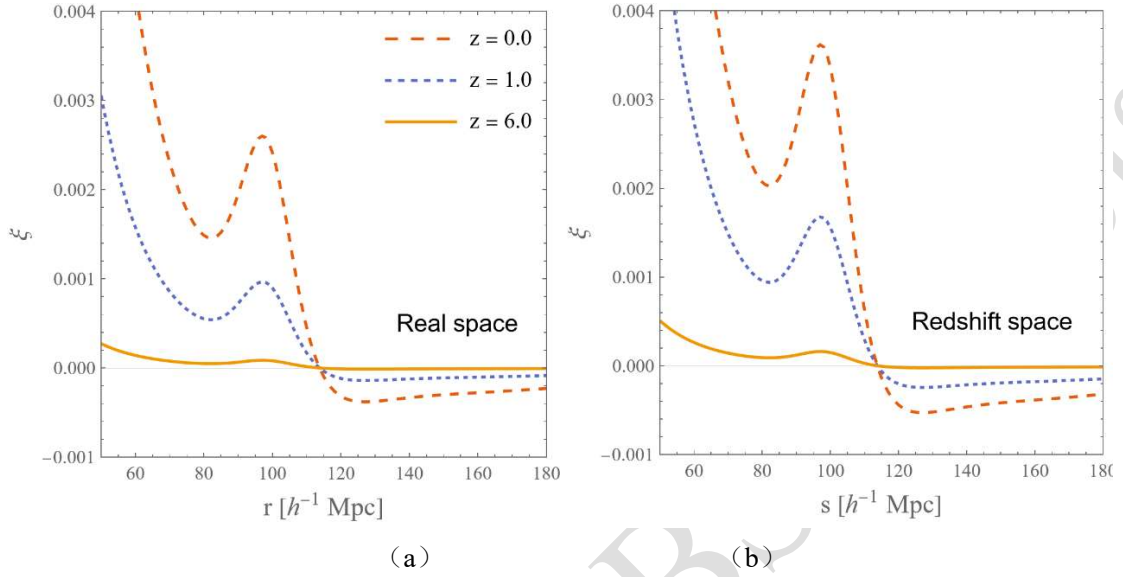


图 3-10 不同红移下的(a)实空间和(b)红移空间两点相关函数

Figure 3-10 Two-point correlation function in (a) real and (b) redshift space with different redshift

第四章 非线性结构形成和暗晕模型

非线性结构主要涉及引力塌缩驱动的物质密集区域，这些区域的密度扰动在增长至一定程度后，超越了线性理论的应用范围，从而形成了星系、星系团和暗物质支配的大尺度结构。它的研究主要利用如 N 体模拟的数值模拟^[31]、微扰理论（包括扩展微扰理论^[32-34]）以及半解析模型（如暗物质暗晕模型^[35]），目前发展已经非常成熟。通过 N 体模拟，我们可以追踪数以亿计的暗物质粒子在宇宙演化过程中的运动和集聚行为，而暗物质晕模型综合了理论和数值模拟的优势，提供了对暗晕的质量函数、密度轮廓以及集聚行为的预测。接下来，我们将引入暗晕模型，基于线性物质功率谱导出非线性物质功率谱，并探讨非线性结构的形成过程对 BAO 信号的可能影响。

4.1 暗晕模型概述

暗物质晕（Dark Matter Halos）是由暗物质组成的球状结构，它们环绕着星系、星系团的中心区域，并为这些天体的形成和稳定提供了重力势。这些晕通过高速运动的暗物质粒子达到所谓的动态平衡，从而防止物质进一步塌缩。暗物质晕不仅限于构成单个天体，它们互相连接形成了宇宙中的大规模密度扰动场。在暗晕模型中，重要的因素包括暗晕的质量分布、暗晕密度轮廓和空间的集聚行为，它们构成了暗物质晕在理论上的描述。

我们可以描述某一点 \mathbf{x} 处的暗晕模型的密度场为：

$$\rho_{\text{HM}}(\mathbf{x}) = \sum_{\text{halos } i} \rho_{\text{h}}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|, M_i). \quad (4.1)$$

其中 $\rho_{\text{h}}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|, M_i)$ 是单个暗物质晕的密度分布函数，依赖于该晕的质量 M_i （单位： $h^{-1} M_{\odot}$ ， M_{\odot} 表示一个太阳质量）和相对于观察点 \mathbf{x} 的位置 \mathbf{x}_i 。它描述了宇宙中的暗物质分布，可以通过一系列晕的几何来表达。

4.1.1 暗晕质量和密度轮廓

暗晕的质量分布通常被描述为球对称的，其密度随距离中心的距离的增加而减小。一个经典的描述暗晕密度轮廓的模型是 Navarro-Frenk-White (NFW) 密度轮廓^[36]，它表明密度随半径的增长成特定的比例下降，具体形式为：

$$\rho_{\text{h}}(r) = \frac{\rho_s}{(r/r_s)(1 + r/r_s)^2} \quad (4.2)$$

其中 r_s 描述暗晕的密度轮廓从一个内部斜率平滑过渡到外部斜率的特征半径，是从中心向外的密度下降速率开始变缓的位置； ρ_s 是在 r_s 处的特征密度，用来设置密度剖面的整体

幅度。总的暗晕质量可以通过对 NFW 轮廓进行积分得到：

$$M \equiv \int_0^{R^*} dr 4\pi r \rho_h(r) = 4\pi \rho_s r_s^3 \left[\frac{1}{c+1} + \ln(c+1) - 1 \right] \quad (4.3)$$

其中 R^* 是暗晕的外边界半径（视界半径），即 M 是指在 R^* 内包含的总质量。通常用浓缩度（ $c = R^*/r_s$ ）和 M 代替 ρ_s 和 r_s 定义密度轮廓。 c 反映了暗晕的集中程度，与暗晕形成时间相关，早期形成的晕通常具有较高的浓缩度。通过归一化的 NFW 密度轮廓得到在 Fourier 空间的表达式：

$$y(k, M) = \frac{\int d^3\mathbf{x} \rho_h e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\int d^3\mathbf{x} \rho_h} = \frac{4\pi}{M} \int_0^{R^*} r^2 dr \frac{\sin kr}{kr} \rho_h \quad (4.4)$$

代入式(4.2)得

$$y(k, M) = \frac{1}{\mathcal{N}} \left\{ \cos x [\text{Ci}([c+1]kr_s) - \text{Ci}(kr_s)] + \sin x [\text{Si}([c+1]kr_s) - \text{Si}(kr_s)] - \frac{\sin ckr_s}{(c+1)kr_s} \right\} \quad \text{其中}$$

$$\mathcal{N} = \frac{1}{c+1} + \ln(c+1) - 1,$$

$$\text{Ci}(x) = - \int_x^\infty \frac{\cos z}{z} dz, \quad \text{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin z}{z} dz. \quad (4.5)$$

由此我们得到了 NFW 暗晕的具体轮廓表达式。

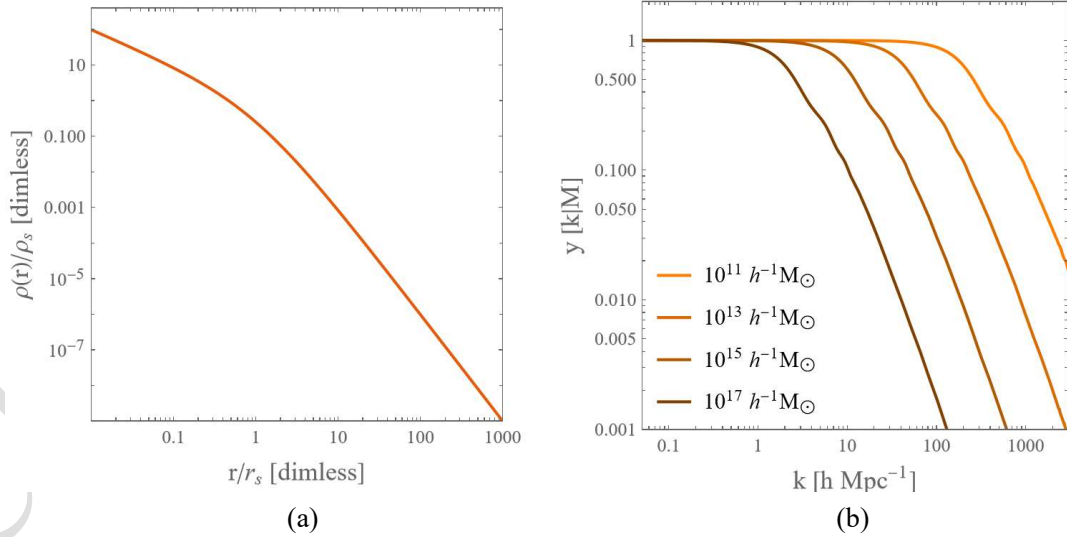


图 4-1 (a) 暗晕轮廓和 (b) 归一化的 Fourier 转化下的暗晕轮廓

Figure 4-1 (a) Halo profile (b) normalization halo profile in Fourier transform

图 4-1(a)为 NFW 密度轮廓，描述了暗晕质量密度 ρ 比特征密度 ρ_s 随距离 r 比特征半径 r_s 从晕中心向外变化的模型。显示出从晕中心向外，密度快速下降。(b)则为在不同暗晕质量下，归一化的 NFW 轮廓的 Fourier 变换。在大尺度上（ $k < 1 h \text{ Mpc}^{-1}$ ），暗晕的

Fourier 变换相同，表明了不同质量的暗晕的密度分布相似，这是因为轮廓在较远处接近一个标准形式，这使得低 k 值得行为趋于一致；在小尺度上，($k > 1h \text{ Mpc}^{-1}$)，随着暗晕质量增加，振幅减小，这是由于较大质量得暗晕具有更宽得核心区域和更扩展的密度分布。在 NFW 模型中，较大的暗晕通常具有较大的尺度半径 r_s 。

4.1.2 暗晕质量函数和暗晕偏差

Press-Schechter 公式^[37]预测了给定质量范围内单位体积内暗晕的数目 $n(M, z)$ 表达式：

$$\frac{dn(M, z)}{d \ln M} = \frac{\rho_m(t_0)}{M} f_{\text{PS}} \left(\frac{\delta_{\text{sc}}(z)}{\sigma(M, z)} \right) \left| \frac{d \ln \sigma(M, z)}{d \ln M} \right| \quad (4.6)$$

也叫质量函数，其中

$$f_{\text{PS}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \nu e^{-\nu^2/2}, \quad \text{且} \quad \nu(M, z) \equiv \frac{\delta_{\text{sc}}(z)}{\sigma(M, z)} \quad (4.7)$$

$\sigma(M, z)$ 是质量尺度 M 上的线性密度场的方差，在式(3.29)已经定义， $\nu(M, z)$ 表示塌缩阈值的高度，也就是暗晕的形成难度，其通过 σ 进行量化。在这里临界密度 $\delta_{\text{sc}}(z)$ 定义为：

$$\frac{\delta_{\text{sc}}(z)}{1+z} = \frac{3}{5} \left(\frac{3\pi}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (4.8)$$

图 4-1(a)为不同红移下 ($z = 0, 0.5, 1.5, 3.0$) 的质量函数。可见对于给定的红移，随着暗晕质量增大，质量函数振幅急剧减小。这表明更大的质量在宇宙中相对较小，因为更大的质量意味着更多的聚集物质。当红移增大时，整体的振幅也下降了，说明更早时期的宇宙尚未有足够时间形成大质量的暗晕。随着宇宙的膨胀和演化，大质量暗晕的数量逐渐增加。

描述了暗晕的内部结构和质量函数后，为了理解暗晕在不同环境下的聚集行为，需要考虑暗晕偏差 (halo bias)。暗晕偏差不仅与它们当前的质量有关，与其形成时间和演化历史相关。暗晕偏差是暗晕在宇宙中的分布与总物质密度场之间相对分布的度量，其依赖于暗晕所处的大尺度环境，例如它们是位于宇宙的密集区域还是稀疏区域。偏差的定义可通过质量函数来描述不同质量暗晕的数量密度，描述暗晕分布相对于背景总物质密度场的偏差程度。这种偏差表征了暗晕与大尺度结构如何相互关联，因此，它并不直接分析暗晕的具体位置，而是描述暗晕作为一种物质密度扰动，反映了它们在宇宙密度场中的聚集特性。它量化了暗晕密度对比 (δ_h) 与整个物质密度对比 (δ_m) 之间的关系，将质量函数在 $z = 0$ 处展开，并只考虑一次项：

$$\begin{aligned} \left. \frac{dn}{d \ln M} \right|_{\delta_m} &= \frac{\rho_m(t_0)}{M} f_{\text{PS}} \left(\frac{\delta_{\text{sc}}(z_0) - \delta_m^{(1)}}{\sigma(M, z)} \right) \left| \frac{d \ln \sigma(M, z)}{d \ln M} \right| \\ &\approx \left. \frac{dn}{d \ln M} \right|_0 \left[1 - \frac{d \ln f_{\text{PS}}}{d \nu} \frac{1}{\sigma(M, z)} \delta_m^{(1)} \right] \Big|_{\nu = \delta_{\text{sc}}(z_0)/\sigma(M, z)} \end{aligned} \quad (4.9)$$

因此

$$\delta_h^{(1)} = \frac{dn/d \ln M|_{\delta_m}}{dn/d \ln M|_0} \equiv b_1 \cdot \delta_m^{(1)} \quad (4.10)$$

得到

$$b_1(M, z) = 1 + \frac{\nu^2 - 1}{\delta_{sc}(z)} \bigg|_{\nu=\delta_{sc}(z_0)/\sigma(M, z)} \quad (4.11)$$

其中 z_0 表示今天的红移。

图 4-2(b)所展示的便是暗晕偏差系数 b_1 对暗晕聚集行为的影响。当 $b_1 > 1$ ，则暗晕倾向于在物质密度较高的区域聚集，适用于质量较大的暗晕；当 $b_1 = 1$ ，则暗晕分布与整体物质密度分布一致，对于 z_0 ，暗晕质量在 $10^{13} h^{-1} M_\odot$ ；当 $b_1 < 1$ ，则暗晕倾向于分布在物质密度较低的区域。星系通常被认为是形成在暗物质晕内部，因此通过研究其聚集行为，可以推断出星系在大尺度结构中的分布模式。例如，星系形成于质量大的暗晕中，这些暗晕偏差较高，倾向于聚集在宇宙网状结构的节点和丝状结构上，这解释了为何星系团和超星系团往往位于宇宙密度较高的区域。如图 2-4(a)，那些最亮的节点区域便是暗晕。

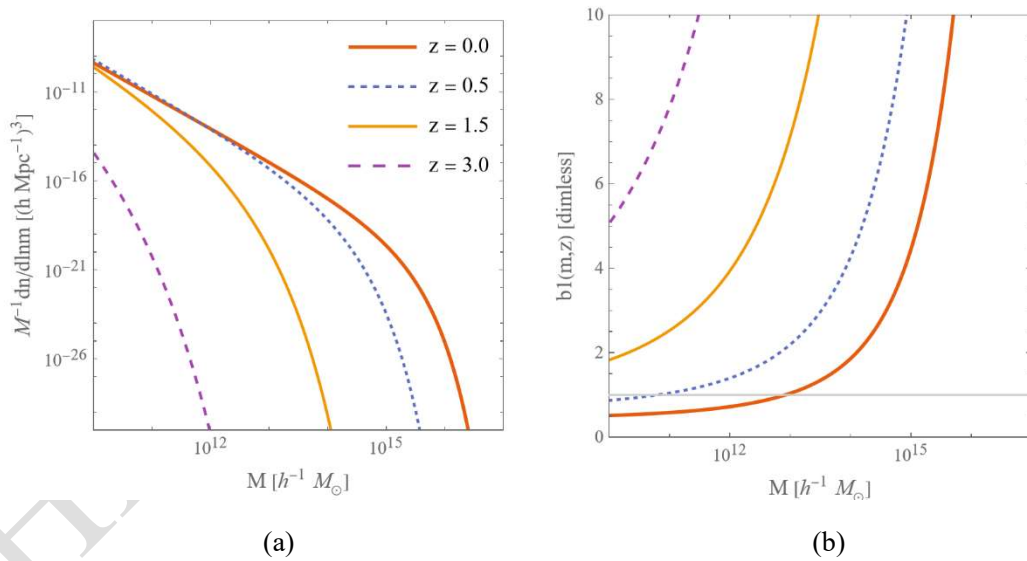


图 4-2 不同红移下的(a) 暗晕质量函数和 (b) 暗晕偏差因子

Figure 4-2 (a) Halo mass function and (b) halo bias with different redshift

暗晕模型中的 Sheth-Tormen 质量函数^[38]是对 Press-Schechter 公式的修正和扩展，提供了对实际观测数据更为精确的匹配，它引入了形状参数来更好地描述暗晕的质量函数，以及偏差因子来细致刻画暗晕的分布。

4.2 非线性物质功率谱

在暗晕模型中，非线性物质功率谱的表达是暗晕分布的统计特性的关键描述。这一模型考虑了单个暗晕内部贡献（1-晕项）以及不同暗晕间相互作用的贡献（2-晕项），从而形成了完整的非线性功率谱。

类似线性功率谱计算过程，我们可以定义单个暗晕的功率谱为：

$$\langle \delta_h(\mathbf{k}, M) \delta_h(\mathbf{k}', M') \rangle = (2\pi)^3 \delta_D^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') P_h(k, M, M'). \quad (4.12)$$

对比式(4.1)，对所有暗物质晕进行质量积分，可得：

$$P_{HM}(k) = \frac{1}{\rho_m^2} \int dM \frac{dn}{d \ln M} \int dM' \frac{dn}{d \ln M'} y(k, M) y(k, M') P_h(k, M, M'). \quad (4.13)$$

其中 $y(k, M)$ 是式(4.4)暗晕轮廓， $dn/d \ln M$ 是式(4.6)质量函数， M 和 M' 需要加以区分是因为暗晕间的质量不同，由是(4.3)定义。可以重新令单个暗晕的功率谱为：

$$P_h(k, M, M') = b_1(M) b_1(M') P_{lin}(k) + P_N(M, M'). \quad (4.14)$$

其中 b_1 表示式(4.11)偏差因子， P_N 表示噪声功率谱：

$$P_N(M, M') = \frac{1}{dn/d \ln M} \delta_D^{(1)}(\ln M - \ln M'). \quad (4.15)$$

它反映了暗晕自相关的性质，并假设了不同质量的暗晕之间是不相关的，前项是归一化因子，与暗晕的实际数密度一致，后项表示了只有考虑同一质量范围的暗晕，噪声才会有贡献。将式(4.14)代入式(4.13)可以分解出：

$$P_{HM}(k) = P_{2h}(k) + P_{1h}(k). \quad (4.16)$$

其中

$$\begin{aligned} P_{2h}(k) &= [\mathcal{B}_1(k)]^2 P_{lin}(k), \\ \mathcal{B}_1(k) &= \frac{1}{\rho_m} \int d \ln M \frac{dn}{d \ln M} M b_1(M) y(k, M), \\ P_{1h}(k) &= \frac{1}{\rho_m^2} \int d \ln M \frac{dn}{d \ln M} M^2 [y(k, M)]^2. \end{aligned} \quad (4.17)$$

可见 1-晕项便是对应于单个暗晕内部密度扰动的自相关，而 2-晕项考虑了不同质量的暗晕通过重力作用相互聚合的影响。

4.2.1 结果与讨论

在实际建模过程中，由于涉及复杂的微分方程式，通常难以找到解析解。因此，我们通常利用数值计算以得到暗晕模型下的功率谱。例如，在使用 **Mathematica** 这类编程软件时，可以先建立待求的数据点以及对应的方程值，然后利用“**Interpolation**”功能来生成不同情况下的拟合函数。

取浓缩度 $c = 200$ ，图 4-3 中展示了今天的不同类型的无量纲的功率谱：橙色实线代表整体非线性功率谱，即暗晕模型的功率谱；而紫色实线则展示了第三章计算所得的线

性功率谱；蓝色虚线和黄色虚线分别与 1-晕项和 2-晕项的功率谱，分别揭示了不同尺度下结构的聚集模式。在较小的尺度范围内 ($k > 1 h \text{ Mpc}^{-1}$)，1-晕项成为主导因素。这是因为在这个尺度上，观测到的结构小于暗晕的典型尺度，因此信号主要来源于单个暗晕内部的物质分布。图中清晰地显示了从非线性到线性的过渡，在尺度 $k \sim 1 h \text{ Mpc}^{-1}$ 为重要转折点，对应于无量纲功率谱的范围在 ~ 1 处，表明这个时期前后，便是从线性主导到非线性主导的演化。在大尺度上 ($k < 0.1 h \text{ Mpc}^{-1}$)，线性功率谱与观测到的总的功率谱匹配得很好，2-晕项在这些尺度演化上起主导作用，它反映了不同暗晕之间的相关性，且与线性微扰理论得预测相一致。最后，BAO 作为大尺度上的振荡，在线性以及非线性功率谱中的 $k \sim 0.1 h \text{ Mpc}^{-1}$ 均有显现，且这一特征在小尺度上不显著。

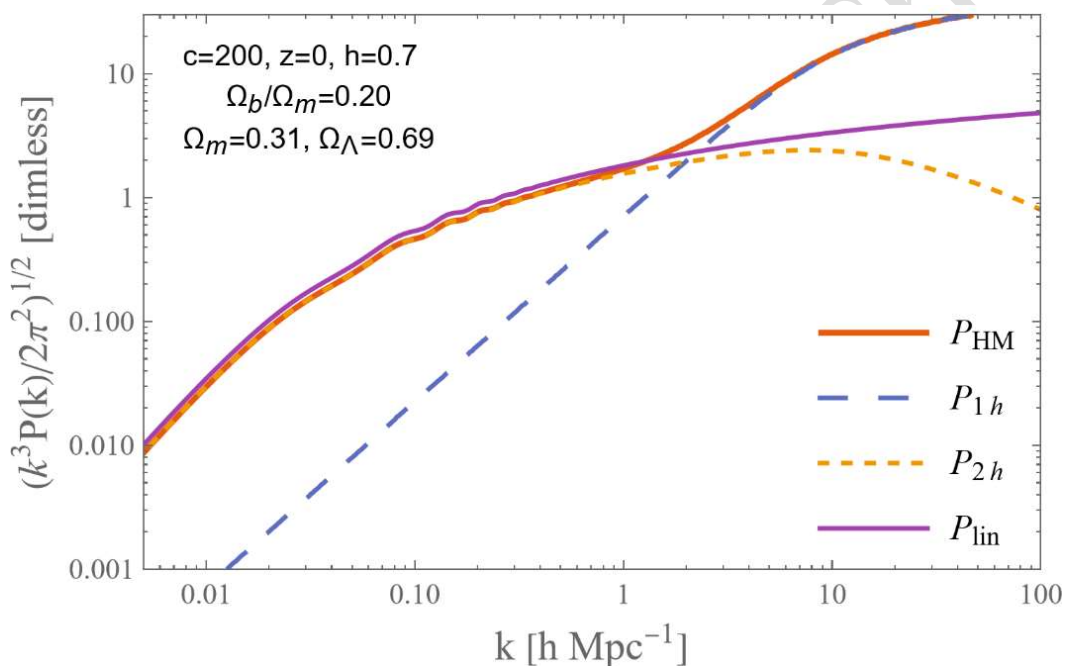


图 4-3 当 $z = 0$ 时的无量纲物质功率谱，包括暗晕、1-晕项、2-晕项和线性

Figure 4-3 Dimensionless linear matter power spectrum when $z = 0$ included halo model, one-halo term, two halo term, and linear power spectrum

利用暗晕模型研究非线性结构，既有优点也有缺点。首先，与依赖复杂模拟的“黑箱”仿真器相比，暗晕模型基于解析式推导，其推理过程更为透明。这种解析性不仅便于理解模型的物理基础，还使之在不同的编程环境中具有良好的适应性，不受特定数值模拟软件的限制。此外，基于解析式，暗晕模型在预测结果时通常具有较小的噪声，提高了结果的清晰度和曲线的光滑性。虽然解析模型在理论上具有优势，但在实际应用中，解析过程中的符号运算可能导致计算速度缓慢，特别是在进行复杂积分的时候更是如此。此外，与高精度的数值仿真器相比，解析模型在某些情况下的准确度可能较低。为了克

服这些限制，近年来一些研究提出^[39]利用符号回归技术来优化模型。通过这种方法，研究者能够针对所有相关变量得到拟合解，可以显著提高计算的效率以及模型预测的准确度。

4.2.2 BAO 和非线性演化

重子声波振荡在小尺度上的贡献可以忽略，但在大尺度则会受到非线性演化^[40]的显著影响。物质在宇宙晚期在引力作用下的非线性聚集会导致原初密度场中 BAO 的特征尺度发生扭曲^[32]。这种扭曲主要表现为 BAO 峰值的偏移以及峰型的变宽，这是因为重力聚集使得物质从低密度区域向高密度区域流动，从而增强了密度对比造成的。在理解这一过程中，暗晕模型提供了一个重要视角。暗晕会通过合并和吸积过程不断增长，从而影响了内部以及周围的物质分布。此外，由第二章所述，红移空间畸变线性也会对观测到的星系分布产生影响，进一步影响了 BAO 信号的探测。因此，这些动态过程的综合作用，也使得 BAO 成为探测和理解宇宙大尺度结构非线性演化过程的一个重要的工具。

第五章 结语

本文从宇宙膨胀动力学出发，以重子声学振荡为线索，探讨了基于微扰理论的线性宇宙结构演化以及暗晕模型为基础的非线性演化，详细分析了物质功率谱的变化形式，并最终聚焦于物质功率谱中的 BAO 特征尺度。研究得出以下结论：

1. 在标准宇宙模型下，在大尺度上 ($k < 0.1h \text{ Mpc}^{-1}$)，物质功率谱与 Harrison-Zel'dovich 功率谱一致，表明早期宇宙的密度微扰是尺度不变的。在这些尺度上，暗晕的聚集 (2-晕项) 显著，重子和暗物质的引力相互作用均等地影响了大尺度结构的形成。在 $k \sim 1h \text{ Mpc}^{-1}$ 处，功率谱揭示了一系列与传递函数一致的 BAO 声波振荡，标志着从线性到非线性物质密度的过渡。在更小尺度上 ($k > 1h \text{ Mpc}^{-1}$)，随着光子与重子的解耦，1-晕项成为主导，反映了单个晕内部而非晕之间的物质分布。

2. 改变宇宙学物质密度参数 Ω_m 会通过增强或减弱引力聚集影响结构的生长。随着 Ω_m 的增加，所有尺度上的功率谱振幅增强，尤其在大尺度上更为显著，表明密度扰动加剧。相反， Ω_m 的减少会降低功率谱的振幅并将峰值位置向更小的尺度移动。改变重子密度参数 Ω_b 及其在总物质中的比率 Ω_b/Ω_m 会影响转移函数，前者增大，BAO 的振荡幅度增加，使得 BAO 特征在功率谱中越明显；同时，后者增大，重子与光子的相互作用增强，从而使得宇宙的整体演化速度放缓。

3. 两点相关函数在 $r \approx 100h^{-1} \text{ Mpc}$ 附近显示出一个峰值，标志着 BAO 形成的声学视界。这个峰值位置反映了星系可能被分隔的典型距离。相关函数在红移空间的振幅大于实空间，表明星系的本动速度对物质分布的观测产生了影响，特别是在红移测量中沿视线方向的聚集显著增加，从而放大了红移空间的相关函数振幅。

通过这些结论，本文加深我们对宇宙膨胀历史和大尺度结构形成的认识。而 BAO 作为如今最重要的探针之一，将会带领我们解开更多的宇宙之谜。

参考文献

- [1] Dodelson S, Schmidt F. Modern Cosmology[M]. Elsevier, 2021.
- [2] Kamionkowski M. WIMP and Axion Dark Matter[A]. arXiv, 1997.
- [3] Caldwell R R, Dave R, Steinhardt P J. Cosmological Imprint of an Energy Component with General Equation of State[J]. Physical Review Letters, 1998, 80(8): 1582-1585.
- [4] Komatsu E, Smith K M, Dunkley J, et al. Seven-Year *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (*WAMP*) Observations: Cosmological Interpretation[J]. The Astrophysical Journal Supplement Series, 2011, 192(2): 18.
- [5] Guth A H. Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems[J]. Physical Review D, 1981, 23(2): 347-356.
- [6] Alpher R A, Bethe H, Gamow G. The Origin of Chemical Elements[J]. Physical Review, 1948, 73(7): 803-804.
- [7] Gamow G. The Evolution of the Universe[J]. Nature, 1948, 162(4122): 680-682.
- [8] Barkana R, Loeb A. Probing the epoch of early baryonic infall through 21-cm fluctuations[J]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters, 2005, 363(1): L36-L40.
- [9] Wang X, Hu W. Redshift Space 21 cm Power Spectra from Reionization[J]. The Astrophysical Journal, 2006, 643(2): 585-597.
- [10] Planck Collaboration, Aghanim N, Akrami Y, et al. Planck 2018 Results: I. Overview and the Cosmological Legacy of Planck[J]. Astronomy & Astrophysics, 2020, 641: A1.
- [11] Eisenstein D J, Zehavi I, Hogg D W, et al. Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies[J]. The Astrophysical Journal, 2005, 633(2): 560-574.
- [12] Astronomy Selection Committee, The Shaw Prize. The Shaw Prize in Astronomy 2014[EB/OL]. (2014-05-27). <https://www.shawprize.org/laureates/2014-astronomy/>.
- [13] Eisenstein D J, Weinberg D H, Agol E, et al. SDSS-III: Massive Spectroscopic Surveys of the Distant Universe, the Milky Way, and Extra-Solar Planetary Systems[J]. The Astronomical Journal, 2011, 142(3): 72.
- [14] Dawson K S, Kneib J P, Percival W J, et al. The SDSS-IV Extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: Overview and Early Data[J]. The Astronomical Journal, 2016, 151(2): 44.
- [15] Chen S F, Howlett C, White M, et al. Baryon Acoustic Oscillation Theory and Modelling Systematics for the DESI 2024 results[A]. arXiv, 2024.
- [16] Castelvechi D. Euclid Launch: Dark-Energy Mapper Poised to Probe Cosmic Mysteries[N]. Nature, 2023-07-13(230-231).
- [17] Ata M, Baumgarten F, Bautista J, et al. The Clustering of the SDSS-IV Extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey DR14 Quasar Sample: First Measurement of Baryon Acoustic Oscillations Between Redshift 0.8 and 2.2[J]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2018, 473(4): 4773-4794.
- [18] Raichoor A, de Mattia A, Ross A J, et al. The completed SDSS-IV extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: large-scale structure catalogues and measurement of the

- isotropic BAO between redshift 0.6 and 1.1 for the Emission Line Galaxy Sample[J]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2020, 500(3): 3254-3274.
- [19] Kono K T, Takeuchi T T, Cooray S, et al. A Study on the Baryon Acoustic Oscillation with Topological Data Analysis[A]. arXiv, 2020.
 - [20] Xu K, Jing Y P, Zhao G B, et al. Evidence for Baryon Acoustic Oscillations From Galaxy–Ellipticity Correlations[J]. Nature Astronomy, 2023, 7(10): 1259-1264.
 - [21] Paillas E, Ding Z, Chen X, 等. Optimal Reconstruction of Baryon Acoustic Oscillations for DESI 2024[J]. 2024.
 - [22] Coil A L. The Large-Scale Structure of the Universe[M]//Oswalt T D, Keel W C. Planets, Stars and Stellar Systems. Dordrecht: Springer Netherlands, 2013: 387-421.
 - [23] Eisenstein D J, Hu W. Baryonic Features in the Matter Transfer Function[J]. The Astrophysical Journal, 1998, 496(2): 605-614.
 - [24] Hu W, White M. Acoustic Signatures in the Cosmic Microwave Background[J]. The Astrophysical Journal, 1996, 471(1): 30-51.
 - [25] Silk J. Cosmic Black-Body Radiation and Galaxy Formation[J]. The Astrophysical Journal, 1968, 151: 459.
 - [26] Mao X C, Wu X P. Signatures of the Baryon Acoustic Oscillations on 21 cm Emission Background[J]. The Astrophysical Journal, 2008, 673(2): L107-L110.
 - [27] Kaiser N. Clustering in Real Space and in Redshift Space[J]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 1987, 227(1): 1-21.
 - [28] Eisenstein D J, Seo H, Sirko E, et al. Improving Cosmological Distance Measurements by Reconstruction of the Baryon Acoustic Peak[J]. The Astrophysical Journal, 2007, 664(2): 675-679.
 - [29] Desjacques V, Jeong D, Schmidt F. Large-Scale Galaxy Bias[J]. Physics Reports, 2018, 733: 1-193.
 - [30] Bird S, Viel M, Haehnelt M G. Massive Neutrinos and the Non-Linear Matter Power Spectrum: The Matter Power with Neutrinos[J]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2012, 420(3): 2551-2561.
 - [31] Vogelsberger M, Marinacci F, Torrey P, et al. Cosmological Simulations of Galaxy Formation[A]. arXiv, 2019.
 - [32] Crocce M, Scoccimarro R. Nonlinear Evolution of Baryon Acoustic Oscillations[J]. Physical Review D, 2008, 77(2): 023533.
 - [33] Matsubara T. Nonlinear Perturbation Theory Integrated with Nonlocal Bias, Redshift-space Distortions, and Primordial Non-Gaussianity[J]. Physical Review D, 2011, 83(8): 083518.
 - [34] Crocce M, Scoccimarro R. Renormalized Cosmological Perturbation Theory[J]. Physical Review D, 2006, 73(6): 063519.
 - [35] Cooray A, Sheth R. Halo Models of Large Scale Structure[J]. Physics Reports, 2002, 372(1): 1-129.
 - [36] Navarro J F, Frenk C S, White S D M. The Structure of Cold Dark Matter Halos[J]. The Astrophysical Journal, 1996, 462: 563.
 - [37] Press W H, Schechter P. Formation of Galaxies and Clusters of Galaxies by Self-Similar Gravitational Condensation[J]. The Astrophysical Journal, 1974, 187: 425.
 - [38] Sheth R K, Tormen G. Large-scale bias and the peak background split[J]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 1999, 308(1): 119-126.

- [39] Bartlett D J, Wandelt B D, Zennaro M, et al. syren-halofit: A fast, interpretable, high-precision formula for the Λ CDM nonlinear matter power spectrum[A]. arXiv, 2024.
- [40] Bernardeau F, Colombi S, Gaztanaga E, et al. Large-Scale Structure of the Universe and Cosmological Perturbation Theory[J]. Physics Reports, 2002, 367(1-3): 1-248.

CHESTNUT-BScThesis

附录1 线性流体方程的推导

首先采用牛顿近似下的引力理论和能量-动量守恒的动力学方程，同时假设宇宙是各向同性且均匀的。于是，可以使用一个简化的度规来表述时空：

$$ds^2 = -(1 + 2\phi)dt^2 + a(t)^2(1 - 2\phi)\delta_{ij}dx^i dx^j. \quad (1)$$

这里引入了 ϕ 为引力势能。因此，可以计算 Christoffel 符号为，

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \dot{\phi}, & \Gamma_{0i}^0 &= \Gamma_{i0}^0 = \phi_{,i}, & \Gamma_{ij}^0 &= \delta_{ij}a^2[H + 4H\phi - \dot{\phi}], \\ \Gamma_{00}^i &\approx \frac{1}{a^2}\phi_{,i}, & \Gamma_{j0}^i &= \Gamma_{0j}^i = \delta_{ij}(H - \dot{\phi}), & \Gamma_{jk}^i &= -(\delta_{ij}\partial_k + \delta_{ik}\partial_j - \delta_{jk}\partial_i)\phi. \end{aligned}$$

已知粒子的能量为 $E^2 = p^2 + m^2$ ，动量 $p^2 = g_{ij}P^i P^j$ ，其中四维动量定义为 $P^\mu \equiv dx^\mu/d\lambda$ ，因此有

$$P^\mu = \left[E(1 - \phi), p^i \frac{1 + \phi}{a} \right]. \quad (2)$$

其中 $p^i = p\hat{p}^i$ 。接下来利用 Boltzmann 方程来描述密度及速度场的变化。首先有

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dt} = \frac{P^i}{P^0} = \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{p}{E}. \quad (3)$$

注意所有计算皆为一阶近似。动量随时间的变化有

$$\frac{dp^i}{dt} = \frac{dp^i}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dt} = \frac{d}{P^0 d\lambda} [(1 - \phi)aP^i]. \quad (4)$$

下面对式(5)进行微分运算，首先

$$\frac{d}{d\lambda} [(1 - \phi)a] = P^0 a [H - \dot{\phi}] + aP^k \phi_{,k}. \quad (5)$$

其次，根据测地线方程可得

$$\frac{dP^i}{d\lambda} = -\Gamma_{\alpha\beta}^i P^\alpha P^\beta = -(\Gamma_{00}^i P^0 P^0 + 2\Gamma_{0j}^i P^0 P^j + \Gamma_{jk}^i P^j P^k). \quad (6)$$

将式(5)和式(6)重新代入式(4)，并注意 $dp/dt = \delta_{ij}(p^i/p)(dp^j/dt)$ ，可得

$$\frac{dp^i}{dt} = -[H - \dot{\phi}]p - \frac{E}{a}\hat{p}^i \phi_{,i}. \quad (7)$$

将式(3)式(7)代入玻尔兹曼方程，可得

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{p}{E} \frac{\partial f}{\partial x^i} - \left[H - \dot{\phi} + \frac{1}{a}\hat{p}^i \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \right] p \frac{\partial f}{\partial p} = 0. \quad (8)$$

Try1: 对式(8)两边做 $\int d^3p/(2\pi)^3$ 积分计算，定义粒子数密度以及流体速度满足

$$n = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f, \quad u^i \equiv \frac{1}{n} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f \frac{p\hat{p}^i}{E(p)}. \quad (9)$$

积分的部分里有

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p \frac{\partial f}{\partial p} = \int_0^\infty \frac{dp}{(2\pi)^3} p^3 \frac{\partial}{\partial p} \int d\Omega f = -3n. \quad (10)$$

过程是先变为球坐标积分，再分部积分，又因为全区域边界为零，因此全微分部分积分为零，最后代入数密度可得式(10)。最后积分得

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial(nu^i)}{\partial x^i} + 3[H - \dot{\phi}]n = 0. \quad (11)$$

若把 $n(x, t) = \bar{n}(1 + \delta(x, t))$ 代入式(11)，零阶和一阶方程有

$$\text{zero: } \frac{\partial \bar{n}}{\partial t} + 3H\bar{n} = 0, \quad \rightarrow \quad \text{first: } \frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial u^i}{\partial x^i} - 3\dot{\phi} = 0. \quad (12)$$

式(12)一阶即为实空间的连续性方程。

Try2: 对式(8)两边做 $\int d^3p (p\hat{p}^j/E)/(2\pi)^3$ 积分，并移去 p^2/E^2 的高阶项。积分的部分，类似地有

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\partial f}{\partial p} \frac{p^2 \hat{p}^j}{E} = \int d\Omega \hat{p}^j \int_0^\infty \frac{dp}{(2\pi)^3} f \frac{4p^3}{E} = -4nu^j. \quad (13)$$

注意 $\int d\Omega \hat{p}^i \hat{p}^j = \delta^{ij} 4\pi/3$ ，若 $n = \bar{n}$ ，并将式(12)零阶代入，最后得 Euler 方程为

$$\frac{\partial(nu^j)}{\partial t} + 4Hnu^j + \frac{n}{a} \frac{\partial \phi}{\partial x^j} = 0, \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u^j}{\partial t} + Hu^j + \frac{1}{a} \frac{\partial \phi}{\partial x^j} = 0. \quad (14)$$

将式(12)和式(14)转化到 Fourier 空间，即 $\partial/\partial x \rightarrow ik$ ，并且转换 $d\eta = dt/a$ ，最后可以得到式()。最后根据 Newton-Possion 方程 $\nabla \phi = 4\pi G\rho$ ，由于宇宙膨胀以及引力场由物质密度涨落造成的影响，即

$$\phi \rightarrow \frac{\phi}{a}, \quad \rho \rightarrow \rho - \bar{\rho} = \bar{\rho}\delta. \quad (15)$$

因此将式(15)代入并转化到 Fourier 空间，可以得到式()。

附录2 线性功率谱的拟合公式

(1) 转移函数拟合因子:

$$\begin{aligned} z_{\text{eq}} &= 2.50 \times 10^4 \Omega_m h^2 \Theta_{2.7}^{-4}, \quad k_{\text{eq}} = 7.46 \times \Omega_m h^2 \Theta_{2.7}^{-2} \text{ Mpc}^{-1}, \\ z_d &= 1291 \frac{(\Omega_m h^2)^{0.251}}{1 + 0.659(\Omega_m h^2)^{0.828}} [1 + b_1(\Omega_b h^2)^{b_2}], \\ b_1 &= 0.313(\Omega_m h^2)^{-0.419} [1 + 0.607(\Omega_m h^2)^{0.674}], \quad b_2 = 0.238(\Omega_m h^2)^{0.223}, \end{aligned}$$

$$s = \frac{44.5 \ln(9.83/\Omega_m h^2)}{\sqrt{1 + 10(\Omega_b h^2)^{3/4}}} \text{Mpc},$$

$$k_{\text{sil}} = 1.6(\Omega_m h^2)^{0.251}(\Omega_m h^2)^{0.25} [1 + (10.4\Omega_m h^2)^{0-0.9}] \text{Mpc}^{-1}.$$

(2) 暗物质转移函数:

$$\begin{aligned} T_c(k) &= f\tilde{T}_0(k, 1, \beta_c) + (1-f)\tilde{T}_0(k, \alpha_c, \beta_c), \\ f &= \frac{1}{1 + (ks/5.4)^4}, \quad \tilde{T}_0(k, \alpha_c, \beta_c) = \frac{\ln(e + 1.8\beta_c q)}{\ln(e + 1.8\beta_c q) + Cq^2}, \\ C &= \frac{14.2}{\alpha_c} + \frac{386}{1 + 69.9q^{1.08}}, \quad q = \frac{k}{1.31k_{\text{eq}}}, \\ \alpha_c &= a_1^{-\Omega_b/\Omega_m} a_2^{-(\Omega_b/\Omega_m)}, \quad \beta_c = (1 + b_1[(\Omega_c/\Omega_m)^{b_2} - 1])^{-1}, \\ a_1 &= (46.9\Omega_m h^2)^{0.6} [1 + (32.1\Omega_m h^2)^{-0.53}], \\ a_2 &= (12.0\Omega_m h^2)^{0.4} [1 + (45.0\Omega_m h^2)^{-0.5}], \\ b_1 &= 0.944[1 + (458\Omega_m h^2)^{-0.7}]^{-1}, \quad b_2 = (0.395\Omega_m h^2)^{-0.0266}. \end{aligned}$$

(3) 重子转移函数:

$$\begin{aligned} T_b(k) &= \left[\frac{\tilde{T}_0(k, 1, 1)}{1 + (ks/5.2)^2} + \frac{\alpha_b}{1 + (\beta_b/ks)} e^{-(k/k_{\text{sil}})^{1.4}} \right] j_0(k\tilde{s}), \\ \alpha_b &= 2.07k_{\text{eq}}s(1 + R_d)^{-3/4} G\left(\frac{1 + z_{\text{eq}}}{1 + z_d}\right), \\ G(y) &= y \left[-6\sqrt{1+y} + (2 + 3y) \ln\left(\frac{\sqrt{1+y} + 1}{\sqrt{1+y} - 1}\right) \right], \\ \beta_b &= 0.5 + \frac{\Omega_b}{\Omega_m} + \left(3 - 2\frac{\Omega_b}{\Omega_m}\right) \sqrt{(17.2\Omega_m h^2)^2 + 1}, \\ \tilde{s}(k) &= \frac{s}{[1 + (\beta_{\text{node}}/ks)^3]^{1/3}}, \quad \beta_{\text{node}} = 8,41(\Omega_m h^2)^{0.435}. \end{aligned}$$

(4) 不含重子物质的转移函数:

$$\begin{aligned} T_0(q) &= \frac{L_0}{L_0 + C_0 q^2}, \quad L_0(q) = \ln(2e + 1.8q), \quad C_0(q) = 14.2 + \frac{731}{1 + 62.5q}, \\ q &= \frac{k}{h \text{ Mpc}^{-1}} \Theta_{2.7}^2/(\Omega_m h). \end{aligned}$$

(5) 增长因子

$$\begin{aligned} D_+(z) &= (1+z)^{-1} \frac{5\Omega(z)}{2} \left\{ \Omega(z)^{4/7} - \Omega_\Lambda + \left[1 + \frac{\Omega(z)}{2}\right] \left[1 + \frac{\Omega_\Lambda(z)}{2}\right] \right\}^{-1}, \\ \Omega(z) &= \frac{\Omega_m(1+z)^3}{\Omega_\Lambda + \Omega_K(1+z)^2 + \Omega_m(1+z)^3}, \\ \Omega_\Lambda(z) &= \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_\Lambda + \Omega_K(1+z)^2 + \Omega_m(1+z)^3}. \end{aligned}$$

致 谢

本科毕业之际，首先感谢我的论文指导老师，***老师，是您引领我进入了宇宙学这一领域，让我找到了未来的方向，并且在课题研究和论文撰写上都给予了最好的帮助和支持。其次，感谢理学院和健行学院为学生提供的良好学习环境和学术资源。

漫漫求学路，感谢我的母亲和父亲，你们是支撑我继续前行的唯一力量。

最后，我要感谢这二十二年来遇到的所有人——我的亲人、朋友、同学、老师和那些在我的学习和生活中以各种形式出现的人们，谢谢各位的包容和理解。