Technische Universität Berlin

Fakultät IV Elektrotechnik und Informatik
Fachgebiet Regelungssysteme
Leitung: Prof. Dr.-Ing. Jörg Raisch

Näherungsweise Ein-/Ausgangslinearisierung: Ball und Wippe

Versuch Nr. 2

RT III - Praktikum - WS 06/07

Thomas Schauer

Ziel dieses Versuchs ist der Entwurf einer nichlinearen Folgeregelung für den Versuch "Ball und Wippe". Als Entwurfsverfahren sollen verschiedene Ansätze der exakten und näherungsweisen Linearisierung untersucht werden. Die nichtlinearen Regler sind mit einer linearen Folgeregelung zu vergleichen, die auf einer klassischen Arbeitspunktlinearisierung des Systems basiert.

Inhaltsverzeichnis

1 Versuchsaufbau

In Abbildung 1 ist der physische Versuchsaufbau zu sehen, wie er im Labor vorzufinden ist. Auf einer Wippe soll ein Ball exakt positionsgeregelt werden. Der Wippenwinkel lässt sich über eine Kraft F_m am äußeren Wippenrand verstellen. Messgrößen sind die Position des Balls auf der Wippe und der Wippenwinkel. Die Position r wird über ein Kamerasystem erfasst und steht als analogers Spannungswert zur Verfügung.

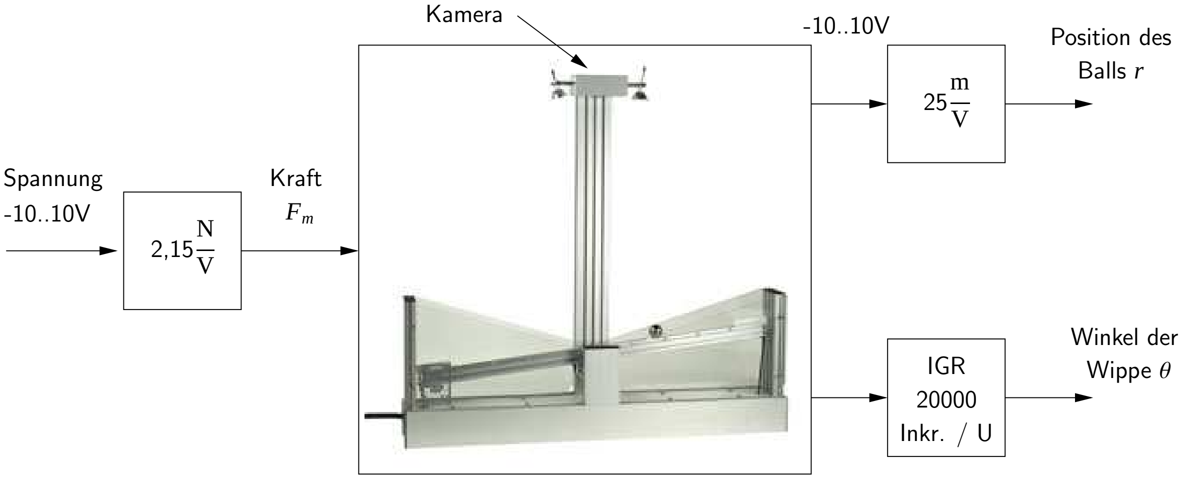

Abbildung 1: Stellsignal und Messgrößen des “Ball und Wippe” - Versuchs

2 Modellbeschreibung

2.1 Lagrangesche Gleichungen 2. Art

Die Lagrangeschen Gleichungen 2. Art liefern über eine Energiebetrachtung die Bewegungsgleichungen eines beliebigen mechanischen Mehrkörperproblems. Hierzu sind zunächst alle möglichen Bewegungen des Systems durch freie Koordinaten

$$x_j, \quad j = 1, \dots, N_x \tag{1}$$

von vorgebenen Ruhelagen festzulegen. Hat ein System mechanische oder geometrische Bindungen, so wird die Anzahl der zur Beschreibung der Bewegung erforderlichen Koordinaten um die Anzahl N_σ der Zwangsbedingungen kleiner. Die verbleibenen Koordinaten bezeichnet man als verallgemeinerte oder auch **generalisierte Koordinaten**:

$$q_j, \quad j = 1, \dots, N_q. \tag{2}$$

Die N_k freien Systemkoordinaten x_i lassen sich demnach als Funktion der N_q generalisierten Variablen q_i in der Form

$$x_j \quad = \quad x_j(q_1, q_2, \dots, q_{N_q}, t), \quad j = 1, \dots, N_k. \tag{3}$$

schreiben, wobei t den expliziten Einfluß der Zeit kennzeichnet.

Hiermit können insgesamt N_q unabhängige Variationen

$$\partial q_1, \dots, \partial q_{N_q} \tag{4}$$

auftreten. Da die Ortsvektoren $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^{N_k}$ von den generalisierten Variablen abhängig sind, lässt sich der virtuelle Arbeitsanteil einer äußeren Kraft $\boldsymbol{F}$ folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} \partial W &= \boldsymbol{F}\partial r = \sum_{j=1}^{N_q} \boldsymbol{F}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j}\partial q_j \\ &= \sum_{j=1}^{N_q} Q_i \partial q_j. \end{aligned} \tag{5}$$

Q_j sind die auf die generalisierten Koordinaten reduzierten generalisierten Kräfte. Falls q_j ein Weg ist, so ist Q_j eine Kraft. Ist q_j ein Winkel, so ist Q_j ein Moment.

Die sogenannte **Lagrangesche Funktion** L ist folgendermaßen definiert:

$$L = T - V. \tag{6}$$

T ist die Summe der kinetischen Energien der einzelnen starren Körper des Systems und V beschreibt die potentielle Energie des Systems. Die Bewegungsgleichungen erhält man aus den Lagrangeschen Gleichungen 2. Art:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j, \qquad j = 1, \dots, N_q \tag{7}$$

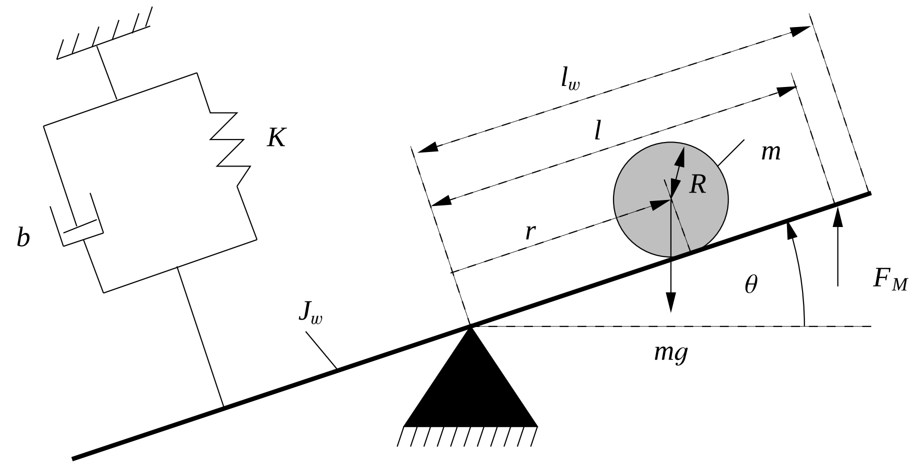

Abbildung 2: Schematik des “Ball und Wippe” - Versuchs mit Definition der Größen

2.2 Modellannahmen und -parameter

In Abbildung 2 ist der Versuchsaufbau schematisch dargestellt. Es sei angenommen, dass die Kugel mit der Masse m , dem Radius R und dem Trägheitsmoment J_b ohne Reibung auf Wippe ohne Rutschen rollt. Das Trägheitsmoment der Wippe ist J_w. Um die Wippe zubewegen, greift eine Kraft F_M am Angriffspunkt l an der Wippe an. Im System tritt während der Rotation der Wippe eine lineare Gleitreibung in der Antriebsmechanik auf, die durch den Reibkoeffizienten b modelliert wird. Die Feder mit der Steifheit K berücksichtigt das Verzögerungsverhalten des Antriebsriemens, das jedoch bei dem realisierten System als gering eingestuft werden kann. Somit stellt die Antriebskraft F_M die Eingangsgröße des Systems dar. Gemessene Ausgangsgrößen sind die Position des Balls r und der Wippenwinkel θ. Hinweis: Die Winkelgeschwindigkeit der Kugel ergibt sich aus der Eigenrotation des Balls und der Rotation der Wippe wie folgt:

$$\omega_b \quad = \quad \dot{\theta} + \frac{\dot{r}}{R}. \tag{8}$$

Die Systemparameter sind in der folgenden Tabelle angegeben:

Parameter	Beschreibung	Wert
m	Masse des Balls (Squashball)	0,27 [kg]
J_b	Trägheitsmoment des Balls	$4{,}32 \cdot 10^{-5}$ [kgm^2]
J_w	Trägheitsmoment der Wippe	0,14025 [kgm^2]
R	Radius des Balls	0,02 [m]
K	Steifheit des Antriebsriemens	0.001 [N/m]
b	Reibkoeffizient der Antriebsmechanik	1 [Ns/m]
l_w	Wippenradius	0,50 [m]
l	Angriffsradius der Stellkraft	0,49 [m]

2.3 Bewegungsgleichungen

Generalisierte Koordinaten sind r und θ. Unter Anwendung der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art erhält man folgende Bewegungsgleichungen:

$$\left(m + \frac{J_b}{R^2}\right)\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg\cos(\theta) \quad = \quad 0 \tag{9}$$

$$\left(J_w + J_b + mr^2\right)\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mgr\cos(\theta) - Kl\theta \quad = \quad F_M l\cos(\theta) - bl\dot{\theta}. \tag{10}$$

3 Versuchsvorbereitung

3.1 Herleitung der Bewegungsgleichungen

Leiten Sie die Dgln. (9) und (10) aus dem Ersatzschaltbild 2 her!

3.2 Eingangstransformation

Welche Eingangstransformation $u = u(F_M, r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta})$ liegt der Zustandsdarstellung mit $\boldsymbol{x} = [r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}]^T$ zugrunde?

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ B(x_1 x_4^2 - g\sin(x_3)) \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \qquad y = x_1 \tag{11}$$

mit

$$B = \frac{m}{\frac{J_b}{R^2} + m} \tag{12}$$

3.3 Implementierung des nichtlinearen Systems in Scilab/Scicos

Implementieren Sie das in Gleichung (11) angegebene nichtlineare System in Scicos nach einer Methode Ihrer Wahl!

3.4 Analyse des linearisierten Systems und linearer Reglerentwurf

Untersuchen Sie Stabilität, Steuerbarkeit und relativen Grad des im Arbeitspunkt linearisierten Systems! Entwerfen Sie für dieses System wie in [1] mit der Polvorgabe eine asymptotische Ausgangsfolgeregelung ($r_{\mathrm{soll}} = A\cos(\pi t/5)$ und simulieren Sie die Regelung für verschiedene Ampliduten A={5,10,20} cm. Nehmen Sie an, dass alle Zustände messbar sind und der Regler zeit-kontinuierlich implementiert wird.

3.5 Exakte E/A-Linearisierung

Bestimmen Sie den relativen Grad ν des Systems (11)! Ist das System exakt ein-/ausgangslinearisierbar?

3.6 Exakte E/Z-Linearisierung

Prüfen Sie die Bedingungen (Rangbedingung, Involutivität) für die Existenz einer exakten Eingangs-Zustands-Linearisierung!

3.7 Näherungsweise E/A-Linearisierung

Entwerfen Sie wie in [1] eine näherungsweise Ein-/Ausgangslinearisierung und Folgeregelung für das System (11)! Vergleichen Sie die Simulationsergebnisse mit dem Ergebnis aus 3.4!

4 Laboraufgaben

5 Hinweise zur praktischen Durchführung des Versuchs

6 Literaturhinweise

[1] J. Hauser, S. Sastry, P. Kokotovic: Nonlinear control via approximate inputoutput linearization: The ball and beam example. IEEE Transactions on Automatic Control, 37(1992), 392-398.