

# 中国科学技术大学

# 博士学位论文



## 利用核磁共振量子计算机实验实现 量子模拟

作者姓名：鲁大为

学科专业：量子计算与量子信息

导师姓名：杜江峰 教授

完成时间：二〇一二年六月二日



University of Science and Technology of China  
A dissertation for doctor degree



Implementing Quantum Simulation  
Tasks Using Nuclear Magnetic  
Resonance

Author:	Dawei Lu
Speciality:	Quantum Computation and Quantum Information
Supervisor:	Prof.Dr. Jiangfeng Du
Finished Time:	June 2nd, 2012



利用核磁共振量子计算机实验实现量子模拟

微尺度国家实验室

鲁大为

中国科学技术大学



## 中国科学技术大学学位论文原创性声明

本人声明所呈交的学位论文,是本人在导师指导下进行研究工作所取得的成果。除已特别加以标注和致谢的地方外,论文中不包含任何他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中作了明确的说明。

作者签名: \_\_\_\_\_

签字日期: \_\_\_\_\_

## 中国科学技术大学学位论文授权使用声明

作为申请学位的条件之一,学位论文著作权拥有者授权中国科学技术大学拥有学位论文的部分使用权,即:学校有权按有关规定向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版,允许论文被查阅和借阅,可以将学位论文编入《中国学位论文全文数据库》等有关数据库进行检索,可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。本人提交的电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。

保密的学位论文在解密后也遵守此规定。

☐ 公开    ☐ 保密 \_\_\_\_\_ 年

作者签名: \_\_\_\_\_

导师签名: \_\_\_\_\_

签字日期: \_\_\_\_\_

签字日期: \_\_\_\_\_





## 摘要

量子信息及量子计算是以量子力学为基础，与数学，计算机学，材料学等众多学科相结合而产生的一门新兴交叉学科。量子计算研究的根本目标是建造一台基于量子力学原理，能够充分展示新奇的，独一无二的，同时大大超越经典计算能力的量子特性的新型计算机。例如，分解一个 512 位的整数，用每秒处理百万次运算的经典计算机我们需要 8400 年，但用量子计算机我们只需要 3.5 个小时！虽然这个目标看上去很诱人，但由于在实际的物理实现中，我们要对脆弱的量子体系进行精确的相干控制，以目前的技术手段要真正做到这点是极其困难的。以现在的眼光来看，最切实际的任务是实验验证一个能真正超越经典计算机极限的量子计算实例。量子模拟已经被证明，大概 30 到 100 个量子比特我们就可以完成这个目标，而要体现出量子算法的优越性则大概需要成百上千个量子比特。因此，量子模拟是目前国际上最热门的研究方向之一，也是本论文主要关注的量子计算分支领域。

另一方面，在所有潜在的量子计算机的物理实现中，核磁共振毫无疑问是进展最迅速的一个。迄今为止拥有最复杂的逻辑门操作的量子计算实验 — 12 量子比特相干调控就是在该平台完成的。同时，大量的量子算法和量子模拟任务也已在核磁共振上得到了演示，而在核磁共振上发展出的许多精确控制技术也被移植到了诸如离子阱、超导等其他平台上。虽然核磁共振有着像可扩展性等其他方面的问题存在，但它依然是最接近于实现超越经典计算机的量子计算实验的平台。本论文中的实验工作正是在该平台完成的，虽然它们还没有达到超越经典的目标，但已经是朝这个目标迈出的关键一步了。

本论文围绕利用核磁共振实现量子模拟任务这个目标，循序渐进的介绍了本人在攻读博士学位期间取得的一些实验成果。具体内容如下：

1. 前三章主要是背景介绍。首先，我们回顾了量子计算的前世今生，并简要描述了量子计算机的工作模式，以求在大脑中先建立起量子世界的图像；在第二章，我们着墨于量子计算的两大分支领域之一 — 量子模拟（另一个为量子算法），从它的历史讲起，涉及其原理，分类，以及应用，同时还叙述了目前量子模拟的理论和实验进展。第三章则围绕着核磁共振技术，用量子计算的语言来重新阐释这一发展成熟了数十年的学科。在本章的最后，我们还描述了强耦合体系进行量子计算实验的方法，相对于传统的弱耦合核磁共振体系这部分内容是相对新颖的。
2. 第四章主要介绍实验上如何利用量子随机行走算法实现数据库搜索问题的

指数加速。虽然它的加速和著名的 Grover 算法一样都是二次加速，但它的实用范围更加广泛，而该工作也是 2003 年自从量子随机行走搜索算法提出以来的首次实验验证。我们选择了三比特强耦合液晶体系，成功解决了从哈密顿量确定，初态制备，么正演化到测量读出等众多的实验难题，高精度的证明了量子随机行走搜索算法的优越性、

3. 第五章集中于我们如何在实验上分解当今世界上分解的最大的数— 143。我们首先回顾了分解 15 和 21 的实验，接着引出利用改进的绝热量子分解算法，我们在四比特强耦合液晶体系上分解了这个肉眼很难直接看出质因子的三位数— 143。虽然距离攻破各大政府、军队、银行的安保系统还差很远，但我们一直在朝这方面努力。
4. 第六章是关于利用核磁共振量子计算模拟量子化学问题的的工作。从静态的问题开始，我们首先模拟了自然界最简单的分子—氢分子的基态能级；进而我们把模拟对象延展到了动态，成功模拟了一维势场的化学反应；最后我们把相位估计算法进行了拓展，实验证明了如何得到一个海森堡哈密顿量模型的本征值和本征态。在本章的最后，我们介绍了一些近期关于量子化学模拟的理论方案，并给出了实验上的预期。

#### 5. 最后

总之，我们完成了很多验证量子计算优越性的实验，朝量子计算机的真正物理实现迈出了坚实的一步。或许这些实验依然只是演示性的，并不能确切给出量子计算机确实超越经典的证据，但我们期望这些实验中用到的技术、技巧及方法可以扩展到其他实验，甚至其他的物理体系中，为人们在量子计算研究的道路上坚定地走下去提供思路及信心。

**关键词：** 量子信息处理，量子计算，量子模拟，量子算法，核磁共振

## ABSTRACT

Quantum information and quantum computation is a new developing subject, which is based on quantum mechanical theories, and combined with mathematics, computing science and material science etc. The ultimate goal of quantum computation is to establish a new version of computer, which relies on quantum theories, and can exhibit novel, unique and fast quantum properties. For instance, to factor a 512-bit integer, we need 8400 years if we use a MIPS (Million Instructions Per Second) classical computer. However, by utilizing quantum computer it is just required 3.5 hours! It seems very attractive, but the physical realization, which requires us to control the fragile quantum systems very precisely, is very difficult at current technique. The most feasible task at present is finding and demonstrating an example in experiment, which can really surpass the capacity of classical computers. Quantum simulation has been proven to be able to outperform the classical computers in just 30 to 100 qubits, while it may take thousands of qubits to finish this goal if we choose quantum algorithms. Therefore, quantum simulation is one of the hot fields in quantum computation, and is also the main object in this thesis.

In all potential physical systems which might be used to build quantum computers, NMR (nuclear magnetic resonance) is supposed to be the most rapid one in progress. Till now, the most complicated experiment which consists of hundred of logical gates on a 12-qubit system is implemented in NMR. In the mean while, humorous proposals of quantum algorithms and quantum simulation have been demonstrated in NMR platform, and many control techniques developed in NMR have been extended to other systems, such as ion traps and superconducting circuits. Although there are some difficulties like the scalable problem, NMR is still the most promising system to perform the first experiment to outperform the classical computers. All the experiments in this thesis are implemented in NMR, and expected to be a key step towards the goal of surpassing the capacity of classical computers.

The goal of this thesis is implementing quantum simulation tasks using NMR systems, and contains the experimental achievements obtained during my PhD period. The concepts are as follows:

1. Introduction of background from Chapter 1 to Chapter 3. First, we reviewed the history of quantum computation, and described the basic principles of quantum computers. We tried to establish the picture of quantum world in the beginning. In Chapter 2, we introduced one major application of quantum computation-quantum simulation (the other one is quantum algorithms), including the theories, categories, applications and recent progress. In Chapter 3, we reproduced the NMR techniques using the language of quantum computation. In the end of this chapter, we described the methods of implementing experiments with the strong coupling system, which is relatively novel compared to the traditional weak coupling systems.
2. Chapter 4 is mainly focused on the experiment of solving the database searching problem by quantum random walk searching algorithm. Although the speedup is similar to the famous Grover searching algorithm, the quantum random walk searching algorithm is more widely used. This is the first experiment since this algorithm was proposed in 2003. We chose a 3-qubit strong coupling liquid crystal NMR sample, and solved the problems including the Hamiltonian fitting, initial state preparation, unitary evolution and measurement.
3. Chapter 5 is about how to factor the largest number in the world in experiment. After reviewing the experiments about factoring 15 and 21, we proposed a new adiabatic factoring algorithm and factored 143 in 4-qubit strong coupling liquid crystal system. Despite of the long distance from hacking the security system of governments, militaries and banks, we are always working hard towards this target.
4. Chapter 6 is simulating quantum chemistry using NMR quantum simulators. Starting from the static case, we simulated the ground state energy of the hydrogen molecule, which is the simplest molecule in nature. Then we succeeded in simulating the dynamical problem, which is a one-dimensional chemical reaction. Finally we extended the phase estimation algorithm, and obtained the eigenvalues and eigenvectors of a Heisenberg model in experiment. In the last section of this chapter, we introduced some further proposals of simulating quantum chemistry, and gave the experimental expectations.

## 5. Chapter 7

In summary, we have completed many experiments of demonstrating the superiority of quantum computation. Although these experiments are proof-of-principle, we expect that some techniques and methods used in these experiments can be expanded to other systems, and provide some confidences in the way towards real quantum computers.

Keywords: Quantum Information Processing, Quantum Computation, Quantum Simulation, Quantum Algorithm, Nuclear Magnetic Resonance



# 目 录

摘 要	I
ABSTRACT	III
目 录	VII
表 格	IX
图表目录	XII
第一章 量子模拟	1
1.1 量子模拟理论	1
1.1.1 量子模拟的提出及发展	1
1.1.2 量子模拟的定义	3
1.1.3 数字量子模拟	3
1.1.4 类比量子模拟	6
1.1.5 量子模拟的资源要求	7
1.1.6 退相干和纠错	8
1.2 量子模拟的物理实现	8
1.2.1 中性原子	9
1.2.2 极性分子	9
1.2.3 离子阱	11
1.2.4 核磁共振	12
1.2.5 光子	12
1.2.6 量子点	13
1.2.7 超导线路	14
1.3 量子模拟的应用	15
1.3.1 凝聚态物理	16
1.3.2 高能物理	20
1.3.3 宇宙学	21
1.3.4 原子物理	21
1.3.5 量子化学	22

1.3.6 开放系统 .....	23
1.3.7 量子混沌 .....	23
1.3.8 其它 .....	23
1.4 量子模拟的展望 .....	23
1.5 小结 .....	24
参考文献 .....	27



## 表格



## 插图

- 1.1 在 2008 年欧盟关于量子计算的战略规划中, 计划五年之内量子模拟上要找到一个超越经典的例子, 而十年内量子模拟要成为科学研究上的一个关键问题。现在距离五年目标它们还剩一年。 . . . . . 2
- 1.2 量子模拟过程的示意图。量子系统从  $|\phi(0)\rangle$  经过  $U = e^{-iH_{\text{sys}}t}$  演化到了  $|\phi(t)\rangle$ , 量子模拟器则从  $|\psi(0)\rangle$  经过  $U' = e^{-iH_{\text{sim}}t}$  演化到  $|\psi(t)\rangle$ 。同时,  $|\phi(0)\rangle$  和  $|\psi(0)\rangle$ ,  $|\phi(t)\rangle$  和  $|\psi(t)\rangle$  之间存在映射关系。虽然量子系统本身不可控制 (或者实验上很难控制), 但量子模拟器是可以轻易操控的, 或者说, 初态  $|\psi(0)\rangle$  容易制备, 演化  $U'$  容易控制, 末态  $|\psi(t)\rangle$  容易测量。有颜色的箭头表示是可控操作。 . . . . . 4
- 1.3 和一般的初态制备不同, 这里的方法是把目标态制备到初态。取自 [Phys. Rev. A 79, 042335 (2009)<sup>[13]</sup>] . . . . . 5
- 1.4 (a) 测量期望值  $\langle U^\dagger V \rangle$  的线路图。辅助比特制备到  $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ 。(b) 测量厄米算符  $\hat{Q}$  的谱的线路图。取自 [Phys. Rev. A 65, 042323 (2002)<sup>[17]</sup>] . . . . . 6
- 1.5 DQS 和 AQS 之间的比较。 . . . . . 7
- 1.6 模拟通过双势阱进行相互作用的  $N$  个粒子的资源要求。(a) 需求的比特数: 对每个自由度需要  $n$  个 qubit, 每个辅助位则需要  $m$  个 qubit, 而一共需要 4 个辅助位, 因此总共需要  $n(3N-6) + 4m$  个 qubit。水平的虚线代表一个 300-qubit 的量子计算机。(b) 需求的逻辑操作数量。一台 300-qubit 的量子计算机大概需要十亿个逻辑操作。取自 [PNAS 105, 18681 (2008)<sup>[12]</sup>]。 . . . . . 10
- 1.7 利用中性原子模拟超流到 Mott 绝缘体的相变。隧穿能量和本地相互作用能量的比率依靠晶格势场深度来调节, 以确保相变发生。取自 [Science, 326, 108 (2009)<sup>[7]</sup>]。 . . . . . 10
- 1.8 利用反向传播的激光束可以产生光晶格中的极性分子。蓝色箭头为激光波矢, 红色和绿色箭头分别为 DC 和 AC 微波场。取自 [arXiv:0805.1896 (2008)<sup>[48]</sup>]。 . . . . . 11
- 1.9 利用离子阱模拟磁性的量子相变。单个自旋依靠射频场把内部能级耦合起来模拟, 而自旋-自旋相互作用通过态依赖的光偶极力产生。取自 [Nature Phys. 4, 757 (2008)<sup>[3]</sup>]。 . . . . . 12

1.10	(a) 利用一个探测 qubit 测量量子相变的网络图。W 是 Walsh-Hadamard 变换。(b) NMR 实验所用的 3-qubit 样品 Diethylfluoromalonate。(c) 测量量子态交叠度的脉冲序列图。取自 [Phys. Rev. Lett. 100, 100501 (2008) <sup>[59]</sup> ]。 . . . . .	13
1.11	测量任意子分数统计的实验装置一束紫外激光通过三个 BBO 后可以产生三对纠缠的光子。取自 [Phys. Rev. Lett. 102, 030502 (2009) <sup>[24]</sup> ]。 . . . . .	13
1.12	$H_2 + H \rightarrow H + H_2$ 化学反应的示意图 (上半部分) 以及耦合量子点系统中电子的重新分配 (下半部分)。取自 [Euro. Phys. Lett. 80, 67008 (2007) <sup>[20]</sup> ]。 . . . . .	14
1.13	利用介观线路模拟 Sisyphus(希腊神话中的科林斯王) 冷却。1 $\rightarrow$ 2 $\rightarrow$ 3 $\rightarrow$ 4 的循环模拟了原子物理中的 Sisyphus 冷却, 以及希腊神话中科林斯王的命运。取自 [Nature Phys. 4, 589 (2008) <sup>[68]</sup> ]。 . . . . .	15
1.14	量子模拟在凝聚态物理中的应用 (上)。蓝色字体为实验进展, 黑色字体为理论进展。 . . . . .	17
1.15	量子模拟在凝聚态物理中的应用 (下)。蓝色字体为实验进展, 黑色字体为理论进展。 . . . . .	19
1.16	量子模拟在高能物理中的应用。蓝色字体为实验进展, 黑色字体为理论进展。 . . . . .	20
1.17	量子模拟在宇宙学中的应用。蓝色字体为实验进展, 黑色字体为理论进展。当然目前没有任何实验进展。 . . . . .	21
1.18	量子模拟在原子物理中的应用。蓝色字体为实验进展, 黑色字体为理论进展。 . . . . .	22
1.19	量子模拟在量子化学中的应用。蓝色字体为实验进展, 黑色字体为理论进展。 . . . . .	22
1.20	量子模拟的一些相对“非主流”的应用。蓝色字体为实验进展, 黑色字体为理论进展。 . . . . .	24
1.21	(左) 日本电气公司 (NEC) 2002 年开发的超级计算机“地球模拟器”。(右) PlayStation3 被北卡罗来纳州立大学教授 Frank Mueller 做成阵列来跑计算, 足见其计算能力之强, 但离谣传的模拟地球依然差距不小。 . . . . .	24

## 第1章 量子模拟

当 1946 年世界上第一台电子计算机 ENIAC (Electronic Numerical Integrator And Computer) 诞生时, 这个占地 170 平方米, 重达 30 吨的庞然大物仅仅能在一秒中之内进行 5000 次加法运算, 而现在富士通研发的超级计算机 K-Computer 可以每秒执行 8.16 千万亿次浮点运算! 万事开头难, 在 40 年代总投资高达 48 万美元的巨款最终促使了 ENIAC 的诞生, 开启了一个新的时代, 很难想象短短六十多年间计算机硬件已经进化到了如此的程度。

让我们转到量子计算的话题上来。其实当今量子计算的境遇和当时 ENIAC 诞生前很像: 各国都在拨款, 全世界都在竞赛, 希望打赢这场新的信息战。Shor 的大数分解算法和量子通信中的 BB84 协议让人们认识到了量子计算机无比广阔的前景, 但同时几十年来实验技术的滞后又让人们不禁泛起一丝疑虑。至少目前为止, 量子计算的水平还是远远落后于经典计算的, 所以人们迫切需要找到一个例子来打败经典计算机, 重拾人们的信心。

话虽如此, 要做到这一点依然十分困难。如果我们从量子算法着手, 比如 Shor 算法, 我们大概需要成百上千个 qubit 才有希望打败经典计算, 这个难度就和 40 年代的人妄想着建造一台可以每秒执行千万次运算的电子计算机一样。幸好, 量子计算除了量子算法这个大领域以外, 还有另外一个很有影响力的领域—量子模拟。现在已经证明, 利用量子模拟的手段, 我们只需要 30 到 100 个 qubit 就可以超越经典计算! 因此, 量子模拟的相关研究是实验上非常热门的领域, 因为每个人都希望自己是第一个真正看到量子计算优越性的人。

本章中, 我们将系统全面的介绍量子模拟这个领域, 从它的历史和发展说起, 阐述量子模拟的定义和分类, 以及它的物理实现和在各学科的应用。当然, 我们会紧跟量子模拟的实验进展, 给出未来几年量子模拟的发展前景。

### 1.1 量子模拟理论

“让我们建造一台充满量子力学气息的、依循量子力学规则的新型计算机吧。”

——理查德·费曼

#### 1.1.1 量子模拟的提出及发展

其实和著名的 Shor 算法比起来, 量子模拟的提出要早的多。

三十年前，也就是 1982 年，费曼就认识到如何模拟量子系统是非常有挑战性的问题<sup>[1]</sup>。这个问题根本上来说就是计算复杂度的问题：随着量子体系维度的增长，为了存储量子态所需的经典寄存器是指数增加的。不仅如此，模拟量子系统的演化也需要指数增长的逻辑门操作。这种“指数爆炸”困难是不可回避的，除非用一些经典随机或近似方法，例如 Monte Carlo 方法，平均场理论，密度泛函理论及格林函数方法等。但遗憾的是这些方法并不总是有效的，而且还面临许多限制。为了多存储一个自旋 1/2 的粒子，经典计算的存储空间就要加倍，毫无疑问即使对于今日的超级计算机来说模拟量子系统依然是非常头痛的。

上述问题的可能的解决方案也是费曼在同一篇文章中提出：利用基于量子力学规则建造的新型计算机应该可以<sup>[1]</sup>。在费曼的文章中并没有涉及具体的要用到什么函数或者什么手段，他只是猜测这种计算机应该是可以有效解决这类问题的。十多年后，Lloyd 终于证明一台量子计算机是可以作为普适的量子模拟器，来模拟这些问题的<sup>[2]</sup>。当然，针对某些特殊的问题有时并不需要一台真正的量子计算机，一些简单的设备也是有可能模拟需求的问题的（当然这些肯定不是普适的量子模拟器）。

最近量子模拟变得热门主要是两个方面的原因。第一，理论上很多学科的问题，只要牵涉到量子行为，都可以通过量子模拟来解决。不仅仅是物理和化学，生物，材料学等看似毫不相干的学科中也已经诞生了很多量子模拟的方案。比如在凝聚态物理中，量子模拟就可以用来研究量子相变，量子磁体，高温超导等。还有高能物理，计算量子化学，甚至宇宙学等等众多有影响力的领域都能和量子模拟扯上关系。第二，目前实验上的相干控制技术已经足以给出一些演示性的实验来验证量子模拟理论，而且很多研究组也已经在研究十个 qubit 以上的量子模拟器。实验上的代表性工作参见文献<sup>[3? -6]</sup>，这些工作也将在后面的部分详细叙述。有了这些漂亮的实验，人们有理由相信未来的几年内量子模拟会取得突破性进展的，超越经典也不是不可能完成的任务。

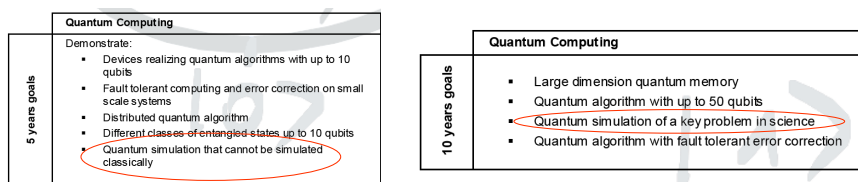


图 1.1 在 2008 年欧盟关于量子计算的战略规划中，计划五年之内量子模拟上要找到一个超越经典的例子，而十年内量子模拟要成为科学研究上的一个关键问题。现在距离五年目标它们还剩一年。

### 1.1.2 量子模拟的定义

我们这里给出一个并不十分严格的量子模拟的定义：

“量子模拟就是用量子力学的方法来模拟量子系统。”

也就是说，我们可以通过一个可控的量子系统来模拟其他量子系统<sup>[7]</sup>。假设要模拟的系统的量子态为  $|\phi\rangle$ ，该系统经过么正演化

$$U = e^{-iH_{\text{sys}}t} \quad (1.1)$$

从初态  $|\phi(0)\rangle$  演化到了  $|\phi(t)\rangle$ 。其中， $H_{\text{sys}}$  是系统的哈密顿量。而量子模拟器中作为一个可控的量子系统，其初态为  $|\psi(0)\rangle$ ，演化算子为

$$U' = e^{-iH_{\text{sim}}t}. \quad (1.2)$$

这里  $H_{\text{sim}}$  是模拟器的哈密顿量，而经过该演化后，模拟器的末态变为  $|\psi(t)\rangle$ ，并且这个态是容易测量的。如果在这两个量子系统间存在一个映射，即  $|\phi(0)\rangle$  和  $|\psi(0)\rangle$ ， $|\phi(t)\rangle$  和  $|\psi(t)\rangle$  之间存在映射关系，那么原量子系统就可以被模拟，其表示可以见下图。

量子模拟主要分为两类，数字量子模拟 (digital quantum simulation, DQS) 和类比量子模拟 (analog quantum simulation, AQS)，这两个概念非常类似于电子学中的数字电路和模拟电路的概念，下面就分别介绍这两种量子模拟形式。

### 1.1.3 数字量子模拟

为了得到模拟器的末态，我们必须把一个么正操作作用到初态上，即

$$|\psi(t)\rangle = U |\psi(0)\rangle = e^{-iHt} |\psi(0)\rangle. \quad (1.3)$$

由于  $U$  可能是多比特的非常复杂的操作，我们一般会用近似把其展开成多个指数项  $e^{-iH_l t}$  的乘积，其中  $H_l$  是哈密顿量中的局域相互作用 (当然前提是该哈密顿量可以写成一系列的局域哈密顿量的和的形式)。然后，我们可以利用单比特旋转门和两比特 CNOT 门把整个  $U$  展开，就可以得到末态  $|\psi(t)\rangle$ ，从而实现量子模拟任务。这种模拟形式和基于门的量子计算非常类似，也被称作“**数字量子模拟**”。

理论上，任何的么正操作总可以用一系列的逻辑门展开，因此原则上来说任何操作都可以被模拟，也就是数字量子模拟是普适的。但实际情况是，并不

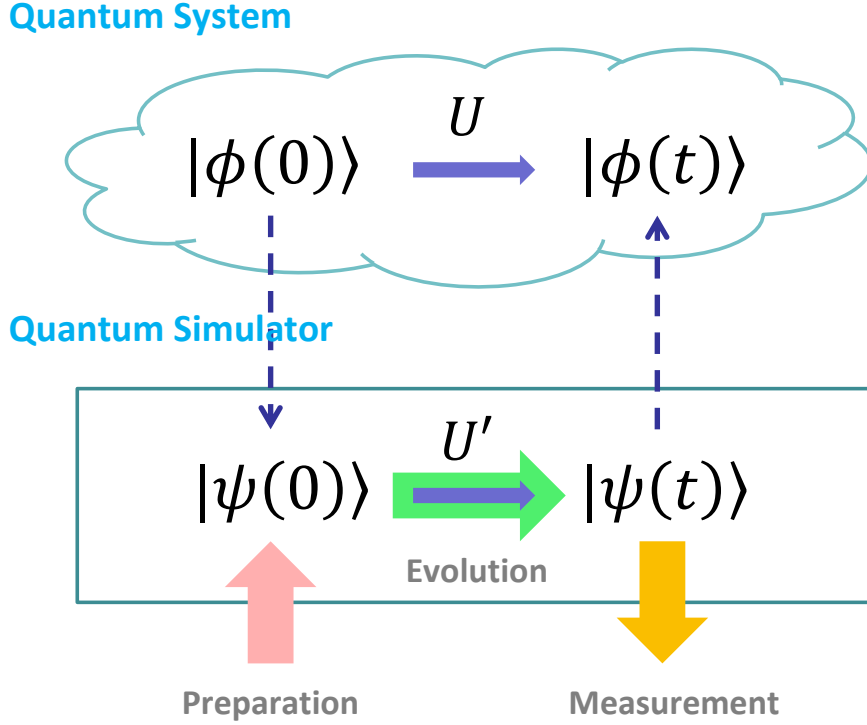


图 1.2 量子模拟过程的示意图。量子系统从  $|\phi(0)\rangle$  经过  $U = e^{-iH_{\text{sys}}t}$  演化到了  $|\phi(t)\rangle$ ，量子模拟器则从  $|\psi(0)\rangle$  经过  $U' = e^{-iH_{\text{sim}}t}$  演化到  $|\psi(t)\rangle$ 。同时， $|\phi(0)\rangle$  和  $|\psi(0)\rangle$ ， $|\phi(t)\rangle$  和  $|\psi(t)\rangle$  之间存在映射关系。虽然量子系统本身不可控制（或者实验上很难控制），但量子模拟器是可以轻易操控的，或者说，初态  $|\psi(0)\rangle$  容易制备，演化  $U'$  容易控制，末态  $|\psi(t)\rangle$  容易测量。有颜色的箭头表示是可控操作。

是所有的么正操作都可以有效展开的（仅消耗多项式资源），而且有效拆解逻辑门本身就是一个困难的问题。另外一个问题是， $U$  的分解是通过近似方式得到的，所以为了得到高精度的结果，我们必须采用更高阶的近似公式，但这样做会让逻辑门的个数大量增加。

一般来说，DQS 的过程分为以下三步：初态制备，么正演化及测量读出。下面我们将详细讨论这三个步骤<sup>[8]</sup>。

### 1. 初态制备

DQS 的第一步就是把量子寄存器从  $|000\dots\rangle$  态上制备到  $|\psi(0)\rangle$  上。在大多数情况下寻找一个有效的算法是非常困难的，只有一些特定的问题可以做到有效制备初态，比如从一个非对称态出发，可以通过多项式资源制备到反对称的  $n!$  个叠加态<sup>[9]</sup>；如何制备  $N$  个粒子的费米态

$$|\psi(0)\rangle = \prod_{j=1}^N b_j^\dagger |v\rangle, \quad (1.4)$$

其中  $|v\rangle$  是真空态， $b_j^\dagger$  是费米算子<sup>[10,11]</sup>；有效制备常用的化学波函数<sup>[12]</sup>；利用



占据  $n$  个自旋轨道的  $m$  个电子有效制备分子系统的纯态<sup>[13]</sup> 等等。

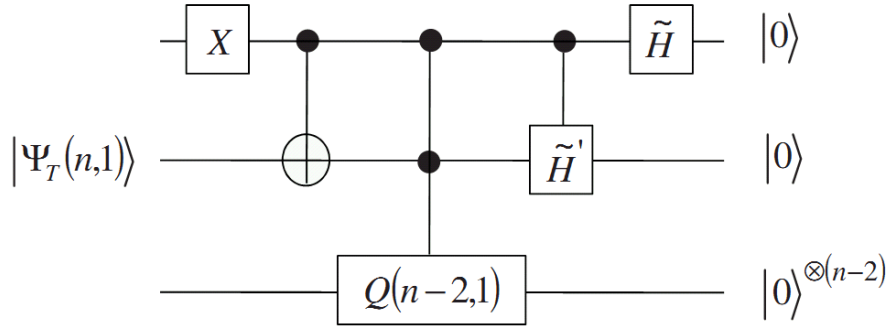


图 1.3 和一般的初态制备不同，这里的方法是把目标态制备到初态。取自 [Phys. Rev. A 79, 042335 (2009)<sup>[13]</sup>]

## 2. 么正演化

假设 DQS 的哈密顿量可以写成一系列局域哈密顿量的和

$$H = \sum_{l=1}^M H_l \quad (1.5)$$

比如 Hubbard 和 Ising 模型的哈密顿量就是这种形式。如果对所有的  $l$  和  $l'$ ，满足  $[H_l, H_{l'}] = 0$ ，那么有

$$U = \prod_l e^{-iH_l t}. \quad (1.6)$$

否则我们需要用一些近似手段，比如著名的 Trotter-Suzuki 公式<sup>[14]</sup>

$$U(\delta t) = \prod_{l=1}^M e^{-iH_l \delta t} + \mathcal{O}(\delta t^2). \quad (1.7)$$

当  $\delta t$  趋近于 0 时，

$$U(\delta t) \approx \prod_{l=1}^M e^{-iH_l \delta t}. \quad (1.8)$$

这种方法的缺点是高精度依赖于很小的  $\delta t$ ，那么也就会产生大量的逻辑门。目前也有很多文献重新强调 Trotter-Suzuki 公式的缺点<sup>[15,16]</sup>。

## 3. 测量读出

在得到末态  $|\psi(t)\rangle = U|\psi(0)\rangle$  后，我们必须进行测量来得到需要的信息。一般来说最常用的是量子态重构 (tomography) 技术，但它并不是可扩展的，所要求的资源也是随着体系的增大而指数增加的。为了避免这个问题，也有一些方案提出可以利用通过测量特定的物理参数得到想要的信息，比如相关函数或算符谱<sup>[10]</sup>，当然这些方法并不是普适的。

比如，为了测量期望值  $\langle U^\dagger V \rangle$ ，我们可以通过下图 (a) 中的线路来实现<sup>[17]</sup>。把一个辅助比特制备到  $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$  后，通过网络图演化后我们只需要测量辅助位的期望值  $\langle 2\sigma_+^a \rangle$  就可以得到想要的结果。第二个例子是描述如何测量一个厄米算符  $\hat{Q}$  的谱，我们依然可以通过添加辅助位  $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ ，并测量辅助位的期望值来实现。

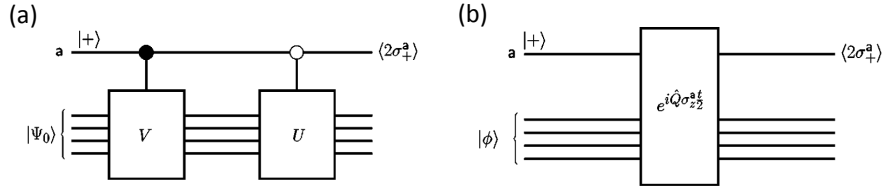


图 1.4 (a) 测量期望值  $\langle U^\dagger V \rangle$  的线路图。辅助比特制备到  $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ 。 (b) 测量厄米算符  $\hat{Q}$  的谱的线路图。取自 [Phys. Rev. A 65, 042323 (2002)]<sup>[17]</sup>

#### 1.1.4 类比量子模拟

另外一个模拟量子系统的途径就是用类比的方法，也就是“**类比量子模拟**”。被模拟系统的哈密顿量  $H_{sys}$  直接映射到模拟器的哈密顿量  $H_{sim}$  上，也就是

$$H_{sys} \longleftrightarrow H_{sim}. \quad (1.9)$$

一般来说，只有两个量子系统非常相似的时候才能用类比的方法，所以它不是普适的，AQS 的模拟精度取决于模拟器重现被模拟系统的演化过程的程度。尽管不是普适的，AQS 吸引人的地方在于它的物理要求较小，并容易在实验上实现。

寻找合适的映射是 AQS 的核心。一眼看上去，这个过程仿佛要比拆解逻辑门简单许多，但其实两者都很困难。如果模拟器和被模拟系统非常相近，当然 AQS 的实现会非常直观，遗憾的是大多数情况并不是这么理想。简单的例子比如描述晶格势场中玻色气体 (boson gas) 的哈密顿量形式是

$$H_{sim} = -J \sum_{i,j} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j + \sum_i \epsilon_i \hat{n}_i + \frac{1}{2} U \sum_i \hat{n}_i (\hat{n}_i - 1), \quad (1.10)$$

其中  $\hat{a}_i^\dagger$  和  $\hat{a}_i$  对应于第  $i$  个晶格上的产生和湮灭算符， $\epsilon_i$  是第  $i$  个晶格上由于原子的外部谐振限制产生的能量偏移。 $U$  是处于单个晶格上的两个原子间的互

斥作用。该哈密顿量模型的形式正好对应于 Bose-Hubbard 模型

$$H_{BH} = -J \sum_{i,j} (\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j + h.c.) - \mu \sum_i \hat{n}_i + \frac{1}{2} U \sum_i \hat{n}_i (\hat{n}_i - 1). \quad (1.11)$$

因此这两个系统之间的类比模拟是非常直接的，但是大多数情况下就没这么直观了。

AQS 中的初态制备和测量读出至今没有文献进行过详尽讨论。这是因为我们已经假设被模拟体系和模拟器之间已经非常相似，那么初态制备应该是可以有效实现的。同时，测量模拟器的某些物理参量也可以得到被模拟系统的信息。尽管如此，AQS 中的初态制备和测量读出过程依然是以后值得研究的问题。

下图是一个关于 DQS 和 AQS 之间的比较：

	DQS	AQS
模拟手段	逻辑门拆解	哈密顿量演化
输出结果	逻辑量子态	物理量子态
决定因素	作用的qubit数目	要求的实验精度
计算中的误差控制	可以	不可
误差影响的大小	大	小
要求的保真度	高	低
辅助qubit	有	无
硬件/软件	普适目的	特定问题
模拟目标	任何问题	特定集合

图 1.5 DQS 和 AQS 之间的比较。

#### 1.1.5 量子模拟的资源要求

为了实现有效的量子模拟我们到底需要多少个 qubit？这个问题的答案依被模拟对象的不同而不同。一般来说 AQS 对 qubit 的数目需求较少，当然 DQS 中也存在一些只用几十个甚至几个 qubit 就能解决的问题。例如，在少于十个 qubit 的情况下，我们可以模拟量子混沌<sup>[18,19]</sup>，化学反应<sup>[20]</sup>，Dirac 粒子<sup>[5,21,22]</sup>，Unruh 效应<sup>[23]</sup>，任意子<sup>[24,25]</sup> 等等。而用十几个 qubit，我们可以模拟自旋玻璃<sup>[26,27]</sup> 或者分子能级<sup>[28]</sup>。现在认为要超越经典计算的话我们只需要 30-100 个 qubit 的量子模拟器<sup>[28]</sup>。

一般来说，DQS 需要的资源和操控都要高于 AQS。而且在 DQS 中，提高

精度的代价是指数增长的逻辑操作<sup>[15]</sup>。不过量子模拟的优势之一就是不需要很高的精度，所以这依然是可以达成的。

我们举一个量子模拟对资源要求的例子：模拟通过双势阱进行相互作用的  $N$  个粒子<sup>[12]</sup>。对每个自由度，该模拟都需要  $n$  个 qubit，每个辅助位则需要  $m$  个 qubit，而为了模拟 Coulomb 势场，又需要 4 个辅助位。所以我们一共需要  $n(3N-6)+4m$  个 qubit。Coulomb 势场可以用  $O(N^2m^2)$  步来模拟，因此这个化学反应过程可以用  $O(N^2m^2)$  模拟，比起经典计算机这已经是指数加速了。但另一方面来看，为了超越经典计算机我们需要至少 100 个 qubit 和 200,000 个逻辑门！

### 1.1.6 退相干和纠错

虽然量子模拟和量子计算和环境的相互作用方式是相似的，但量子模拟中退相干并不是一个非常严重的问题，因为量子模拟需求的精度相对不高。更有趣的是，甚至有建议模拟器的退相干还可以用来粗略调制被模拟系统的退相干<sup>[2]</sup>。Tseng 等也通过理论计算和实验证明<sup>[29]</sup>，在开放系统的量子模拟中可以通过改变被模拟系统和模拟器之间的映射方式来研究模拟器的退相干机制。原则上，我们可以完全分析退相干是如何影响模拟过程的，然后通过选择合适的映射方式就可以调制模拟器的有效退相干。同时利用子空间的概念我们也可以减小退相干的影响。而且，理论和实验上也表明退相干可以对临界系统的信息获取有一定的作用<sup>[30,31]</sup>。

虽然量子模拟中对精度的要求比量子算法要低，但误差还是要尽量减小的。比如为了模拟薛定谔方程我们要最小化幅度的误差<sup>[32]</sup>，而对一个局域系统来说其哈密顿量以及所选择 qubit 的微小改变都会指数上影响其模拟<sup>[33]</sup>，而多体相互作用的哈密顿量模型中两体相互作用和局域控制操作的噪声影响也被研究过<sup>[34]</sup>。不过总体来说关于这方面研究还是偏少。

## 1.2 量子模拟的物理实现

“现代高能物理发展到了量子物理以后，有很多理论根本无法做实验，在家用纸和笔来算已经跟数学家做的差不多了。”

——丘成桐

量子模拟的物理实现要求一个可控的量子系统。对 DQS 来说，控制的精度要求更高，AQS 相对要低一些。理论上，任何可以用作量子计算机的物理系统都可以用来作量子模拟。反过来，即使不能作为量子计算机的体系也有可能执

行 AQS，比如 BEC 中的声波传播子可以用来模拟宇宙膨胀<sup>[35]</sup>。当然关于潜在的量子计算方案我们已在第一章讨论过，本节我们将主要关注量子模拟的物理实现。

### 1.2.1 中性原子

光晶格中的中性原子<sup>[36]</sup> 非常适合用作模拟凝聚态系统<sup>[37,38]</sup>。自从利用光晶格中的冷原子模拟超流到 Mott 绝缘体的相变<sup>[4]</sup> 的第一个实验以来，中性原子体系模拟凝聚态的工作越来越多。理论和实验的综述性回顾可以分别参见参考文献<sup>[36,37]</sup>。

在中性原子体系中，可调节的参数非常多，所以该系统的使用非常灵活。这些可调节参数包括：隧穿能量，本地相互作用，近邻相互作用，长程相互作用，多粒子相互作用，外部势场，Rabi 振荡等。而光晶格中最常见的哈密顿量形式是 Hubbard 型<sup>[37]</sup>：

$$H = H_{hop} + H_{int} + H_{pot} + H_{Rabi}, \quad (1.12)$$

其中  $H_{hop}$  是原子从一个晶格隧穿到另一个晶格的哈密顿量， $H_{int}$  是相互作用项， $H_{pot}$  是原子感受到的所有势场， $H_{Rabi}$  则是原子的内部跃迁哈密顿量。从这个哈密顿量形式出发很多问题都可以被模拟，包括 DQS 和 AQS。量子模拟主要通过改变晶格势场的深度或者通过 Feshbach 共振改变原子-原子间的相互作用来实现，不过光晶格中的单个 qubit 寻址非常困难，也导致该体系实现一些量子模拟任务时有些不便。

目前除了模拟超流到 Mott 绝缘体的相变的实验外，其他的利用中性原子的量子模拟实验包括 Tonks-Girardeau Gas 的产生<sup>[39]</sup>，BSC-BEC 交叉的观测<sup>[40]</sup>，无序系统的研究<sup>[41,42]</sup> 等等。

### 1.2.2 极性分子

极性分子可以用来模拟拓扑序<sup>[43,44]</sup>，其优势在于通过控制外加 DC 和 AC 的微波场，它的电偶极项可以产生非常强的偶极-偶极相互作用，非常适合研究强关联系统。利用微波激发，偶极-偶极相互作用，自旋-轨道耦合等，极性分子可以模拟很多自旋模型，包括引申的 Hubbard 模型<sup>[45]</sup>，量子相变<sup>[46]</sup>，或者三角晶格中的超固体 (supersolid) 相<sup>[47]</sup> 等等。关于利用极性分子模拟凝聚态物理的综述性文献可以参见 Pupillo 等在 arXiv 上的文章<sup>[48]</sup>。

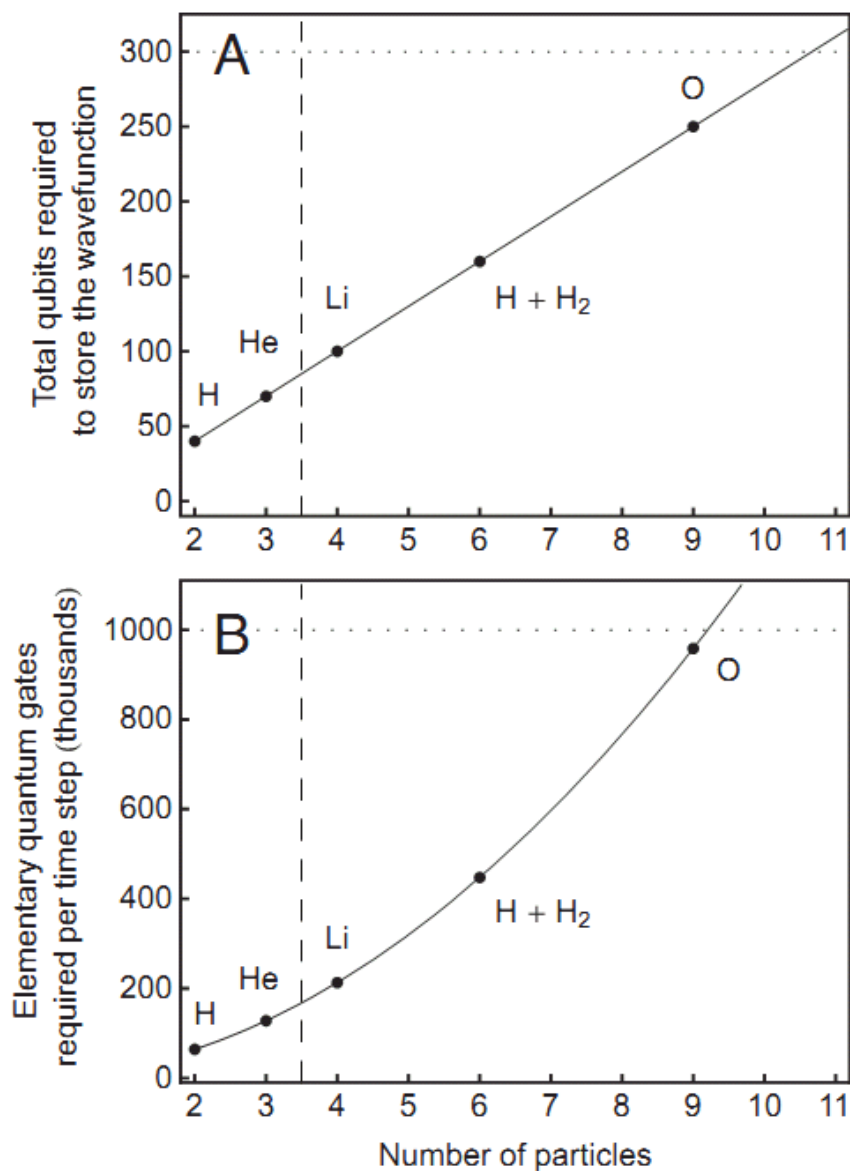


图 1.6 模拟通过双势阱进行相互作用的  $N$  个粒子的资源要求。(a) 需求的比特数：对每个自由度需要  $n$  个 qubit，每个辅助位则需要  $m$  个 qubit，而一共需要 4 个辅助位，因此总共需要  $n(3N - 6) + 4m$  个 qubit。水平的虚线代表一个 300-qubit 的量子计算机。(b) 需求的逻辑操作数量。一台 300-qubit 的量子计算机大概需要十亿个逻辑操作。取自 [PNAS 105, 18681 (2008)<sup>[12]</sup>]。

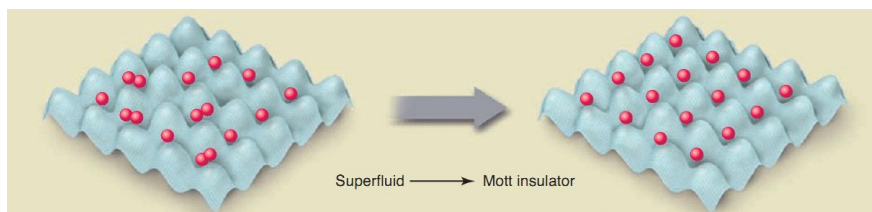


图 1.7 利用中性原子模拟超流到 Mott 绝缘体的相变。隧穿能量和本地相互作用能量的比率依靠晶格势场深度来调节，以确保相变发生。取自 [Science, 326, 108 (2009)<sup>[7]</sup>]。

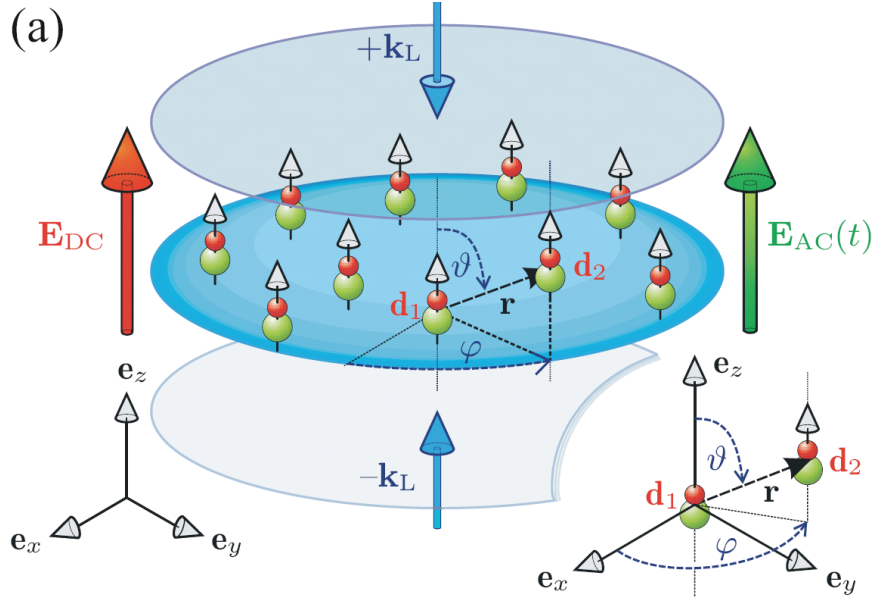


图 1.8 利用反向传播的激光束可以产生光晶格中的极性分子。蓝色箭头为激光波矢，红色和绿色箭头分别为 DC 和 AC 微波场。取自 [arXiv:0805.1896 (2008)<sup>[48]</sup>]。

### 1.2.3 离子阱

离子阱体系的哈密顿量形式中可控参数也比较多，因此也可以用 DQS 和 AQS。利用激光激发将内部能级和振动模式耦合起来的哈密顿量形式为

$$H = i\hbar\eta\Omega[e^{i\phi}\sigma_+a - e^{-i\phi}\sigma_-a^\dagger], \quad (1.13)$$

其中  $\Omega$  是 Rabi 跃迁频率， $\sigma_+$  和  $\sigma_-$  是两能级的升降算子， $\eta$  是 Lamb-Dicke 参数， $a^\dagger$  和  $a$  是振动模式中的产生和湮灭算子， $\phi$  是激光相位。从这个形式中可以看出单比特门，两比特门甚至三比特门 (例如 Toffoli) 都可以实现。

离子阱中的第一个量子模拟方案可以追溯到 1998 年<sup>[49]</sup>，第一个实验则是 2002 年的非线性干涉仪的模拟<sup>[50]</sup>。此外，离子阱还可以用来模拟顺磁性到铁磁性的相变<sup>[3]</sup>，自旋 1/2 系统中的对相互作用<sup>[51]</sup>，相互作用玻色子模型<sup>[52]</sup>，开放系统<sup>[53]</sup>，Dirac 粒子<sup>[5]</sup>，甚至宇宙膨胀中的 Unruh 效应<sup>[23]</sup> 等。

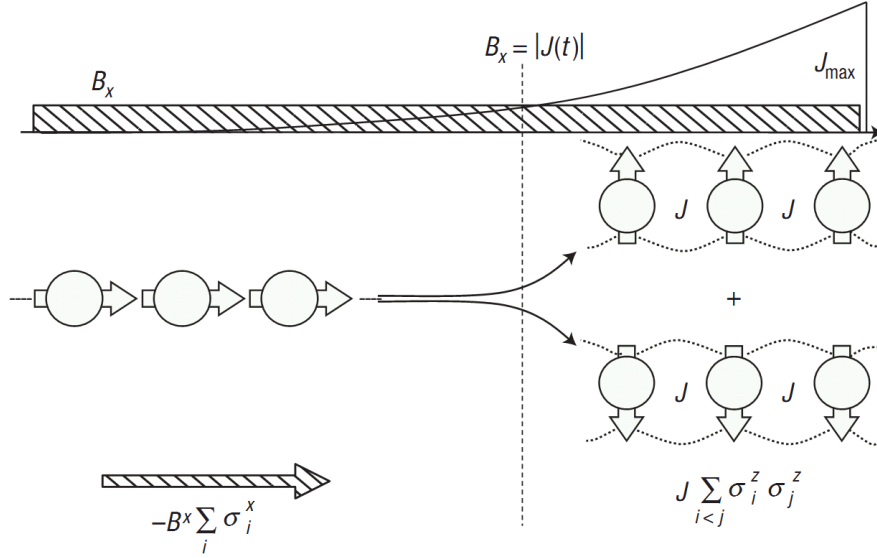


图 1.9 利用离子阱模拟磁性的量子相变。单个自旋依靠射频场把内部能级耦合起来模拟，而自旋-自旋相互作用通过态依赖的光偶极力产生。取自 [Nature Phys. 4, 757 (2008)<sup>[3]</sup>]。

#### 1.2.4 核磁共振

用核磁共振手段操控的核自旋是最早在实验上执行量子模拟的体系之一。NMR 中哈密顿量的形式一般是

$$H = -\hbar\gamma I \cdot B + \sum_{i>j} I_i \cdot J_{ij} I_j, \quad (1.14)$$

其中  $\gamma$  是旋磁比， $I$  是角动量算符， $B$  是外加磁场， $J_{ij}$  是自旋-自旋之间的耦合相互作用。NMR 中的技术非常成熟，但它主要的缺点在于可扩展性。虽然固体 NMR 在某种意义上可以克服这个问题，但在高维情况下。单比特的寻址以及测量依然非常困难。不过尽管如此，NMR 依然非常适合作为小体系量子模拟任务的测试平台，包括 DQS 和 AQS。

最早的 NMR 量子模拟实验是利用核自旋模拟谐振子和非谐振子的动力学行为<sup>[54]</sup>。其他的一些实验包括模拟三体相互作用<sup>[55]</sup>，开放系统<sup>[56]</sup>，量子混沌<sup>[19]</sup>，Fano-Anderson 哈密顿量<sup>[57]</sup>，量子相变<sup>[58,59]</sup>，哈密顿量对模型<sup>[60]</sup>，量子化学等等<sup>[61-63]</sup>。

#### 1.2.5 光子

由于光子体系的操控灵活性非常低，而且可扩展性也非常有限，所以利用光学体系的量子模拟实验非常少。比较有代表性的工作有量子混沌<sup>[18]</sup>，任意子



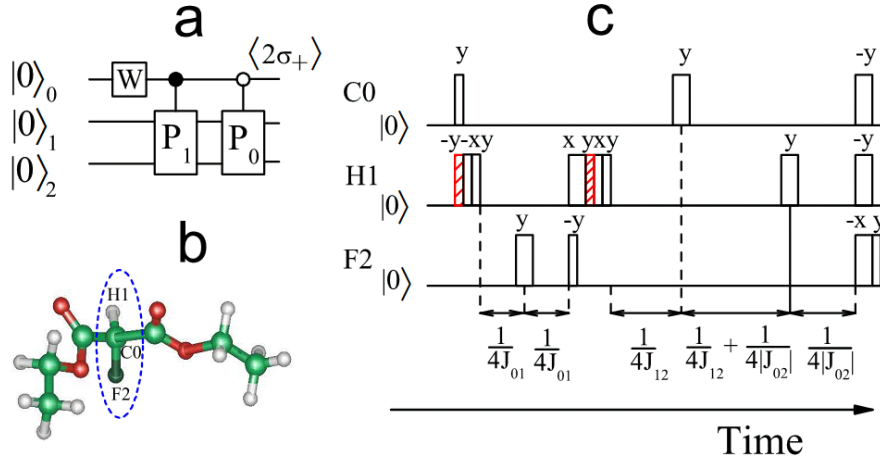


图 1.10 (a) 利用一个探测 qubit 测量量子相变的网络图。W 是 Walsh-Hadamard 变换。(b) NMR 实验所用的 3-qubit 样品 Diethyl-fluoromalonate。(c) 测量量子态交叠度的脉冲序列图。取自 [Phys. Rev. Lett. 100, 100501 (2008)<sup>[59]</sup>]

的分数统计<sup>[24]</sup>，以及氢分子基态能级模拟的实验<sup>[6]</sup>。

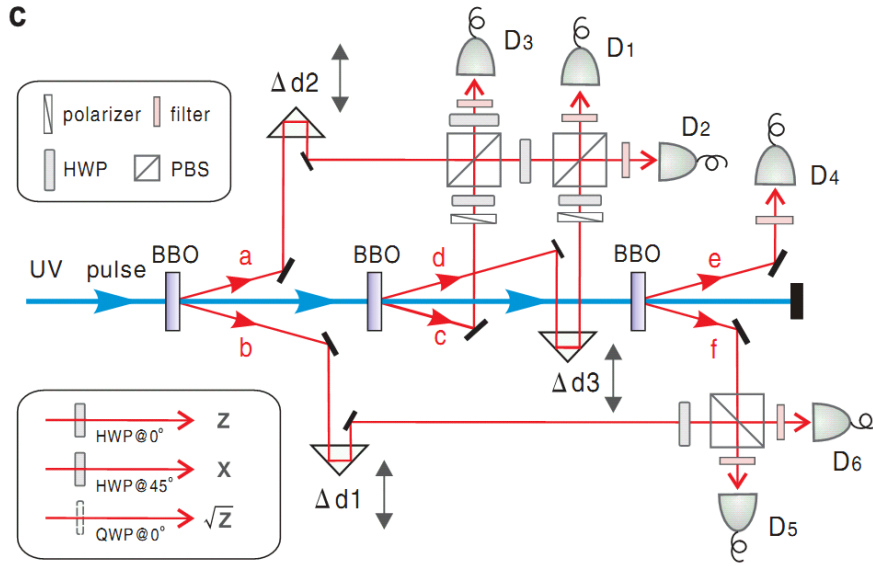


图 1.11 测量任意子分数统计的实验装置一束紫外激光通过三个 BBO 后可以产生三对纠缠的光子。取自 [Phys. Rev. Lett. 102, 030502 (2009)<sup>[24]</sup>]

### 1.2.6 量子点

半导体量子点中的电子自旋<sup>[64]</sup>也是可以用来作量子模拟的。由于量子点是半导体器件，其激发被限制在一维或二维的很小的区域上。一旦该区域的大小和电荷载体的波长大致相等，就有了分离的能级结构，此时量子点的行为就非常类似于一个真正的原子。同时，量子点的操控也比较灵活，而且技术上用光

激发也比较容易，因此是非常合适的实验量子模拟体系。量子点的哈密顿量一般形式为

$$H = \sum_{j=1}^n \mu_B g_j(t) B_j(t) \cdot S_j + \sum_{1 \leq j < k \leq n} J_{jk}(t) S_j \cdot S_k, \quad (1.15)$$

其中第一个求和项是外加磁场引起的能量，第二个求和项是加在量子点之间的栅电压产生的隧穿效应引起的相互作用哈密顿量。相对于囚禁在光晶格中的原子，量子点的接近 Fermi 温度的极低温要求可以实现自然的长程 Coulomb 相互作用<sup>[65]</sup>。

量子点中可以执行的量子模拟任务有 Fermi-Hubbard 模型<sup>[65]</sup>，高温超导体中的 CuO 平面<sup>[66]</sup>，甚至化学反应<sup>[20]</sup> 等等。

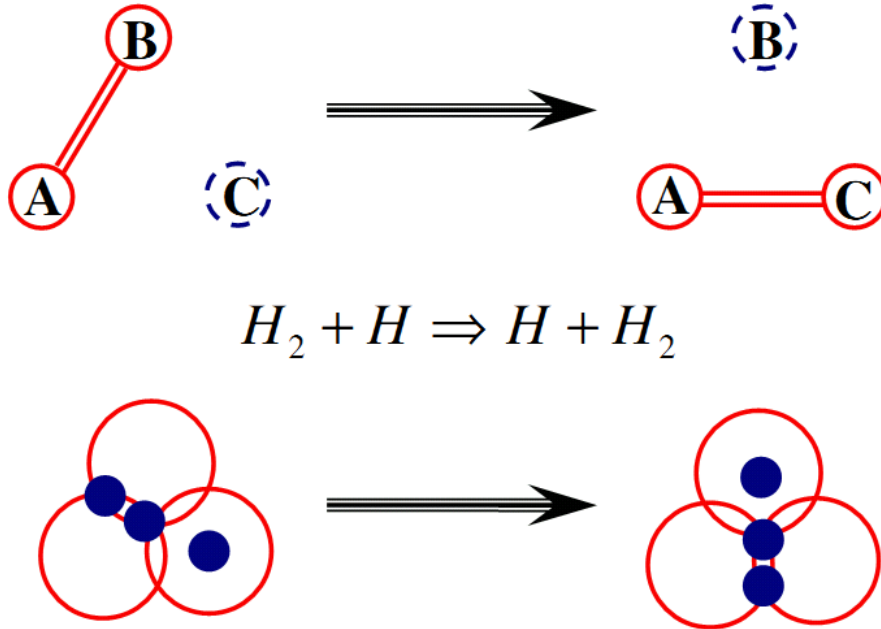


图 1.12  $H_2 + H \rightarrow H + H_2$  化学反应的示意图 (上半部分) 以及耦合量子点系统中电子的重新分配 (下半部分)。取自 [Euro. Phys. Lett. 80, 67008 (2007)<sup>[20]</sup>]。

### 1.2.7 超导线路

虽然超导线路是肉眼可见的，但它表现出了很强的量子行为，因此可以被理解为“模拟原子”。和真正的原子比起来，超导线路中的特征频率和一些其他参数都可以被精心设计和构造，比如共振频率可以通过外加参数调制，耦合强度则可以依据实验要求随时开关。通过电容 (电感) 耦合起来的电荷 (磁通) qubit 的哈密顿量可以写成

$$H = - \sum_{i=1}^N \frac{\Delta_i}{2} \sigma_i^z - \sum_{i,j} J_{ij} \sigma_i^x \sigma_j^x, \quad (1.16)$$

其中  $\Delta_i > 0$  是能级劈裂， $J_{ij}$  是耦合强度。超导线路中的单个比特控制和测量都都已经解决的很好，但可扩展性问题依然有待解决。

除了最早的观测通过量子涡流形成的一维 Mott 绝缘体<sup>[67]</sup>的工作外，超导线路还可以用来模拟原子物理和量子光学中<sup>[68]</sup>的许多现象，蜂巢状晶格上的 Kitaev 模型<sup>[69]</sup>，Anderson 和 Kondo 模型<sup>[70]</sup>，可调材料<sup>[71]</sup>等等。

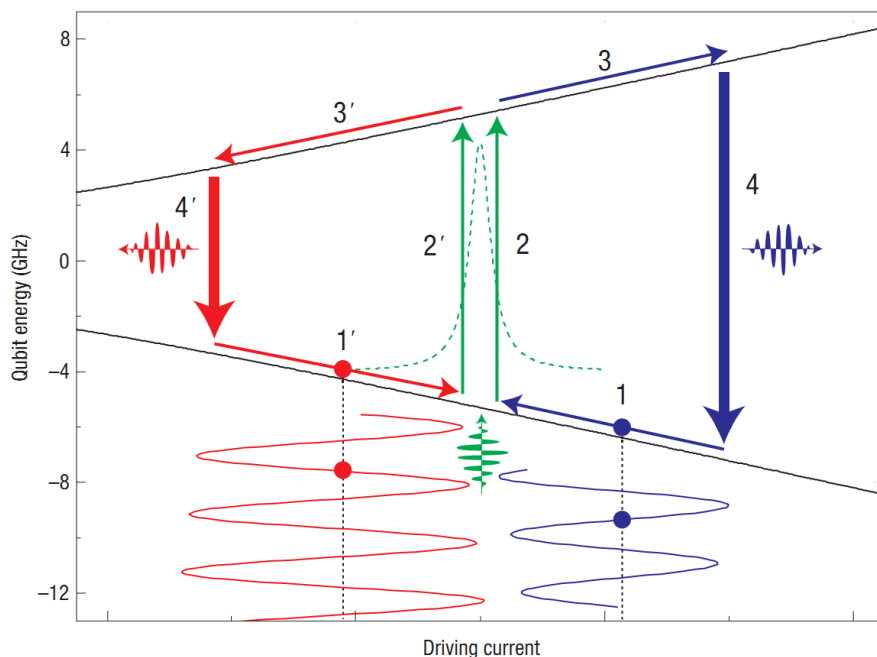


图 1.13 利用介观线路模拟 Sisyphus(希腊神话中的科林斯王) 冷却。1  $\rightarrow$  2  $\rightarrow$  3  $\rightarrow$  4 的循环模拟了原子物理中的 Sisyphus 冷却，以及希腊神话中科林斯王的命运。取自 [Nature Phys. 4, 589 (2008)<sup>[68]</sup>]

### 1.3 量子模拟的应用

“每引入一个方程式，就会使读者减少一倍。”

——史蒂芬·霍金

从前面对量子模拟领域的介绍来看，量子模拟至少在物理和化学上肯定有很广泛的应用。不仅如此，它在生物和材料学，甚至宇宙学上也能解决一些经典计算上难以处理的问题。特别的，如果是模拟量子系统，量子模拟器更是可以预言一些新结论，测试一些新模型，而这些都是经典模拟方法做不到的。本节我们就将介绍到底有哪些困难的问题可以用量子模拟解决。

### 1.3.1 凝聚态物理

凝聚态物理中存在非常多种经典上难以处理的多体问题，下面我们将具体讨论这些问题。

#### 1. Hubbard 模型

对于存在于一个晶格上的相互作用的粒子来说，Hubbard 模型是最简单的模型。但是，在大量粒子及高维的情况时，这个问题就很难在经典上处理了。通过 DQS 我们可以有效模拟 Hubbard 模型。针对如何获得费米 Hubbard 哈密顿量的能级谱

$$H_H = - \sum_{(i,j);\sigma} [t_x(a_{(i,j);\sigma}^\dagger a_{(i+1,j);\sigma} + a_{(i+1,j);\sigma}^\dagger a_{(i,j);\sigma}) + t_y(a_{(i,j);\sigma}^\dagger a_{(i,j+1);\sigma} + a_{(i,j+1);\sigma}^\dagger a_{(i,j);\sigma})] + U \sum_{(i,j)} n_{(i,j);\uparrow} n_{(i,j);\downarrow}, \quad (1.17)$$

Somma 等详细讨论了该模型与 DQS 之间的映射，以及初态制备，演化，测量等所有步骤<sup>[17]</sup>。同时，该模型在 Ho 等人的工作中也有讨论<sup>[72]</sup>。

当然，该模型也可以用 AQS 的思想来研究，比如在量子点中<sup>[65]</sup>，极性分子中<sup>[45]</sup> 以及离子阱<sup>[52]</sup> 中都有涉及 Hubbard 模型。

#### 2. 量子相变

当一个物理参量在绝对零度下发生改变时，量子相变就可能发生，它描述的是一个多体系统中因为量子涨落导致的基态能级突变。量子相变是非常基础但非常重要的领域之一，可惜在经典上模拟或者实验都非常困难，而对量子相变的深入研究会提高我们对纯净量子现象的认识。量子模拟实验第一个观测到的相变是利用光晶格中的中性原子模拟从超流到 Mott 绝缘体的相变<sup>[4]</sup>，前面已经有了详细介绍，这里不再赘述。

另外一种相变的粒子是量子磁性的相变，比如离子阱中利用绝热手段模拟的量子顺磁性到反铁磁性的相变<sup>[3]</sup>。该系统可以用简单的 Ising 模型描述

$$H_I = -B_x \sum_i \sigma_i^x + \sum_{i<j} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z, \quad (1.18)$$

其中  $B_x$  是磁场强度， $J_{ij}$  是自旋-自旋相互作用。通过绝热改变相互作用强度，同时保持外磁场  $B_x$  为常数，我们可以观测到系统从一个顺磁性状态  $|\rightarrow\rangle|\rightarrow\rangle$  变到一个反铁磁性状态  $|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle|\downarrow\rangle$ 。

#### 3. 自旋模型

考虑最简单的 Heisenberg 自旋哈密顿量模型

$$H_{XYZ} = \sum_{i=1}^N [J_x \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + J_y \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + J_z \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z]. \quad (1.19)$$

在离子阱中，XY 以及 XYZ 模型相互作用都已通过利用集体振动模式实现<sup>[73]</sup>，自旋链和自旋梯的模型也已在光晶格中被讨论<sup>[74]</sup>；高维或者不规则维度的自旋模型则被认为可以在超导线路中模拟<sup>[75]</sup>；反铁磁的 Heisenberg 模型则可以通过固态 NMR 实现<sup>[76]</sup>。

Phenomena	System	Paper
Quantum Phase Transition	Neutral Atoms	M. Greiner et al., <i>Nature</i> 415, 39 (2002)
	Polar Molecules	B. Capogrosso et al., PRL 104, 125301 (2010) L. Pollet et al., PRL 104, 125302 (2010)
	Trapped Ions	G. Giorgi et al., PRA 81, 052118 (2010) A. Retzker et al., PRL 101, 260504 (2008) A. Friedenauer et al., <i>Nat. Phys.</i> 4, 757 (2008)
	NMR	X. Peng et al., PRA 71, 012307 (2005) G. Roumpos et al., PRB 75, 094415 (2007) J. Zhang et al., PRL 100, 100501 (2008)
	Superconducting	A. Van Oudenaarden et al., PRL 76, 4947 (1996)
Hubbard Models	Neutral Atoms	D. Jaksch et al., PRL 81, 3108 (1998)
	Polar Molecules	M. Ortner et al., NJP 11, 055045 (2009)
	Trapped Ions	X. Deng et al., PRA 77, 033403 (2008)
	Quantum Dots	T. Byrnes et al., PRB 78, 075320 (2008)

Phenomena	System	Paper
Hubbard Models	Cavities	A. Greentree et al., <i>Nat. Phys.</i> 2, 856 (2006) M. Hartmann et al., <i>Nat. Phys.</i> 2, 849 (2006)
Spin Models	Neutral Atoms	Garcia-Ripoll et al., PRL 93, 250405 (2004) E. Jane et al., QIC 3, 15 (2003)
	Trapped Ions	D. Porras et al., PRL 92, 207901 (2004) E. Edwards et al., PRB 82, 060412 (2010) A. Bermudez et al., PRA 79, 060303 (2009) X. Deng et al., PRA 72, 063407 (2005)
	Superconducting	D. Tsokomos et al., PRA 82, 052311 (2010)
	Cavities	Z. Chen et al., PRA 81, 022303 (2010) J. Cho et al., PRA 78, 062338 (2008)
	Electrons on He	S. Mostame et al., PRL 101, 220501 (2010)
Spin Glasses	DQS	D. Lidar et al., PRE 56, 3661 (1997)
	Superconducting	D. Tsokomos et al., NJP 10, 113020 (2008)

图 1.14 量子模拟在凝聚态物理中的应用 (上)。蓝色字体为实验进展，黑色字体为理论进展。

#### 4. 无序系统

无序系统在凝聚态中的很多困难问题中出现，比如输运，传导，自旋玻璃，高温超导等等。而经典上关于无序系统的处理非常具有挑战性，因此有很多的

量子模拟算法被提出来。例如，Fano-Anderson 模型的哈密顿量为

$$H_{FA} = \sum_{l=1}^{n-1} \epsilon_{kl} c_{kl}^\dagger c_{kl} + \epsilon b^\dagger b + V(c_{k_0}^\dagger b + c_{k_0} b^\dagger), \quad (1.20)$$

其中费米算符  $c_{kl}^\dagger(c_{kl})$  和  $b^\dagger(b)$  分别可以在导电模式和杂质中产生 (湮灭) 非自旋费米子。该模型已经在 NMR 上实验实现<sup>[57]</sup>。

而在 AQS 的方案中，光晶格可以实验实现无序系统且观测到 Bose-glass 相<sup>[42]</sup>；无序势阱中可以研究 BEC 的 Anderson-like 局域化<sup>[41]</sup>；离子阱可以用来研究无序系统中的物理现象<sup>[77]</sup>；描述导电区的磁性杂质的哈密顿量则可以映射到超导线路<sup>[70]</sup>。

### 5. 高温超导

包含氧化铜的复合物中的高温超导也是一个可以用量子模拟解决的难题。利用量子点我们可以用 AQS 的方式模拟高温超导体<sup>[66]</sup>， $t-J$  模型也被证明可以被模拟<sup>[78]</sup>。BCS 模型的哈密顿量则可以用 DQS 来模拟，其一般形式为

$$H_{BCS} = \sum_{m=1}^N \frac{\epsilon}{2} (n_m^F + n_{-m}^N) + \sum_{m,l=1}^N V_{ml} c_m^\dagger c_{-m}^\dagger c_{-l} c_l, \quad (1.21)$$

$c_m^\dagger(c_m)$  和  $b_m^\dagger(b_m)$  分别为费米和玻色的产生 (湮灭) 算子， $|m| = 1, 2, \dots, N$  为量子数。实现该模型的量子模拟算法<sup>[79]</sup> 和 NMR 实验<sup>[60]</sup> 目前也已完成。

### 6. 自旋玻璃

如果自旋间的相互作用是铁磁或反铁磁的，即使在低温下空间内的自旋取向也不再是唯一的，而会呈现出一定的随机性，这种自旋玻璃的性质也可以用 DQS 模拟，比如构造 Ising 模型中的 Gibbs 分布<sup>[26]</sup>。该算法适用于任何维度的自旋玻璃 Ising 模型，或者含外磁场的模型。

用 AQS 的方法模拟 Lipkin-Meshkov-Glick 模型

$$H_{LMG} = -\frac{\Delta}{2} \sum_{i=1}^N \sigma_i^z - \frac{J}{2} \left( \sum_{i=1}^N \sigma_i^x \right)^2 + \frac{NJ}{2}, \quad (1.22)$$

以及复杂量子系统，比如 Sherrington-Kirkpatrick 自旋玻璃被 Tsomokos 等人给出<sup>[27]</sup>，而这个模型可以在超导线路中被自然模拟。

### 7. 超颖材料

量子范畴的可控超颖材料的行为也可以被量子系统模拟<sup>[71,80]</sup>。量子超颖材料的一个例子是共振腔中全同 qubit 的无限链模型，这种系统中有可能实现新的控制电磁场演化的方法，而这在经典材料里是完全做不到的。

## 8. 拓扑序

任意子是量子统计性质既不满足玻色性也不满足费米性的二维粒子，可以用来描述石墨烯或量子霍尔效应等现象。而且，任意子可以被用作拓扑量子计算<sup>[81]</sup>。该模型既可以通过小尺度的 DQS 模拟<sup>[82]</sup>，也可以利用中性原子用 AQS 的方式模拟。前者在 Lu 等人的文章中已经用线性光学体系实验证实<sup>[24]</sup>，其哈密顿量为

$$H_K = - \sum_v A_v - \sum_p B_p, \quad (1.23)$$

其中  $A_v = \prod_{i \in v} \sigma_i^x$  和  $B_p = \prod_{i \in p} \sigma_i^z$ ， $v$  取遍所有顶点而  $p$  取遍所有平面。在光晶格中满足阿贝尔和非阿贝尔性质的任意子也可以通过增加辅助粒子来实现，利用超导线路甚至可以构筑 Kitaev 蜂巢模型<sup>[25]</sup>。不仅对量子模拟，这些方案对拓扑量子计算的发展也有很大贡献。

Phenomena	System	Paper
High Tc Superconductivity	DQS	F. Yamaguchi et al., Superlattices and Microstructures, 32, 343 (2002)
	Quantum Dots	E. Manousakis, J. Low Temp. Phys. 126, 1501 (2002)
BCS Pairing	NMR	X. Yang et al., Chem. Phys. Lett. 422, 20 (2006)
BCS-BEC Crossover	Neutral Atoms	M. Zwierlein et al., Nature 435, 1047 (2005)
Metamaterials	Superconducting	A. Rakhmanov et al., PRB 77, 144507 (2008)
Disordered Systems	Neutral Atoms	L. Fallani et al., PRL 98, 130404 (2007) T. Schulte et al., PRL 95, 170411 (2005) J. Billy et al., Nature 453, 891 (2008)
	Trapped Ions	A. Bermudez et al., arXiv: 1002.3748 (2010)
	NMR	G. Alvarez et al., PRL 104, 230403 (2010) C. Negrevergne et al., PRA 71, 032344 (2005)
	Superconducting	J. Garcia-Ripoll et al., PRL 93, 250405 (2008)
Phenomena	System	Paper
Frustrated Systems	Photons	X. Ma et al., Nat. Phys. 7, 399 (2011)
	Trapped Ions	D. Porras et al., PRL 96, 250501 (2006) K. Kim et al., Nature 465, 590 (2010)
Tonks-Girardeau Gas	Neutral Atoms	B. Paredes et al., Nature 429, 277 (2004)
Time-Symmetry Breaking	Superconducting	J. Koch et al., PRA 82, 043811 (2010)
Topological Order	Photons	A. Bermudez et al., arXiv 1002.3748 (2010) C. Lu et al., PRL 102, 030502 (2009)
	Polar Molecules	A. Micheli et al., Nat. Phys. 2, 341 (2006)
	Neutral Atoms	M. Aguado et al., PRL 101, 260501 (2008)
	Superconducting	J. You et al., PRB 81, 014505 (2010)

图 1.15 量子模拟在凝聚态物理中的应用 (下)。蓝色字体为实验进展，黑色字体为理论进展。

## 1.3.2 高能物理

量子模拟另外一个应用是在高能物理领域。第一次关于利用量子模拟研究相对论量子系统，例如规范场和 Dirac 费米子等的工作在 1998 年被提出<sup>[83]</sup> 后来，陆续有其他一些模拟高能物理的理论和实验出现，比如如何建立 2+1 Dirac 振子和 Jaynes-Cummings 模型的映射<sup>[21]</sup>，3+1 维度模拟 Dirac 方程<sup>[5,22]</sup>，最近扩展到了利用离子阱<sup>[84]</sup> 及光晶格<sup>[85]</sup> 研究外磁场中的 Zitterbewegung。

模拟晶格规范理论也是量子多体中的困难问题之一。用 DQS 模拟晶格规范理论在 Byrnes 和 Yamamoto 的文章中已被详细讨论<sup>[86]</sup>，他们证明可以把  $U(1), SU(2), SU(3)$  中的晶格规范哈密顿量算符写成自旋算符的形式，因此就可以在 DQS 上模拟。该方案中需求的逻辑门数量和模拟晶格的总数呈一个线性到二次函数之间的某种函数关系，因此是有效的。同时，初始化和测量和晶格尺度的关系也是类似的。

光晶格则可以用来作为 AQS 模拟 ring-exchange 模型<sup>[87,88]</sup>，其哈密顿量为

$$H_{RE} = K \sum_{\text{plaquettes}} (b_1^\dagger b_2 b_3^\dagger b_4 + b_4^\dagger b_3 b_2^\dagger b_1 - n_1 n_2 - n_3 n_4) \quad (1.24)$$

这个哈密顿量可以用一个含两个态的原子实现：一个被囚禁在四角晶格内并用 Bose-Hubbard 模型实现，另一个被囚禁在平面晶格内。利用这个模型我们还可以模拟一系列的强耦合哈密顿量，并且研究强关联系统的性质。

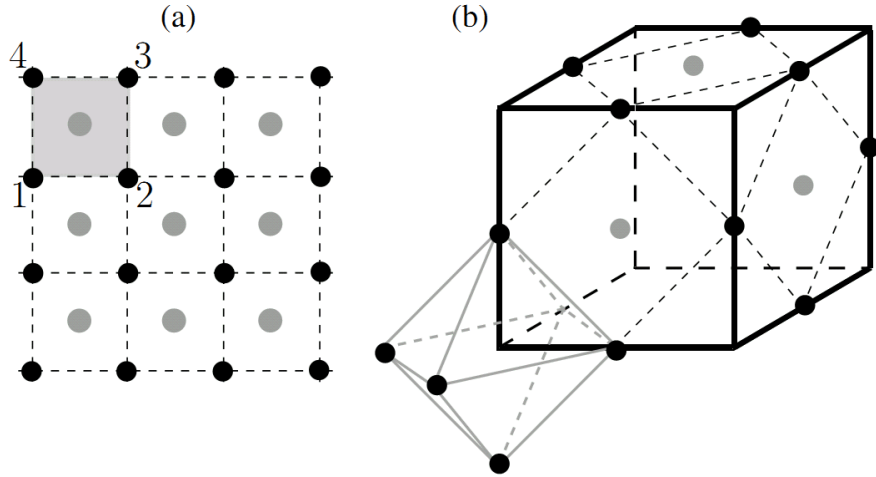


图 1.16 量子模拟在高能物理中的应用。蓝色字体为实验进展，黑色字体为理论进展。

此外，其他的方案还有利用光学体系模拟核子<sup>[89]</sup> 以及  $O(3)$  非线性介子模型<sup>[90]</sup> 等。



### 1.3.3 宇宙学

量子模拟在万有引力理论以及宇宙学模型。例如利用 BEC 中的声波研究宇宙时空结构中的标量场<sup>[35]</sup>，通过改变粒子内的耦合可以实现这个模拟过程。虽然该方案在实验上很有挑战性，但它开辟了一条研究宇宙学的新道路。后来，利用 AQS 在离子阱中模拟宇宙粒子产生的方案<sup>[91]</sup> 及研究宇宙时空中的量子场效应的方案<sup>[92]</sup> 陆续出现。利用 AQS 的方式，很有可能测试一些理论上有预言，但实验上尚未被观测到的现象，例如离子阱中的声子激发观测类 Unruh 效应<sup>[23]</sup>，或者光晶格中的中性原子模拟 Schwinger 效应<sup>[93]</sup>，甚至 Hawking 辐射<sup>[94,95]</sup>。

Phenomena	System	Paper
Unruh Effect	Trapped Ions	P. Alsing et al., PRL 94, 220401 (2005)
Hawking Radiation	Neutral Atoms	S. Giovanazzi, PRL 94, 061302 (2005)
	Trapped Ions	B. Horstmann et al., PRL 104, 250403 (2010)
	Superconducting	P. Nation et al., PRL 103, 087004 (2009)
Universe Expansion	BEC	U. Fischer et al., PRA 70, 063615 (2004)
	Trapped Ions	N. Menicucci et al., NJP 12, 095019 (2010) R. Schutzold et al., PRL 99, 201301 (2007)

图 1.17 量子模拟在宇宙学中的应用。蓝色字体为实验进展，黑色字体为理论进展。当然目前没有任何实验进展。

### 1.3.4 原子物理

原子物理及量子光学中最重要的模型之一是 Jaynes-Cummings 哈密顿量电磁场的单量子模式和两能级原子之间的相互作用，其形式为

$$H_{JC} = i\hbar g_0 (a^\dagger \sigma_- - a \sigma_+) \quad (1.25)$$

$g_0$  是原子和场的耦合常数， $a^\dagger(a)$  为玻色产生 (湮灭) 算符，而  $\sigma_+(\sigma_-)$  为升 (降) 算子。

超导线路是非常适合实现 Jaynes-Cummings 哈密顿量模型的<sup>[36]</sup>。超导线路非常适合模拟原子物理是因为其行为非常类似于原子，或者叫“模拟原子”。和自然的原子相比，超导线路不需要采用可见光或微波技术激发电子，而是通过电流、电压驱动这种激发过程。超导线路可以被特殊设计，比如极大的耦合项或者特定的跃迁频率，因此相对真正的原子更有优势。在原子物理的现象中，除了模拟量子光学<sup>[68]</sup>，超导线路还可以模拟边带冷却和科

林斯王冷却 (源于希腊神话的故事)<sup>[37]</sup>, Landau-Zener-Stuckelberg 干涉仪<sup>[38]</sup>, Einstein-Podolsky-Rosen 实验<sup>[96]</sup> 等。

Phenomena	System	Paper
Cavity QED	Superconducting	L. Zhou et al., PRA 78, 063827 (2008) J. Fink et al., Nature 454, 315 (2008)
Cooling	Superconducting	M. Grajcar, Nat. Phys. 4, 612 (2008) F. Nori, Nat. Phys. 4, 589 (2008)

图 1.18 量子模拟在原子物理中的应用。蓝色字体为实验进展，黑色字体为理论进展。

### 1.3.5 量子化学

量子模拟对量子化学也可以有很多贡献<sup>[97]</sup>。在热反应速率常数的计算中<sup>[98]</sup>，首先把初态制备到所有位置本征态的等概率叠加态上，利用量子傅里叶变换实现么正演化，最后施加一系列测量并得到能量谱和幅度。该算法是多项式复杂度的，而在经典上要计算这个问题是指数复杂度的。

Aspuru-Guzik 等人也提出可以利用 DQS 模拟分子的静态能级<sup>[28]</sup> 和动力学反应<sup>[12]</sup>。在模拟分子能级的过程中，qubit 的数目是随着基矢数目的增加呈线性增长的，而逻辑门的数目是多项式增长的，并证明利用几十个 qubit 我们就可以超越经典计算的结果。而在动力学模拟的过程中，该方案的复杂度也是多项式的。这两个方案均已在实验上实现<sup>[6,61,62]</sup>。这部分内容将在本论文的后面详细叙述，此处暂不作详细讨论。

用 AQS 也是可以模拟化学反应的。用可以视作“模拟原子”的量子点我们可以模拟多种化学反应<sup>[20]</sup>，最近还提出波导上的极冷原子也可以模拟化学反应过程<sup>[99]</sup>。

Phenomena	System	Paper
Thermal Rate Calculations	DQS	D. Lidar et al., PRE 59, 2429 (1999)
Molecular Energies	DQS	A. Aspuru-Guzik et al., Science 309, 1704 (2005)
	Photons	B. Lanyon et al., Nat. Chem. 2, 483 (2010)
	NMR	J. Du et al., PRL 104, 030502 (2010)
Chemical Reactions	DQS	I. Kassal et. al., PNAS 105, 18681 (2008)
	NMR	D. Lu et al., PRL 107, 020501 (2011)
	Quantum Dots	A. Smirnov et al., EPL 80, 67008 (2007)

图 1.19 量子模拟在量子化学中的应用。蓝色字体为实验进展，黑色字体为理论进展。

### 1.3.6 开放系统

模拟开放系统的动力学行为比封闭系统复杂很多，因为求解 Lindblad 方程需求的资源是求解薛定谔方程的二次方关系。模拟量子开放系统主要有两条路径：第一是通过利用实验体系中天然的退相干机制<sup>[2,29]</sup>。第二条是利用封闭量子系统研究开放量子系统，例如利用驱动谐振子作为量子模拟器我们可以模拟非马尔科夫的阻尼谐振过程<sup>[100]</sup>。模拟开放系统动力学机制的一般方法可以参见 Bacon 等的文章<sup>[101]</sup>。

### 1.3.7 量子混沌

DQS 的一个应用就是用几个 qubit 研究简单量子映射的动力学过程，而量子面包师映射 (quantum baker's map) 是量子混沌中的典型问题。如果用量子模拟我们可以有效地解决这类问题，并在 NMR<sup>[19]</sup> 和线性光学<sup>[18]</sup> 上已经被证实。另外一个例子是 kicked Harper 模型<sup>[102]</sup>。在文章中的条件下，量子算法可以提供指数的加速，而且只用八个 qubit 就可以表现出非常有趣的性质。

### 1.3.8 其它

量子模拟的应用还有很多，比如利用 DQS 模拟薛定谔方程<sup>[83,103]</sup>，量子热机<sup>[104,105]</sup>，量子热动力学<sup>[106]</sup>。现在量子模拟在物理和化学领域都有非常多潜在的应用。利用量子模拟我们既可以解决一些经典上难以处理的问题 (比如上面提到的凝聚态物理中的很多的问题)，也可以实现一些实验非常困难甚至根本不能做实验的难题 (比如上面提到的高能物理和宇宙学中的一些问题)。随着技术的进步，肯定会有更多的学科希望加入到量子模拟的大军中来，也肯定会有更多新的应用将被展示。

## 1.4 量子模拟的展望

最近关于量子模拟的理论和实验进展让我们有理由期待在不远的未来一些特殊的量子模拟器能被建成。当然，理论和实验上还是有些问题要先克服的。

从理论的角度看，退相干和相干操控的研究依然是重点，同时对每个量子模拟器给出实验资源需求的估计也是必须的。量子模拟的新应用也是非常值得期待的，毕竟目前大多数的方案和实验都在凝聚态物理上。

从实验的角度看，和量子计算机的要求类似，操控和可扩展性依然是两大难题。除了光晶格中的冷原子，其他的量子模拟目前还很难操控大的 qubit 阵

Phenomena	System	Paper
Open System	Trapped Ions	J. Piilo et al., PRA 74, 032303 (2006)
	NMR	C. Tseng et al PRA 62, 032309 (2002)
Quantum Chaos	Photons	J. Howell et al., PRA 61, 012304 (2000)
	NMR	Y. Weinstein et al., PRL 89, 157902 (2002)
Schrodinger Equation	DQS	B. Boghosian et al., Physica D 120, 30 (1998)
Quantum Thermodynamic	Superconducting	H. Quan et al., PRE 76, 031105 (2006)
Nonlinear Interferometers	Trapped Ions	D. Leibfried et al., PRL 89, 247901 (2002)

图 1.20 量子模拟的一些相对“非主流”的应用。蓝色字体为实验进展，黑色字体为理论进展。

列。尽管如此，光晶格中 qubit 的单独控制和读出又是非常困难的，对其他体系这可能又不是一个很难的问题。目前还有绝热量子模拟的概念被提出<sup>[107]</sup>，这种新型的量子模拟器可能在实验上比基于逻辑门的 DQS 要简单。

## 1.5 小结

本章的主要内容是量子模拟。除了详细介绍量子模拟的概念及思想之外，本章也希望作为一个迄今为止比较完善的量子模拟资料库来使用，这对以后实验寻找新的、可行的量子模拟方案有极大的便利之处。



图 1.21 (左) 日本电气公司 (NEC)2002 年开发的超级计算机“地球模拟器”。(右) PlayStation3 被北卡罗来纳州立大学教授 Frank Mueller 做成阵列来跑计算，足见其计算能力之强，但离谣传的模拟地球依然差距不小。

其实人类有一个很大的愿望就是成功模拟地球。早在 2002 年，日本电气公司 (NEC) 就为它研制的当时地球上最强大的超级电脑 (比之前最快的 IBM 公司的 ASCI White-Pacific 快近五倍) 取了一个非常霸气的名字：地球模拟器 (Earth Simulator)。当时这台电脑主要用于分析气候变化，当然不可能做到真

正模拟地球上万物的演化。后来又有谣传说索尼 (Sony) 公司的新一代游戏主机 PlayStation3 可以强大到模拟地球，还一度愈演愈烈。后来证实这只是一个半吊子的中日文翻译的问题。虽然目前看还不可能，但人类追逐梦想的脚步是从未停息的，而模拟地球应该是一个非常伟大的梦想。通过本章的介绍，我觉得我们可以怀有这种梦想：量子模拟不仅只能用在凝聚态，高能物理，宇宙学，原子物理，量子化学上，它或者有着更加广阔的，更加不可思议的应用。当然目前我们最需要的依然是理论和实验上继续把这套思想完善下去，先开启“多个世界”的可能性。



## 参考文献

- [1] R. P. Feynman. Simulating physics with computers. *Int. J. Theor. Phys.*, 21(467), 1982.
- [2] S. Lloyd. Universal quantum simulators. *Science*, 273(1073), 1996.
- [3] J. T. Glueckert D. Porras A. Friedenauer, H. Schmitz and T. Schaez. Simulating a quantum magnet with trapped ions. *Nature Phys.*, 4(757), 2008.
- [4] T. Esslinger T. W. Haesch M. Greiner, O. Mandel and I. Bloch. Quantum phase transition from a superfluid to a mott insulator in a gas of ultracold atoms. *Nature*, 415(39), 2002.
- [5] F. Zaehringer E. Solano R. Blatt R. Gerritsma, G. Kirchmair and C. F. Roos. Quantum simulation of the dirac equation. *Nature*, 463(68), 2010.
- [6] B. P. Lanyon et al. Towards quantum chemistry on a quantum computer. *Nature Chem.*, 2(106), 2010.
- [7] I. Buluta and F. Nori. Quantum simulators. *Science*, 326(108), 2009.
- [8] W. J. Munro K. L. Brown and V. M. Kendon. Using quantum computers for quantum simulation. *Entropy*, 12(2268), 2010.
- [9] D. Abrams and S. Lloyd. Simulation of many-body fermi systems on a universal quantum computer. *Phys. Rev. Lett.*, 79(2586), 1997.
- [10] G. Ortiz et al. Quantum algorithms for fermionic simulations. *Phys. Rev. A*, 64(022319), 2001.
- [11] G. Ortiz et al. Simulating fermions on a quantum computer. *Comp. Phys. Comm.*, 146(302), 2001.
- [12] P. J. Love M. Mohseni I. Kassal, S. P. Jordan and A. Aspuru-Guzik. Polynomial-time quantum algorithm for the simulation of chemical dynamics. *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 105(18681), 2008.
- [13] S. Ashhab H. Wang and F. Nori. Efficient quantum algorithm for preparing molecular-system-like states on a quantum computer. *Phys. Rev. A*, 79(042335), 2009.
- [14] C. Zalka. Efficient simulation of quantum systems by quantum computers. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 454(313), 1998.
- [15] I. Clark K. Brown and I. Chuang. Limitations of quantum simulation examined by simualting a pairing hamiltonian using nuclear magnetic resonance. *Phys. Rev. Lett*, 97(050504), 2006.
- [16] C. Clark et al. Resource requirements for fault-tolerant quantum simualtion: the transverse ising model ground state. *Phys. Rev. A*, 79(062314), 2009.
- [17] R. Somma et al. Quantum simulations of physical problems. *Phys. Rev. A*, 65(042323), 2002.

- 
- [18] J. Howell and J. Yeaze. Linear optics simulation of the quantum bakers map. *Phys. Rev. A*, 61(012304), 2000.
  - [19] Y. Weinstein et al. Experimental implementation of the quantum bakers map. *Phys. Rev. Lett.*, 89(157902), 2002.
  - [20] L. Mourokh A. Smirnov, S. Savelev and F. Nori. Modelling chemical reactions using semiconductor quantum dots. *Euro. Phys. Lett.*, 80(67008), 2007.
  - [21] A. Bermudez et al. Exact mapping of the 2+1 dirac oscillator onto the jaynes-cummings model: ion-trap experimental proposal. *Phys. Rev. A*, 76(041801), 2007.
  - [22] L. Lamata et al. Dirac equation and quantum relativistic effects in a single trapped ion. *Phys. Rev. Lett.*, 98(253005), 2007.
  - [23] J. Dowling P. Alsing and G. Milburn. Ion trap simulations of quantum fields in an expanding universe. *Phys. Rev. Lett.*, 94(220401), 2005.
  - [24] C. Lu et al. Demonstrating anyonic fractional statistics with a six-qubit quantum simulator. *Phys. Rev. Lett.*, 102(030502), 2009.
  - [25] J. You et al. Quantum emulation of a spin system with topologically protected ground states using superconducting quantum circuits. *Phys. Rev. Lett.*, 81(014505), 2010.
  - [26] K. Kim et al. Quantum simulation of frustrated ising spins with trapped ions. *Nature*, 465(590), 2010.
  - [27] D. Porras and J .I. Cirac. Quantum manipulation of trapped ions in two dimensional coulomb crystals. *Phys. Rev. Lett.*, 96(250501), 2006.
  - [28] P. J. Love A. Aspuru-Guzik, A. D. Dutoi and M. Head-Gordon. Simulated quantum computation of molecular energies. *Science*, 309(1704), 2005.
  - [29] C. H. Tseng et al. Quantum simulation with natural decoherence. *Phys. Rev. A*, 62(032309), 2000.
  - [30] S. Fernandez-Vidal F. M. Cucchietti and J. P. Paz. Universal decoherence induced by an environmental quantum phase transition. *Phys. Rev. A*, 75(032337), 2007.
  - [31] J. F. Zhang. Direct observation of quantum criticality in ising spin chains. *Phys. Rev. A*, 79(012305), 2009.
  - [32] G. Strini. Error sensitivity of a quantum simulator. i. a first example. *Fortsch. Phys.*, 50(171), 2002.
  - [33] S. Montangero. Dynamically localized systems: exponential sensitivity of entanglement and efficient quantum simulations. *Phys. Rev. A*, 70(032311), 2004.
  - [34] M. J. Bremne W. Dur and H. J. Briegel. Quantum simulation of interacting high-dimensional systems: the influence of noise. *Phys. Rev. A*, 78(052325), 2008.



- 
- [35] U. R. Fischer and R. Schutzhold. Quantum simulation of cosmic inflation in two-component bose-einstein condensates. *Phys. Rev. A*, 70(063615), 2004.
- [36] J. Dalibard I. Bloch and W. Zwerger. Many-body physics with ultracold gas. *Rev. Mod. Phys.*, 80(885), 2008.
- [37] M. Lewenstein et al. Ultracold atomic gases in optical lattices: mimicking condensed matter physics and beyond. *Advances in Physics*, 56(243), 2007.
- [38] D. Jaksch and P. Zoller. The cold atom hubbard toolbox. *Annals of Physics*, 315(52), 2005.
- [39] B. Paredes et al. Tonks-girardeau gas of ultracold atoms in an optical lattice. *Nature*, 429(277), 2004.
- [40] M. Zwierlein et al. Vortices and superfluidity in a strongly interacting fermi gas. *Nature*, 435(1047), 2005.
- [41] T. Schulte et al. Routes towards anderson-like localization of bose-einstein condensates in disordered optical lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 95(170411), 2005.
- [42] L. Fallani et al. Ultracold atoms in a disordered crystal of light: towards a bose glass. *Phys. Rev. Lett.*, 98(130404), 2007.
- [43] M. Lewenstein. Atomic and molecular physics: Polar molecules in topological order. *Nature Phys.*, 2(309), 2006.
- [44] G. K. Brennen A. Micheli and P. Zoller. A tool-box for lattice-spin models with polar molecules. *Nature Phys.*, 2(341), 2006.
- [45] G. Pupillo M. Ortner, A. Micheli and P. Zoller. Quantum simulations of extended hubbard models with dipolar crystals. *New J. Phys.*, 11(055045), 2009.
- [46] B. Capogrosso-Sansone et al. Quantum phases of cold polar molecules in 2d optical lattices. *Phys. Rev. Lett.*
- [47] H. P. Buchler L. Pollet, J. D. Picon and M. Troyer. Supersolid phase with cold polar molecules on a triangular lattice. *Phys. Rev. Lett.*, 104(125302), 2010.
- [48] H. P. Buchler G. Pupillo, A. Micheli and P. Zoller. Condensed matter physics with cold polar molecules. *arXiv:0805.1896*.
- [49] W. Itano B. King D. Leibfried C. Myatt D. Wineland, C. Monroe and C. Wood. Trapped-ion quantum simulator. *Phys. Scripta.*, T76(147), 1998.
- [50] D. Leibfried et al. Trapped-ion quantum simulator: experimental application to nonlinear interferometers. *Phys. Rev. Lett.*, 89(247901), 2002.
- [51] D. Hanneke et al. Realisation of a programmable two-qubit quantum processor. *Nature Phys.*, 6(13), 2009.

- 
- [52] D. Porras X. L. Deng and J. I. Cirac. Quantum phases of interacting phonons in ion traps. *Phys. Rev. A*, 77(033403), 2008.
- [53] J. Pilo and S. Maniscalco. Driven harmonic oscillator as a quantum simulator for open systems. *Phys. Rev. A*, 74(032303), 2006.
- [54] T. F. Havel R. Laflamme S. Somaroo, C. H. Tseng and D. G. Cory. Quantum simulation on a quantum computer. *Phys. Rev. Lett.*, 82(5381), 1999.
- [55] C. H. Tseng et al. Quantum simulation of a three-body-interaction hamiltonian on an nmr quantum computer. *Phys. Rev. A*, 61(012302), 2000.
- [56] C. H. Tseng et al. Quantum simulation with natural decoherence. *Phys. Rev. A*, 62(032309), 2000.
- [57] C. Negrevergne et al. Liquid-state nmr simulations of quantum many-body problems. *Phys. Rev. A*, 66(022317), 2005.
- [58] J. F. Du X. H. Peng and D. Suter. Quantum phase transition of ground-state entanglement in a heisenberg spin chain simulated in an nmr quantum computer. *Phys. Rev. A*, 71(012307), 2005.
- [59] N. Rajendran J. F. Zhang, X. H. Peng and D. Suter. Detection of quantum critical points by a probe qubit. *Phys. Rev. Lett.*, 100(100501), 2008.
- [60] F. Xu X. Yang, A. M. Wang and J. F. Du. Experimental simulation of a pairing hamiltonian on an nmr quantum computer. *Chem. Phys. Lett.*, 422(20), 2006.
- [61] X. H. Peng P. F. Wang S. F. Wu J. F. Du, N. Y. Xu and D. W. Lu. Nmr implementation of a molecular hydrogen quantum simulation with adiabatic state preparation. *Phys. Rev. Lett.*, 104(030502), 2010.
- [62] R. X. Xu H. W. Chen J. B. Gong X. H. Peng D. W. Lu, N. Y. Xu and J. F. Du. Simulation of chemical isomerization reaction dynamics on a nmr quantum simulator. *Phys. Rev. Lett.*, 107(020501), 2011.
- [63] R. X. Xu H. W. Chen J. B. Gong X. H. Peng D. W. Lu, N. Y. Xu and J. F. Du. Solving quantum ground-state problems with nuclear magnetic resonance. *Scientific Reports.*, 1(88), 2011.
- [64] R. Hanson and D. D. Awschalom. Coherent manipulation of single spins in semiconductors. *Nature*, 453(1043), 2008.
- [65] T. Byrnes et al. Quantum simulation of fermi-hubbard models in semiconductor quantum-dot arrays. *Phys. Rev. B*, 78(075320), 2008.
- [66] E. Manousakis. A quantum-dot array as model for copper-oxide superconductors: a dedicated quantum simulator for the many-fermion problem. *J. Low. Temp. Phys.*, 126(1501), 2002.
- [67] A. van Oudenaarden and J. E. Mooij. One-dimensional mott insulator formed by quantum vortices in josephson junction arrays. *Phys. Rev. Lett.*, 76(4947), 1996.
- [68] F. Nori. Atomic physics with a circuit. *Nature Phys.*, 4(589), 2008.

- 
- [69] J. You et al. Quantum emulation of a spin system with topologically protected ground states using superconducting quantum circuits. *Phys. Rev. B*, 81(014505), 2010.
  - [70] E. Solano J. J. Garcia-Ripoll and M. A. Martin-Delgado. Quantum simulation of anderson and kondo lattices with superconducting circuits. *Phys. Rev. B*, 77(024522), 2008.
  - [71] A. Rakhmanov et al. Quantum metamaterials: electromagnetic waves in a josephson qubit line. *Phys. Rev. B*, 77(144507), 2008.
  - [72] M. A. Cazalilla A. F. Ho and T. Giamarchi. Quantum simulation of the hubbard model: The attractive route. *Phys. Rev. A*, 79(033620), 2009.
  - [73] D. Porras and J. I. Cirac. Effective quantum spin systems with trapped ions. *Phys. Rev. Lett.*, 92(207901), 2004.
  - [74] M. A. Martin-Delgado J. J. Garcia-Ripoll and J. I. Cirac. Implementation of spin hamiltonians in optical lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 93(250405), 2004.
  - [75] S. Ashhab D. Tsokomos and F. Nori. Using superconducting circuits to engineer exotic lattice systems. *Phys. Rev. A*, 82(052311), 2010.
  - [76] C. P. Master G. Roumpos and Y. Yamamoto. Quantum simulation of spin ordering with nuclear spins in a solid-state lattice. *Phys. Rev. B*, 75(094415), 2007.
  - [77] D. Porras A. Bermudez, M.A. Martin-Delgado. Localization of phonons in ion traps with controlled quantum disorder. *New J. Phys.*, 12(123016), 2010.
  - [78] F. Yamaguchi and Y. Yamamoto. Quantum simulation of the t-j model. *Superlattices and Microstructures*, 32(343), 2002.
  - [79] M. Byrd L. A. Wu and D. Lidar. Polynomial-time simulation of pairing models on a quantum computer. *Phys. Rev. Lett.*, 89(057904), 2002.
  - [80] K. Y. Bliokh et al. Unusual resonators: plasmonics, metamaterials, and random media. *Rev. Mod. Phys.*, 80(1201), 2008.
  - [81] A. Kitaev. Fault-tolerant quantum computation by anyons. *Ann. Phys.*, 303(2), 2003.
  - [82] R. Raussendorf Y. J. Han and L. M. Duan. Scheme for demonstration of fractional statistics of anyons in an exactly solvable model. *Phys. Rev. Lett.*, 98(150404), 2007.
  - [83] B. M. Boghosian and W. Taylor. Simulating quantum mechanics on a quantum computer. *Physica D*, 120(30), 1998.
  - [84] T. M. Rusin and W. Zawadzki. Zitterbewegung of relativistic electrons in a magnetic field and its simulation by trapped ions. *Phys. Rev. D*, 82(125031), 2010.
  - [85] R. Keil A. Tunnermann S. Nolte S. Longhi F. Dreisow, M. Heinrich and A. Szameit. Classical simulation of relativistic zitterbewegung in photonic lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 105(143902), 2010.

- 
- [86] T. Byrnes and Y. Yamamoto. Simulating lattice gauge theories on a quantum computer. *Phys. Rev. A*, 73(022328), 2006.
  - [87] H. P. Buchler et al. Atomic quantum simulator for lattice gauge theories and ring exchange models. *Phys. Rev. Lett.*, 95(040402), 2005.
  - [88] T. Senthil S. Tewari, V. Scarola and S. D. Sarma. Emergence of artificial photons in an optical lattice. *Phys. Rev. Lett.*, 97(200401), 2006.
  - [89] F. L. Semiao and M. Paternostro. Quantum circuits for spin and flavor degrees of freedom of quarks forming nucleons. *Quantum Information Processing*, 11(67), 2012.
  - [90] R. Schutzhold and S. Mostame. Quantum simulator for the  $o(3)$  nonlinear sigma model. *JETP Letters*, 82(279), 2005.
  - [91] R. Schutzhold et al. Analogue of cosmological particle creation in an ion trap. *Phys. Rev. Lett.*, 99(201301), 2007.
  - [92] S. Olson N. Menicucci and G. Milburn. Simulating quantum effects of cosmological expansion using a static ion trap. *New J. Phys.*, 12(095019), 2010.
  - [93] N. Szpak and R. Schutzhold. Quantum simulator for the schwinger effect with atoms in bi-chromatic optical lattices. *Phys. Rev. A*, 84(050101(R)), 2011.
  - [94] S. Giovanazzi. Hawking radiation in sonic black holes. *Phys. Rev. Lett.*, 94(061302), 2005.
  - [95] S. Fagnocchi B. Horstmann, B. Reznik and J. I. Cirac. Hawking radiation from an acoustic black hole on an ion ring. *Phys. Rev. Lett.*, 104(250403), 2010.
  - [96] J. Q. You and F. Nori. Superconducting circuits and quantum information. *Phys. Today*, 58(42), 2005.
  - [97] A. Perdomo-Ortiz M. H. Yung I. Kassal, J. D. Whitfield and A. Aspuru-Guzik. Simulating chemistry using quantum computers. *Annu. Rev. Phys. Chem.*, 62(185), 2011.
  - [98] D. Lidar and H. Wang. Calculating the thermal rate constant with exponential speedup on a quantum computer. *Phys. Rev. E*, 59(2429), 1999.
  - [99] D. Guary-Odelin E. Torrontegui, A. Ruschhaupt and J. G. Muga. Quantum simulation of a triatomic chemical reaction with ultracold atoms on a waveguide. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, 44(195302), 2011.
  - [100] J. Piilo and S. Maniscalco. Driven harmonic oscillator as a quantum simulator for open systems. *Phys. Rev. A*, 74(032303), 2006.
  - [101] D. Bacon et al. Universal simulation of markovian quantum dynamics. *Phys. Rev. A*, 64(062302), 2001.
  - [102] B. Levi and B. Georgeot. Quantum computation of a complex system: the kicked harper model. *Phys. Rev. E*, 70(056218), 2004.

- 
- [103] G. Benenti and G. Strini. Quantum simulation of the single-particle schroedinger equation. *Am. J. Phys.*, 76(657), 2008.
  - [104] P. Hanggi and F. Marchesoni. Artificial brownian motors: Controlling transport on the nanoscale. *Rev. Mod. Phys.*, 81(387), 2009.
  - [105] F. Marchesoni P. Hanggi and F. Nori. Brownian motors. *Annalen der Physik*, 14(51), 2005.
  - [106] F. Nori K. Maruyama and V. Vedral. Physics of maxwell’s demon and information. *Rev. Mod. Phys.*, 81(1), 2009.
  - [107] J.D. Whitfield-J. Fitzsimons A. Aspuru-Guzik J.D. Biamonte, V. Bergholm. Adiabatic quantum simulators. *AIP Advances*, 1(022126), 2011.
  - [108] R. Landauer. Irreversibility and heat generation in the computing process. *IBM J. Res. Dev.*, 5 (183), 1961.
  - [109] R. P. Feynman. There is plenty of room at the bottom. *Engineering and Science*, 23(22), 1959.
  - [110] Y. Lecerf. Machines de turing reversibles. *Comptes Rendus*, 257(2597), 1963.
  - [111] C. H. Bennett. Logical reversibility of computation. *IBM J. Res. Dev.*, 17(525), 1973.
  - [112] P. Benioff. The computer as a physical system: Amicroscopic quantum mechanical hamiltonian model of computers as represented by turing machines. *J. Stat. Phys.*, 22(563), 1980.
  - [113] R. P. Feynman. Quantum mechanical computers. *Optics News*, 2(11), 1985.
  - [114] D. Deutsch. Quantum theory, the church-turing principle and the universal quantum computer. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 400(97), 1985.
  - [115] P. W. Shor. Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring. In *Proceedings, 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, IEEE Press, Los Alamitos, CA(124), 1994.
  - [116] M. Hilbert and P. Lopez. The world’s technological capacity to store, communicate and computer information. *Science*, 332(60), 2011.
  - [117] D. Deutsch. Quantum computational networks. *Proc. R. Soc. London A*, 425(73), 1985.
  - [118] D. P. DiVincenzo. Two-bit gates are universal for quantum computation. *Phys. Rev. A*, 51(1015), 1995.
  - [119] S. Lloyd. Almost any quantum logic gate is universal. *Phys. Rev. Lett.*, 75(346), 1995.
  - [120] A. Barenco D. Deutsch and A. Ekert. Universality in quantum computation. *Proc. R. Soc. London A*, 449(669), 1995.
  - [121] D. Dieks. Communication by epr devices. *Phys. Lett. A*, 92(271), 1982.
  - [122] W. K. Wootters and W. H. Zurek. A single quantum cannot be cloned. *Nature*, 299(802), 1982.

- 
- [123] M. A. Nielsen and I. L. Chuang. Quantum computation and quantum information. Cambridge University Press, Cambridge, England, 2000.
  - [124] A. Steane. Quantum computing. Rep. Prog. Phys., 61(117), 1998.
  - [125] J. Preskill. Lecture notes on quantum information and computation. available at <http://theory.caltech.edu/people/preskill/>, 1998.
  - [126] C. H. Bennett and D. P. DiVincenzo. Quantum information and computation. Nature, 404(247), 2000.
  - [127] G. Casati G. Benenti and G. Strini. Principles of quantum computation and information. World scientific publishing Co. Pte. Ltd., 2004.
  - [128] S. Gildert T. Lanting F. Hamze N. Dickson R. Harris A. J. Berkley J. Johansson P. Bunyk E. M. Chapple C. Enderud J. P. Hilton K. Karimi E. Ladizinsky N. Ladizinsky T. Oh I. Perminov C. Rich M. C. Thom E. Tolkacheva C. J. S. Truncik S. Uchaikin J. Wang B. Wilson M. W. Johnson, M. H. S. Amin and G. Rose. Quantum annealing with manufactured spins. Nature, 473(194), 2011.
  - [129]
  - [130] D. A. Lidar A. Mizel and M. Mitchell. Simple proof of equivalence between adiabatic quantum computation and the circuit model. Phys. Rev. Lett., 99(070502), 2007.
  - [131] R. Raussendorf and H. J. Briegel. A one-way quantum computer. Phys. Rev. Lett., 86(5188), 2001.
  - [132] R. Laflamme E. Knill and G. J. Milburn. A scheme for efficient quantum computation with linear optics. Nature, 409(46), 2001.
  - [133] J. C. F. Matthews A. Politi and J. L. O’Brien. Shor’s quantum factoring algorithm on a photonic chip. Science, 325(1221), 2009.
  - [134] J. L. O’Brien. Optical quantum computing. Science, 318(1567), 2007.
  - [135] A. Migdal and J. Dowling. Single-photon detectors, applications, and measurement. J. Mod. Opt., 51, 2004.
  - [136] R. H. Hadfield. Single-photon detectors for optical quantum information applications. Nature Photon, 3(696), 2009.
  - [137] B. Sanders P. Grangier and J. Vuckovic. Focus on single photons on demand. New J. Phys., 6, 2004.
  - [138] A. J. Shields. Semiconductor quantum light sources. Nature Photon, 1(215), 2007.
  - [139] A. Stefanov J. C. F. Matthews, A. Politi and J. L. O’Brien. Manipulation of multiphoton entanglement in waveguide quantum circuits. Nature Photon, 3(346), 2009.

- 
- [140] J. I. Cirac and P. Zoller. Quantum computations with cold trapped ions. *Phys. Rev. Lett.*, 74(4091), 1995.
  - [141] D. J. Wineland et al. Experimental issues in coherent quantum-state manipulation of trapped atomic ions. *J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol.*, 103(259), 1998.
  - [142] J. I. Cirac and P. Zoller. A scalable quantum computer with ions in an array microtraps. *Nature*, 404(579), 2001.
  - [143] D. Wineland and R. Blatt. Entangled states of trapped atomic ions. *Nature*, 453(1008), 2009.
  - [144] T. Monz et al. 14-qubit entanglement: Creation and coherence. *Phys. Rev. Lett.*, 106(130506), 2011.
  - [145] O. Morsch and M. Oberthaler. Dynamics of bose-einstein condensates in optical lattices. *Rev. Mod. Phys.*, 78(179), 2006.
  - [146] X. Li K. D. Nelson and D. S. Weiss. Imaging single atoms in a three-dimensional array. *Nature Phys.*, 3(556), 2007.
  - [147] P. Wrtz et al. Experimental demonstration of single-site addressability in a two-dimensional optical lattice. *Phys. Rev. Lett.*, 103(080404), 2009.
  - [148] Y. R. P. Sortais A. Fuhrmanek, R. Bourgain and A. Browaeys. Free-space lossless state detection of a single trapped atom. *Phys. Rev. Lett.*, 106(133003), 2011.
  - [149] M. J. Gibbons et al. Nondestructive fluorescent state detection of single neutral atom qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 106(133002), 2011.
  - [150] J. F. Sherson et al. Single-atom-resolved fluorescence imaging of an atomic mott insulator. *Nature*, 467(68), 2010.
  - [151] S. Ashhab I. Buluta and F. Nori. Natural and artificial atoms for quantum computation. *Rep. Prog. Phys.*, 74(104401), 2011.
  - [152] J. Clarke and F. K. Wilhelm. Superconducting quantum bits. *Nature*, 453(1031), 2008.
  - [153] J. Q. You and F. Nori. Atomic physics and quantum optics using superconducting circuits. *Nature*, 474(589), 2011.
  - [154] M. Hofheinz et al. Synthesizing arbitrary quantum states in a superconducting resonator. *Nature*, 459(546), 2009.
  - [155] L. DiCarlo et al. Demonstration of two-qubit algorithms with a superconducting quantum processor. *Nature*, 460(240), 2009.
  - [156] M. Neeley et al. Generation of three-qubit entangled states using superconducting phase qubits. *Nature*, 467(570), 2010.

- 
- 
- [157] L. DiCarlo et al. Preparation and measurement of three-qubit entanglement in a superconducting circuit. *Nature*, 467(574), 2010.
  - [158] G. Sun et al. Tunable quantum beam splitters for coherent manipulation of a solid-state tripartite qubit system. *Nature Commun.*, 1(51), 2010.
  - [159] T. D. Ladd et al. Quantum computers. *Nature*, 464(45), 2010.
  - [160] J. J. L. Morton et al. Solid-state quantum memory using the  $^{31}\text{P}$  nuclear spin. *Nature*, 455(1085), 2008.
  - [161] D. Hanneke et al. Realization of a programmable two-qubit quantum processor. *Nature Phys.*, 6(13), 2010.
  - [162] R. Hanson et al. Spins in few-electron quantum dots. *Rev. Mod. Phys.*, 79(1217), 2007.
  - [163] D. M. V. Guredev et al. Quantum register based on individual electronic and nuclear spin qubits in diamond. *Science*, 316(1312), 2007.
  - [164] K. C. Nowack et al. Coherent control of a single electron spin with electric fields. *Science*, 318(1430), 2007.
  - [165] M. H. Mikkelsen et al. Optically detected coherent spin dynamics of a single electron in a quantum dot. *Nature Phys.*, 3(770), 2007.
  - [166] X. Xu et al. Coherent optical spectroscopy of a strongly driven quantum dot. *Science*, 317(929), 2007.
  - [167] B. D. Gerardot et al. Optical pumping of a single hole spin in a quantum dot. *Nature*, 451(441), 2008.
  - [168] F. H. L. Koppens et al. Driven coherent oscillations of a single electron spin in a quantum dot. *Nature*, 442(766), 2006.
  - [169] J. Berezovsky et al. Picosecond coherent optical manipulation of a single electron spin in a quantum dot. *Science*, 320(349), 2008.
  - [170] F. Jelezko et al. Observation of coherent oscillation of a single nuclear spin and realization of a two-qubit conditional quantum gate. *Phys. Rev. Lett.*, 93(130501), 2004.
  - [171] J. R. Petta et al. Coherent manipulation of coupled electron spins in semiconductor quantum dots. *Science*, 309(2180), 2005.
  - [172] P. Neumann et al. Multipartite entanglement among single spins in diamond. *Science*, 320(1326), 2008.
  - [173] A. F. Fahmy D. G. Cory and T. F. Havel. Ensemble quantum computing by nmr- spectroscopy. *Proc. Natl Acad. Sci. USA*, 94(1634), 1997.



- 
- 
- [174] N. A. Gershenfeld and I. L. Chuang. Bulk spin resonance quantum computation. *Science*, 275(350), 1997.
- [175] C. Negrevergne et al. Benchmarking quantum control methods on a 12-qubit system. *Phys. Rev. Lett.*, 96(170501), 2006.
- [176] L. M. K. Vandersypen et al. Experimental realization of shor’s quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance. *Nature*, 414(883), 2001.
- [177] R. Laflamme et al. Introduction to nmr quantum information processing. *arXiv: 0207172 v1*, 2002.
- [178] M. Paris G. Di-Ariano and M. Sacchi. *Advances in Imaging and Electron Physics*.
- [179] M. Aguado et al. Creation, manipulation, and detection of abelian and non-abelian anyons in optical lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 101(260501), 2008.
- [180] Qipc-strategic report on current status, visions and goals for research in europe, version 1.5. 2008.