关于莫比乌斯反演的详细说明

[quant67]

2014 年 10 月 16 日

摘要

本文且当作组合数学容斥原理部分的课堂笔记。

1 用途

容斥原理是莫比乌斯反演在有限偏序集上的一个实例。考虑$X_n = \{1, 2, \cdots, n\}$,以及由包含关系所定义的所有子集的偏序集$F : (P(X_n), \subseteq)$。令

$$F : P(X_n) \to \Re$$

是一个定义在$P(X_n), \subseteq$ 上的实值函数。我们用F定义一个新的函数

$$G : P(X_n) \to \Re$$

其中

$$G(K) = \sum_{L \subseteq K} F(L) \quad (K \subseteq X_n) \tag{1}$$

莫比乌斯反演可将式（1）反解并从G还原F；特别地，我们有

$$F(K) = \sum_{L \subseteq K} (-1)^{|K|-|L|} G(L) \quad (K \subseteq X_n) \tag{2}$$

令$A_1, A_2, \cdots, A_n$是有限偏序集S的子集，对于$K \subseteq X_n$，定义$F(K)$是S的只属于$i \notin K$的那些集合A_i的元素的个数。此时

$$G(K) = \sum_{L \subseteq K} F(L) = \mid \bigcap_{i \notin E} A_i \mid$$

由式（2），有

$$F(K) = \sum_{L \subseteq K} (-1)^{|K|-|L|} G(L) \tag{3}$$

取$K = X_n$,得

$$F(K) = \sum_{L \subseteq K} (-1)^{n-|L|} G(L) \tag{4}$$

所以

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}| = \sum_{L \subseteq X_n} (-1)^{n-|L|} | \cap_{i \notin L} A_i| \tag{5}$$

这正是容斥原理公式。

2 卷积

令$(X,\leq)$为任意有限偏序集，$F(X)$为所有满足只要$x \not\leq y$就有$f(x,y)=0$的所有实值函数

$$f: X \times X \to \Re$$

的集合。我们通过

$$h(x,y) = \begin{cases} \sum_{\{z:x\leq x\leq y\}} f(x,z)g(z,y), & if\ x \leq y \\ 0, & else \end{cases}$$

定义$F(X)$中两个函数f和g的卷积$h = f * g$。显然，卷积满足结合律。

3 δ函数和ζ函数

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1, & if\ x = y \\ 0, & else \end{cases}$$

注意，对所有的函数$f \in F(x)$，$\delta * f = f * \delta = f$，所以$\delta$为单位元。

$$\zeta(x,y) = \begin{cases} 1, & if\ x \leq y \\ 0, & else \end{cases}$$

ζ函数式偏序集$(X,\leq)$的一种表示。

4 逆元

令f为$F(X)$中的一个函数，满足对X中的所有y有$f(y,y)\neq 0$。我们可以首先令

$$g(y,y) = \frac{1}{f(y,y)}\ (y \in X) \tag{6}$$

然后令

$$g(x,y) = -\sum_{|z:x\leq z<y|} g(x,y)\frac{f(z,y)}{f(y,y)}\ (x<y) \tag{7}$$

来归纳定义$F(X)$中的函数g。

从式（7）得

$$\sum_{\{z:x\leq z\leq y\}} g(x,z)f(z,y) = \delta(x,y) \quad (x \leq y) \tag{8}$$

式（8）告诉我们

$$g * f = \delta$$

从而g是f的关于卷积的逆元。

5 μ 函数(莫比乌斯函数)

由于对所有的$y \in X$，$\zeta(y,y) = 1$，因此ζ有一个逆，定义μ是它的逆。因此，有

$$\mu * \zeta = \delta$$

等价地

$$\sum_{\{z:x \le z \le y\}} \mu(x,z) = \delta(x,y) \quad (x \le y) \tag{9}$$

这意味着

$$\mu(x,x) = 1, \ for\ every\ x \tag{10}$$

以及

$$\mu(x,y) = -\sum_{\{z:x \le z < y\}} \mu(x,z) \quad (x < y) \tag{11}$$

6 性质和定理

定理 6.1 令$(X, \le)$为最小元是*0*的偏序集，令μ是它的莫比乌斯函数，并令$F : X \to \Re$由

$$G(x) = \sum_{\{z:z \le x\}} F(z) \quad (x \in X)$$

定义。则

$$F(x) = \sum_{\{y:y \le x\}} G(y)\mu(y,x) \quad (x \in X)$$

证明: 令ζ为$(X, \le)$的ζ函数。利用前面讨论的性质，对X中的任意元素x计算如下：

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{\{y:y \le x\}} G(y)\mu(y,x) &= \textstyle\sum_{\{y:y \le x\}} \sum_{\{z:z \le y\}} F(z)\mu(y,x) \\
&= \textstyle\sum_{\{y:y \le x\}} \mu(y,x) \sum_{\{z:z \in X\}} \zeta(z,y)F(z) \\
&= \textstyle\sum_{\{z:z \in X\}} \delta(z,x)F(z) \\
&= F(x)
\end{aligned}$$

定理 6.2 令$(X, \le_1)$和$(Y, \le_2)$为两个有限偏序集，他们的莫比乌斯函数分别为μ_1和μ_2。令μ为$(X, \le_1)$和$(Y, \le_2)$的直积的莫比乌斯函数。则

$$\mu((x,y),(x',y')) = \mu(x,x')\mu(y,y') \quad ((x,y),(x',y') \in X \times Y) \tag{12}$$

使用归纳法可容易证明此定理，证明略。

定理 6.3 令F为定义在正整数集上的实值函数。由

$$G(n) = \sum_{k:k|n} F(k)$$

定义在正整数集合上的实值函数G。则对于每一个正整数n，有

$$F(n) = \sum_{k:k|n} \mu(n/k)G(k)$$

其中$\mu(1, n/k)$为$\mu(n/k)$。

此定理可由定理6.1简单地证明。

7 代码

```
const int n = 1 << 20;
int mu[n];
int getMu() {
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        int target = i == 1 ? 1 : 0;
        int delta = target - mu[i];
        mu[i] = delta;
        for (int j = i + i; j <= n; j += i)
            mu[j] += delta;
    }
}
```

参考文献

[1] R. A. Brualdi, *Introductory combinatorics*. New York, 1992.