1. 设至少有 n 个顶点，则

$16\times 2 \le 3\times 4+4\times 3+2(n-7)$

$n\ge 11$

故至少有11个顶点

4. 做无向简单图 $G=\langle V,E\rangle$， $V=\{v \mid v$ 为象棋选手$\}$，$E=\{(v_1,v_2) \mid v_1,v_2\in V$ 且 v_1 与 v_2 下了一盘$\}$

考虑 $1\le d(v)\le n-1$，共 $n-1$ 种可能取值，而一共有 n 位选手

由鸽巢原理，一定存在 $v_1, v_2\in V$ 且 $d(v_1)=d(v_2)$

7. (1) $(6,6,5,5,3,3,2)$ 可简单图化

$\Leftrightarrow (5,4,4,2,2,1)$ 可简单图化

$\Leftrightarrow (3,3,1,1,0)$ 可简单图化

$\Leftrightarrow (2,0,0,0)$ 可简单图化

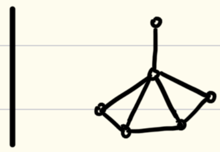
故不可简单图化

(2) $(5,3,3,2,2,1)$

$\Leftrightarrow (2,2,1,1,0)$

$\Leftrightarrow (1\ 1\ 0\ 0)$

故可以简单图化



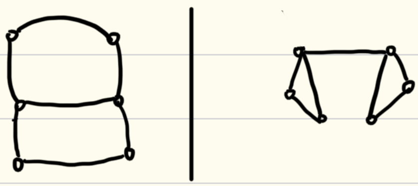
(3) $(3,3,2,2,2,2)$

$\Leftrightarrow (2,1,1,2,2)$

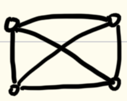
$\Leftrightarrow (2,2,2,1,1)$

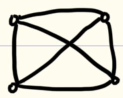
$\Leftrightarrow (1,1,1,1)$

故可以简单图化

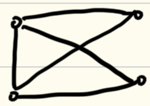


8. 非同构子图：

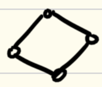




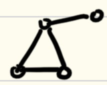
①



②



③



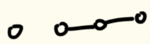
④

①～⑩ 为生成子图

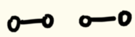
⑤ 为自补图

⑤

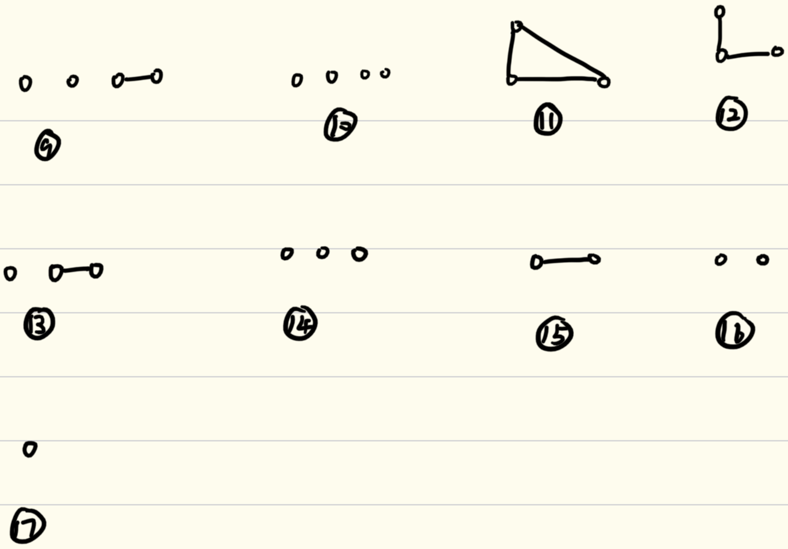
⑥



⑦



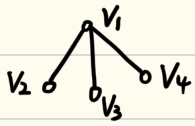
⑧



12. $\forall v_1 \in V$，$d_G(v_1) + d_{\bar{G}}(v_1) = 5$

可以知 $d_G(v_1) \ge 3$ 或 $d_{\bar{G}}(v_1) \ge 3$ 恒成立

不妨假定 G 中 v_1 度 ≥ 3，则



若 $v_2v_3 \in E(G)$，则 v_1, v_2, v_3 彼此相邻.

若 $v_2v_3 \in E(\bar{G})$ 而 $v_2v_4 \in E(G)$、则 v_1, v_2, v_4 彼此相邻

若 $v_2v_4, v_2v_3 \in E(\bar{G})$，$v_3v_4 \in E(G)$，则 v_1, v_3, v_4 彼此相邻

若 $v_2v_4, v_2v_3, v_3v_4 \in E(\bar{G})$，则在 $\bar{G}$ 中 v_2, v_3, v_4 彼此相邻.

综上，G 或 $\bar{G}$ 中存在3个顶点彼此相邻

24. (1) $K_n = \langle V, E \rangle$，令红色边集合为 E_1，蓝色边集合为 E_2.

$G = \langle V, E_1 \rangle$　$P = \langle V, E_2 \rangle$　易知 $P = \bar{G}$

设任意一点 $v \in V$，$d_G(v) + d_{\bar{G}}(v) = n-1$　$(n \ge 6)$

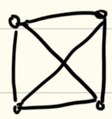
不妨以 $n=6$ 讨论，同12、易知一定存在红色的 K_3 或蓝色的 K_3.

(2) 可以设 红色边 (v_1, v_2) 代表 v_1 与 v_2 认识，蓝色边 (v_1, v_2) 代表 v_1 与 v_2 不认识

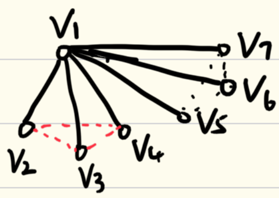
令(1)中 $n=6$，则一定存在红色 K_3 (即3个人彼此认识)

或 蓝色 K_3 (即3个人彼此不认识)

K_4：



(3) 不妨以 $n=7$ 讨论：　$d_G(v_1) = 6$



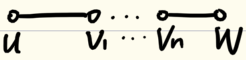
$V' = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$

则 $G[V']$ 为 K_6，则其存在红色 K_3 或蓝色 K_3

若为红色 K_3，则再并上 v_1，如图. 定存在 K_4.

14. 对于命题A $\forall u,v,w \in V(G)$，使得 (u,v)，$(v,w) \in E(G)$，则 $(u,w) \in E(G)$

由于简单图G是连通的，则任意 $u,w \in V(G)$ 存在通路

对 

(u,v_1) (v_1,v_2) 则 $(u,v_2) \in E(G)$

(u,v_2),(v_2,v_3) 则 $(u,v_3) \in E(G)$

$\vdots$

故 u 与 $v_1,v_2 \cdots v_n$ 及 w 均相邻.

故 u 与所有点均相邻 故为n阶无向简单完全图

因而命题A错误，原命题为真

15. 由于 $\delta(G) \geq 2$ 且为简单图、则有在初始路径 v_0v_1，采用扩大路径法得到极大路径 $\Gamma = v_0v_1v_2 \cdots v_l$ $(l \geq \delta(G))$ 因为该图为简单图因而 $l \geq \delta(G)$

①若 v_0 与 v_l 相邻，则 $\Gamma = v_0v_1v_2 \cdots v_lv_0$ 圈长 $= l+1 \geq \delta(G)+1$

②若 v_0 与 v_l 不相邻，则存在 v_i，$\delta(G) \leq i \leq l-1$ 且 v_0 与 v_i 相邻 则 $v_0v_1v_2 \cdots v_iv_0$

圈长 $= i+1 \geq \delta(G)+1$