三亭

・対称ランダムウォーク

def：対称ランダムウォーク

$$X_j = \begin{cases} 1 & (\omega_j = H) \\ -1 & (\omega_j = T) \end{cases}$$

$M_0 = 0$ として

$$M_k = \sum_{j=1}^{k} X_j \quad , k = 1, 2, \cdots$$

○期待値，分散

$$E[X_j] = \frac{1}{2} 1 + \frac{1}{2}(-1) = 0$$

$$Var[X_j] = \frac{1}{2} 1^2 + \frac{1}{2}(-1)^2 = 1$$

よって

$$E[M_k] = 0$$

$$Var[M_k] = k.$$

○ 独立増分

$$M_{k_{i+1}} - M_{k_i} = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} X_j$$

$$\mathrm{Var}[M_{k_{i+1}} - M_{k}] = k_{i+1} - k_i$$

○ マルチンゲール

$$E[M_l \mid \mathcal{F}_k]$$

$$= E[M_l - M_k \mid \mathcal{F}_k] + M_k$$

$$= 0 + M_k = M_k.$$

Made with Goodnotes

・ 2次変分

$$[M, M]_k = \sum_{j=1}^{k} (M_j - M_{j-1})^2$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \left\{ \sum_{l=1}^{j} X_l - \sum_{m=1}^{j-1} X_m \right\}^2$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \left\{ \cancel{X_1} + \cancel{X_2} + \cdots + \cancel{X_{j-1}} + X_j - (\cancel{X_1} + \cancel{X_2} + \cdots + \cancel{X_{j-1}}) \right\}^2$$

$$= \sum_{j=1}^{k} X_j^2 = k \quad \left(\neq Var[M_k] \right)$$

実際に計算できる

・大きさが調整されたランダムウォーク

$$\overline{W}_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} M_{nt}$$

○期待値 分散

$$E[\overline{W}_t^{(n)}] = 0$$

$$Var[\overline{W}_t^{(n)}] = \frac{1}{n}(nt) = t$$

○マルチンゲール

$$E[\overline{W}_t^{(n)} \mid \mathcal{F}_s] = \overline{W}_s^{(n)}.$$

○ 2次変分

Remark $W_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} M_{nt}$

$$[W^{(n)}, W^{(n)}](t)$$

$$= \sum_{j=1}^{nt} \left(W^{(n)}_{\frac{j}{n}} - W^{(n)}_{\frac{j-1}{n}} \right)^2$$

$$= \sum_{j=1}^{nt} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} M_j - \frac{1}{\sqrt{n}} M_{j-1} \right)^2$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{nt} \Big(\cancel{M_1} + \cancel{M_2} + \cdots + \cancel{M_{nt-1}} + M_{nt}$$

$$- (M_0 + \cancel{M_1} + \cdots + \cancel{M_{nt-1}}) \Big)^2$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{nt} (X_{nt})^2$$

$$= t$$

」.

Th 3.2.1 中心極限定理)

$$\boxed{\begin{array}{l} \overline{W}^{(n)}_t \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0, t) \\ \dfrac{1}{\sqrt{t}}\overline{W}^{(n)}_t \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1) \end{array}}$$

∵)

$$E\left[e^{\theta \overline{W}^{(n)}_t}\right]$$

$$= E\left[\exp\left\{\theta\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{nt} X_j\right)\right\}\right]$$

$$= E\left[\prod_{j=1}^{nt} \exp\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}} X_j\right)\right]$$

$$\Leftarrow \exp\left(\frac{\alpha}{n}X_1 + \frac{\alpha}{n}X_2\right)$$

$$\boxed{= \exp\left(\frac{\alpha}{n}X_1\right)\exp\left(\frac{\alpha}{n}X_2\right)}$$

$$= E\left[\exp\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}X_1\right)\exp\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}X_2\right)\cdots\right]$$

$$= \prod_{j=1}^{nt} E\left[\exp\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}X_j\right)\right]$$

ここで

$$\left(E\left[e^{\theta X_i}\right] = \frac{1}{2}e^{\theta} + \frac{1}{2}e^{-\theta} \right)$$

ので

$$= \prod_{j=1}^{nt} \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}} + e^{-\frac{\theta}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$= \left\{\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}} - \frac{\theta}{\sqrt{n}}}\right)\right\}^{nt} = \varphi_n(\theta)$$

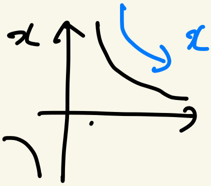
$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(\theta) = \exp\left(\frac{\theta^2 t}{2}\right)$$

となれば証明終了になる

$$\varphi_n(\theta) = \left\{ \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}} + e^{-\frac{\theta}{\sqrt{n}}} \right) \right\}^{nt}$$

$x \downarrow 0$

$$\left(x = \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$



$$\rightarrow \log \varphi_n(\theta) = nt \log \left(\frac{e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}}}{2} + \frac{e^{-\frac{\theta}{\sqrt{n}}}}{2} \right)$$

$$= t \frac{1}{x^2} \log \left(\frac{e^{x\theta}}{2} + \frac{e^{-x\theta}}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \varphi_n(\theta)$$

$$= t \lim_{x \downarrow 0} \frac{\log\left(\frac{e^{x\theta}}{2} + \frac{e^{-x\theta}}{2} \right)}{x^2}$$

ロピタルの定理を用いる

$$\partial x\left\{\log\left(\frac{e^{\theta x}}{2}+\frac{e^{-\theta x}}{2}\right)\right\}$$

$$=\partial x\left\{\log\left(e^{\theta x}+e^{-\theta x}\right)-\log 2\right\}$$

$$=\frac{\theta(e^{\theta x}-e^{-\theta x})}{e^{\theta x}+e^{-\theta x}}$$

F.)

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(\theta)$$

$$=t\lim_{x\downarrow 0}\frac{\theta(e^{\theta x}-e^{-\theta x})}{2x(e^{\theta x}+e^{-\theta x})}$$

$$=\frac{\theta t}{2}\lim_{x\downarrow 0}\frac{e^{\theta x}-e^{-\theta x}}{e^{\theta x}+e^{-\theta x}}$$

もう一度ロピタル

$$\partial x\left(e^{\theta x}-e^{-\theta x}\right)$$

$$=\theta\left(e^{\theta x}+e^{-\theta x}\right)$$

$$\partial x\left\{x\left(e^{\theta x}+e^{-\theta x}\right)\right\}$$

$$=\left(e^{\theta x}+e^{-\theta x}\right)+\theta x\left(e^{\theta x}-e^{-\theta x}\right)$$

5.2

$$\lim_{n\to\infty} q_n(\theta)$$

$$=\frac{\theta t}{2}\lim_{x\downarrow 0}\frac{\theta\left(\overset{1}{\overset{\uparrow}{e^{\theta x}}}+\overset{1}{\overset{\uparrow}{e^{-\theta x}}}\right)}{\left(\underset{\underset{1}{\downarrow}}{e^{\theta x}}+\underset{\underset{1}{\downarrow}}{e^{-\theta x}}\right)+\underbrace{\theta x\left(e^{\theta x}-e^{-\theta x}\right)}_{\downarrow\, 0}}$$

$$=\frac{\theta^2 t}{2}$$

◦ 二項モデルの極限としての対数正規分布

$$S \quad \times \begin{cases} \to \times \ S\left(1+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\ \to \times \ S\left(1-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \end{cases}$$

$$t-\frac{1}{n} \xrightarrow[\text{1ステップ}]{} t \leftarrow \frac{nt}{n}$$

$$\tilde{p} = \frac{1+r-d_n}{u_n-d_n}$$

$$= \frac{1+0-\left(1-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}{1+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}-\left(1-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$$

$$= \frac{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{2}$$

$$\tilde{q} = \frac{1}{2}$$

H_{nt} ：表へ出た回数

T_{nt} ：裏へ出た回数

$nt = H_{nt} + T_{nt}$ ：関係式 —(1)

ランダムウォーク $M_{nt} = H_{nt} - T_{nt}$ —(2)

(1) + (2)

$$nt + M_{nt} = 2H_{nt}$$

(1) − (2)

$$nt - M_{nt} = 2T_{nt}$$

$$\rightarrow \begin{cases} H_{nt} = \frac{1}{2}(nt + M_{nt}) \\ T_{nt} = \frac{1}{2}(nt - M_{nt}) \end{cases}$$

時刻tの株価は

$$\boxed{S_n(t) = S(0)\, u_n^{H_{nt}}\, d_n^{T_{nt}}}$$

となる。理由は

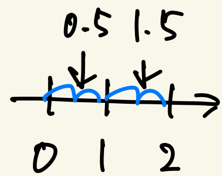
たとえば $n=1,\ t=1$

$H_1 = 1 \quad T_1 = 0$ で

$$S(0) \longrightarrow S(0) + \sigma S(0)$$
$$= S(0)(1+\sigma)^1(1-\sigma)^0$$

また、 $n=2,\ t=2$

$H_4 = 3,\ T_4 = 1$



$$S(0) \longrightarrow S(0)\left(1+\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\to S(0)\left(1+\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2 \to S(0)\left(1+\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)^3$$

$$\to S(0)\left(1+\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)^3\left(1-\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)$$

$$S_n(t) = S(0)\, u_n^{H_{nt}}\, d_n^{T_{nt}}$$

$$= S(0)\left(1+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{2}(nt+M_{nt})} \cdot \left(1-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{2}(nt-M_{nt})} \quad \text{---} \circledast$$

この式の $n\to\infty$ に関する挙動を考える.

Th 3.2.2)

上記 $\circledast$ 式に対して $n\to\infty$ とすると

$$\boxed{S(t) = S(0)\exp\left\{\sigma W(t) - \frac{\sigma^2 t}{2}\right\}}$$

$\because$) $\log S_n(t)$

$$= \log S(0) + \frac{1}{2}(\underline{n}t+\underline{M_{nt}})\log\left(1+\frac{\sigma}{\underline{\sqrt{n}}}\right)$$

$$+\frac{1}{2}(\underline{n}t-\underline{M_{nt}})\log\left(1-\frac{\sigma}{\underline{\sqrt{n}}}\right)$$

Remark

$$f(x) = \log(1+x)$$

$$f' = \frac{1}{1+x}, \quad f'' = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\to f(x) \simeq 0 + \frac{1}{1}x - \frac{1}{2}x^2$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2$$

$$\log\left(1+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \simeq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n}$$

$$\log\left(1-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \simeq -\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n}$$ s.)

$$\log S_n(t) \simeq \log S(0)$$

$$+ \frac{1}{2}(nt + M_{nt})\left\{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n}\right\}$$

$$+ \frac{1}{2}(nt - M_{nt})\left\{\frac{-\sigma}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n}\right\}$$

$$= \log S(0) + M_{nt}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + nt\left(-\frac{\sigma^2}{2n}\right)$$

$$= \log S(0) - \frac{\sigma^2 t}{2} + M_{nt} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Remark

$$\boxed{W_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} M_{nt}}$$

$$= \log S(0) - \frac{\sigma^2 t}{2} + \sigma W_t^{(n)}$$

Remark 中心极限定理

$$\boxed{W_t^{(n)} \xrightarrow{d} N(0,t)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\log S_n(t)\right)$$

$$= \log S(0) - \frac{\sigma^2 t}{2} + \sigma W(t)$$

$$\rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n(t) = S(0) \exp\left(-\frac{\sigma^2 t}{2} + \sigma W(t)\right)$$

Remark 対数正規分布

2018/11 社Q4

[1] $Y = \log X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$X = e^Y \sim LN(\mu, \sigma^2)$ と書く

期待値

$$E[X] = E[e^{N(\mu,\sigma^2)}]$$

$$= \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

中央値

$$P(X<c) = P(e^{N(\mu,\sigma^2)} < c)$$

$$= P(N(\mu,\sigma^2) < \log c)$$

$$= P\left(N(0,1) < \frac{\log c - \mu}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{\log c - \mu}{\sigma}\right) = 0.5$$

$$\to \frac{\log c - \mu}{\sigma} = 0$$

$$\log c = \mu \to c = e^{\mu}$$

最頻値

$$\log f(x) \underset{x}{\propto} -\log x - \frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$\partial x \left(\log f(x) \right)$$

$$= -\frac{1}{x} - \frac{1}{\sigma^2}\frac{1}{x}(\log x - \mu) = 0$$

$$-\frac{1}{\cancel{x}} = \frac{1}{\cancel{x}\sigma^2}(\log x - \mu)$$

$$-\sigma^2 = \log x - \mu$$

$$\rightarrow \quad x_{mode} = \exp(\mu - \sigma^2)$$

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

$$l(\mu, \sigma^2) = \sum_i \log f(x_i)$$

$$= \sum_i \left\{ -\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log\sigma^2 - \log x_i - \frac{(\log x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

$$\underset{\mu, \sigma^2}{\propto} -\frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_i (\log x_i - \mu)^2$$

$$\partial\mu\,(l(\mu, \sigma^2))$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\sum_i (\log x_i - \mu) = 0$$

$$\hat{\mu} = \overline{\log x}$$

○ ブラウン運動

各種計算

・ $E[W(s)W(t)] \quad (t>s)$

$= E[(W(t)-W(s)+W(s))W(s)]$

$= E[(W(t)-W(s))]E[W(s)]$

$+ E[W^2(s)] = s.$

・ モーメント母関数

まず $u_3W(t_3)+u_2W(t_2)+u_1W(t_1)$

$= u_3(W(t_3)-W(t_2))$

$+ (u_3+u_2)(W(t_2)-W(t_1))$

$+ (u_3+u_2+u_1)W(t_1)$

であることを利用して、

$$\vec{W} = [\overline{W}(t_1)\ \overline{W}(t_2) \cdots \overline{W}(t_m)]$$

のモーメント母関数は、

$$\varphi(u_1, u_2, \cdots, u_m)$$

$$= E\left[\exp\left\{\sum_{i=1}^{m} u_i \overline{W}(t_i)\right\}\right]$$

$$= E\Big[\exp\Big\{u_m(\overline{W}(t_m) - \overline{W}(t_{m-1}))$$

$$+ (u_m + u_{m-1})(\overline{W}(t_{m-1}) - \overline{W}(t_{m-2}))$$

$$+ (u_m + u_{m-1} + u_{m-2})(\overline{W}(t_{m-2}) - \overline{W}(t_{m-3}))$$

$$+ \cdots + (u_m + u_{m-1} + u_{m-2} + \cdots + u_1)\overline{W}(t_1)\Big\}\Big]$$

$$= E[\exp(u_m(\overline{W}(t_m) - \overline{W}(t_{m-1})))]$$

$$\cdot E[\exp\{(u_m + u_{m-1})(\overline{W}(t_{m-1}) - \overline{W}(t_{m-2}))\}]$$

$$\cdots E[\exp\{(u_m + u_{m-1} + \cdots + u_1)\overline{W}(t_1)\}]$$

Made with Goodnotes

$$= \exp\left(\frac{1}{2} u_m^2 (t_m - t_{m-1})\right)$$

$$\exp\left(\frac{1}{2} (u_m + u_{m-1})^2 (t_{m-1} - t_{m-2})\right)$$

$$\cdots \exp\left(\frac{1}{2} (u_m + u_{m-1} + \cdots + u_1)^2 t_1\right)$$

○2次変分

$\|\Pi\| = \max_j (t_{j+1} - t_j)$

(3.4.1 : 1次変分)

$$FV_T(f) = \lim_{\|\Pi\| \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|$$

ここで

$$\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$$

Remark : 平均値の定理)

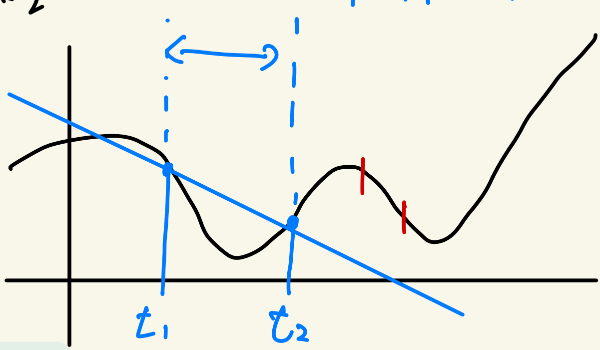
各部分期間 $[t_j, t_{j+1}]$ に対して

次のような点 t_j^* が存在する

$$\frac{f(t_{j+1}) - f(t_j)}{t_{j+1} - t_j} = f'(t_j^*)$$

イメージ

このくかんの中に同じかたむきになるtが存在



平均値の定理による式から

$$f(t_{j+1}) - f(t_j) = f'(t_j^*)(t_{j+1} - t_j)$$

F.)

$$FV_T(f) = \lim_{\|\Pi\| \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f'(t_j^*)|(t_{j+1} - t_j)$$

Remark : リーマン和)

$$\boxed{\sum f(\xi_i)\Delta x_i \longleftrightarrow \int f(x)\,dx}$$

$$FV_T(f) = \int_0^T dt\, f'(t)$$

○ 2次変分

def

$f(t)$ を $0<t<T$ で定義された関数とlて、

$$[f,f](T) = \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} \left[f(t_{j+1}) - f(t_j) \right]^2$$

※ 平均値の定理が利用できるような $f(t)$ だと2次変分は0となる。

一方、ブラウン運動の経路は時間に対して微分可能ではない。それ以下の定理が成り立つ

Th 3.4.3

W がブラウン運動ならば

$$[W,W](T) = T$$

∵ ず気持ち)

$$Q_{\Pi} := \sum_{j=0}^{n-1} \left(\overline{W}(t_{j+1}) - \overline{W}(t_j) \right)^2$$

・期待値

$$E\left[[\overline{W}(t_{j+1}) - \overline{W}(t_j)]^2 \right]$$

$$= t_{j+1} + t_j - 2t_j = t_{j+1} - t_j$$

Remark

$$E[\overline{W}(t+s)\overline{W}(t)]$$

$$= E[(\overline{W}(t+s) - \overline{W}(t) + \overline{W}(t))\overline{W}(t)]$$

$$= 0 + t.$$

よって

$$E[Q_{\Pi}]$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j) = t_n - t_0$$

$$= T$$

・分散

$$\mathrm{Var}\left[\left(\overline{W}(t_{j+1}) - \overline{W}(t_j)\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left\{\left(\overline{W}(t_{j+1}) - \overline{W}(t_j)\right)^2 - \underbrace{E\left[\left(\overline{W}(t_{j+1}) - \overline{W}(t_j)\right)^2\right]}_{= t_{j+1} - t_j}\right\}^2\right]$$

$$= E\left[\left\{\left(\overline{W}(t_{j+1}) - \overline{W}(t_j)\right)^2 - (t_{j+1} - t_j)\right\}^2\right]$$

$$= E\left[\left(\overline{W}(t_{j+1}) - \overline{W}(t_j)\right)^4\right]$$

$$- 2(t_{j+1} - t_j)E\left[\left(\overline{W}(t_{j+1}) - \overline{W}(t_j)\right)^2\right]$$

$$+ (t_{j+1} - t_j)^2$$

ここで

$X \sim N(0, \sigma^2)$ の4次モーメントは

$$M_X(\theta) = \exp\left(\frac{\theta^2\sigma^2}{2}\right)$$

$$M_X'(\theta) = \sigma^2\theta \exp\left(\frac{\theta^2\sigma^2}{2}\right) = \sigma^2\theta M_X$$

$$M_X''(\theta) = \sigma^2 M_X(\theta) + \sigma^4\theta^2 M_X(\theta)$$

$$M_X^{(3)}(\theta) = \sigma^4\theta M_X(\theta) + 2\sigma^4\theta M_X(\theta) + \sigma^4\theta^2 \cdot \sigma^2\theta M_X(\theta)$$

$$M_X^{(4)}(\theta) = \sigma^4 M_X(\theta) + \sigma^4\theta \cdot \sigma^2\theta M_X + 2\sigma^4 M_X(\theta) + 2\sigma^4\theta \cdot \sigma^2\theta M_X + 3\sigma^6\theta^2 M_X(\theta) + \cdots$$

$$\to M_X^{(4)}(0) = \sigma^4 + 2\sigma^4 = 3\sigma^4$$ 」

よって $\overline{W}(t_{j+1}) - \overline{W}(t_j) \sim N(0, t_{j+1} - t_j)$

$$E[(\overline{W}(t_{j+1}) - \overline{W}(t_j))^4]$$

$$= 3(t_{j+1} - t_j)^2$$

だから

$$Var[(\overline{W}(t_{j+1}) - \overline{W}(t_j))^2]$$

$$= 3(t_{j+1} - t_j)^2 - 2(t_{j+1} - t_j)^2$$

$$+ (t_{j+1} - t_j)^2$$

$$= 2(t_{j+1} - t_j)^2$$

$$\rightarrow Var[Q_\pi]$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} 2(t_{j+1} - t_j)^2$$

$$\leq \sum_{j=0}^{n-1} 2\|\pi\|(t_{j+1} - t_j)$$

$= 2\|\pi\| \cdot T$

$\longrightarrow \quad \mathrm{Var}[Q_\pi] = 0$

$\|\pi\| \to 0$

期待値 $E[Q_\pi]$ は

経路によらずに T $\Box$

・幾何ブラウン運動のボラティリティ

幾何ブラウン運動

$$S(t) = S(0)\exp\left\{\sigma W(t) + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right\}$$

ここから、この経路からボラティリティσ
を推定するためにどのように
ブラウン運動の2次変分を使うかを示す。

○ log Return を考える

$$\log\frac{S(t_{j+1})}{S(t_j)}$$

$$= \log\left[\exp\left(\sigma W(t_{j+1}) + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)t_{j+1} - \sigma W(t_j) - \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)t_j\right)\right]$$

Made with Goodnotes

$$= \sigma\left(\overline{W}(t_{j+1}) - \overline{W}(t_j)\right) + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_{j+1} - t_j)$$

次に実現ボラティリティは

$$\sum_{j=0}^{m-1}\left(\log\frac{S(t_{j+1})}{S(t_j)}\right)$$

$$= \sigma^2 \sum_{j=0}^{m-1}\left(\overline{W}(t_{j+1}) - \overline{W}(t_j)\right)^2$$

$$+ 2\sigma\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)\sum_{j=0}^{m-1}\left(\overline{W}(t_{j+1}) - \overline{W}(t_j)\right)(t_{j+1} - t_j)$$

$$+ \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \sum_{j=0}^{m-1}(t_{j+1} - t_j)^2$$

$\|\Pi\| \to 0$ とすると

第一項は $\sigma^2 (T_2 - T_1)$ へ

第二項は 0

第三項は 0

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{T_2 - T_1} \sum_{j=0}^{m-1} \left(\log \frac{S(t_{j+1})}{S(t_j)} \right)^2 \simeq \sigma^2}$$

○到達時間の分布

・指数マルチンゲール

$$Z(t) = \exp\left\{\sigma \overline{W}(t) - \frac{\sigma^2}{2} t\right\}$$

これはマルチンゲール

∵)

$$E[Z(t) \mid F(s)]$$

$$= E\left[\exp\left\{\sigma \overbrace{\left(\overline{W}(t) - \overline{W}(s)\right)}^{N(0,\, t-s)}\right\} \exp\left\{\sigma \overline{W}(s) - \frac{\sigma^2}{2} t\right\} \,\middle|\, F(s)\right]$$

$$= \exp\left(\sigma \overline{W}(s) - \frac{\sigma^2}{2} t\right) \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}(t-s)\right)$$

$$= \exp\left(\sigma \overline{W}(s) - \frac{\sigma^2}{2} s\right)$$

$$= Z(s) \qquad \square$$

?? $E[Z(t)] = Z(0)$ か?

$$Z(0) = \exp\left(\sigma W(0) - \frac{\sigma^2}{2} 0\right) = 1$$

$$E[Z(t)]$$

$$= \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2} t\right) \underbrace{E\left[\exp\left(\sigma \overset{N(0,t)}{\overbrace{W(t)}}\right)\right]}$$

$$\exp\left(\frac{\sigma^2}{2} t\right)$$

$$= 1$$

$$\begin{cases} \tau_m \equiv \min\{t \geq 0 ; \overline{W}(t) = m\} \\ t \wedge \tau_m : t と \tau_m の小さい方 (最小値) \end{cases}$$

と定義する。

任意の t に対して成り立つ

$$Z(0) = 1$$

$$= E[Z(t \wedge \tau_m)]$$

$$= E\left[\exp\left(\sigma \overline{W}(t \wedge \tau_m) - \frac{\sigma^2}{2}(t \wedge \tau_m)\right)\right]$$

と計算したい

次に、$\sigma > 0$, $m > 0$ として

$t \leq \tau_m$ では $\overline{W}(t) \leq m$

から

$$0 \leq \exp\left(\sigma \overline{W}(t \wedge \tau_m)\right) \leq e^{\sigma m}.$$

が言える

$\tau_m < \infty$ (：どこかで到達する)

$$\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}(t \wedge \tau_m)\right)$$

$$\xrightarrow[t\to\infty]{} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\tau_m\right)$$

$\tau_m = \infty$ (：到達しない)

$$\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}(t \wedge \tau_m)\right)$$

$$\xrightarrow[t\to\infty]{} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}t\right) = 0$$

つまり

$$\lim_{t\to\infty} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}(t \wedge \tau_m)\right)$$

$$= \mathbb{1}[\tau_m < \infty] \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\tau_m\right)$$

まず. $\tau_m < \infty$ の場合.

$$\exp\left(\sigma \overline{W}(t \wedge \tau_m)\right)$$

$$\xrightarrow[t\to\infty]{} \exp\left(\sigma \underbrace{\overline{W}(\tau_m)}_{=m}\right)$$

$\tau_m = \infty$ の場合

$$\exp\left(\sigma \overline{W}(t \wedge \tau_m)\right)$$

$\xrightarrow[t\to\infty]{}$ とにかく $e^{\sigma m}$ は超えない

有限の値.

したがって

$$\lim_{t\to\infty} \exp\left\{\sigma \overline{W}(t\wedge\tau_m) - \frac{\sigma^2}{2}(t\wedge\tau_m)\right\}$$

$$= \mathbb{1}[\tau_m < \infty] \exp\left(\sigma m - \frac{\sigma^2}{2}\tau_m\right)$$

計算して…

$$E\left[\exp\left\{\sigma W(t\wedge\tau_m)-\frac{\sigma^2}{2}(t\wedge\tau_m)\right\}\right]$$

$$=E\left[\mathbb{1}(\tau_m<\infty)\exp\left(\sigma m-\frac{\sigma^2\tau_m}{2}\right)\right]$$

$$=1$$

$$\Longrightarrow E\left[\mathbb{1}(\tau_m<\infty)\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\tau_m\right)\right]$$

$$=e^{-\sigma m}.$$

τ_m がほとんど確実に有限だから

$$E\left[\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\tau_m\right)\right]=e^{-\sigma m}$$

Th 3.6.2

$m \in \mathbb{R}$ に対してレベル m へのブラウン運動の到達時間はほとんど有限であり、その分布のラプラス変換は $\alpha > 0$ として

$$E\left[e^{-\alpha \tau_m}\right] = \exp\left(-|m|\sqrt{2\alpha}\right)$$

となる

∵) 先の式に $\alpha = \dfrac{\sigma^2}{2}$ とする

$$\sigma = \sqrt{2\alpha}$$

○ 鏡像原理

(目標)

正のレベル m と正の時刻 t を固定し、時刻 t 以前に、レベル m に到達するブラウン運動の経路を数える

鏡像等式

$$\Pr[T_m \le t, W(t) \le w]$$

時刻 t 以前にレベル m に到達して時刻 t には w を下まわる確率

$$= \Pr[W(t) \ge 2m - w]$$

Ch 3.7.1)

$$\Pr[\tau_m \le t] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{|m|}{\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy \quad (t \geq 0)$$

であり,

$$f_{\tau_m}(t) = \frac{d}{dt} \Pr[\tau_m \le t]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \frac{|m|}{t} e^{-\frac{m^2}{2t}}$$

∵) 鏡像等式より $w = m$ として

$$\Pr[\tau_m \le t,\ W(t) \le m]$$

$$= \Pr[W(t) \geq m]$$

Made with Goodnotes

また、以下も成り立つ

$$\Pr[\tau_m \le t, \overline{W}(t) \ge m]$$

いらない…

$$= \Pr[\overline{W}(t) \ge m]$$

よって

$$\Pr[\tau_m \le t]$$

$$= \Pr[\tau_m \le t, \overline{W}(t) \ge m] + \Pr[\tau_m \le t, \overline{W}(t) \le m]$$

$$= 2\Pr[\overline{W}(t) \ge m]$$

$$= 2\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_m^\infty dw\, e^{-\frac{w^2}{2t}}$$

$$y = \frac{w}{\sqrt{t}}$$

$$dy = \frac{dw}{\sqrt{t}}$$

$$\Pr[\tau_m \leq t]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\frac{m}{\sqrt{t}}}^{\infty} dy \cdot \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$$

Remark

(B5) ライプニッツの公式：θ に関して微分可能で x に関して積分可能な関数 $f(x,\theta)$ に対して

$$\frac{d}{d\theta}\int_{g(\theta)}^{h(\theta)} f(x,\theta)\,dx = f(h(\theta),\theta)\frac{dh(\theta)}{d\theta} - f(g(\theta),\theta)\frac{dg(\theta)}{d\theta} + \int_{g(\theta)}^{h(\theta)} \frac{\partial}{\partial\theta} f(x,\theta)\,dx$$

となる．

$$\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)' = \left(t^{-\frac{1}{2}}\right)'$$

$$= -\frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2t\sqrt{t}}$$

(B5) ライプニッツの公式：θ に関して微分可能で x に関して積分可能な関数 $f(x,\theta)$ に対して

$$\frac{d}{d\theta}\int_{g(\theta)}^{h(\theta)} f(x,\theta)\,dx = f(h(\theta),\theta)\frac{dh(\theta)}{d\theta} - f(g(\theta),\theta)\frac{dg(\theta)}{d\theta} + \int_{g(\theta)}^{h(\theta)} \frac{\partial}{\partial\theta} f(x,\theta)\,dx$$

となる.

$$\Pr[\tau_m \leq t] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{|m|}{\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$$

$$\frac{d}{dt}\Pr[\tau_m \leq t]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{m}{2t\sqrt{t}}e^{-\frac{m^2}{2t}}$$

$$= \frac{m}{t\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{m^2}{2t}}$$

Remark 逆ガウス分布

Q26 (追加)

$$f(x \mid \mu, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right)$$

・ブラウン運動とその最大値の分布.

$$M(t) \equiv \max_{0 \le s \le t} \overline{W}(s)$$

鏡像等式より

$$\Pr[\tau_m \le t, \overline{W}(t) \le w]$$

$$= \Pr[\overline{W}(t) \ge 2m - w]$$

*

$$\rightarrow \Pr[M(t) \ge m, \overline{W}(t) \le w]$$

$$= \Pr[\overline{W}(t) \ge 2m - w]$$

Th 3.7.3

$(M(t), \overline{W}(t))$ の同時密度関数

$$f(m,w) = \frac{2(2m-w)}{t\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(2m-w)^2}{2t}}$$

$$\Pr[M(t) \geq m, \overline{W}(t) \leq w]$$

$$= \int_m^{\infty} dx \int_{-\infty}^{w} dy\, f(x,y) \quad \text{—①}$$

と $\Pr[\overline{W}(t) \geq 2m-w]$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{2m-w}^{\infty} dz\, e^{-\frac{z^2}{2t}} \quad \text{—②}$$

① = ② を用いて

まず: m で微分

$$-\int_{-\infty}^{w} f(m, y)\,dy$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(2m-w)^2}{2t}}$$

wで微分

$$-f(m, w)$$

$$= -\frac{2(2m-w)}{t\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(2m-w)^2}{2t}}$$

$\square$.

五7:

$M(t) \mid \overline{W}(t)$ を求める

$$f(m \mid w) = \frac{f_{M(t), \overline{W}(t)}(m, w)}{f_{\overline{W}(t)}(w)}$$

$$= \frac{\dfrac{2(2m-w)}{t\cancel{\sqrt{2\pi t}}}}{\dfrac{1}{\cancel{\sqrt{2\pi t}}}} \exp\left\{ \underbrace{-\frac{(2m-w)^2}{2t} + \frac{w^2}{2t}} \right\}$$

$$-\frac{1}{2t}\left(4m^2 - 4mw + w^2 - w^2\right)$$

$$= -\frac{2m}{t}(m-w)$$

$$\Rightarrow f(m|w)$$

$$= \frac{2(2m-w)}{t} \exp\left\{-\frac{2m(m-w)}{t}\right\}$$

$$\square$$