

# ★オプションの価格付.

## 1.9.3 まとめ：マルチンゲール・アプローチによる価格式の導出手順

最後に、マルチンゲール・アプローチによる、デリバティブの価格式の導出手順をまとめておこう。続く第2章では、これを繰り返して、色々な複雑なデリバティブのプライシングに取り組む。

**Step1:** 資産価格とデリバティブの価格の推移、ペイオフを明確に書き出す<sup>114</sup>。ペイオフの非負をとる操作は、指標関数を用いた表現に変えておく。

**Step2:** 効率的なニューメレル・ベアを選び、他の資産をすべてそのニューメレルで割る。そしてそれらが、すべてマルチンゲールになる（そんな確率が存在する）という事実を書き下す。割引いたオプション価格がマルチンゲールであることを表している式において、時点ゼロでのニューメレルを右辺に移すことにより、オプション価格を求める期待値表現が出てくる。

**Step3:** 資産価格が従う確率微分方程式を建てる。割引資産価格はマルチンゲールになるので、**重要なのはボラティリティのモデリングだけである**。初等的なモデリングでは、特に理由がない場合、Lognormal ボラティリティがデフォルト的に採用される（資産価格は幾何ブラウン運動にしたがう）。その後、伊藤の商の公式を用いて、割引資産価格のしたがう確率微分方程式を導出し、ギルザノフの定理を用いて、それがマルチンゲールになるような確率を求める。そして、その確率の下でのブラウン運動を用いた、割引資産価格の表現を導出する。

**Step4:** (Step2で求めた) オプション価格を求める期待値表現において、資産価格が全て割引ベースになるように変形し、Step3で仮定した割引資産価格のモデルを代入する。(このときにブラウン運動を、標準正規確率変数を用いた表現で置き換えておく。またその際に、ブラウン運動の対称性を利用して、マイナスを付けておく)。

**Step5:** ギルザノフの定理とニューメレル変換を利用して、オプション価格を求める期待値表現を、Step4で導入した標準正規確率変数に関する指標関数の期待値、すなわち分布関数を使った形になるまで落とし込む。その結果が、デリバティブ価格式の解析解である<sup>115</sup>。

## Step 1.

$$\text{株価} : dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dw(t)$$

$$\text{安全資産} : dB(t) = rB(t)dt$$

オプション = 1 価格

$$: C(T) = (S(T) - K)^+$$

## Step 2.

$$= - \times 1 - 10 \cdot 100 (B, Q_B)$$

$$\frac{S(0)}{B(0)} = E^{Q_B} \left[ \frac{S(T)}{B(T)} \right]$$

$$\frac{C(0)}{B(0)} = E^{Q_B} \left[ \frac{C(T)}{B(T)} \right]$$

## Step 3

Ito's 商公式 (伊藤の商公式)

$$d\left(\frac{S_1}{S_2}\right) = \left(\frac{S_1}{S_2}\right) \left\{ (\mu_1 - \mu_2 - \rho \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2) dt + \sigma_1 dW_1(t) - \sigma_2 dW_2(t) \right\}$$

$$\begin{aligned} d\left(\frac{S(t)}{B(t)}\right) &= \left(\frac{S(t)}{B(t)}\right) \left\{ (\mu - r) dt + \sigma dW(t) \right\} \\ &= \sigma \left(\frac{S(t)}{B(t)}\right) \left\{ \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) dt + dW(t) \right\} \end{aligned}$$

適合過程  $\theta(\sigma) = \frac{\mu - r}{\sigma}$

$$\frac{dQ_B}{dP} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 T - \left( \frac{\mu - r}{\sigma} \right) dW^P \right\}$$

同樣に

$$\begin{aligned} d \left( \frac{B(t)}{S(t)} \right) &= \left( \frac{B(t)}{S(t)} \right) \left\{ (r - \mu + \sigma^2) dt - \sigma dW^P(t) \right\} \\ &= -\sigma \left( \frac{B}{S} \right) \left\{ -\frac{r - \mu + \sigma^2}{\sigma} dt + dW^P \right\} \end{aligned}$$

適合過程  $\theta(\sigma) = -\frac{r - \mu + \sigma^2}{\sigma}$

$$\frac{dQ_S}{dP} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{r - \mu + \sigma^2}{\sigma} \right)^2 + \frac{r - \mu + \sigma^2}{\sigma} dW^P \right\}$$

$$\begin{cases} dW_{(t)}^{QB} = \frac{\mu - r}{\sigma} dt + dW_{(t)}^P \\ dW_{(t)}^{QS} = \frac{r - \mu + \sigma^2}{\sigma} dt + dW_{(t)}^P \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \overline{W}^{QB}(t) = \frac{\mu - r}{\sigma} t + \overline{W}^P(t) \\ \overline{W}^{QS}(t) = -\frac{r - \mu + \sigma^2}{\sigma} t + \overline{W}^P(t) \end{cases}$$

差を求めよう

$$\overline{W}^{QB}(t) - \overline{W}^{QS}(t) = \sigma t \quad \text{を得る。}$$

Step 4

$$\begin{aligned} C(0) &= B(0) E^{QB} \left[ \frac{(S(T) - K)^+}{B(T)} \right] \\ &= e^{-rT} E^{QB} \left[ S(T) \mathbb{I} \{ S(T) \geq K \} \right] \\ &\quad - K e^{-rT} E^{QB} \left[ \mathbb{I} \{ S(T) \geq K \} \right] \end{aligned}$$

以下を計算する。 Step 5.

(第 2 頁)

$$= K e^{-rT} E^{QB} [I \{ S(T) \geq K \}]$$

$$= K e^{-rT} E^{QB} \left[ I \left\{ \frac{S(T)}{B(T)} \geq \frac{K}{B(T)} \right\} \right]$$

$$\begin{cases} d\left(\frac{S(t)}{B(t)}\right) = \sigma\left(\frac{S(t)}{B(t)}\right) d\bar{W}^{QB}(t) \\ d\bar{W}^{QB} = \frac{\mu - r}{\sigma} t + d\bar{W}^P \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{S(t)}{B(t)} = \frac{S(0)}{B(0)} \exp \left\{ -\frac{\sigma^2}{2} t + \sigma \bar{W}^{QB}(t) \right\}$$

Let's

$$= K e^{-rT} E^{QB} \left[ I \left\{ S(0) \exp \left( -\frac{\sigma^2}{2} T - \sigma \sqrt{T} N(0,1) \right) \geq \frac{K}{B(T)} \right\} \right]$$

$$\ln S(0) - \frac{\sigma^2}{2}T - \sigma \sqrt{T} N(0,1)$$

$$\geq \ln K - rT$$

$$\ln S(0) - \ln K - \frac{\sigma^2}{2}T + rT$$

$$\frac{\quad}{\sigma \sqrt{T}} \geq N$$

$$\ln \left( \frac{S(0)}{K} \right) + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T$$

$$\frac{\quad}{\sigma \sqrt{T}} \geq N(0,1)$$

$$(d_1 = d_2)$$

$$= Ke^{-rT} \Phi(d_2)$$

$$d_2 = \frac{\ln \left( \frac{S(0)}{K} \right) + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}}$$

(第一項)

$$= e^{-rT} E^{Q^B} [S(T) I \{S(T) \geq K\}]$$

$$= e^{-rT} E^{Q^S} \left[ \frac{dQ^B}{dQ^S} S(T) I \{S(T) \geq K\} \right]$$

$$\frac{dQ^B}{dQ^S} = \frac{\frac{B(T)}{B(0)}}{\frac{S(T)}{S(0)}} \quad \text{177}$$

$$= E^{Q^S} \left[ \frac{\frac{B(T)}{B(0)}}{\frac{S(T)}{S(0)}} \frac{S(T)}{B(T)} I \{S(T) \geq K\} \right]$$

$$= S(0) E^{Q^S} [I \{S(T) \geq K\}]$$

$$= S(0) E^{Q^S} \left[ I \left\{ \frac{S(T)}{B(T)} \geq \frac{K}{B(T)} \right\} \right]$$

$$= S(0) E^{Q^S} \left[ I \left\{ \frac{B(T)}{K} \geq \frac{B(T)}{S(T)} \right\} \right]$$

$$d\left(\frac{B(t)}{S(t)}\right) = -\sigma\left(\frac{B(t)}{S(t)}\right) \left\{ \frac{r-\mu+\sigma^2}{\sigma} dt + dW^Q(t) \right\}$$

$$= -\sigma\left(\frac{B}{S}\right) dW^Q$$

$$dW^Q = -\frac{r-\mu+\sigma^2}{\sigma} dt + dW^P(t)$$

$$\underbrace{\frac{B(t)}{S(t)}}_4 = \frac{B(0)}{S(0)} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}t - \sigma W^Q(t)\right)$$

$$= S(0) E^Q \left[ I \left\{ \frac{B(T)}{K} \geq \frac{B(0)}{S(0)} \exp(\dots) \right\} \right]$$

$$= S(0) E^Q \left[ I \left\{ +rT - \ln K \geq -\ln S(0) - \frac{\sigma^2}{2}T - \sigma \underbrace{W^Q(T)}_{+t} \right\} \right]$$

$$+ \sigma \sqrt{T} N(0,1)$$



$$\frac{\ln\left(\frac{S_{(0)}}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \geq N(0.1)$$

$$= S_{(0)} N(d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_{(0)}}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{S_{(0)}}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$= d_2 + \sigma\sqrt{T}$$

□

(2) リスリ中五五五

$$S \begin{cases} \rightarrow (1+u)S \\ \rightarrow (1+d)S \end{cases}$$

$$I \rightarrow 1+r$$

$$\textcircled{1} A \equiv ((1+u)S - K)^T, B \equiv ((1+d)S - K)^T$$

$$((1+u)S - K)^T = (1+u)Sx + (1+r)y$$

$$((1+d)S - K)^T = (1+d)Sx + (1+r)y$$

$$x = \frac{A - B}{(u-d)S}$$

$$y = \frac{(1+u)A - (1+d)B}{(1+r)(u-d)}$$