2項モデル

(1) 2項モデル具体例

(株)

$$\begin{tikzcd} & 32 \\ 16 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & 8 \end{tikzcd}$$

(安全資産) $1 \longrightarrow \frac{4}{3}$

$t=0 \qquad t=1$

行使価格 $K=16$

Q. プットオプションの初期価格 C

Step ① 複製ポートフォリオ

(原資産 x単位, 安全資産 y単位 により オプションのペイオフを複製する ポートフォリオ) を導出

Step ② 一物一価から ① の現在価値が C

Made with Goodnotes

① ペイオフ $(S_t - K)^+$

$$= (32 - 16)^+ = 16$$

$$\begin{cases} 16 = 32x + \frac{4}{3}y \\ 0 = 8x + \frac{4}{3}y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{2}{3}, \ y = -4$$

② $t=1$ における

(左)「原資産 x, 安全資産 y の組みのペイオフ」

‖

(右)「コールオプションのペイオフ」

$t=0$

$$16x + 1\cdot y = C$$

$$16\frac{2}{3} - 4 = \frac{20}{3} = C$$

※プット・コール・パリティより

$$P = C - S + \frac{K}{1+R} = \frac{8}{3}$$

(2) リスク中立確率

$$S \begin{array}{l} \nearrow (1+u)S \\ \searrow (1+d)S \end{array}$$

$$1 \longrightarrow 1+r$$

① $A \equiv ((1+u)S - K)^{+}$, $B \equiv ((1+d)S - K)^{+}$

$$((1+u)S - K)^{+} = (1+u)Sx + (1+r)y$$

$$((1+d)S - K)^{+} = (1+d)Sx + (1+r)y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{A - B}{(u-d)S} \\[2ex] y = \dfrac{(1+u)A - (1+d)B}{(1+r)(u-d)} \end{cases}$$

②

$$C = xS + y$$

$$= \frac{A-B}{u-d}\frac{\cancel{S}}{\cancel{S}} + \frac{(1+u)B-(1+d)A}{(1+r)(u-d)}$$

$$= \frac{1}{(1+r)(u-d)}\left(\cancel{A}+rA-\cancel{B}-rB+\cancel{B}+uB-\cancel{A}-dA\right)$$

$$= \frac{1}{1+r}\left(A\underbrace{\boxed{\frac{r-d}{u-d}}}_{Q(X=1+u)} + B\underbrace{\boxed{\frac{u-r}{u-d}}}_{Q(X=1+d)}\right)$$

$$= \frac{1}{1+r}E^{Q}\left[(XS-K)^{+}\right]$$

リスク中立確率

$$\begin{cases} Q(X=1+u) = \dfrac{r-d}{u-d} \\[2ex] Q(X=1+d) = \dfrac{u-r}{u-d} \end{cases}$$

(3) ブラックショールズモデル

原資産価格を対数正規分布に①
従い、無リスク金利が一定であるとの
仮定の元で、オプション価格を求めてく。

① $\dfrac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma d\overline{W}_t$

Itoの公式 $\boxed{\text{略}}$ $(d\overline{W}_t)^2 = dt$

$$d(\log S_t) = \frac{dS_t}{S_t} - \frac{1}{2S_t^2} dS_t^2$$

$$= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma d\overline{W}_t$$

$$\to \log S_t \sim N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right)$$

$$S_t = e^{N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right)}$$

※ $E\left[e^{\theta N(\mu, \sigma^2)}\right] = \exp\left(\mu\theta + \frac{\theta^2\sigma^2}{2}\right)$

㊟コールオプションの価格付.

1.9.3 まとめ：マルチンゲール・アプローチによる価格式の導出の手順

最後に，マルチンゲール・アプローチによる，デリバティブの価格式の導出手順をまとめておこう．続く第2章では，これを繰り返し用いて，色々なより複雑なデリバティブのプライシングに取り組む．

Step1: 資産価格とデリバティブの価格の推移，ペイオフを明確に書き出す[114]．ペイオフの非負をとる操作は，指標関数を用いた表現に変えておく．

Step2: 効率的なニューメレール・ペアを選び，他の資産をすべてそのニューメレールで割る．そしてそれらが，すべてマルチンゲールになる（そんな確率が存在する）という事実を書き下す．割引いたオプション価格がマルチンゲールであることを表している式において，時点ゼロでのニューメレールを右辺に移すことにより，オプション価格を求める期待値表現が出てくる．

Step3: 資産価格が従う確率微分方程式を建てる．割引資産価格はマルチンゲールになるので，重要なのはボラティリティのモデリングだけである．初等的なモデリングでは，特に理由がない場合，Lognormal ボラティリティがデフォルト的に採用される（資産価格は幾何ブラウン運動にしたがう）．その後，伊藤の商の公式を用いて，割引資産価格のしたがう確率微分方程式を導出し，ギルザノフの定理を用いて，それがマルチンゲールになるような確率を求める．そして，その確率の下でのブラウン運動を用いた，割引資産価格の表現を導出する．

Step4:（Step2 で求めた）オプション価格を求める期待値表現において，資産価格が全て割引ベースになるように変形し，Step3 で仮定した割引資産価格のモデルを代入する.（このときにブラウン運動を，標準正規確率変数を用いた表現で置き換えておく．またその際に，ブラウン運動の対称性を利用して，マイナスを付けておく）．

Step5: ギルザノフの定理とニューメレール変換を利用して，オプション価格を求める期待値表現を，Step4 で導入した標準正規確率変数に関する指標関数の期待値，すなわち分布関数を使った形になるまで落とし込む．その結果が，デリバティブ価格式の解析解である[115]．

Step 1.

株価：$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW^{P}(t)$

安全資産：$dB(t) = rB(t)dt$

オプションの価格

：$C(T) = (S(T) - K)^{+}$

Step 2.

ニューメレール・ペア (B, Q_B)

$$\frac{S(0)}{B(0)} = E^{Q_B}\left[\frac{S(T)}{B(T)}\right]$$

$$\frac{C(0)}{B(0)} = E^{Q_B}\left[\frac{C(T)}{B(T)}\right]$$

Step 3

Itoの商公式（幾何ブラウン）

$$\boxed{d\left(\frac{S_1}{S_2}\right) = \left(\frac{S_1}{S_2}\right)\left\{(\mu_1 - \mu_2 - \rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)dt + \sigma_1 d\overline{W}_1(t) - \sigma_2 d\overline{W}_2(t)\right\}}$$

$$d\left(\frac{S(t)}{B(t)}\right) = \left(\frac{S(t)}{B(t)}\right)\left\{(\mu - r)dt + \sigma\, d\overline{W}^P(t)\right\}$$

$$= \sigma\left(\frac{S(t)}{B(t)}\right)\left\{\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)dt + d\overline{W}^P(t)\right\}$$

適合過程 $\theta(S) = \dfrac{\mu - r}{\sigma}$

$$\frac{dQ_B}{dP} = \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 T - \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) d\overline{W}^P \right\}$$

同様に

$$d\left(\frac{B(t)}{S(t)}\right) = \left(\frac{B(t)}{S(t)}\right)\left\{ (r - \mu + \sigma^2)dt - \sigma d\overline{W}^P(t) \right\}$$

$$= -\sigma\left(\frac{B}{S}\right)\left\{ -\frac{r - \mu + \sigma^2}{\sigma}dt + d\overline{W}^P \right\}$$

適合過程 $\theta(S) = -\dfrac{r - \mu + \sigma^2}{\sigma}$

$$\frac{dQ_S}{dP} = \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{r - \mu + \sigma^2}{\sigma}\right)^2 + \frac{r - \mu + \sigma^2}{\sigma} d\overline{W}^P \right\}$$

$$\begin{cases} d\overline{W}^{Q_B}(t) = \dfrac{\mu - r}{\sigma}dt + d\overline{W}^P(t) \\ d\overline{W}^{Q_S}(t) = \dfrac{r - \mu + \sigma^2}{\sigma}dt + d\overline{W}^P(t) \end{cases}$$

積分 $\longrightarrow \begin{cases} \overline{W}^{QB}(t) = \dfrac{\mu - r}{\sigma} t + \overline{W}^{P}(t) \\ \overline{W}^{QS}(t) = -\dfrac{r - \mu + \sigma^2}{\sigma} t + \overline{W}^{P}(t) \end{cases}$

差をとる

$$\overline{W}^{QB}(t) - \overline{W}^{QS}(t) = \sigma t$$ を得る。

Step 4

$$C(0) = B(0) E^{QB}\left[\frac{(S(T)-K)^+}{B(T)}\right]$$

$$= e^{-rT} E^{QB}\left[S(T) I\{S(T) \geq K\}\right]$$

$$- K e^{-rT} E^{QB}\left[I\{S(T) \geq K\}\right]$$

以上を計算する. **Step 5**.

.

(第二項)

$$= Ke^{-rT} E^{Q_B}\left[I\left\{ S(T) \geq K \right\} \right]$$

$$= Ke^{-rT} E^{Q_B}\left[I\left\{ \frac{S(T)}{B(T)} \geq \frac{K}{B(T)} \right\} \right]$$

$$\begin{cases} d\left(\dfrac{S(T)}{B(T)}\right) = \sigma \left(\dfrac{S(T)}{B(T)}\right) d\overline{W}^{Q_B}(t) \\ d\overline{W}^{Q_B} = \dfrac{\mu - r}{\sigma} t + d\overline{W}^{P} \end{cases}$$

$$\to \frac{S(t)}{B(t)} = \frac{S(0)}{B(0)} \exp\left\{ -\frac{\sigma^2}{2} t + \sigma \overline{W}^{Q_B}(t) \right\}$$

よって.

$$= Ke^{-rT} E^{Q_B}\left[I\left\{ S(0) \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2} T - \sigma\sqrt{T} N(0,1) \right) \geq \frac{K}{B(T)} \right\} \right]$$

$$\ln S(0) - \frac{\sigma^2}{2}T - \sigma\sqrt{T}\,N(0,1)$$

$$\geq \ln K - rT$$

$$\frac{\ln S(0) - \ln K - \frac{\sigma^2}{2}T + rT}{\sigma\sqrt{T}} \geq N$$

$$\frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \geq N(0,1)$$

(第二项)

$$= Ke^{-rT}\,\Phi(d_2)$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

(第一項)

$$= e^{-rT} E^{Q_B}\left[S(T)\, I\{ S(T) \geq K \} \right]$$

$$= e^{-rT} E^{Q_S}\left[\frac{dQ_B}{dQ_S} S(T)\, I\{ S(T) \geq K \} \right]$$

$$\frac{dQ_B}{dQ_S} = \frac{\frac{B(T)}{B(0)}}{\frac{S(T)}{S(0)}}$$ より

$$= E^{Q_S}\left[\frac{\cancel{\frac{B(T)}{B(0)}}}{\cancel{\frac{S(T)}{S(0)}}} \frac{\cancel{S(T)}}{\cancel{B(T)}} I\{ S(T) \geq K \} \right]$$

$$= S(0) E^{Q_S}\left[I\{ S(T) \geq K \} \right]$$

$$= S(0) E^{Q_S}\left[I\left\{ \frac{S(T)}{B(T)} \geq \frac{K}{B(T)} \right\} \right]$$

$$= S(0) E^{Q_S}\left[I\left\{ \frac{B(T)}{K} \geq \frac{B(T)}{S(T)} \right\} \right]$$

$$d\left(\frac{B(T)}{S(t)}\right) = -\sigma\left(\frac{B(t)}{S(t)}\right)\left\{\frac{r-\mu+\sigma^2}{\sigma}dt + d\overline{W}^{P}(t)\right\}$$

$$= -\sigma\left(\frac{B}{S}\right)d\overline{W}^{Qs}$$

$$d\overline{W}^{Qs} = -\frac{r-\mu+\sigma^2}{\sigma}dt + d\overline{W}^{P}(t)$$

$$\frac{B(t)}{S(t)} = \frac{B(0)}{S(0)}\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}t - \sigma\overline{W}^{Qs}(t)\right)$$

$$= S(0)\,E^{Qs}\left[I\left\{\frac{B(T)}{K} \geq \frac{B(0)}{S(0)}\exp(\cdots)\right\}\right]$$

$$= S(0)\,E^{Qs}\left[I\left\{+rT - \ln K \geq -\ln S(0) - \frac{\sigma^2}{2}T - \sigma\underbrace{\overline{W}^{Qs}(T)}_{= +\sigma\sqrt{T}\mathcal{N}(0,1)}\right\}\right]$$

$$\frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \geq N(0,1)$$

$$= S(0)\, N(d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$= d_2 + \sigma\sqrt{T}$$

$\square$