Giải Tích Toán Học II

Đặng Hữu Chung
Viện Cơ học, Viện Hàn Lâm KH&CN Việt Nam

https://danghuuchung.com
Email: chung.danghuu@gmail.com

Updated January 2023

1.3.7 Hàm số ẩn

1.3.7.1 Khái niệm hàm ẩn

Hàm ẩn là một hàm được xác định cùng với các biến độc lập của nó bởi một phương trình có dạng:

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$$

trong đó $x_i, (i = \overline{1, n-1})$ là các biến độc lập và x_n là hàm phụ thuộc vào các biến $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$.

Chẳng hạn xét hai phương trình hàm hai biến:

$$F(x, y) \equiv x^2 - y^2 - 4 = 0$$
$$G(x, y) \equiv e^{xy} - 3x^2 - xy + 2y^3 - 100 = 0$$

Nếu xem $y = y(x)$ thì mỗi phương trình trên xác định quan hệ giữa hàm y và biến độc lập x. Ta gọi y là ẩn hàm hay hàm số ẩn của x được xác định lần lượt bởi các phương trình đã cho.

Đối với phương trình $F(x, y) = 0$, ta có thể giải phương trình tìm y theo x và có được hai hàm $y = \pm\sqrt{x^2 - 4}$ (không duy nhất) là các nhánh hyperbol với miền xác định

$$D = (-\infty, -2] \cup [2, \infty).$$

Đối với trường hợp phương trình $G(x, y) = 0$ không thể tìm được biểu diễn hiện $y = y(x)$.

Tương tự, với hàm ẩn $z = f(x, y)$ xác định bởi phương trình $F(x, y, z) = 0$

có thể hàm z không duy nhất trong miền xác định $D(x, y)$ của nó.

Mở rộng với hệ m hàm ẩn $f_i(\mathbf{x}), (i = \overline{1, m})$,

nó cần phải được xác định bởi hệ m phương trình

$$F_i(\mathbf{x}, f_1, f_2, \cdots, f_m) = 0, (i = \overline{1, m})$$

Định lý 1.3.7.1

Cho $F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên tập mở U. Giả sử tại $(x_0, y_0) \in U$ hàm $F(x_0, y_0) = 0$. Nếu $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ thì

1) Phương trình $F(x, y) = 0$ xác định trong lân cận x_0 một hàm ẩn duy nhất $y = f(x)$

2) $y_0 = f(x_0)$

3) $f(x)$ và $f'(x)$ liên tục trong lân cận của x_0

Chứng minh

1) Giả sử $F'_y(x_0, y_0) > 0$. Vì $F'_y(x, y)$ liên tục trên U nên:

$$\exists \alpha > 0 : F'_y(x, y) > 0, \forall (x, y) \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \times [y_0 - \alpha, y_0 + \alpha]$$

$$\Rightarrow F'_y(x_0, y) > 0, \forall y \in [y_0 - \alpha, y_0 + \alpha] \Rightarrow F(x_0, y) \text{ tăng}$$

$$\Rightarrow F(x_0, y_0 - \alpha) < 0 = F(x_0, y_0) < F(x_0, y_0 + \alpha)$$

Mặt khác, các hàm $F(x, y_0 - \alpha), F(x, y_0 + \alpha)$ liên tục trên $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ nên:

$$\exists \delta > 0 : F(x, y_0 - \alpha) < 0 < F(x, y_0 + \alpha), \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

cho thấy hàm $F(x, y)$ trái dấu, liên tục và tăng nghiêm ngặt trên $[y_0 - \alpha, y_0 + \alpha]$,

Do đó theo định lý Bolzano-Cauchy thư nhất đối với hàm liên tục và kết hợp với điều kiện tăng nghiêm ngặt ta suy ra:

$$\exists!\, y \in (y_0 - \alpha, y_0 + \alpha) : F(x, y) = 0 \Rightarrow y = f(x) \text{ } (\textit{đpcm})$$

2) $y_0 = f(x_0)$ là hiển nhiên

3) Với $\varepsilon > 0$ cho trước, xét lân cận $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Gọi $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), y_1 = f(x_1) \ \Rightarrow \ F(x_1, y_1) = 0$ và $y_1 \in (y_0 - \alpha, y_0 + \alpha)$.

Do đó theo 1) thì $\exists! f_1 : (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1) \to (y_1 - \alpha_1, y_1 + \alpha_1)$

với $\alpha_1, \delta_1 > 0$ đủ nhỏ sao cho:

$$(x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1) \times (y_1 - \alpha_1, y_1 + \alpha_1) \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$$

$\Rightarrow f_1(x) = f(x), \forall x \in (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1)$

Do đó với $\varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 : |x - x_1| < \delta_1 \Rightarrow \ |f_1(x) - y_1| = |f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$.

Vậy hàm $f(x)$ liên tục tại x_1.

Vì x_1 là tùy ý trong lân cận của x_0 nên $f(x)$ liên tục trong lân cận của x_0.

Để chứng minh $f(x)$ khả vi trên $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ xét $x, x+h \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

$$\Rightarrow F(x, f(x)) = 0.$$

Theo định lý giá trị trung bình ta có:

$$\begin{aligned} F(x+h, f(x+h)) - F(x, f(x)) &= [F(x+h, f(x+h)) - F(x, f(x+h))] \\ &\quad + [F(x, f(x+h)) - F(x, f(x))] \end{aligned}$$

$$= hF'_x(x+\theta h, f(x+h)) + \Delta f F'_y(x, f(x) + \theta_1 \Delta f) = 0$$

$$\Delta f = f(x+h) - f(x)$$

Suy ra $$\frac{\Delta f}{h} = -\frac{F'_x(x+\theta h, f(x+h))}{F'_y(x, f(x)+\theta_1 \Delta f)}$$

Vì F'_x, F'_y và f liên tục nên khi $h \to 0$ ta có:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta f}{h} = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} = f'(x)$$

Nghĩa là hàm $f(x)$ khả vi. Đồng thời hàm $f'(x)$ được xác định bởi thương của hai hàm liện tục và $F'_y \neq 0$ trong lân cận của (x_0, y_0) nên liên tục (*đpcm*).

Chú ý

Nếu $F'_x(x_0, y_0) = F'_y(x_0, y_0) = 0$

ta không thể kết luận về sự tồn tại của hàm ẩn $y = f(x)$

và lúc đó (x_0, y_0) được gọi là điểm kỳ dị (singularity).

Định lý 1.3.7.2

Cho $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ là hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên tập mở U.

Giả sử tại $(x_0, y_0, z_0) \in U$ hàm $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Nếu $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ thì

1) Phương trình $F(x, y, z) = 0$ xác định trong lân cận (x_0, y_0) một hàm ẩn duy nhất $z = f(x, y)$

2) $z_0 = f(x_0, y_0)$

3) $f(x, y)$ và $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ liên tục trong lân cận của (x_0, y_0)

Định lý 1.3.7.3

Cho $F : U \subset \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ và $G : U \subset \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$

là các hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên tập mở U.

Giả sử tại $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) \in U$ hàm $F(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = 0$ và $G(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = 0$.

Nếu định thức Jacobi tại $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$

$$|\mathbf{J}| = \begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix} \neq 0$$

thì

1) Hệ phương trình $F(x, y, z, u, v) = 0, G(x, y, z, u, v) = 0$ xác định trong lân cận (x_0, y_0, z_0) một cặp hàm ẩn duy nhất $u = f(x, y, z)$ và $v = g(x, y, z)$

2) $u_0 = f(x_0, y_0, z_0), v_0 = g(x_0, y_0, z_0)$

3) Cặp hàm u, v và các đạo hàm riêng của chúng liên tục trong lân cận của (x_0, y_0, z_0)

1.3.7.2 Đạo hàm riêng của hàm ẩn

Từ định lý ta có công thức tính đạo hàm của hàm ẩn y từ phương trình $F(x,y)=0$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{h} = -\frac{F'_x(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))} = f'(x)$$

Hoặc bằng cách lấy đạo hàm toàn phần của hàm F:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

Tương tự nếu hàm $F(x,y,z)=0$ thỏa mãn định lý (1.3.8.2)

ta lần lượt lấy đạo hàm 2 vế hàm $F(x,y,z)=0$ theo x và y ta có:

$$F'_x = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad F'_y = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Từ đó suy ra

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

Đối với hệ hai phương trình

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = 0 \\ G(x,y,u,v) = 0 \end{cases}$$

nếu thỏa mãn định lý (1.3.7.3) thì tồn tại các đạo hàm riêng của u và v.

Lần lượt lấy đạo hàm 2 vế theo x và y:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} + \dfrac{\partial G}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial G}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial y} + \dfrac{\partial G}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial G}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Do định thức Jacobi khác không nên hai hệ hai phương trình trên tồn tại nghiệm duy nhất

$$u'_x = \frac{G'_x F'_v - F'_x G'_v}{|\mathbf{J}|}, v'_x = \frac{G'_u F'_x - F'_u G'_x}{|\mathbf{J}|}$$

$$u'_y = \frac{G'_y F'_v - F'_y G'_v}{|\mathbf{J}|}, v'_y = \frac{G'_u F'_y - F'_u G'_y}{|\mathbf{J}|}$$

Ví dụ 1.3.7.1 Cho hàm số ẩn $y = y(x)$ được xác định bởi phương trình:

$$2x^2y^3 + \ln\left(2x^2 + y^2\right) - 3x + 2y = 0$$

Hãy tính đạo hàm y'_x.

$$F(x,y) = 2x^2y^3 + \ln\left(2x^2 + y^2\right) - 3x + 2y$$

$$\Rightarrow F'_x = \frac{4x}{2x^2+y^2} + 4xy^3 - 3,\ F'_y = 6x^2y^2 + \frac{2y}{2x^2+y^2} + 2$$

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

$$= \frac{-\frac{4x}{2x^2+y^2} - 4xy^3 + 3}{6x^2y^2 + \frac{2y}{2x^2+y^2} + 2} = -\frac{8x^3y^3 - 6x^2 + 4xy^5 + 4x - 3y^2}{2\left(6x^4y^2 + 3x^2\ y^4 + 2x^2 + y^2 + y\right)}$$

Ví dụ 1.3.7.2 Cho biết $z = z(x, y)$ được xác định bởi phương trình:

$$e^{x^2+y^2+z^2} + xyz + 5xz^4 + y^2z^3 + 5 = 0$$

Tính các đạo hàm z'_x, z'_y.

$$F(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2} + xyz + 5xz^4 + y^2z^3 + 5$$

$$\Rightarrow F'_x = 2xe^{x^2+y^2+z^2} + yz + 5z^4,\ F'_y = 2ye^{x^2+y^2+z^2} + xz + 2yz^3,$$
$$F'_z = 2ze^{x^2+y^2+z^2} + xy + 20xz^3 + 3y^2z^2$$

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} \quad = -\frac{2xe^{x^2+y^2+z^2} + yz + 5z^4}{2ze^{x^2+y^2+z^2} + xy + 20xz^3 + 3y^2z^2}$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} \quad = -\frac{2ye^{x^2+y^2+z^2} + xz + 2yz^3}{2ze^{x^2+y^2+z^2} + xy + 20xz^3 + 3y^2z^2}$$

1.4 Cực trị của hàm nhiều biến

1.4.1 Cực trị tương đối

Định nghĩa 1.4.1.1

Cho $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Gọi $M_0(x_0, y_0) \in D$ và $B(M_0, \delta) \subset D$ là lân cận của M_0. Khi đó:

$$f \text{ có cực đại tương đối tại } M_0 \Leftrightarrow f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \forall (x, y) \in B(M_0, \delta)$$

$$f \text{ có cực tiểu tương đối tại } M_0 \Leftrightarrow f(x_0, y_0) \leq f(x, y), \forall (x, y) \in B(M_0, \delta)$$

Khi hàm f đạt cực đại hay cực tiểu tương đối tại M_0 thì được gọi chung là hàm f đạt cực trị tương đối tại M_0.

Cực trị tương đối còn được gọi là cực trị địa phương.

Định lý 1.4.1.1

Nếu hàm $f(x,y)$ đạt cực trị địa phương tại $M_0(x_0,y_0)$ và giả sử hàm f có đạo hàm riêng tại $M_0(x_0,y_0)$ thì các đạo hàm riêng đó phải bằng 0:

$$\nabla f(x_0,y_0) = (0,0)$$

Chứng minh

Đặt $g(x) = f(x,y_0)$. Nếu hàm $f(x,y)$ đạt cực đại (cực tiểu) địa phương tại M_0 thì hàm $g(x)$ cũng đạt cực đại (cực tiểu) địa phương tại M_0. Do đó, theo định lý Fermat đã biết đối với hàm một biến thì $g'(x_0) = 0$, nghĩa là $f'_x(x_0,y_0) = 0$.

Chứng minh tương tự đối với hàm $h(y) = f(x_0,y)$, ta nhận được $f'_y(x_0,y_0) = h'(y_0) = 0$.

Vậy suy ra $\nabla f(x_0,y_0) = (0,0)$ (*đpcm*).

Ý nghĩa hình học của định lý (1.4.1.1) :

nếu hàm f có cực trị địa phương tại M_0 thì
mặt phẳng tiếp xúc với mặt $f(x,y)$ tại M_0 nằm ngang.

Điểm $M_0(x_0,y_0)$ tại đó xảy ra $\nabla f(x_0,y_0) = (0,0)$
được gọi là điểm dừng (stationary point) hay điểm tới hạn (critical point).

Điểm dừng trở thành *điểm yên ngựa* (saddle point)

khi lân cận $B(M_0, \delta)$ luôn chứa những điểm (x,y) sao cho $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$

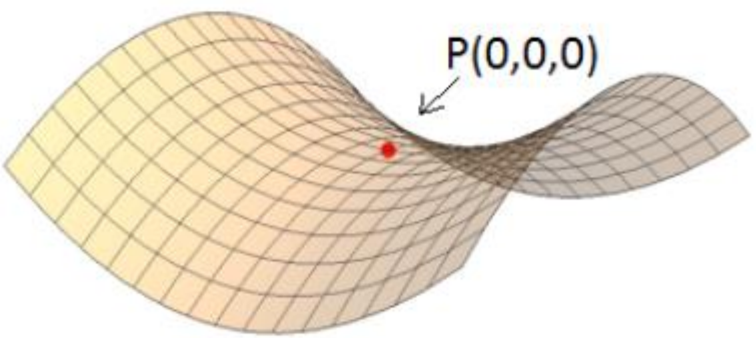
và những điểm khác $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$.

Như vậy điểm dừng có thể là :

- điểm cực đại địa phương,
- cực tiểu địa phương
- hoặc điểm yên ngựa.

Mặt có chứa điểm yên ngựa được gọi là mặt yên ngựa

$z = x^2 - y^2$ là một mặt yên ngựa chuẩn.



Hình 1.15: Điểm yên ngựa tiêu biểu $P(0, 0, 0)$

Phương pháp tìm cực trị địa phương

Ma trận Hesse của hàm $f(x,y)$ có đạo hàm riêng đến cấp hai liên tục trong lân cận $M_0(x_0,y_0)$ được định nghĩa như sau:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$$

Định thức của ma trận Hesse:

$$D(x,y) = det(\mathbf{H}) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2$$

Định lý 1.4.1.2 (Phép thử đạo hàm cấp hai)

Giả sử hàm $f(x,y)$ có đạo hàm riêng đến cấp hai liên tục trong lân cận điểm $M_0(x_0,y_0)$ và giả sử rằng $\nabla f(x_0,y_0) = (0,0)$. Khi đó tại $M_0(x_0,y_0)$ có 4 trường hợp xảy ra:

1) Nếu $det(\mathbf{H}) > 0$ và $f''_{xx} > 0$ thì hàm $f(x,y)$ có cực tiểu tại $M_0(x_0,y_0)$

2) Nếu $det(\mathbf{H}) > 0$ và $f''_{xx} < 0$ thì hàm $f(x,y)$ có cực đại tại $M_0(x_0,y_0)$

3) Nếu $det(\mathbf{H}) < 0$ thì hàm $f(x,y)$ có điểm yên ngựa tại $M_0(x_0,y_0)$

4) Nếu $det(\mathbf{H}) = 0$ không có kết luận và cần sử dụng các phương pháp khác để xét.

Để chứng minh người ta sử dụng phương trình đặc trưng của ma trận Hesse:

$$|\lambda I - \mathbf{H}| = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - (f''_{xx} + f''_{xy})\lambda + det(\mathbf{H}) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = f''_{xx} + f''_{xy} \text{ và } \lambda_1\lambda_2 = det(\mathbf{H}) \qquad (1.120)$$

Dấu của các giá trị riêng $\lambda_{1,2}$ được xác định thông qua (1.120) dẫn đến kết luận 1)-3).

Còn 4) thì cần khảo sát thông qua các ví dụ (Tom M. Apostol).

Ví dụ 1.4.1.1

Tìm cực trị của hàm $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$

Trước hết ta tìm các điểm dừng bằng cách giải hệ phương trình

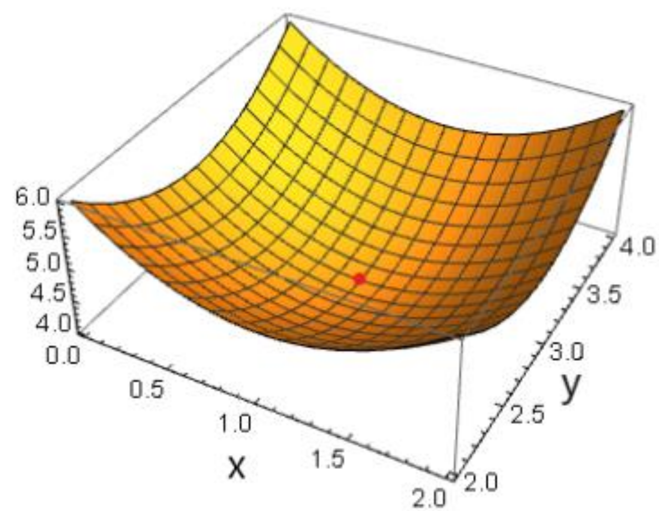
$$f'_x = 2x - 2 = 0$$
$$f'_y = 2y - 6 = 0$$

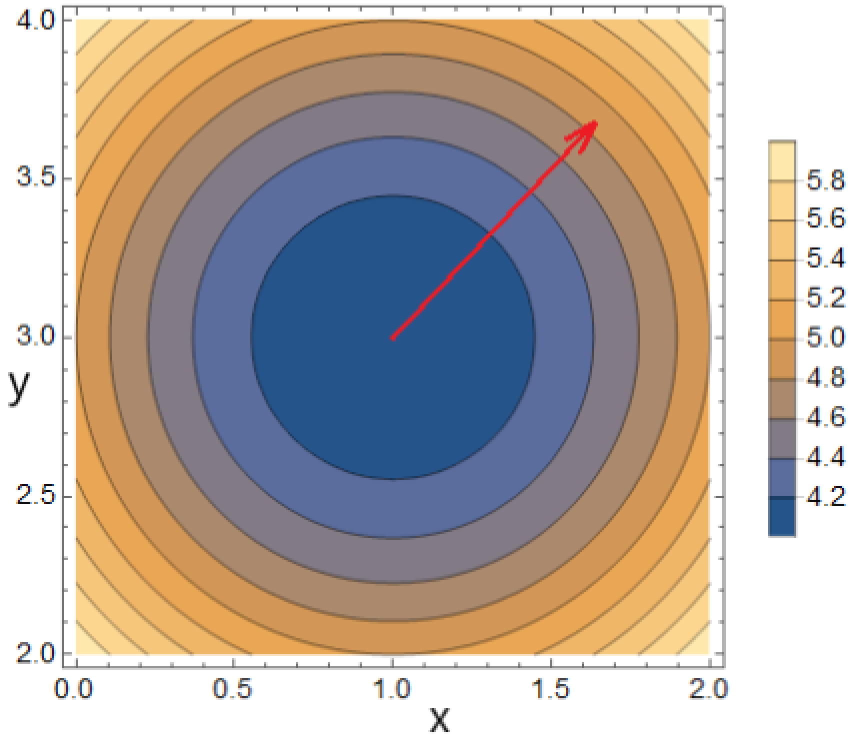
⇨ $x = 1, y = 3$ là điểm dừng duy nhất.

Ta tiếp tục tính định thức Hesse:

$$f_{xx} = 2, f_{xy} = 0, f_{yy} = 2$$
$$D(1,3) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 4 > 0, f_{xx}(1,3) = 2 > 0$$

Vậy hàm đạt cực tiểu vừa địa phương với giá trị là $f_{min} = 4$ tại $(1,3)$





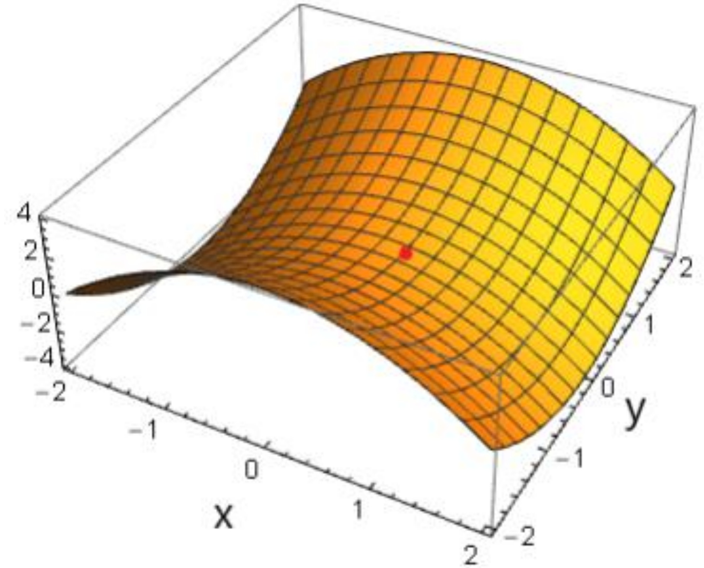
Từ đồ thị các đường mức (contours) ta nhận thấy rằng các đường mức lân cận điểm cực trị có dạng đường cong kín (oval). Mặt khác, giá trị đường mức tăng theo hướng bất kỳ xuất phát từ điểm cực trị đang xét, do đó điểm cực trị là cực tiểu.

Ví dụ 1.4.1.2

Tìm cực trị của hàm $f(x, y) = y^2 - x^2$

Trước hết ta tìm các điểm dừng bằng cách giải hệ phương trình

$$f'_x = -2x = 0$$
$$f'_y = 2y = 0$$



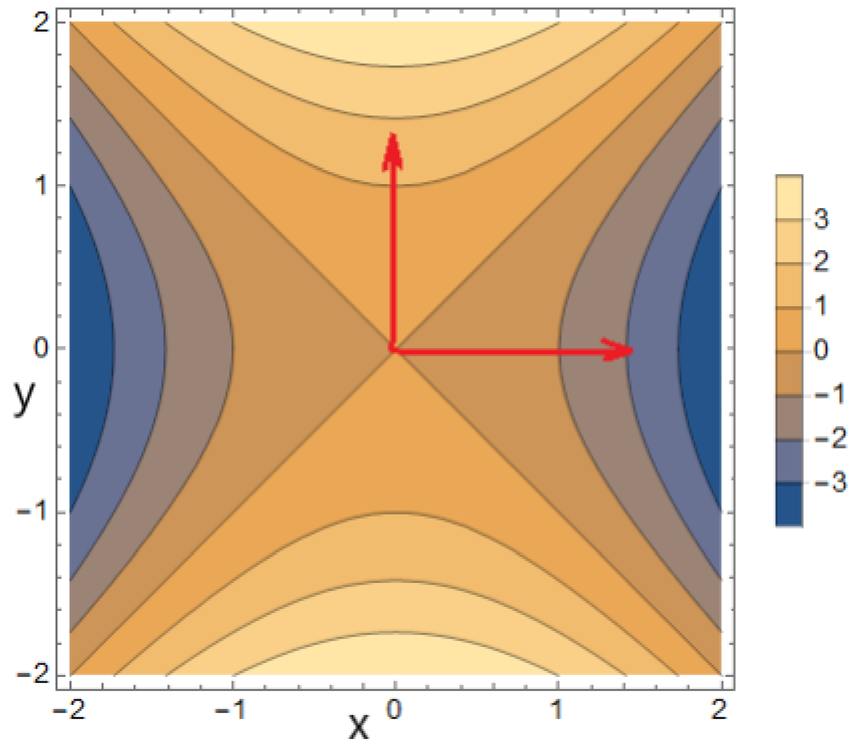
⇒ Điểm dừng duy nhất là $(0, 0)$ gốc tọa độ.

Xét định thức Hesse:

$$f_{xx} = -2, f_{xy} = 0, f_{yy} = 2$$
$$D(0,0) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -4 < 0$$

⇒ điểm $(0, 0)$ là điểm yên ngựa

Nếu không xử dụng phương pháp định thức Hesse chúng ta cũng có thể nhận ra điểm yên ngựa bằng cách dựa vào nhận xét rằng hàm $g(x) = f(x, 0) = -x^2$ đạt cực đại tại $x = 0$ và hàm $h(y) = f(0, y) = y^2$ đạt cực tiểu tại $y = 0$. Do đó điểm $(0, 0)$ là điểm yên ngựa.



Từ đồ thị các đường đồng mức ta nhận thấy rằng các đường mức tại lân cận điểm yên ngựa có dạng các đường hyperbol. Mặt khác giá trị các đường mức giảm từ điểm cực trị theo một hướng nào đó và tăng theo hướng khác.

Ví dụ 1.4.1.3

Khảo sát bản chất của điểm dừng đối với các hàm sau đây:

1) $f(x, y) = x^4 + y^4$

2) $f(x, y) = -x^4 - y^4$

3) $f(x, y) = x^4 - y^4$

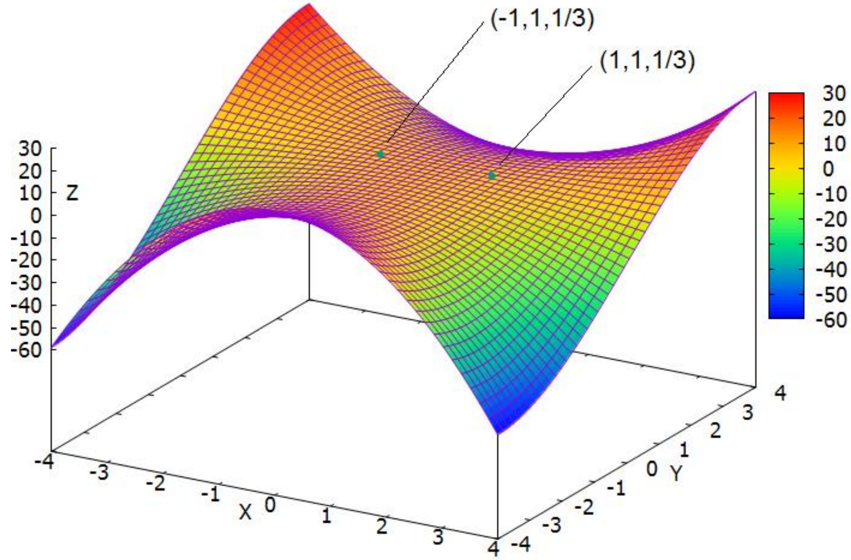
Cả 3 trường hợp hàm số đều có điểm dừng là $(0, 0)$ và định thức Hessian tại đó bằng 0.

1) $x^4 + y^4 \geq 0 \Rightarrow f_{min} = 0$

2) $-x^4 - y^4 \leq 0 \Rightarrow f_{max} = 0$

3) $f(x, 0) = x^4 \geq 0,\ f(0, y) = -y^4 \leq 0 \Rightarrow (0, 0)$ điểm yên ngựa

Ví dụ 1.4.1.4



Tìm và phân loại điểm dừng của hàm

$$f(x,y) = x^2y - x^2 - \frac{1}{3}y^3$$

Điểm dừng được xác định bởi

$$f'_x = 2xy - 2x = 0$$
$$f'_y = x^2 - y^2 = 0$$

Giải hệ phương trình ta tìm đươc 3 điểm dừng: $(0,0), (1,1)$ và $(-1,1)$.

Định thức Hessian: $D = -4x^2 - 4y(y-1)$.

- $D(1,1) = -4 < 0$ suy ra $(1,1)$ là điểm yên ngựa
- $D(-1,1) = -4 < 0$ suy ra $(-1,1)$ là điểm yên ngựa
- $D(0,0) = 0$ không có kết luận, do đó ta cần phân tích thêm:

  +) $f(0,y) = -\dfrac{y^3}{3}$, $f'_y(0,y) = -y^2$, $f''_{yy}(0,y) = -2y$, suy ra $(0,0)$ điểm uốn đối với đường cong $z = f(0,y)$ trong mặt phẳng yz.

  +) $f(x,0) = -x^2$, $f'_x(x,0) = -2x$, $f''_{xx}(0,y) = -2 < 0$, suy ra $(0,0)$ điểm cực đại đối với đường cong $z = f(x,0)$ trong mặt phẳng xz.

  Vậy $(0,0)$ không phải là điểm cực trị.

1.4.2 Cực trị tuyệt đối

Định nghĩa 1.4.2.1

Cho $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Gọi $M_0(x_0, y_0) \in D$. Khi đó:

$$f \text{ có cực đại tuyệt đối tại } M_0 \Leftrightarrow f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \forall (x, y) \in D$$

$$f \text{ có cực tiểu tuyệt đối tại } M_0 \Leftrightarrow f(x_0, y_0) \leq f(x, y), \forall (x, y) \in D$$

Khi hàm f đạt cực đại hay cực tiểu tuyệt đối tại M_0 thì được gọi chung là hàm f đạt cực trị tuyệt đối tại M_0.

Đối với một hàm của một biến, định lý Cực trị nói rằng nếu hàm liên tục trên một khoảng đóng thì có giá trị nhỏ nhất tuyệt đối và giá trị lớn nhất tuyệt đối trong khoảng đó. Ta có định lý tương tự đối với hàm nhiều biến.

Định lý 1.4.2.1

Nếu hàm $f(x, y)$ liên tục trong miền kín và bị chặn $D \subset \mathbb{R}^2$, thế thì hàm f có cực tại tuyệt đối tại $M_1(x_1, y_1) \in D$ và có cực tiểu tuyệt đối tại $M_2(x_2, y_2) \in D$.

Phương pháp tìm cực trị tuyệt đối

Để tìm cực trị tuyệt đối của hàm $f(x, y)$ thỏa mãn *Định lý 1.4.2.1*, theo *Định lý 1.4.1.1* điểm cực trị có thể là điểm dừng hoặc điểm trên biên của D. Do đó ta lần lượt thực hiện:

1) Tìm giá trị của hàm f tại tất cả các điểm dừng trong D

2) Tìm các cực trị của f trên biên của D

3) So sánh các giá trị tìm được ở hai bước trên, giá trị lớn nhất là cực đại tuyệt đối và giá trị nhỏ nhất là cực tiểu tuyệt đối.

Ví dụ 1.4.2.1

Tìm cực trị tuyệt đối của hàm $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$ trong miền chữ nhật

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2\}.$$

Vì $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$ là hàm đa thức nên liên tục trong miền kín và bị chặn D, do đó thỏa mãn điều kiện của định lý về cực trị tuyệt đối. Bây giờ ta lần lượt thực hiện các bước:

1) Tìm giá trị hàm f tại điểm dừng:

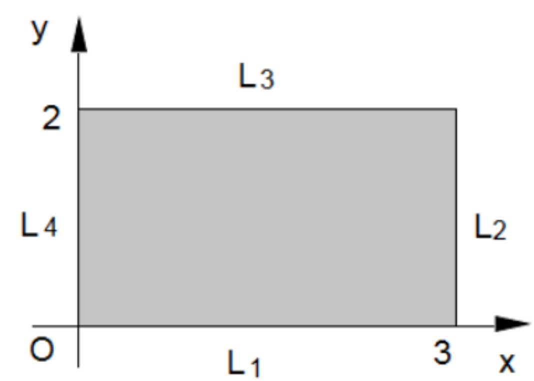
$$f_x = 2x - 2y = 0$$
$$f_y = 2 - 2x = 0$$
$$\Rightarrow x = 1, y = 1$$

Điểm dừng $(1,1)$ và $f(1,1) = 1$.

2) Tìm các cực trị trên biên:

+) Trên biên $L_1 : y = 0, 0 \le x \le 3, f(x,y) = x^2 \in [0,9]$

hàm có cực tiểu $f(0,0) = 0$ và cực đại $f(3,0) = 9$.



+) Trên biên $L_2 : x = 3, 0 \leq y \leq 2, f(x, y) = 9 - 4y \in [1, 9]$ cực tiểu $f(3, 2) = 1$ và cực đại $f(3, 0) = 9$.

+) Trên biên $L_3 : y = 2, 0 \leq x \leq 3, f(x, y) = 4 - 4x + x^2 \in [0, 4]$ cực tiểu $f(2, 2) = 0$, cực đại $f(0, 2) = 4$.

+) Trên biên $L_4 : x = 0, 0 \leq y \leq 2, f(x, y) = 2y \in [0, 4]$, cực tiểu $f(0, 0) = 0$, cực đại $f(0, 2) = 4$.

3) So sánh các trường hợp trên ta suy ra hàm có

cực tiểu tuyệt đối $f(0, 0) = f(2, 2) = 0$

và cực đại tuyệt đối $f(3, 0) = 9$.

1.4.2 Cực trị có điều kiện, nhân tử Lagrange

Tìm cực trị của hàm $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ thỏa mãn m điều kiện ràng buộc:

$$\varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, i = 1, m, m < n$$

và gọi đó là bài toán cực trị có điều kiện.

Nói chung, bài toán cực trị có điều kiện rất phức tạp
và không có phương pháp chung để giải.

Có một số phương pháp đặc biệt được áp dụng cho các bài toán
mà các điều kiện ràng buộc là tương đối đơn giản.

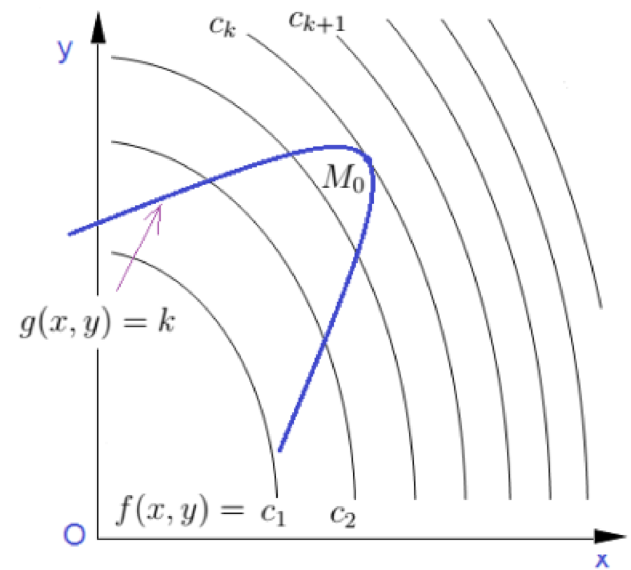
Một trong những phương pháp đó là phương pháp nhân tử Lagrange.

Phương pháp nhân tử Lagrange

Giả sử ta cần tìm giá trị cực trị của hàm hai biến $f(x, y)$, chịu điều kiện ràng buộc $g(x, y) = k$. Bây giờ chúng ta sẽ giải thích cơ sở hình học của phương pháp nhân tử Lagrange đối với bài toán này.

Hình biểu diễn các đường contour $f(x, y) = c_i$ và $g(x, y) = k$.

ta cần tìm điểm $M_0(x_0, y_0)$ trên đường cong $g(x, y) = k$ sao cho hàm $f(x, y)$ đạt cực trị.



đường cong $g(x, y) = k$ cắt các đường $f(x, y) = c_i$ tại các điểm khác nhau và sẽ tồn tại một giá trị c_k nào đó để đường cong $g(x, y) = k$ tiếp xúc với đường cong $f(x, y) = c_k$,

vì nếu không sẽ không tồn tại cực trị.

Lúc này $f(x, y) = c_k$ chính là giá trị cực trị cần tìm.

Lúc này $f(x,y) = c_k$ chính là giá trị cực trị cần tìm. Điều này có nghĩa rằng tại điểm tiếp xúc M_0 các vector pháp tuyến của hai đường cong $f(x,y) = c_k$ và $g(x,y) = k$ có cùng phương. Do đó dẫn đến phương trình:

$$\nabla f(M_0) = \lambda \nabla g(M_0), \lambda \in \mathbb{R}$$

Trong đó λ được gọi là nhân tử Lagrange.

Vì phương trình chứa ba ẩn cần tìm là x_0, y_0, λ nên cần thêm phương trình điều kiện để hệ đóng kín. Vì vậy hệ phương trình đầy đủ bao gồm:

$$\begin{cases} \nabla f(M_0) = \lambda \nabla g(M_0) \\ g(M_0) = k \end{cases}$$

Nếu đặt $\varphi(x,y) = g(x,y) - k$ thì hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} \nabla f(M_0) = \lambda \nabla g(M_0) \\ \varphi(M_0) = 0 \end{cases}$$

Tổng quát, cực trị của hàm $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ khả vi trong D chịu m điều kiện ràng buộc (1.123) được xác định bởi hệ $n+m$ phương trình với các ẩn $x_{0k}, k = 1, n$ và $\lambda_i, i = 1, m$:

$$\begin{cases} \nabla f(M_0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla \varphi_i(M_0) \\ \varphi_i(M_0) = 0, i = 1, m \end{cases}$$

Giải hệ ta sẽ tìm được các điểm cực trị M_0 và m giá trị λ_i.

Chú ý

phương pháp nhân tử Lagrange chỉ tìm được các điểm cực trị M_0 tương ứng

với các giá trị λ_i mà không xác định $f(M_0)$ là cực đại hay cực tiểu.

Do đó, chúng ta phải khảo sát tiếp tục để phân biệt bản chất của điểm cực trị,

chẳng hạn bằng cách so sánh các giá trị của chúng.

Ví dụ 1.4.2.1

Tìm cực trị của hàm $f(x,y) = x^2 - y^2$ thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.

Đặt $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.

Theo phương pháp nhân tử Lagrange ta cần tìm x, y, λ từ hệ phương trình

$$\nabla f = \lambda \nabla \varphi. \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{r} 2x = \lambda 2x \\ -2y = \lambda 2y \end{array} \right.$$

Giải phương trình : $x = 0, \lambda = 1$ và $y = 0, \lambda = -1$.

Lần lượt thay $x = 0, y = 0$ vào phương trình $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow$ tìm ra 4 điểm cực trị lần lượt là $x = 0, y = \pm 1$ và $y = 0, x = \pm 1$

Để xác định tính chất của các điểm dừng M_0 ta cần khảo sát tiếp tục.

Thay phương trình điều kiện vào hàm $f(x,y)$:

$$y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow f(x,y) = 2x^2 - 1 \geq -1 \Rightarrow x = 0 \ f \text{ đạt cực tiểu } f_{min} = -1$$

$$x^2 = 1 - y^2 \Rightarrow f(x,y) = 1 - 2y^2 \leq 1 \Rightarrow y = 0 \ f \text{ đạt cực đại } f_{max} = 1$$

Như vậy tại $(0, \pm 1)$ hàm đạt cực tiểu $f_{min} = -1$ và tại $(\pm 1, 0)$ hàm đạt cực đại $f_{max} = 1$.

Ví dụ 1.4.2.2

Tìm cực trị của hàm $f(x, y) = 4x + 3y$ thỏa mãn điều kiện $x^2 + 4y^2 = 4$.

Đặt $\varphi(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4$.

Theo phương pháp nhân tử Lagrange ta cần tìm x, y, λ từ hệ phương trình

$$4 = \lambda 2x$$
$$3 = \lambda 8y$$

Với $\lambda \neq 0 \Rightarrow x = \frac{2}{\lambda}$ và $y = \frac{3}{8\lambda}$.

Thay x, y vào phương trình $\varphi(x, y) = 0$ ta tìm được: $\lambda = \pm\frac{\sqrt{73}}{8}$

$\Rightarrow x = \pm\frac{16}{\sqrt{73}}, y = \pm\frac{3}{\sqrt{73}}$ là các điểm hàm $f(x, y)$ đạt cực trị có điều kiện.

Thay các giá trị vừa tìm được của x, y

$$f(\pm 16/\sqrt{73}, \pm 13/\sqrt{73}) = \pm\sqrt{73},$$

điểm cực đại là $(\frac{16}{\sqrt{73}}, \frac{3}{\sqrt{73}})$ với giá trị cực đại $f_{max} = \sqrt{73}$

điểm cực tiểu là $(-\frac{16}{\sqrt{73}}, -\frac{3}{\sqrt{73}})$ tương ứng giá trị cực tiểu $f_{min} = -\sqrt{73}$.

1.4.3 Bài toán tối ưu

- Optimization problem
- Tìm ra giải pháp tốt nhất từ tất cả các giải pháp khả thi
- Chia thành hai loại tùy thuộc vào các biến liên tục hay rời rạc

Dạng chuẩn của bài toán tối ưu liên tục được phát biểu như sau:

Hãy tìm cực tiểu (hay cực đại) của hàm $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

chịu các điều kiện ràng buộc:

$$g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le 0, \; i = 1, m$$
$$h_j(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \; j = 1, p$$

f được gọi là *hàm mục tiêu*,

g_i, h_j là các điều kiện ràng buộc

x_i là các biến quyết định

Tập hợp các nghiệm của nó được gọi là tập khả thi hay các phương án.

- **Quy hoạch tuyến tính**

Quy hoạch tuyến tính (Linear programming)

hay còn được gọi là tối ưu hóa tuyến tính (Linear optimization)

là một trường hợp đặc biệt của bài toán tối ưu khi hàm mục tiêu f

và các điều kiện ràng buộc g_i, h_i được biểu diễn dưới dạng tuyến tính.

Bài toán quy hoạc tuyến tính được phát biểu dưới dạng kinh điển như sau:

Cực tiểu hóa hàm $$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Điều kiện ràng buộc $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, i = 1, m$$

$$x_j \geq 0, j = 1, n$$

- **Quy hoạch phi tuyến**

Khi có ít nhất một trong các biểu diễn hàm

và điều kiện ràng buộc được biểu diễn dưới dạng phi tuyến.

Ví dụ 1.4.3.1.

Giả sử rằng một nông trường có một mảnh đất với diện tích trồng trọt $A\,km^2$, dự định trồng lúa mì, lúa mạch và khoai tây.

Theo kế hoạch người ta dành số tiền đầu tư cho phân bón P USD và tiền đầu tư cho hạt giống là G USD.

Giá chi phí cho phân bón đối với mỗi chủng loại cây trồng là P_1, P_2, P_3 USD$/km^2$ và giá tiền cho hạt giống lần lượt là G_1, G_2, G_3 USD$/km^2$.

Sau khi thu hoạch giá tiền thu được cho mỗi chủng loại là S_1, S_2, S_3 USD$/km^2$.

Hãy tìm giải pháp cho diện tích trồng trọt cho mỗi loại x_1, x_2, x_3 để có số tiền thu hoạch nhiều nhất.

Cực đại hóa hàm $\quad f(\mathbf{x}) = S_1x_1 + S_2x_2 + S_3x_3$

Điều kiện ràng buộc

$$x_1 + x_2 + x_3 \le A$$

$$P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 \le P$$

$$G_1x_1 + G_2x_2 + G_3x_3 \le G$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$$

Software: OPTINVEST (C++)

Input:

A	25	km2
P	2000	USD
G	1500	USD
P1	59	USD
P2	65	USD
P3	67	USD
G1	50	USD
G2	52	USD
G3	56	USD
S1	860	USD
S2	865	USD
S3	865	USD

Kết quả tính:

	Diện tích	Tiền phân	Tiền giống	Doanh thu	Tiền lãi
Lúa mì	0.03	1.77	1.5	25.8	22.53
Lúa mạch	8.96	582.4	465.92	770.4	6702.08
Khoai tây	16.01	1072.67	896.56	13848.65	11879.42
Tổng	25	1656.84	1363.98	21624.85	18,604

Exercises

The Chain Rule

27–30 Use Equation 6 to find dy/dx.

27. $y \cos x = x^2 + y^2$

28. $\cos(xy) = 1 + \sin y$

29. $\tan^{-1}(x^2 y) = x + xy^2$

30. $e^y \sin x = x + xy$

31–34 Use Equations 7 to find $\partial z/\partial x$ and $\partial z/\partial y$.

31. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

32. $x^2 - y^2 + z^2 - 2z = 4$

33. $e^z = xyz$

34. $yz + x \ln y = z^2$

58. Suppose that the equation $F(x, y, z) = 0$ implicitly defines each of the three variables x, y, and z as functions of the other two: $z = f(x, y)$, $y = g(x, z)$, $x = h(y, z)$. If F is differentiable and F_x, F_y, and F_z are all nonzero, show that

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = -1$$

59. Equation 6 is a formula for the derivative dy/dx of a function defined implicitly by an equation $F(x, y) = 0$, provided that F is differentiable and $F_y \neq 0$. Prove that if F has continuous second derivatives, then a formula for the second derivative of y is

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$$

Maximum and Minimum Values

1. Suppose $(1, 1)$ is a critical point of a function f with continuous second derivatives. In each case, what can you say about f?

   (a) $f_{xx}(1, 1) = 4, \quad f_{xy}(1, 1) = 1, \quad f_{yy}(1, 1) = 2$

   (b) $f_{xx}(1, 1) = 4, \quad f_{xy}(1, 1) = 3, \quad f_{yy}(1, 1) = 2$

2. Suppose $(0, 2)$ is a critical point of a function g with continuous second derivatives. In each case, what can you say about g?

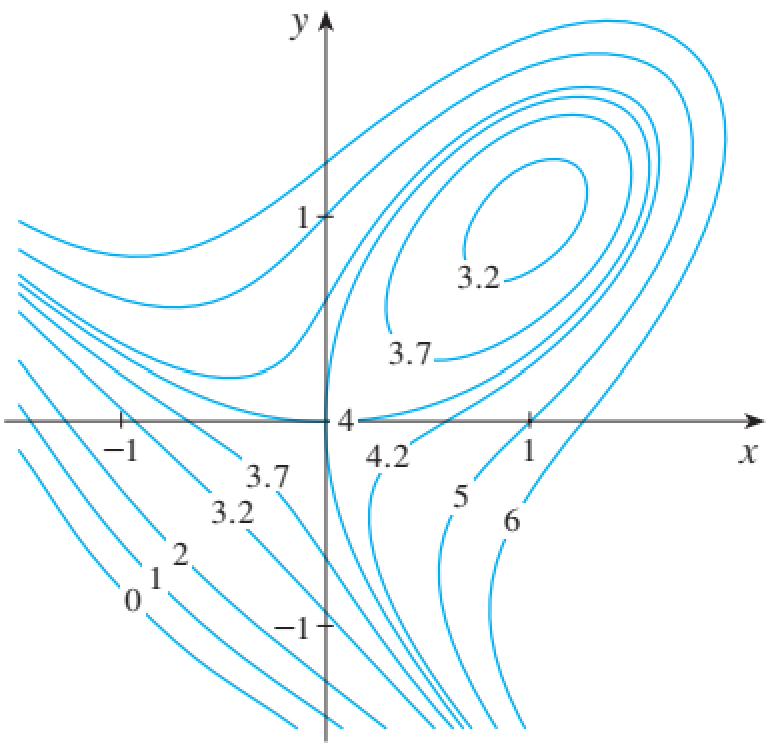
   (a) $g_{xx}(0, 2) = -1, \quad g_{xy}(0, 2) = 6, \quad g_{yy}(0, 2) = 1$

   (b) $g_{xx}(0, 2) = -1, \quad g_{xy}(0, 2) = 2, \quad g_{yy}(0, 2) = -8$

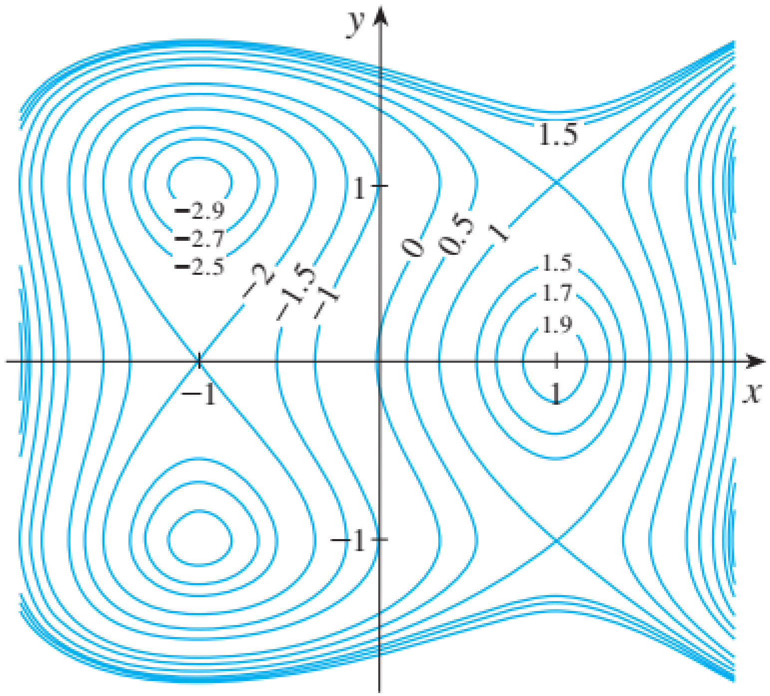
   (c) $g_{xx}(0, 2) = 4, \quad g_{xy}(0, 2) = 6, \quad g_{yy}(0, 2) = 9$

3–4 Use the level curves in the figure to predict the location of the critical points of f and whether f has a saddle point or a local maximum or minimum at each critical point. Explain your reasoning. Then use the Second Derivatives Test to confirm your predictions.

3. $f(x, y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$



4. $f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4$



5–20 Find the local maximum and minimum values and saddle point(s) of the function. If you have three-dimensional graphing software, graph the function with a domain and viewpoint that reveal all the important aspects of the function.

5. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + y$

6. $f(x, y) = xy - 2x - 2y - x^2 - y^2$

7. $f(x, y) = (x - y)(1 - xy)$

8. $f(x, y) = y(e^x - 1)$

9. $f(x, y) = x^2 + y^4 + 2xy$

10. $f(x, y) = 2 - x^4 + 2x^2 - y^2$

11. $f(x, y) = x^3 - 3x + 3xy^2$

12. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 - 9x$

13. $f(x, y) = x^4 - 2x^2 + y^3 - 3y$

14. $f(x, y) = y \cos x$

15. $f(x, y) = e^x \cos y$

16. $f(x, y) = xye^{-(x^2+y^2)/2}$

17. $f(x, y) = xy + e^{-xy}$

18. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x}$

19. $f(x, y) = y^2 - 2y \cos x, \quad -1 \leqslant x \leqslant 7$

20. $f(x, y) = \sin x \, \sin y, \quad -\pi < x < \pi, \quad -\pi < y < \pi$

21. Show that $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4xy + 2$ has an infinite number of critical points and that $D = 0$ at each one. Then show that f has a local (and absolute) minimum at each critical point.

22. Show that $f(x, y) = x^2ye^{-x^2-y^2}$ has maximum values at $(\pm 1, 1/\sqrt{2})$ and minimum values at $(\pm 1, -1/\sqrt{2})$. Show also that f has infinitely many other critical points and $D = 0$ at each of them. Which of them give rise to maximum values? Minimum values? Saddle points?

23–26 Use a graph or level curves or both to estimate the local maximum and minimum values and saddle point(s) of the function. Then use calculus to find these values precisely.

23. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^{-2}y^{-2}$

24. $f(x, y) = (x - y)e^{-x^2-y^2}$

25. $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$,
$0 \leqslant x \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi$

26. $f(x, y) = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$,
$0 \leqslant x \leqslant \pi/4,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi/4$

27–30 Use a graphing device as in Example 4 (or Newton's method or solve numerically using a calculator or computer) to find the critical points of f correct to three decimal places. Then classify the critical points and find the highest or lowest points on the graph, if any.

27. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y + 2y$

28. $f(x, y) = y^6 - 2y^4 + x^2 - y^2 + y$

29. $f(x, y) = x^4 + y^3 - 3x^2 + y^2 + x - 2y + 1$

30. $f(x, y) = 20e^{-x^2-y^2}\sin 3x \cos 3y, \quad |x| \leqslant 1, \quad |y| \leqslant 1$

31–38 Find the absolute maximum and minimum values of f on the set D.

31. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$, D is the closed triangular region with vertices $(2, 0)$, $(0, 2)$, and $(0, -2)$

32. $f(x, y) = x + y - xy$, D is the closed triangular region with vertices $(0, 0)$, $(0, 2)$, and $(4, 0)$

33. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$,
$D = \{(x, y) \mid |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\}$

34. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6y$,
$D = \{(x, y) \mid -3 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 5\}$

35. $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x - 4y + 1$,
$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 3\}$

36. $f(x, y) = xy^2$, $D = \{(x, y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2 + y^2 \leqslant 3\}$

37. $f(x, y) = 2x^3 + y^4$, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$

38. $f(x, y) = x^3 - 3x - y^3 + 12y$, D is the quadrilateral whose vertices are $(-2, 3)$, $(2, 3)$, $(2, 2)$, and $(-2, -2)$

41. Find the shortest distance from the point $(2, 0, -3)$ to the plane $x + y + z = 1$.

42. Find the point on the plane $x - 2y + 3z = 6$ that is closest to the point $(0, 1, 1)$.

43. Find the points on the cone $z^2 = x^2 + y^2$ that are closest to the point $(4, 2, 0)$.

44. Find the points on the surface $y^2 = 9 + xz$ that are closest to the origin.

45. Find three positive numbers whose sum is 100 and whose product is a maximum.

46. Find three positive numbers whose sum is 12 and the sum of whose squares is as small as possible.

47. Find the maximum volume of a rectangular box that is inscribed in a sphere of radius r.

48. Find the dimensions of the box with volume $1000\ \text{cm}^3$ that has minimal surface area.

49. Find the volume of the largest rectangular box in the first octant with three faces in the coordinate planes and one vertex in the plane $x + 2y + 3z = 6$.

50. Find the dimensions of the rectangular box with largest volume if the total surface area is given as $64\ \text{cm}^2$.

51. Find the dimensions of a rectangular box of maximum volume such that the sum of the lengths of its 12 edges is a constant c.

52. The base of an aquarium with given volume V is made of slate and the sides are made of glass. If slate costs five times as much (per unit area) as glass, find the dimensions of the aquarium that minimize the cost of the materials.

53. A cardboard box without a lid is to have a volume of $32{,}000\ \text{cm}^3$. Find the dimensions that minimize the amount of cardboard used.

Lagrange Multipliers

3–14 Each of these extreme value problems has a solution with both a maximum value and a minimum value. Use Lagrange multipliers to find the extreme values of the function subject to the given constraint.

3. $f(x, y) = x^2 - y^2; \quad x^2 + y^2 = 1$

4. $f(x, y) = 3x + y; \quad x^2 + y^2 = 10$

5. $f(x, y) = xy; \quad 4x^2 + y^2 = 8$

6. $f(x, y) = xe^y; \quad x^2 + y^2 = 2$

7. $f(x, y, z) = 2x + 2y + z; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9$

8. $f(x, y, z) = e^{xyz}; \quad 2x^2 + y^2 + z^2 = 24$

9. $f(x, y, z) = xy^2z; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4$

10. $f(x, y, z) = \ln(x^2 + 1) + \ln(y^2 + 1) + \ln(z^2 + 1);$
$x^2 + y^2 + z^2 = 12$

11. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2; \quad x^4 + y^4 + z^4 = 1$

12. $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$

13. $f(x, y, z, t) = x + y + z + t; \quad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$

14. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n;$
$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$

15. The method of Lagrange multipliers assumes that the extreme values exist, but that is not always the case. Show that the problem of finding the minimum value of $f(x, y) = x^2 + y^2$ subject to the constraint $xy = 1$ can be solved using Lagrange multipliers, but f does not have a maximum value with that constraint.

16. Find the minimum value of $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ subject to the constraint $x + 2y + 3z = 10$. Show that f has no maximum value with this constraint.

17–20 Find the extreme values of f subject to both constraints.

17. $f(x, y, z) = x + y + z; \quad x^2 + z^2 = 2, \quad x + y = 1$

18. $f(x, y, z) = z; \quad x^2 + y^2 = z^2, \quad x + y + z = 24$

19. $f(x, y, z) = yz + xy; \quad xy = 1, \quad y^2 + z^2 = 1$

20. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2; \quad x - y = 1, \quad y^2 - z^2 = 1$

21–23 Find the extreme values of f on the region described by the inequality.

21. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x - 4y, \quad x^2 + y^2 \leqslant 9$

22. $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5, \quad x^2 + y^2 \leqslant 16$

23. $f(x, y) = e^{-xy}, \quad x^2 + 4y^2 \leqslant 1$

31–43 Use Lagrange multipliers to give an alternate solution to the indicated exercise in Section 14.7.

31. Exercise 41

32. Exercise 42

33. Exercise 43

34. Exercise 44

35. Exercise 45

36. Exercise 46

37. Exercise 47

38. Exercise 48

39. Exercise 49

40. Exercise 50

41. Exercise 51

42. Exercise 52

43. Exercise 55

44. Find the maximum and minimum volumes of a rectangular box whose surface area is 1500 cm^2 and whose total edge length is 200 cm.

45. The plane $x + y + 2z = 2$ intersects the paraboloid $z = x^2 + y^2$ in an ellipse. Find the points on this ellipse that are nearest to and farthest from the origin.

Relative Minimums and Maximums

Find and classify all the critical points of the following functions.

1. $f(x,y) = (y-2)x^2 - y^2$

2. $f(x,y) = 7x - 8y + 2xy - x^2 + y^3$

3. $f(x,y) = (3x + 4x^3)(y^2 + 2y)$

4. $f(x,y) = 3y^3 - x^2y^2 + 8y^2 + 4x^2 - 20y$

Absolute Minimums and Maximums

1. Find the absolute minimum and absolute maximum of $f(x,y) = 192x^3 + y^2 - 4xy^2$ on the triangle with vertices $(0,0)$, $(4,2)$ and $(-2,2)$.

2. Find the absolute minimum and absolute maximum of $f(x,y) = (9x^2 - 1)(1 + 4y)$ on the rectangle given by $-2 \le x \le 3$, $-1 \le y \le 4$.

Lagrange Multipliers

1. Find the maximum and minimum values of $f(x,y)=81x^2+y^2$ subject to the constraint $4x^2+y^2=9$.

2. Find the maximum and minimum values of $f(x,y)=8x^2-2y$ subject to the constraint $x^2+y^2=1$.

3. Find the maximum and minimum values of $f(x,y,z)=y^2-10z$ subject to the constraint $x^2+y^2+z^2=36$.

4. Find the maximum and minimum values of $f(x,y,z)=xyz$ subject to the constraint $x+9y^2+z^2=4$. Assume that $x\geq 0$ for this problem. Why is this assumption needed?

5. Find the maximum and minimum values of $f(x,y,z)=3x^2+y$ subject to the constraints $4x-3y=9$ and $x^2+z^2=9$.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh. *Toán học cao cấp*, Tập 3, Nhà XBGD Việt Nam, 2017

[2] Jon Rogawski, Colin Adams, Robert Franzosa. *Multivariable Calculus*, W.H. Freeman, New York, 2019.

[3] James Stewart. *Calculus*, Cengage Learning, Boston, 2016.

[4] William Briggs, Lyle Cochran, Bernard Gillett. *Calculus*, Pearson Education, Inc., 2011.

[5] Murray H. Protter, Charles B. Morrey. *Intermediate Calculus*, Springer, 1985.

[6] Tom M. Apostol. *Calculus*, Vol.II, John Wiley & Sons, 1969.

[7] Richard E. Williamson, Richard H. Crowell, Hale F. Trotter. *Calculus of vector functions*, Prentice-Hall., Inc, 1968