

## DÃY FIBONACCI

**1. Bài toán mở đầu:** Giả sử thỏ đẻ theo quy luật sau: Một đôi thỏ cứ mỗi tháng đẻ được một đôi thỏ con, mỗi đôi thỏ con cứ sau 2 tháng lại sinh ra một đôi thỏ nữa, rồi sau mỗi tháng lại sinh ra một đôi thỏ con khác v.v... và giả sử tất cả các con thỏ đều sống.

Hỏi nếu có một đôi thỏ con nuôi từ tháng giêng đến tháng 2 thì đẻ đôi thỏ đầu tiên thì đến cuối năm có bao nhiêu đôi thỏ?

-- Giải --

- Tháng 1 (giêng) có một đôi thỏ số 1.
- Tháng 2 đôi thỏ số 1 đẻ đôi thỏ số 2. Vậy có 2 đôi thỏ trong tháng 2.
- Tháng 3 đôi thỏ số 1 đẻ đôi thỏ số 3, đôi thỏ số 2 chưa đẻ được. Vậy có 2 đôi thỏ trong tháng 3.
- Tháng 4 đôi thỏ số 1 đẻ đôi thỏ số 4.1, đôi thỏ số 2 đẻ đôi thỏ số 4.2, đôi thỏ số 3 chưa đẻ. Vậy trong tháng 4 có 5 đôi thỏ.

Tương tự ta có tháng 5 có 8 đôi thỏ, tháng 6 có 13 đôi thỏ, ...

Như vậy ta có dãy số sau: (ban đầu) **1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; 233** (tháng 12)

Đây là một dãy số có quy luật: *Mỗi số hạng kể từ số hạng thứ ba bằng tổng hai số hạng trước đó.*

Nếu gọi số thỏ ban đầu là  $u_1$ ; số thỏ tháng thứ  $n$  là  $u_n$  thì ta có công thức:

$$u_1 = 1; u_2 = 1; u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \quad (\text{với } n \geq 2)$$

Dãy  $\{u_n\}$  có quy luật như trên là dãy Fibonacci.  $u_n$  gọi là số (hạng) Fibonacci.

**2. Công thức tổng quát của số Fibonacci:** Nhờ truy hồi ta chứng minh được số hạng thứ  $n$  của dãy

Fibonacci được tính theo công thức sau:  $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] (*)$

**3. Các tính chất của dãy Fibonacci:**

Tính chất 1:  $u_m = u_k \cdot u_{m+1-k} + u_{k-1} \cdot u_{m-k}$  hay  $u_{n+m} = u_n u_{m+1} + u_{n-1} u_m$

Ví dụ: Để tính số thỏ sau 24 tháng ta chọn  $n = m = 12$  thay vào công thức ta có:

$$u_{24} = u_{12} + u_{12} = u_{11} \cdot u_{12} + u_{12} \cdot u_{13} = 144(89 + 233)$$

Tính chất 2:  $u_{2n+1} = u_{(n+1)+n} = u_n u_{n+1} + u_{n-1} u_n = u_{n+1}^2 + u_n^2$

Ví dụ: Để tính số thỏ sau 25 tháng ta làm như sau:

$$u_{25} = u_{13}^2 + u_{12}^2 = 233^2 + 144^2 = 7502.$$

Tính chất 3:  $u_n^2 - u_{n+1} \cdot u_{n-1} = (-1)^{n-1}$

Tính chất 4:  $u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{2n-1} = u_{2n}$

Tính chất 5:  $\forall n$  ta có:  $|u_{n+4} u_{n-2} - u_{n+2} u_n| = 3$

Tính chất 6:  $\forall n$  số  $4u_{n-2} u_2 u_{n+2} u_{n+4} + 9$  là số chính phương

Tính chất 7:  $\forall n$  số  $4u_n u_{n+k} u_{n+k-1} u_{n+2k+1} + u_k^2 u_{k+1}^2$  là số chính phương

Nhận xét: ☞ *Tính chất 1 và 2 cho phép chúng ta tính số hạng của dãy Fibonacci mà không cần biết hết các số hạng liên tiếp của dãy.* Nhờ hai tính chất này mà có thể tính các số hạng quá lớn của dãy Fibonacci bằng tay (dùng giấy bút để tính) mà máy tính điện tử không thể tính được (kết quả không hiển thị được trên màn hình). Các tính chất từ 3 đến 7 có tác dụng giúp chúng ta trong việc chứng minh các bài toán có liên quan đến dãy Fibonacci thường gặp trong các bài thi.

**4. Tính các số hạng của dãy Fibonacci trên máy tính điện tử**

**4.1. Tính theo công thức tổng quát**

Ta có công thức tổng quát của dãy:  $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$ . Trong công thức tổng quát số

hạng  $u_n$  phụ thuộc  $n$ , vì  $n$  thay đổi nên ta dùng biến nhớ Ans để thay giá trị  $n$  trong phép tính.

**Quy trình ấn máy (fx-500MS và fx-570 MS)**

Ấn các phím:  $1 \boxed{=}$

$$1 \boxed{a^{b/c}} \boxed{\sqrt{}} 5 \boxed{((\boxed{((\boxed{1} \boxed{+} \boxed{\sqrt{}} 5) \boxed{\div} 2) \boxed{))} \wedge \boxed{Ans}} - \boxed{((\boxed{1} \boxed{-} \boxed{\sqrt{}} 5) \boxed{\div} 2) \boxed{))} \wedge \boxed{Ans}} \boxed{=}$$

Muốn tính  $n = 10$  ta ấn  $10 \boxed{=}$ , rồi dùng phím  $\boxed{\Delta}$  một lần để chọn lại biểu thức vừa nhập ấn  $\boxed{=}$

**4.2. Tính theo dãy**

Ta có dãy Fibonacci:  $u_1 = 1; u_2 = 1; u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$  (với  $n \geq 2$ )

**Quy trình ấn máy (fx-500MS và fx-570 MS)**

Ấn các phím: 1 [SHIFT] [STO] [A] ----> gán  $u_2 = 1$  vào biến nhớ A  
+1 [SHIFT] [STO] [B] ----> lấy  $u_2 + u_1 = u_3$  gán vào B  
Lặp lại các phím: + [ALPHA] [A] [SHIFT] [STO] [A] ----> lấy  $u_3 + u_2 = u_4$  gán vào A  
+ [ALPHA] [B] [SHIFT] [STO] [B] ----> lấy  $u_4 + u_3 = u_5$  gán vào B

Bây giờ muốn tính  $u_n$  ta [Δ] một lần và [=], cứ liên tục như vậy  $n - 5$  lần.

**Ví dụ:** Tính số hạng thứ 8 của dãy Fibonacci?

**Quy trình ấn máy (fx-500MS và fx-570 MS)**

Ấn các phím: 1 [SHIFT] [STO] [A] +1 [SHIFT] [STO] [B] + [ALPHA] [A] [SHIFT] [STO] [A]  
+ [ALPHA] [B] [SHIFT] [STO] [B] [Δ] [=] [Δ] [=] [Δ] [=] [Δ] [=] (21)

**Chú ý:** ☞ Có nhiều qui trình ấn phím để tính số hạng  $u_n$  của dãy nhưng qui trình trên đây là qui trình tối ưu nhất vì số phím ấn ít nhất. Đối với máy fx-500 MS thì ấn [Δ] [=], đối với máy fx-570 MS có thể ấn [Δ] [=] hoặc ấn thêm [Δ] [SHIFT] [COPY] [=] để tính các số hạng từ thứ 6 trở đi.

## Dãy LUCAS

**Tổng quát:** Cho  $u_1 = a, u_2 = b, u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$  (với  $n \geq 2$ , a, b là hai số tùy ý nào đó)

**Nhân xét:** Dãy Lucas là dãy tổng quát của dãy Fibonacci, với  $a = b = 1$  thì dãy Lucas trở thành dãy Fibonacci.

**Quy trình ấn máy (fx-500MS và fx-570 MS)**

Ấn các phím: b [SHIFT] [STO] [A] ----> gán  $u_2 = b$  vào biến nhớ A  
+a [SHIFT] [STO] [B] ----> lấy  $u_2 + u_1 = u_3$  ( $u_3 = b+a$ ) gán vào B  
Lặp lại các phím: + [ALPHA] [A] [SHIFT] [STO] [A] ----> lấy  $u_3 + u_2 = u_4$  gán vào A  
+ [ALPHA] [B] [SHIFT] [STO] [B] ----> lấy  $u_4 + u_3 = u_5$  gán vào B

Bây giờ muốn tính  $u_n$  ta [Δ] một lần và [=], cứ liên tục như vậy  $n - 5$  lần.

**Ví dụ:** (Sở GD Cần Thơ, 2001, lớp 9) Cho dãy  $u_1 = 8, u_2 = 13, u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$  ( $n \geq 2$ ).

a. Lập qui trình bấm phím liên tục để tính  $u_{n+1}$ ?

b. Sử dụng qui trình trên tính  $u_{13}, u_{17}$ ?

-- Giải --

a. Lập qui trình bấm phím

**Quy trình ấn máy (fx-500MS và fx-570 MS)**

Ấn các phím: 13 [SHIFT] [STO] [A]

+ 8 [SHIFT] [STO] [B]

Lặp lại các phím: + [ALPHA] [A] [SHIFT] [STO] [A]

+ [ALPHA] [B] [SHIFT] [STO] [B]

b. Sử dụng qui trình trên để tính  $u_{13}, u_{17}$

Ấn các phím: [Δ] [=] [Δ] [=] [Δ] [=] [Δ] [=] [Δ] [=] [Δ] [=] [Δ] [=] [Δ] [=] [Δ] [=] ( $u_{13} = 2584$ )

[Δ] [=] [Δ] [=] [Δ] [=] [Δ] [=] [Δ] [=] ( $u_{17} = 17711$ )

Kết quả:  $u_{13} = 2584; u_{17} = 17711$

### Dạng 1. Dãy Lucas suy rộng dạng

**Tổng quát:** Cho  $u_1 = a, u_2 = b, u_{n+1} = Au_n + Bu_{n-1}$  (với  $n \geq 2$ , a, b là hai số tùy ý nào đó)

**Quy trình ấn máy (fx-500MS và fx-570 MS)**

Ấn các phím: b [SHIFT] [STO] [A] ----> gán  $u_2 = b$  vào biến nhớ A  
[×] A [÷] a [×] B [SHIFT] [STO] [B] ----> tính  $u_3$  ( $u_3 = Ab + Ba$ ) gán vào B

Lập lại các phím:  $\boxed{\times} \boxed{A} \boxed{+} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{A} \boxed{\times} \boxed{B} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{A}$  ----> Tính  $u_4$  gán vào A

$\boxed{\times} \boxed{A} \boxed{+} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{B} \boxed{\times} \boxed{B} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{B}$  ----> lấy  $u_5$  gán vào B

Bây giờ muốn tính  $u_n$  ta  $\boxed{\Delta}$  một lần và  $\boxed{=}$ , cứ liên tục như vậy  $n - 5$  lần.

**Ví dụ:** Cho dãy  $u_1 = 8, u_2 = 13, u_{n+1} = 3u_n + 2u_{n-1}$  ( $n \geq 2$ ). Lập qui trình bấm phím liên tục để tính  $u_{n+1}$ ?

-- Giải --

Lập qui trình bấm phím

**Qui trình ấn máy (fx-500MS và fx-570 MS)**

Ấn các phím:  $13 \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{A}$

$\boxed{\times} \boxed{3} \boxed{+} \boxed{8} \boxed{\times} \boxed{2} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{B}$

Lập lại các phím:  $\boxed{\times} \boxed{3} \boxed{+} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{A} \boxed{\times} \boxed{2} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{A}$

$\boxed{\times} \boxed{3} \boxed{+} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{B} \boxed{\times} \boxed{2} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{B}$

## Dạng 2. Dãy phi tuyến dạng

Cho Cho  $u_1 = a, u_2 = b, u_{n+1} = u_n^2 + u_{n-1}^2$  (với  $n \geq 2$ ).

**Qui trình ấn máy (fx-500MS và fx-570 MS)**

Ấn các phím:  $b \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{A}$  ----> gán  $u_2 = b$  vào biến nhớ A

$\boxed{x^2} \boxed{+} \boxed{a} \boxed{x^2} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{B}$  ----> lấy  $u_2^2 + u_1^2 = u_3$  ( $u_3 = b^2 + a^2$ ) gán vào B

Lập lại các phím:  $\boxed{x^2} \boxed{+} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{A} \boxed{x^2} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{A}$  ----> lấy  $u_3^2 + u_2^2 = u_4$  gán vào A

$\boxed{x^2} \boxed{+} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{B} \boxed{x^2} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{B}$  ----> lấy  $u_4^2 + u_3^2 = u_5$  gán vào B

Bây giờ muốn tính  $u_n$  ta  $\boxed{\Delta}$  một lần và  $\boxed{=}$ , cứ liên tục như vậy  $n - 5$  lần.

**Ví dụ:** Cho dãy  $u_1 = 1, u_2 = 2, u_{n+1} = u_n^2 + u_{n-1}^2$  ( $n \geq 2$ ).

a. Lập qui trình bấm phím liên tục để tính  $u_{n+1}$ ?

b. Tính  $u_7$ ?

-- Giải --

a. Lập qui trình bấm phím

**Qui trình ấn máy (fx-500MS và fx-570 MS)**

Ấn các phím:  $2 \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{A}$

$\boxed{x^2} \boxed{+} \boxed{1} \boxed{x^2} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{B}$

Lập lại các phím:  $\boxed{x^2} \boxed{+} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{A} \boxed{x^2} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{A}$

$\boxed{x^2} \boxed{+} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{B} \boxed{x^2} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{B}$

b. Tính  $u_7$

Ấn các phím:  $\boxed{\Delta} \boxed{=}$  ( $u_6 = 750797$ )

Tính  $u_7 = u_6^2 + u_5^2 = 750797^2 + 866^2 = 563\,696\,135\,209 + 749\,956 = 563\,696\,885\,165$

Kết quả:  $u_7 = 563\,696\,885\,165$

**Chú ý:** Đến  $u_7$  máy tính không thể hiển thị được đầy đủ các chữ số trên màn hình do đó phải tính tay giá trị này trên giấy nháp có sử dụng máy tính hỗ trợ trong khi tính. Ví dụ:  $750797^2 = 750797 \cdot (750 \cdot 1000 + 797) = 750797 \cdot 750 \cdot 1000 + 750797 \cdot 797 = 563\,097\,750 \cdot 1000 + 598\,385\,209 = 563\,097\,750\,000 + 598\,385\,209 = 563\,696\,135\,209$ .

## Dạng 3. Dãy phi tuyến dạng

Cho Cho  $u_1 = a, u_2 = b, u_{n+1} = Au_n^2 + Bu_{n-1}^2$  (với  $n \geq 2$ ).

**Qui trình ấn máy (fx-500MS và fx-570 MS)**

Ấn các phím:  $b \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{A}$  ----> gán  $u_2 = b$  vào biến nhớ A

$\boxed{x^2} \boxed{\times} \boxed{A} \boxed{+} \boxed{a} \boxed{x^2} \boxed{\times} \boxed{B} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{B}$  ----> Tính  $u_3 = Ab^2 + Ba^2$  gán vào B

Lập lại các phím:  $x^2 \times A + \text{ALPHA} A x^2 \times B \text{SHIFT STO} A$  ----> Tính  $u_4$  gán vào A

$x^2 \times A + \text{ALPHA} B x^2 \times B \text{SHIFT STO} B$  ----> Tính  $u_5$  gán vào B

Bây giờ muốn tính  $u_n$  ta  $\Delta$  một lần và  $=$ , cứ liên tục như vậy  $n - 5$  lần.

**Ví dụ:** Cho dãy  $u_1 = 1, u_2 = 2, u_{n+1} = 3u_n^2 + 2u_{n-1}^2$  ( $n \geq 2$ ).

Lập qui trình bấm phím liên tục để tính  $u_{n+1}$ ?

**-- Giải --**

Lập qui trình bấm phím

**Qui trình ấn máy (fx-500MS và fx-570 MS)**

Ấn các phím:  $2 \text{SHIFT STO} A$

$x^2 \times 3 + 1 x^2 \times 2 \text{SHIFT STO} B$

Lập lại các phím:  $x^2 \times 3 + \text{ALPHA} A x^2 \times 2 \text{SHIFT STO} A$

$x^2 \times 3 + \text{ALPHA} B x^2 \times 2 \text{SHIFT STO} B$

#### Dạng 4. Dãy Fibonacci suy rộng dạng

Cho  $u_1 = u_2 = 1; u_3 = 2; u_{n+1} = u_n + u_{n-1} + u_{n-2}$  (với  $n \geq 3$ ).

**Qui trình ấn máy (fx-500MS và fx-570 MS)**

Ấn các phím:  $1 \text{SHIFT STO} A$

----> gán  $u_2 = 1$  vào biến nhớ A

$2 \text{SHIFT STO} B$

----> gán  $u_3 = 2$  vào biến nhớ B

$\text{ALPHA} A + \text{ALPHA} B + 1 \text{SHIFT STO} C$  ----> tính  $u_4$  đưavào C

Lập lại các phím:  $+ \text{ALPHA} B + \text{ALPHA} A \text{SHIFT STO} A$  ----> tính  $u_5$  gán biến nhớ A

$+ \text{ALPHA} C + \text{ALPHA} B \text{SHIFT STO} B$  ----> tính  $u_6$  gán biến nhớ B

$+ \text{ALPHA} A + \text{ALPHA} C \text{SHIFT STO} C$  ----> tính  $u_7$  gán biến nhớ C

Bây giờ muốn tính  $u_n$  ta  $\Delta \Delta$  và  $=$ , cứ liên tục như vậy  $n - 7$  lần.

**Ví dụ:** Tính số hạng thứ 10 của dãy  $u_1 = u_2 = 1; u_3 = 2; u_{n+1} = u_n + u_{n-1} + u_{n-2}$

**Qui trình ấn máy (fx-500MS và fx-570 MS)**

Ấn các phím:

$1 \text{SHIFT STO} A 2 \text{SHIFT STO} B \text{ALPHA} A + \text{ALPHA} B + 1 \text{SHIFT STO} C$   
 $+ \text{ALPHA} B + \text{ALPHA} A \text{SHIFT STO} A + \text{ALPHA} C + \text{ALPHA} B \text{SHIFT STO} B$   
 $+ \text{ALPHA} A + \text{ALPHA} C \text{SHIFT STO} C \Delta \Delta = \Delta \Delta = \Delta \Delta = (u_{10} = 149)$

#### Dạng 5. Dãy truy hồi dạng

**Tổng quát:** Cho  $u_1 = a, u_2 = b, u_{n+1} = Au_n + Bu_{n-1} + f(n)$  (với  $n \geq 2$ )

**Qui trình ấn máy (fx-500MS và fx-570 MS)**

Ấn các phím:  $b \text{SHIFT STO} A$

----> gán  $u_2 = b$  vào biến nhớ A

$\times A + a \times B + f(n) \text{SHIFT STO} B$  ----> tính  $u_3$  ( $u_3 = Ab + Ba + f(n)$ ) gán vào B

Lập lại các phím:  $\times A + \text{ALPHA} A \times B + f(n) \text{SHIFT STO} A$  ----> Tính  $u_4$  gán vào A

$\times A + \text{ALPHA} B \times B + f(n) \text{SHIFT STO} B$  ----> tính  $u_5$  gán vào B

**Ví dụ:** Cho dãy  $u_1 = 8, u_2 = 13, u_{n+1} = 3u_n + 2u_{n-1} + \frac{1}{n}$  ( $n \geq 2$ ).

a. Lập qui trình bấm phím liên tục để tính  $u_{n+1}$ ?

b. Tính  $u_7$ ?

**-- Giải --**

a. Lập qui trình bấm phím

**Qui trình ấn máy (fx-500MS và fx-570 MS)**

Ấn các phím:  $8 \text{SHIFT STO} A$

$13 \text{SHIFT STO} B$

$2 \text{SHIFT STO} X$

Lập lại các phím:  $\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\text{X}} \boxed{+} \boxed{1} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{\text{X}}$

$3 \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\text{B}} \boxed{+} 2 \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\text{A}} \boxed{+} \boxed{1} \boxed{a^{b/c}} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\text{X}} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{\text{A}}$

$\boxed{\Delta} \boxed{=} 3 \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\text{A}} \boxed{+} 2 \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\text{B}} \boxed{+} \boxed{1} \boxed{a^{b/c}} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\text{X}} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{\text{B}}$

b. Tính  $u_7$  ?

Ấn các phím:  $\boxed{\Delta} \boxed{=} \boxed{\Delta} \boxed{\Delta} \boxed{\Delta} \boxed{=} \boxed{\Delta} \boxed{=} \boxed{\Delta} \boxed{\Delta} \boxed{\Delta} \boxed{=} \boxed{\Delta} \boxed{=} \boxed{\Delta} \boxed{\Delta} \boxed{\Delta} \boxed{=} \quad (u_7 = 8717,92619)$

Kết quả:  $u_7 = 8717,92619$

### ***Dạng 6. Dãy phi tuyến dạng***

**Tổng quát:** Cho  $u_1 = a, u_2 = b, u_{n+1} = F_1(u_n) + F_2(u_{n-1})$  (với  $n \geq 2$ )

### ***Qui trình ấn máy (fx-500MS và fx-570 MS)***

Ấn các phím:  $a \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{\text{A}}$

$b \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{\text{B}}$

Lập lại các phím:  $F_1(\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\text{B}}) + F_2(\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\text{A}}) \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{\text{A}}$

$F_1(\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\text{A}}) + F_2(\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\text{B}}) \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{\text{B}}$

**Ví dụ:** Cho  $u_1 = 4; u_2 = 5, u_{n+1} = \frac{5u_n + 1}{3} - \frac{u_{n-1}^2 + 2}{5}$ . Lập qui trình ấn phím tính  $u_{n+1}$ ?

-- Giải --

### ***Qui trình ấn máy (fx-500MS và fx-570 MS)***

Ấn các phím:  $4 \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{\text{A}}$

$5 \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{\text{B}}$

Lập lại các phím:  $\boxed{((\boxed{5} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\text{B}} \boxed{+} \boxed{1}) \boxed{a^{b/c}} \boxed{3})} - \boxed{((\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\text{A}} \boxed{x^2} \boxed{+} \boxed{2}) \boxed{a^{b/c}} \boxed{5})} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{\text{A}}$

$\boxed{((\boxed{5} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\text{A}} \boxed{+} \boxed{1}) \boxed{a^{b/c}} \boxed{3})} - \boxed{((\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\text{B}} \boxed{x^2} \boxed{+} \boxed{2}) \boxed{a^{b/c}} \boxed{5})} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{\text{B}}$

### ***Bài tập tổng hợp***

**Bài 1:** (Thi khu vực, 2001, lớp 9) Cho dãy  $u_1 = 144; u_2 = 233; u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ .

a. Lập một qui trình bấm phím để tính  $u_{n+1}$ .

b. Tính chính xác đến 5 chữ số sau dấu phẩy các tỉ số  $\frac{u_2}{u_1}; \frac{u_3}{u_2}; \frac{u_4}{u_3}; \frac{u_6}{u_5}$

**Bài 2:** (Thi khu vực, 2003, lớp 9) Cho dãy  $u_1 = 2; u_2 = 20; u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1}$ .

a. Tính  $u_3; u_4; u_5; u_6; u_7$ .

b. Viết qui trình bấm phím để tính  $u_n$ .

c. Tính giá trị của  $u_{22}; u_{23}; u_{24}; u_{25}$ .

**Bài 3:** (Thi khu vực, 2003, lớp 9 dự bị) Cho dãy số  $u_n = \frac{(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$

a. Tính 8 số hạng đầu tiên của dãy.

b. Lập công thức truy hồi để tính  $u_{n+2}$  theo  $u_{n+1}$  và  $u_n$ .

c. Lập một qui trình tính  $u_n$ .

d. Tìm các số  $n$  để  $u_n$  chia hết cho 3.

**Bài 4:** (Thi khu vực, 2003, lớp 9 dự bị) Cho  $u_0 = 2; u_1 = 10; u_{n+1} = 10u_n - u_{n-1}$ .

a. Lập một qui trình tính  $u_{n+1}$

b. Tính  $u_2; u_3; u_4; u_5; u_6$

c. Tìm công thức tổng quát của  $u_n$ .

**Bài 5:** (Olympic toán Singapore, 2001) Cho  $a_1 = 2000, a_2 = 2001$  và  $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3$  với  $n = 1, 2, 3, \dots$  Tìm giá trị  $a_{100}$ ?

**Bài 6:** (Tạp chí toán học & tuổi trẻ, tháng 7.2001) Cho dãy số  $u_n$  được xác định bởi:  $u_1 = 5; u_2 = 11$  và  $u_{n+1} = 2u_n - 3u_{n-1}$  với mọi  $n = 2, 3, \dots$  Chứng minh rằng:

a. Dãy số trên có vô số số dương và số âm.

b.  $u_{2002}$  chia hết cho 11.

**Bài 7:** (Thi giỏi toán, 1995) Dãy  $u_n$  được xác định bởi:

$$u_0 = 1, u_1 = 2 \text{ và } u_{n+2} = \begin{cases} u_{n+1} + 9u_n, n = 2k \\ 9u_{n+1} + 5u_n, n = 2k + 1 \end{cases} \text{ với mọi } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng:

a.  $\sum_{k=1995}^{2000} u_k^2$  chia hết cho 20

b.  $u_{2n+1}$  không phải là số chính phương với mọi  $n$ .

**Bài 10:** (Sở GD Lâm Đồng, 2005) Cho  $u_1 = u_2 = 7$ ;  $u_{n+1} = u_1^2 + u_{n-1}^2$ . Tính  $u_7 = ?$

**Bài 11:** (Trường THCS Đồng Nai – Cát Tiên 2005)

Cho dãy  $u_1 = u_2 = 11$ ;  $u_3 = 15$ ;  $u_{n+1} = \frac{5u_n^2}{3 + u_{n-1}} - \frac{u_{n-1}}{2 + u_n}$  với  $n \geq 3$

a. Lập quy trình bấm phím để tìm số hạng thứ  $u_n$  của dãy?

b. Tìm số hạng  $u_8$  của dãy?

**Bài 12:** Cho dãy  $u_1 = 5$ ;  $u_2 = 9$ ;  $u_{n+1} = 5u_n + 4u_{n-1}$  ( $n \geq 2$ ).

a. Lập quy trình bấm phím để tìm số hạng thứ  $u_n$  của dãy?

b. Tìm số hạng  $u_{14}$  của dãy?

**Một số dạng toán thường gặp:**

**1. Lập công thức truy hồi từ công thức tổng quát:**

**Ví dụ 1:** (Thi khu vực 2005) Cho dãy số  $u_n = \frac{(3 + \sqrt{2})^n - (3 - \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$ . Lập công thức truy hồi để tính

$u_{n+2}$  theo  $u_{n+1}$ ,  $u_n$ .

-- Giải --

❖ **Cách 1:** Giả sử  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c$  (\*).

Với  $n = 0, 1, 2, 3$  ta tính được  $u_0 = 0$ ;  $u_1 = 1$ ;  $u_2 = 6$ ;  $u_3 = 29$ ;  $u_4 = 132$ .

Thay vào (\*) ta được hệ phương trình: 
$$\begin{cases} a + c = 6 \\ 6a + b + c = 29 \\ 29a + 6b + c = 132 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = -7 \\ c = 0 \end{cases}$$

Vậy  $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 7u_n$

**Chú ý:** Với bài trên ta có thể giả sử  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$  thì bài toán sẽ giải nhanh hơn.

❖ **Cách 2:**

Đặt  $\lambda_1 = 3 + \sqrt{2}$ ;  $\lambda_2 = 3 - \sqrt{2}$  khi ấy  $\lambda_1 + \lambda_2 = 6$  và  $\lambda_1 \lambda_2 = 7$  chứng tỏ  $\lambda_1, \lambda_2$  là nghiệm của phương trình đặc trưng  $\lambda^2 - 6\lambda + 7 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 6\lambda - 7$  do đó ta có:  $\lambda_1^2 = 6\lambda_1 - 7$  và  $\lambda_2^2 = 6\lambda_2 - 7$

tức là  $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 7u_n$ .

**2. Tìm công thức tổng quát từ công thức truy hồi:**

**Ví dụ 2:** (Thi khu vực 2002) Cho dãy số  $u_0 = 2$ ;  $u_1 = 10$  và  $u_{n+1} = 10u_n - u_{n-1}$  (\*). Tìm công thức tổng quát  $u_n$  của dãy?

-- Giải --

Phương trình đặc trưng của phương trình (\*) là:  $\lambda^2 - 10\lambda + 1 = 0$  có hai nghiệm  $\lambda_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{6}$

Vậy  $u_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n = C_1 (5 + 2\sqrt{6})^n + C_2 (5 - 2\sqrt{6})^n$

Với  $n = 0; 1$  ta có hệ phương trình sau: 
$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ (5 + 2\sqrt{6})C_1 + (5 - 2\sqrt{6})C_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

Vậy số hạng tổng quát  $u_n = (5 + 2\sqrt{6})^n + (5 - 2\sqrt{6})^n$ .