呂浩宇

General Physics (I) Oscillations

periodic motion (or harmonic motion): any motion that repeats at regular intervals，即在不變的時間間隔不斷重現完全相同的狀態。此時間間隔稱做週期 period (T)，週期的倒數稱為頻率 (f)，即 $f=\frac{1}{T}$，用以計量單位時間內運動重現了多少次。頻率單位為 hertz (Hz)，其因次為時間倒數因次。

$$1 \text{ hertz} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ oscillation per second} = 1\ s^{-1}$$

Simple Harmonic Motion (SHM) 簡諧運動：

可以此函數型式描述的運動：$x(t) = \overbrace{x_m}^{\text{amplitude}} \cos(\underbrace{\omega t + \overbrace{\phi}^{\text{phase constant}}}_{\text{phase}})$

ω, ϕ 為常數（即不為時間的函數）

每當 ωt 增加 2π，簡諧運動狀態完全重現，即 $\omega T = 2\pi$

ω: angular frequency（角頻率），$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

單位：radian per second.

速度 $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[x_m \cos(\omega t+\phi)] = -\overbrace{\omega x_m}^{\text{velocity amplitude}} \sin(\omega t+\phi)$

加速度 $a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[-\omega x_m \sin(\omega t+\phi)] = -\overbrace{\omega^2 x_m}^{\text{acceleration amplitude}} \cos(\omega t+\phi)$

$\Longrightarrow \underline{a(t) = -\omega^2 x(t)}$

加速度方向總是相反於 displacement 之方向，且兩者之絕對值差 ω^2 倍

亦可定義簡諧運動為方程式 $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega x$ 方程式的解。其中一例子為彈簧

$F = ma = -kx \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$，$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

常用記號：$\dot{x} \equiv \frac{d}{dt}x$，$\ddot{x} = \frac{d^2}{dt^2}x$，讀作 x-dot, x-double-dot

若微積分尚未學過三角函數之微分，可寫簡單 python code 驗證

常用！背起來！
$$\frac{d}{dx}\sin(ax+b) = a\cos(ax+b)$$
$$\frac{d}{dx}\cos(ax+b) = -a\sin(ax+b)$$
a, b 為常數.

如畫出 $a\cos(ax+b)$ 及 $\frac{\sin(a(x+\Delta x)+b) - \sin(ax+b)}{\Delta x}$ 並測試在 $\Delta x \to 0$ 時這兩個函數是否看起來相同

亦可用等速率圓週運動之物理直觀幫助記憶！（隨後補充）

呂浩宇

General Physics (I) Oscillation

彈簧之能量守恒 ($F = -kx = ma$ 運動)

瞬時位能 : $U(t) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_m^2\cos^2(\omega t+\phi)$

瞬時動能 : $K(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x_m^2\sin^2(\omega t+\phi)$

$$\underset{(\omega=\sqrt{k/m})}{=} \frac{1}{2}kx_m^2\sin^2(\omega t+\phi)$$

總能量 : $E(t) = U(t) + K(t) = \frac{1}{2}kx_m^2\left[\cos^2(\omega t+\phi) + \sin^2(\omega t+\phi)\right]$

$= \frac{1}{2}kx_m^2$ 不隨時間變化

simple harmonic oscillation 過程中, 動能位能互換

Damped Simple Harmonic Motion (例如彈簧受阻力或摩擦力之情形)

一個進行 simple harmonic motion 的系統可稱為 oscillator (諧震子)

若 oscillator 受外力影響而使動能隨時間減少, 稱此 oscillator 的運動為 damped oscillation

若為減少動能, 此種外力方向須與速度方向相反:

damping force : $F_d = -\overset{\text{damping constant (為正實數)}}{b}\,v$

Equation of damped oscillation : $-bv - kx = ma \longrightarrow -b\dot{x} - kx = m\ddot{x}$

Solution of damped oscillation Equation : $x(t) = x_m e^{-bt/2m}\cos(\omega' t+\phi)$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

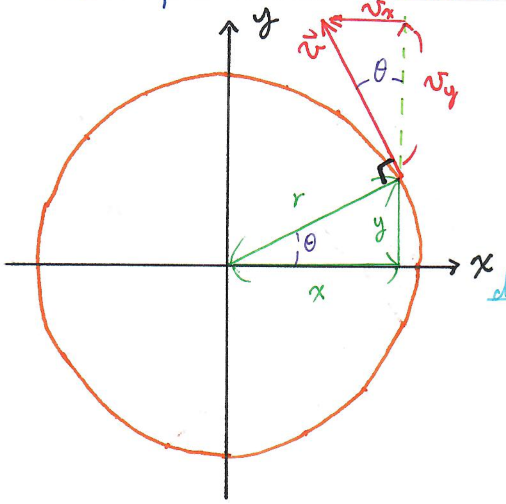
物理直觀 : 因阻力, 震軸隨時間減小。因外力使速度變慢, 週期較沒有 damping 之情形長, 故頻率及角頻率降低

呂浩宇

General Physics (I) Oscillation

處理 oscillator 問題之一般性技巧：利用等速率圓周運動建立物理直觀，並幫助記憶解的型式（回顧講義 Measures, Vectors, Motion 部分之 page 14, 15, if necessary）

視一維 oscillator 運動為等速率圓周運動在 x-軸上的投影



By definition $\begin{cases} r = \text{constant} \\ \theta = 2\pi t/T = 2\pi f t = \omega t \end{cases}$

$\Rightarrow v = r\omega = \text{constant}$

（見轉動章節之講義）

更一般型式，t 相對於參考 t_0 定義

displacement $x = r\cos\theta$

$= r\cos(\omega(t-t_0))$

$= r\cos(\omega t - \omega t_0)$　定義 $\phi = -\omega t_0$

$= \underbrace{r}_{\text{amp.}}\cos(\underbrace{\omega t + \overbrace{\phi}^{\text{phase const.}}}_{\text{phase}})$

velocity:

$v_x = -|\vec{v}|\sin\theta$, $v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi f r = \omega r$

$= -r\omega\sin\theta = -r\omega\sin(\omega t+\phi)$

$\equiv \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(r\cos(\omega t+\phi))$

比較 x 及 $\frac{dx}{dt}$ 之型式，即可簡單看出：

$-\frac{d}{dt}(\cos(\omega t+\phi)) = \omega\sin(\omega t+\phi)$

令 $\phi = \frac{\pi}{2}$，則 $\cos(\omega t+\phi) = \cos(\omega t)\cos\frac{\pi}{2} - \sin(\omega t)\sin\frac{\pi}{2}$

$= -\sin(\omega t)$

則 $x = -r\sin(\omega t)$, $v_x = -r\omega\cos(\omega t) = \frac{dx}{dt}$

→ 兩式相比可看出 $\frac{d}{dt}\sin(\omega t) = \omega\cos(\omega t)$

由物理直觀可直接看出三角函數的微分結果！

可利用一個複變數描述 x 及 y 軸上之投影位置：$\begin{cases} \theta = \omega t + \phi \\ z = r\cos\theta + i r\sin\theta \end{cases}$

$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$

取實部 $Re(z) = x$，即為 x 軸上投影位置，取虛部 $Im(z) = y$ 即為 y 軸上投影位置

呂浩宇

General Physics (I) Oscillation

定義表示式：$e^{i\theta} \equiv \cos\theta + i\sin\theta$

若 θ 為複數 $\theta = c + di$，c, d 為實數，則令定義

$$e^{i\theta} = e^{i(c+di)} \equiv e^{-d} e^{ci}$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{d\theta} e^{i\theta} = \frac{d}{d\theta}\cos\theta + i\frac{d}{d\theta}\sin\theta$$

$$= -\sin\theta + i\cos\theta$$

$$= i e^{i\theta}$$

→ 在微分與積分過程計算簡潔

$$\frac{d}{dt} e^{i(c+di)t} = \frac{d}{dt}\left(e^{-dt} e^{ci \cdot t}\right) = (-d + ci)\, e^{i(c+di)t}$$

仍具有與係數為實數時相同的微分規則

重要技巧：解 oscillation 微分方程時，都先猜解有 $Ae^{i\theta}$ 之複數型式，解完後再取實部來提取有物理意義的部分

Example 1. Simple Harmonic oscillation

$$\ddot{x} = \frac{-k}{m} x \ ,\quad 令\ x = Ae^{i(\omega t + \phi)}$$

$$\Longrightarrow \ddot{x} = -\omega^2 A e^{i(\omega t+\phi)} = -\omega^2 x = \frac{-k}{m} x$$

$$\Longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \ ,\quad 位移：Re(x) = A\cos(\omega t + \phi)$$

Example 2. Damped Harmonic oscillation

$$-b\dot{x} - kx = m\ddot{x} \ ,\quad 令\ x = Ae^{i(\omega t+\phi)}$$

$$\Longrightarrow x(-ib\omega - k) = x(-m\omega^2) .$$

令 $\omega = c + di$，c, d 為實數，則 $\omega^2 = (c^2 - d^2) + 2cdi$

$$\Rightarrow -ib(c+di) - k = \boxed{-ibc + bd - k = -m(c^2 - d^2) - 2mcd\,i}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 等式虛部：bc = 2mcd \Rightarrow d = \dfrac{b}{2m} \\ 等式實部：bd - k = -m(c^2 - d^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow bd - k = -m\left(c^2 - \frac{b^2}{4m^2}\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{b^2}{2m} - k = -m\left(c^2 - \frac{b^2}{4m^2}\right) \Longrightarrow c = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

$$\Longrightarrow \omega = c + di = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} + \frac{b}{2m} i$$

$$x = Ae^{i(\omega t+\phi)} = Ae^{i(ct+\phi) - dt} = Ae^{-dt} e^{i(ct+\phi)}$$

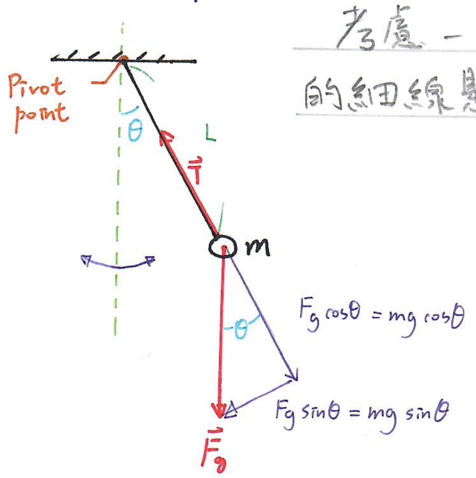
$$= Ae^{-\frac{b}{2m}t} e^{i(ct+\phi)}$$

此即為 page 2 底部解的型式

呂浩宇

General Physics (I) Oscillations

Simple Pendulum (單擺)



考慮一質量為 m 的小球，以一長度為 L，無質量，不可拉伸的細線懸吊。線及小球可沿樞軸 (pivot) 自由擺動

對小球做力的分解，發現小球受向下的重力及沿線方向的張力。並且，因線不可拉伸，重力沿線方向分量大小等於張力大小。故小球僅受垂直線方向之淨力 $mg\sin\theta$

在 $\theta = 0$ 位置小球不受淨力，故稱此位置為 equilibrium position.

以 pivot position 為參考點計算之 torque 為

$$\tau = -Lmg\sin\theta$$

(※定義使系統逆時針旋轉之力矩為正)

並且，moment of inertia I 為

$$I = mL^2$$

角加速度 $\alpha = \ddot{\theta}$ 滿足

$$\tau = I\alpha \Rightarrow -Lmg\sin\theta = mL^2\ddot{\theta}$$

若擺動幅度不大，即 $\theta \to 0$，則 $\sin\theta \to \theta$.

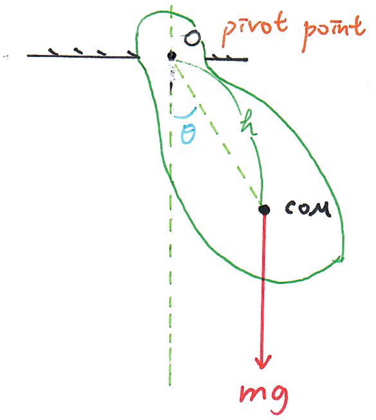
$$\Rightarrow -Lmg\theta = mL^2\ddot{\theta}$$

令 $\theta = Ae^{i\omega t} \Rightarrow -Lmg = -mL^2\omega^2$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$ 與小球之質量無關

若知道 L，測量 T 可得出重力加速度 g ⇐ $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

Physical Pendulum (物理擺)



質量為 m，懸掛於 pivot point O 並可繞 O 轉動之剛體。其質心距離 O 為長度 h 剛體之轉動慣量為 I。

擺動週期之推導與 simple pendulum 大致相同

視同剛體在質心處受重力 mg.

則 $\tau = I\alpha \Rightarrow -hmg\theta = I\ddot{\theta}$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{mgh}{I}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}$$