呂浩宇

General Physics (I)　Waves

Types of Waves

1. Mechanical waves (机械波)：遵守牛頓運動定律，需要介質傳遞。

Traveling wave 在空間中行進的波
- Transverse waves：局部運動速度垂直波傳遞之方向.
- Longitudinal waves：局部運動速度平行波傳遞之方向

2. Electromagnetic waves (電磁波)：遵守 Maxwell's equations，不需介質傳遞。
3. Matter waves (物質波)：遵守量子力學原理，描述物質出現之机率幅
(於普通物理二課程再詳細介紹)

wave form：波形

What is wave：在時空中變化的物理量，其變化方式遵守波方程 (wave equation)

Example：
1. 如繩子上的 transverse wave，為隨時間與空間變化的，繩子偏離平衡位置的量。
2. 空氣中的聲波，為空氣密度及壓力隨時間及空間的改變
3. 電磁波為隨時間及空間改變的電場及磁場強度。

Wave equation 的通解具有形式：$h(kx \pm \omega t)$，k, ω 皆為常數

h 可代表任意的函數形式，視邊界條件可用不同的基底函數展開，例如寫作 sine 及 cosine functions 的線性組合。

解亦可稱為波形 (wave form) $\begin{cases} h(kx-\omega t) \\ h(kx+\omega t) \end{cases}$ 代表向 $\begin{cases} \text{正} \\ \text{負} \end{cases}$ x-軸方向傳遞之行進波 (traveling wave)

用來判斷 speed of a traveling wave 之條件：$kx - \omega t = \text{constant}$

對時間微分 (即問經過時間 dt 後，在距離 x 的位置 dx 為多大之處可以看到原來的波形？)

$$\Longrightarrow k\frac{dx}{dt} - \omega = 0$$

若為 sine/cosine wave，可明確定義頻率 f 及波長 λ

$$\Longrightarrow \frac{dx}{dt} = \underbrace{v}_{\text{speed of traveling wave}} = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{\frac{2\pi}{\lambda}} = f\lambda$$

波速等於波長乘以頻率

呂浩宇

General Physics (I) Waves

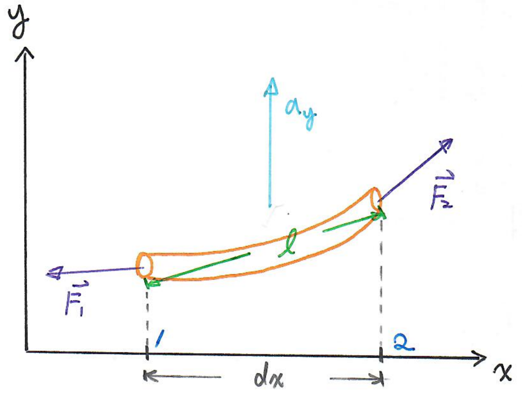
最常見之 wave equation 形式： $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

此處 x, t 為空間及時間座標，y 為隨時空變化而形成波之物理量。

量子力學中的 Schrödinger equation 亦為為 wave equation，有 $i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi$，將在下學期介紹

Example: transverse wave on a rope (繩上之高低波)

(遵照課本推導方式)



基本假設：
1. 繩子隨處近乎保持水平 (波為微擾)
2. 單位繩長之質量為 μ，即 $dm = \mu dx$
3. 繩張力為 τ
4. 繩子雖可拉伸，但幅度極小
5. 忽略重力

(i) 力的分解 ($\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ 平行於繩子之切方向，即可用斜率描述方向

(ii) 物理定律：$F = ma$，$\vec{F}_{1,2}$ 隨處大小皆為等大之張力

在 y 方向 $a_y = \frac{dy^2}{dt^2}$，$dm = \mu dx$

令繩子在兩端點，即位置 1 與 2 處的斜率 $\frac{dy}{dx}$ 為 s_1 及 s_2

則繩子在 y 方向所受之總力可近似為

$$|\vec{F_2}|s_2 - |\vec{F_1}|s_1 = \tau s_2 - \tau s_1 = \tau(s_2 - s_1)$$

$$F = ma \Rightarrow \tau(s_2 - s_1) = \mu dx \frac{dy^2}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{s_2 - s_1}{dx} = \frac{\mu}{\tau}\frac{dy^2}{dt^2} \Rightarrow \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{\mu}{\tau}\frac{dy^2}{dt^2}$$

此項即斜率對空間的二次微分

$$\Longrightarrow \text{波速 } v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$

1. 張力愈大，波速愈快
2. 單位長度之質量愈大，波速愈慢

注意在波的傳遞中，繩子作為繩波傳遞的介質，

並不在波的行進方向上移動。有移動的是波形而非介質。

呂浩宇

General Physics (I) Waves

Wave equation $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ 的解滿足 Principle of Superposition (疊加原理)

即若 $y_1(x,t)$ 與 $y_2(x,t)$ 皆為 wave equation 的解，則混成波

$y'(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$ 亦滿足 wave equation，為 wave equation 的解 (證明過程 trivial)

稱 $y'(x,t)$ 為 resultant wave (or net wave)

Principle of superposition 可推論，在運動方程須滿足上述 wave eq 的條件下

1. 描述在時空中交會的 traveling wave，僅須將它們簡單相加
2. 容許用特定的正交基底將任意 wave form $h(x,t)$ 做線性展開，
   如對 $h(x,t)$ 做 Fourier transform [即以 sine 或 cosine function 展開 $h(x,t)$]

   故了解 sine 或 cosine functions 形式的解通常有助了解任意形式 wave form 的行為

Sinusoidal wave functions：以 sine 函式為例，cosine 函式的情形類似

$$y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t + \phi)$$

y_m：amplitude　　ϕ：phase constant

$$\left\{\begin{array}{l} k = \frac{2\pi}{\lambda} \\ \omega = 2\pi f = 2\pi \frac{1}{T} \end{array}\right.$$

k：angular wave number (或簡稱 wave number)　　λ：wave length

ω：angular frequency　　f：frequency　　T：period

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -y_m k^2 \sin(kx-\omega t+\phi)$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -y_m \omega^2 \sin(kx-\omega t+\phi)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{k^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$ 具有上述 wave equation 之形式

$$\Rightarrow v = \frac{\omega}{k}$$

(1) 對於空間中的任一特定位置 $x = x_0$，$y(x_0,t) = y_m \sin(-\omega t + (kx_0+\phi))$

為振幅為 y_m，頻率為 f，phase constant 為 $(kx_0+\phi)$ 的 simple harmonic motion.

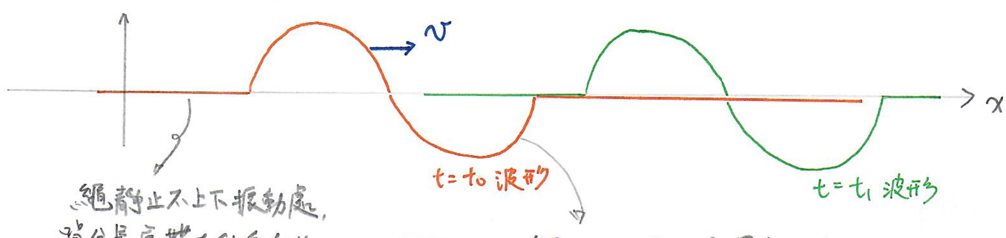
(2) 對於任意特定時間 $t = t_0$，每經過距離 $\Delta x = \lambda$，(即 $kx = \frac{2\pi}{\lambda}\lambda = 2\pi$)

則此正弦波的波形完整地重現一次。故稱 λ 為此正弦波之波長。

呂浩宇

General Physics (I) Waves

Energy transportation in string waves (繩波中的能量傳遞)



波形 $f(x-vt)$ 由左向右傳遞，故使得單位長度上帶有動能的部分由空間中左邊的位置移動到空間中右邊的位置。淨效果即為動能隨著波由空間的左邊傳遞到空間的右邊。

以正弦波為例：

若單位長度的質量為 μ，即 $dm=\mu dx$，則 sine wave 傳遞的動能可利用以下估計

一小段繩子上的動能

$$\underbrace{dK}_{\text{一小段繩子上的動能}} = \frac{1}{2}dm\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}(\mu dx)\underbrace{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}_{y\text{ 方向速度平方}}$$

if $y = y_m \sin(kx-\omega t)$

then $dK = \frac{1}{2}(\mu dx)\,\omega^2 y_m^2 \cos^2(kx-\omega t)$

因波速為 v，在經過時間 $dt=\frac{v}{dx}$ 後，這小段繩子原本帶有的能量可以完全傳遞到它的右邊(即正 x 方向)

故單位時間傳遞之能量可表為 $\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2}\mu\frac{dx}{dt}\omega^2 y_m^2\cos^2(kx-\omega t)$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\mu v\omega^2 y_m^2\cos^2(kx-\omega t)}_{\text{動能通量隨時間空間變化}}$$

動能通量隨時間空間變化。

工程及物理上比較實用的問題為：經過無窮多週期後，平均單位時間通過的動能為多少，i.e.,

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dK}{dt}dt}{\int_{-\infty}^{\infty}dt} = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 y_m^2\,\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\cos^2(kx-\omega t)dt}{\int_{-\infty}^{\infty}dt} = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 y_m^2\,\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}(\cos 2\theta+1)dt}{\int_{-\infty}^{\infty}dt}$$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$$= \frac{1}{2}\mu v\omega^2 y_m^2 \lim_{T\to\infty}\frac{2\cdot\frac{1}{2}T}{2T}$$

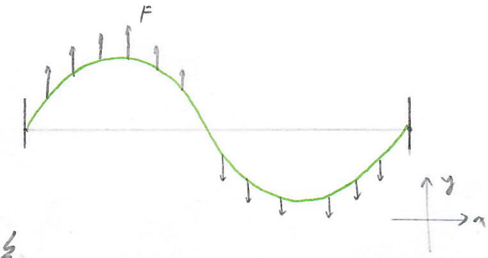
$$= \underbrace{\frac{1}{4}\mu v\omega^2 y_m^2}$$

因此為功率 (power)

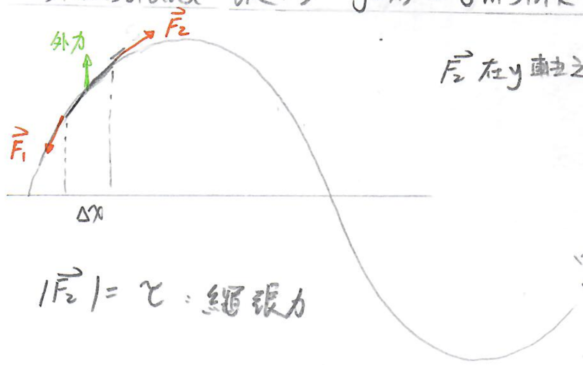
呂浩宇

General Physics (I) Waves

繃緊的繩索需以一定的力拉，才可以維持具有一定 functional form 的靜止狀態。鬆手後則繩子彈回，局部具有 y 方向速度。故鬆手後為位能轉換為動能的過程，滿足能量守恆。故知繩子在有張力時，若 $y(x)$ 不隨處為 0，則帶有一定的位能。在鬆手後位能亦可由產生的繩波傳遞。



sinusoidal 波形 $y(x) = y_m \sin kx$ 具有的位能（參考 page 2 對張力之計算）



$|\vec{F_2}| = \tau$: 繩張力

$\vec{F_2}$ 在 y 軸之分量大小：$F_2^{\perp} = |\vec{F_2^{\perp}}| = \tau \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_2$

$F_1^{\perp} = |\vec{F_1^{\perp}}| = \tau \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_1$

單位長度之外力：$\dfrac{-(F_2 - F_1)}{\Delta x} = \tau \dfrac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \tau \dfrac{d^2 y}{dx^2}$

$= \tau k^2 y$

若要將振幅由 $y=0$ 拉到 $y = y_m \sin kx$，
局部單位長度由外力輸入的功為

$$\int_0^{y_m} \tau k^2 \psi \sin kx \, d\psi = \frac{1}{2} \tau k^2 y^2 \Big|_0^{y_m} \sin^2 kx$$

$$= \frac{1}{2} \tau k^2 y_m^2 \sin^2 kx$$

若為傳遞中的波，則有 $k = \dfrac{\omega}{v}$ (page 3) 及 $v = \sqrt{\dfrac{\tau}{\mu}}$ (page 2)

單位長度的位能 $\frac{1}{2} \tau k^2 y_m^2 \sin^2 kx$

$= \frac{1}{2} \tau \dfrac{\omega^2}{v^2} y_m^2 \sin^2 kx$

$= \frac{1}{2} \tau \omega^2 \dfrac{\mu}{\tau} y_m^2 \sin^2 kx$

$= \frac{1}{2} \mu \omega^2 y_m^2 \sin^2 kx$

對無窮多個波形平均後為

$\frac{1}{4} \mu \omega^2 y_m^2$

故單位時間傳遞的位能為 $\frac{1}{4} \mu \omega^2 \Delta x \, y_m^2 / \Delta t = \frac{1}{4} \mu v \omega^2 y_m^2$

與傳遞的動能相等，符合物理直覺

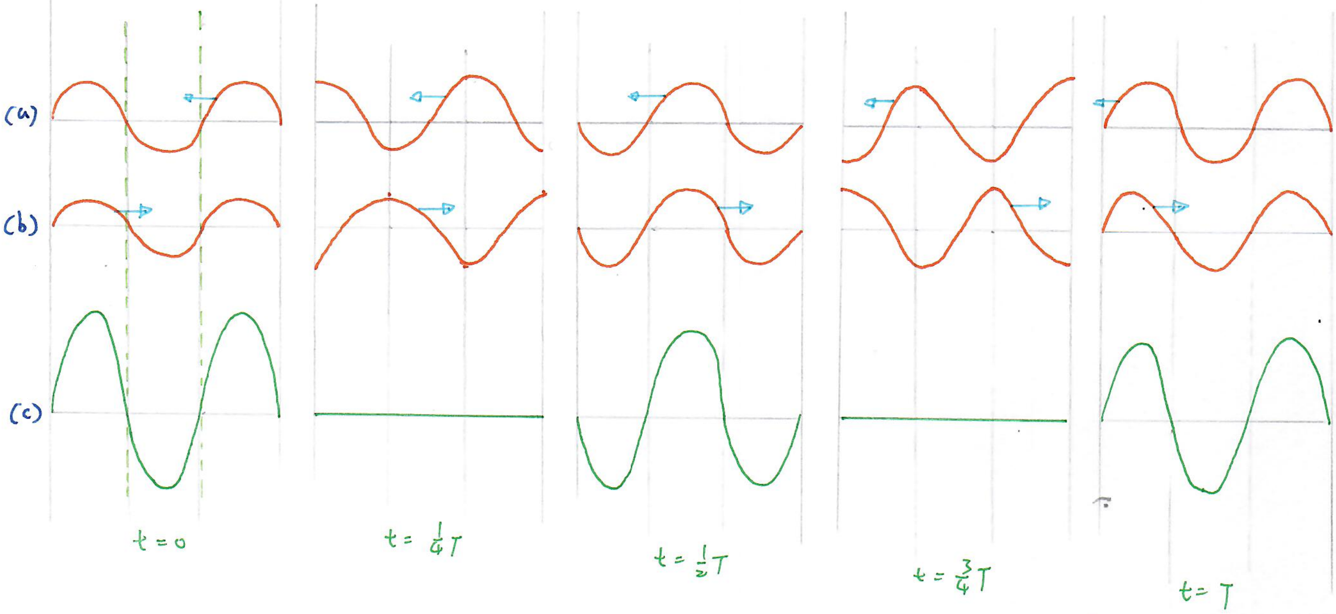
行進波的功率為單位時間傳遞動能與位能之和：$P_{avg} = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 y_m^2$

呂浩宇

General Physics (I) Waves

Standing waves (駐波)

本身不為行進波 (traveling wave)，即無法表示為 $h(x-vt)$ 之形式，但可視為兩振幅相同，方向相反之行進波的疊加。因此，駐波無淨的能量傳遞。



(課本 Fig 16-17)

兩 amplitude 相同，方向相反的 sine wave 疊加

$$y_1(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t)$$

$$y_2(x,t) = y_m \sin(kx + \omega t)$$

$$\Rightarrow y' = y_1 + y_2$$

$$= 2y_m \sin(kx)\cos(\omega t)$$

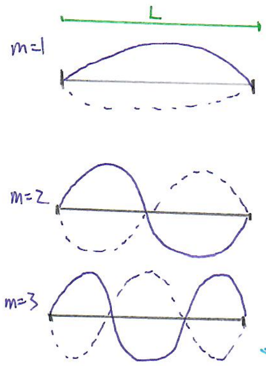
Using trigonometric identity $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

繩上隨處皆為簡諧運動，振幅與位置有關，為 $2y_m\sin(kx)$ 的絕對值

nodes：駐波上振幅為 0 處，滿足 $kx = n\pi$, $n = 0, 1, 2, \cdots$

antinodes：駐波上振幅最大處，滿足 $kx = (n+\frac{1}{2})\pi$, $n = 0, 1, 2, \cdots$

形成駐波之條件：$\lambda = \frac{2L}{m}$, $m = 1, 2, 3, \cdots$ (即 L 為 $\frac{\lambda}{2}$ 的整數倍)



$$\Rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = m\frac{v}{2L}$$

m稱為 harmonic number

m=1，稱 fundamental mode 或 first harmonic

m=2：second harmonic

m=3：third harmonic

harmonic series：collection of all possible harmonic number.

The pattern consist m loops