呂浩宇

General Physics (I) Center of Mass and Linear Momentum

Elastic Collisions in One Dimension (一維彈性碰撞)

碰撞前後總動能不變之碰撞過程

作用力等於反作用力：動量守恆

保守力作功：總動能守恆

Q：完全非彈性碰撞 (complete inelastic collision)

定義：碰撞後兩物體黏在一起 (stick together)

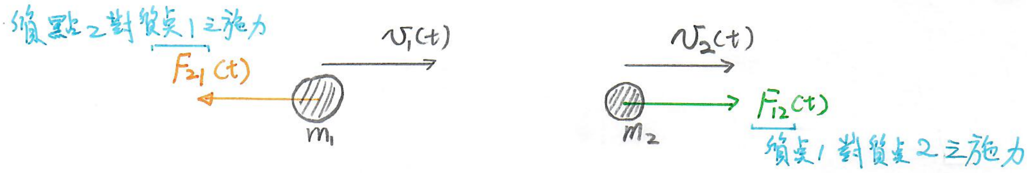
- 什麼叫"黏在一起"? (無相對位置改變 ⇒ 速度及加速相同)
- 最終總動能由什麼決定?

什麼叫碰撞? (以二體碰撞為例說明) ⟶ 經驗：二物体互相間之互作用力隨距離變短而增大到距離極小時作用力為極大，而後之互作用力隨距離減小之整個過程

微觀看兩質點之完全彈性碰撞過程

兩帶正電荷之質點質量分別為 m_1 及 m_2 (交互作用完全源自靜電力)

[古典物理範疇之交互作用皆可由此推廣]



由於牛頓第三運動定律：$|F_{21}| = |F_{12}|$ ⟶ 在任意時間皆成立：$|F_{21}(t)| = |F_{12}(t)|$

⇓

$$\underbrace{-F_{21}(t)\,\delta t}_{=\,m_1 a_1 \delta t\,=\,m_1 \frac{\delta v_1}{\delta t}\delta t} = \underbrace{F_{12}(t)\,\delta t}_{=\,m_2 \frac{\delta v_2}{\delta t}\delta t}$$

由於牛頓第三定律告訴我們作用力與反作用力方向相反，故有此負號。

力 $F = \frac{d}{dt}(mv)$ 為動量隨時間之改變率

$\int F dt$ 為過程中之總動量改變量

$$\Rightarrow m_1 \frac{dv_1}{dt}dt + m_2 \frac{dv_2}{dt}dt = \left(m_1 \frac{dv_1}{dt} + m_2 \frac{dv_2}{dt}\right)dt = 0$$

假設 m_1, m_2 不隨時間改變：

$$\begin{aligned}
&\delta(mv) \\
&= (m+\delta m)(v+\delta v) - mv \\
&= m\delta v + v\delta m + \cdots \text{ 省略無窮小之高次項} \\
&= m\delta v
\end{aligned}$$

定義衝量 (impulse) 為 $\int \vec{F}(t)\,dt$

即動量的改變率對時間之積分，為總動量改變量

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(m_1 v_1 + m_2 v_2) = 0$$

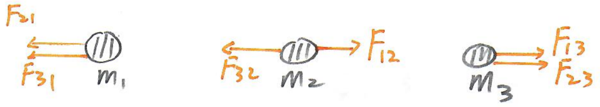
一般以符號 $\vec{P}(t)$ 代表質點在時間 t 之動量

稱 $m_1 v_1(t)$ 為質點一在時間 t 之動量，$m_1 v_1(t) + m_2 v_2(t)$ 為兩質點在時間 t 之總動量。此結果為碰撞過程中，系統之總動量守恆。稱 F_{12} 及 F_{21} 為作用於此質點系統內部之 internal force

呂喆宇

General Physics (I) Center of Mass and Linear Momentum

think：如何推廣到任意多質點之情形？ hint: 先推廣成3個看看



$-F_{12}=F_{21}$, $-F_{23}=F_{32}$, $-F_{13}=F_{31}$

$$\Rightarrow \underbrace{(F_{21}+F_{31})}_{\frac{d}{dt}(m_1v_1)} + (F_{12}+F_{32}) + (F_{13}+F_{23}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(m_1v_1+m_2v_2+m_3v_3)=0$$

無外力作用僅有 internal force 之情形 (isolated system)
系統總動量不隨時間改變。

推廣為更多質點，甚至為無窮多時，應如何表示？

由 page 1, 系統之總動量不隨時間改變：$\frac{d}{dt}\vec{P}(t)=0$ 系統總動量

二体碰撞系統初動量等於系統末動量：$\vec{P_i}=\vec{P_f} \Rightarrow \vec{P_{1i}}+\vec{P_{2i}} = \underbrace{\vec{P_{1f}}}_{\text{質點一末動量}} + \overbrace{\vec{P_{2f}}}^{\text{質點二末動量}}$

二體彈性碰撞，能量受何規範？

靜電力形式類似重力，交互作用力之方向與大小只與兩物之相對位置 $\vec{r_1}-\vec{r_2}=\vec{r}$ 有關，且靜電力可寫為負的電位能空間微分 $\vec{F}=-\vec{\nabla}U(\vec{r})$ [一維情形 $F=-\frac{d}{dr}(U(r))$]

故此問題中之交互作用力為 conservative force，總機械能不隨時間或兩物體之距離改變。

兩物體互相接近的過程中，動能逐漸轉換為位能。在互相遠離之過程中，則電位能逐漸轉變為動能

Summary：若兩物體在碰撞前與碰撞後之狀態 i 及 f，距離皆可視為無窮遠 即交互作用力趨近於0 定義此情形之位能為0

注意：electric monopoles 的交互作用力即使在無窮遠之距離亦不可忽略
正確命題應考慮電中性質點之 dipole 或 quadrupole interaction
但因目前課程尚未介紹電磁學故以此敘述含糊解釋

若初速 v_{1i}, v_{2i} 為已知，則有兩個 equations 可解二變數 v_{1f}, v_{2f}

$$\begin{cases} m_1v_{1i}+m_2v_{2i}=m_1v_{1f}+m_2v_{2f} & \text{——初動量等於末動量} \\ \frac{1}{2}m_1v_{1i}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2i}^2=\frac{1}{2}m_1v_{1f}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 & \text{——初位能等於末位能} \end{cases}$$

呂浩宇

General Physics (I) Center of Mass and Linear Momentum

解 =
(推導容易, 不須記憶)

$$\begin{cases} v_{1f} = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \dfrac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i} \\[2ex] v_{2f} = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i} \end{cases}$$

計算上簡單之推導：先選擇計算較為方便之慣性座標系做計算，等算完再轉換回來
為物理上常用之計算技巧.

選擇相對於原本座標系，速度為 v_{2i} 之慣性座標系，
則在新的座標系中 物体之初速與末速為

$$\begin{cases} v_{1i}' = v_{1i} - v_{2i}, \quad v_{2i}' = v_{2i} - v_{2i} = 0 \\ \underline{v_{1f} = v_{1f}' + v_{2i}} \quad \underline{v_{2f} = v_{2f}' + v_{2i}} \\ v_{1f}' = v_{1f} - v_{2i}, \quad v_{2f}' = v_{2f} - v_{2i} \end{cases}$$

由於在新的慣性座標系中，動量守恆與動能守恆成立

$$\begin{cases} m_1 v_{1i}' + \underset{m_2 v_{2i}'}{\underline{0}} = m_1 v_{1f}' + m_2 v_{2f}' \quad \text{—— (1)} \\[2ex] \tfrac{1}{2} m_1 v_{1i}'^2 + \underset{\frac{1}{2} m_2 v_{2i}'^2}{\underline{0}} = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1f}'^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2f}'^2 \quad \text{—— (2)} \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow m_2 v_{2f}' = m_1 (v_{1i}' - v_{1f}') \quad \text{—— (3)}$$

$$(2) \Rightarrow \tfrac{1}{2} m_2 v_{2f}'^2 = \tfrac{1}{2} m_1 (v_{1i}' - v_{1f}')(v_{1i}' + v_{1f}') \quad \text{—— (4)}$$

$$\frac{(4)}{(3)} \Rightarrow \tfrac{1}{2} v_{2f}' = \tfrac{1}{2}(v_{1i}' + v_{1f}') \quad \text{—— (5)}$$

$$(1) + (5) \times 2m_2 \Rightarrow m_1 v_{1i}' = m_1 v_{1f}' + m_2 v_{1i}' + m_2 v_{1f}'$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2) v_{1f}' = (m_1 - m_2) v_{1i}'$$

$$\Rightarrow v_{1f}' = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} v_{1i}'$$

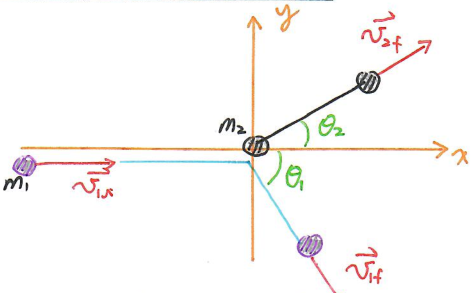
$$\Rightarrow v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} (v_{1i} - v_{2i}) + v_{2i}$$

$$= \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} v_{1i} + \frac{2m_2}{(m_1 + m_2)} v_{2i}$$

呂浩宇

General Physics (I) Center of Mass and Linear Momentum

Elastic Collision in Two Dimension (二維彈性碰撞)



glancing collision

總是可以選擇慣性座標系，使得其中一質点之初速沿 x-軸之方向，而另一質点之初速為 0 (即靜止)，待計算完成後再旋轉及 boost 回原座標系。

令：$v_{1i} = |\vec{v}_{1i}|$，$v_{2f} = |\vec{v}_{2f}|$，$v_{1f} = |\vec{v}_{1f}|$

動量守恒：$\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f}$

x-軸分量：$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2$ —— (1)

y-軸分量：$0 = -v_{1f} \sin\theta_1 + v_{2f} \sin\theta_2$ —— (2)

動能守恒：$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$ —— (3)

若 m_1，m_2，v_{1i} 為已知，則共有 3 個 equations 及 4 個獨立變數 ($v_{1f}, v_{2f}, \theta_1, \theta_2$)

若四個獨立變數中之其中一個可由測量得知，則其它三個可解

較高等之交互作用及反應問題由此引入 differential cross-section 之概念

Complete Inelastic Collision in One Dimension (一維完全非彈性碰撞問題)

碰撞前後系統的總動能改變：

碰撞後部分動能被轉為其它之形式儲存，或被帶離系統 (如熱輻射)

動量守恒：(只要選定之座標系為慣性座標系，就依牛頓第三定律成立)

$$\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f} \Rightarrow m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \quad \text{—— (i)}$$

碰撞後無相對運動：

$$v_{com} = v_{1f} = v_{2f} \quad \text{—— (ii)}$$

若初速 v_{1i}，v_{2i} 及兩物体之質量 m_1，m_2 為已知，

則僅有一個 equation (即 equation (i))，一個自由變數 v_{com}

$$\Rightarrow v_{com} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{(m_1 + m_2)} = \frac{1}{(m_1 + m_2)} \frac{d}{dt}(m_1 r_{1i} + m_2 r_{2i})$$

將速度改寫為位置之改變率

呂浩宇

General Physics (I) Center of Mass and Linear Momentum

Any Collision in One Dimension (一維，管它是什麼碰撞)

僅假設選用慣性座標系，先考慮封閉，不受外力之系統

完全非彈性碰撞：

碰撞前：$m_1v_{1i}+m_2v_{2i}=(m_1+m_2)\dfrac{d}{dt}\left(\underbrace{\dfrac{m_1r_{1i}+m_2r_{2i}}{m_1+m_2}}\right)$

因次為長度因次（分子分母之質量因次相消）
→ 即這個項的物理意義，為一種位置之概念

碰撞後：$m_1v_{1f}+m_2v_{2f}=m_1v_{com}+m_2v_{com}$

代入 page 4 底下，v_{com} 的解

$$(m_1+m_2)\frac{d}{dt}\left(\frac{m_1r_{1f}+m_2r_{2f}}{m_1+m_2}\right)=(m_1+m_2)v_{com}=(m_1+m_2)\frac{d}{dt}\left(\frac{m_1r_{1i}+m_2r_{2i}}{m_1+m_2}\right)$$

⇒ 碰撞前後，這個物理量，即動量的形式完全沒有改變

可視為一個質量為 (m_1+m_2) 的質點，

其位置由 $r=\dfrac{m_1r_1+m_2r_2}{m_1+m_2}$ 代表，稱 r 為此二質點系統之質心

則此質點之運動速度總是 $v=\dfrac{dr}{dt}$，如在初始位置時為

$\dfrac{dr_i}{dt}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{m_1r_1+m_2r_2}{m_1+m_2}\right)$，在末位置時為 $\dfrac{dr_f}{dt}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{m_1r_f+m_2r_f}{m_1+m_2}\right)$

在此不受外力之完全非彈性碰撞過程，此質量為 (m_1+m_2) 之等效質點之動量 $(m_1+m_2)v$ 不隨時間改變

若 $m_1v_{1f}=m_1v_{1i}+F\delta t$
牛頓第三定律 $m_2v_{2f}=m_2v_{2i}-F\delta t$

⇓

$m_1v_{1f}+m_2v_{2f}$
$=m_1v_{1i}+m_2v_{2i}$

在交互作用之過程中總是成立

$\Rightarrow \dfrac{d}{dt}(m_1v_1+m_2v_2)=0$

$\Rightarrow \dfrac{d}{dt}(m_1+m_2)\left(\dfrac{d}{dt}\dfrac{m_1r_1+m_2r_2}{(m_1+m_2)}\right)=0$

上述推論僅用到牛頓第三定律帶來之動量守恆，故結論在完全彈性碰撞，或其它介於完全彈性或非彈性碰撞之過程皆成立

推廣到任意多質点之系統
（考慮封閉，不受外力之系統）

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i m_iv_i\right)=0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\left(\sum_i m_i\right)\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{\sum_i m_ir_i}{\sum_i m_i}}\right)\right]=0$$

若定義 $\dfrac{\sum_i m_ir_i}{\sum_i m_i}$ 為質心位置，r

則此質心位置隨時間之改變率為常數，等效之質量為 $\sum_i m_i$，速度為 $\dfrac{dr}{dt}$ 之質點之動量 $\left(\sum_i m_i\right)\dfrac{dr}{dt}$ 不隨時間改變

呂浩宇

General Physics (I) Center of Mass and Linear Momentum

三維空間中系統之質心

代表系統之質點的等效質量：$M = \sum_i m_i$

質心位置：$\vec{r} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r_i}$ → 質心：以質量作加权而得之平均位置

$$= \frac{1}{M}\left[\left(\sum_i m_i x_i\right)\hat{i} + \left(\sum_i m_i y_i\right)\hat{j} + \left(\sum_i m_i z_i\right)\hat{k}\right]$$

由於動量守恆對於不同座標軸之分量分別成立，故若此質點系統不受外力，則動量 $M\frac{d\vec{r}}{dt}$ 為常量

若每個質點各自受有外力，質心位置如何變化？

$$\vec{r} = \frac{1}{M}\left(\sum_i m_i \vec{r_i}\right)$$

$$\underbrace{\vec{v}}_{\text{等效質點之速度}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{M}\frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \vec{r_i}\right) = \frac{1}{M}\left(\sum_i m_i \frac{d\vec{r_i}}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{M}\left(\sum_i m_i \vec{v_i}\right)$$

$$\underbrace{\vec{a}}_{\text{等效質點之加速度}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{M}\frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \vec{v_i}\right) = \frac{1}{M}\left(\sum_i m_i \frac{d\vec{v_i}}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{M}\left(\sum_i m_i \vec{a_i}\right)$$

F = ma

$$= \frac{1}{M}\left(\sum_i F_i\right)$$

$$\Longrightarrow \quad M\vec{a} = \sum_i F_i$$

此質量為 M 之等效質點看似受到一外力，此外力為各別質點所受外力之總合

利用質心之概念，可方便地對有複雜的內部交互作用之質點系統之運動作整体性地描述。探討它們受到某總外力作用時之平均運動。例如由多原子所組成的不同分子在離心机之中，原子分子可能有複雜之交互作用，但它們之整体空間分佈仍可有簡化後之簡單描述

化學反應為何種碰撞之情形？