呂浩宇

General Physics (I) Gravitation

Newton's law of Gravitation

gravitational constant: $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ m^3/kg \cdot s^2$

兩具有質量 m_1 及 m_2 的質點之重力交互作用：質點1所受重力為

$$\vec{F_1} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$$

r 為兩質點之間距離

$\hat{r}$ 為由質點1出發指向質點2之方向向量，$|\hat{r}|=1$

質點2受大小相同方向相反之反作用力

Principle of Superposition

$$\underbrace{\vec{F}_{1,net}}_{\text{質點1所受的總重力：等於各別質點施於質點1重力之向量合}} = \overbrace{\vec{F}_{12}}^{\text{質點2施於質點1之重力，以此類推}} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \vec{F}_{15} + \cdots + \vec{F}_{1n} = \sum_{i}\vec{F}_{1i}$$

連續情形 $\vec{F_1} = \int d\vec{F}$

Weight：物體質量乘以靜加速度（以在地球表面之物體的重量為例）

若地球自轉之角頻率為 ω，且地球半徑為 R，

則需對地表之靜止物體施以向心加速度 $\omega^2 R = \frac{v^2}{R}$ $(v=R\omega)$

若重力加速度恰好等於向心加速度（centripetal acceleration），

則物體相對於地表，不受靜的垂直於地表之加速度，此時重力（稱物體在此種情形為失重）

之作用僅為改變物體運動速度之方向。若重力加速度大於

向心加速度，則物體相對於地表受有額外的方向向地心之

加速度 g

$mg = ma_g - m(\omega^2 R)$, $a_g = \frac{GM}{R^2}$ M 為地球質量

呂浩宇

General Physics (I) Gravitation

Application of Gauss's law (高斯定理之應用)

(i) A uniform spherical shell of matter attracts a particle that is outside the shell as if all the shell's mass were concentrated at its center.
均勻球殼對處於其外之質點所施之重力等於位於球心,與球殼等重之質點所施重力

(ii) A uniform shell of matter exerts no net gravitational force on a particle located inside it.
均勻球殼對處於其內之質點所施之靜重力為0

此定理可暴力積分證明,或是等到微積分學到 Gauss's law 後有較為簡潔且具有一般性之證明方式。此堂課不對此贅述而僅看應用

Example. 一均勻球,密度為ρ,求距球心r處所受重力大小

$$F = \frac{GmM_{enc}}{r^2}, \quad \underbrace{M_{enc} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho}_{\text{enclosed mass, the mass enclosed in the radius } r}$$

$$\Longrightarrow F = \frac{4\pi}{3} Gm\rho r$$

與距球心距離成正比,具有 Hooke's law 之形式

Gravitational potential energy (重力位能)

Newton's law of gravitation 可表示為一僅與位置有關的函數

$U \equiv -\frac{GMm}{r} + \text{constant}$ 對距離r之全微分再乘負一,故為保守力。

U 即為 gravitational potential energy。並且,重力之作功如同其它的保守力作功,與路徑無關

$$(r+\delta r)(r-\delta r) = r^2\left(1+\frac{\delta r}{r}\right)\left(1-\frac{\delta r}{r}\right)$$
$$= r^2\left(1+\frac{\delta r}{r}-\frac{\delta r}{r}+\frac{(\delta r)^2}{r^2}\right) \xrightarrow{\frac{\delta r}{r}\to 0} r^2$$

若 $\delta r \ll r$, $(1+\frac{\delta r}{r})$ 與 $(1-\frac{\delta r}{r})$ 互為倒數 (無因次

$$\Delta U = -\frac{GMm}{(r+\delta r)} - \left(-\frac{GMm}{r}\right) = -\frac{GMm}{r}\left(1-\frac{\delta r}{r}\right) + \frac{GMm}{r}$$

$$\Longrightarrow \frac{dU}{dr} = \frac{GMm}{r^2} \qquad F = -\frac{dU}{dr} = -\frac{GMm}{r^2}$$

呂浩宇

General Physics (I) Gravitation

Escape Speed (脫離速度)

兩質量為 M 及 m 之物體若距離為 r，且僅有重力交互作用，則 escape velocity 為允許兩物達到距離無窮遠之最小初相對速率。

為方便計算，令重力位能定義中的常數項為特定值，使得兩物在相距無窮遠距離時之位能為 0，若 $M \gg m$

$$系統初\begin{cases}位能: -\frac{GMm}{r}\\ 動能: \frac{1}{2}mv^2\end{cases}, \quad 系統末\begin{cases}位能: 0\\ 動能: 0\end{cases}$$

保守力作功，系統總機械能守恆

$$\Longrightarrow -\frac{GMm}{r}+\frac{1}{2}mv^2 = 0+0 = 0$$

$$\Longrightarrow \text{escape velocity}: v=\sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Satellites: orbits and energy

若衛星處於半徑為 r 的圓型軌道，且行星之質量遠大於衛星，行星質量為 M，衛星質量為 m

重力等於向心加速度：$\frac{GMm}{r^2}=m\frac{v^2}{r}$

$\Longrightarrow$ 衛星動能：$\frac{1}{2}mv^2=\frac{GMm}{2r}$

行星近似為靜止，動能為 0.

系統重力位能：$U=-\frac{GMm}{r}$ (令距離無窮遠情形位能為0)

系統總機械能：$\frac{GMm}{2r}+\left(-\frac{GMm}{r}\right)=-\frac{GMm}{2r}$

$\Rightarrow$ 橢圓軌道之情形僅需把 r 代換為軌道半長軸 a

即橢圓長軸長度之一半

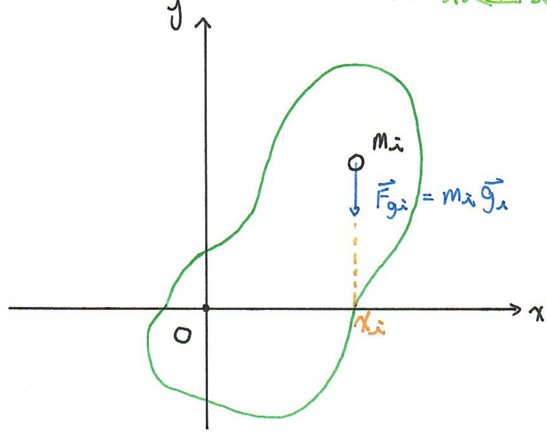
呂浩宇

General Physics (I) Gravitation

The center of gravity

若一物體受合外重力 $\vec{F_g} = \int d\vec{F}$，則 center of gravity 為使得作用在此點上，大小與方向皆等同 $\vec{F_g}$ 的力產生的力矩等於外重力造成的靜總力矩之位置

若重力加速度可近似為常數（即不隨空間位置改變），則 center of gravity 之位置即為 center of mass 之位置
（此敘述對任意選定之計算角動量參考點皆成立）



令 y-軸平行重力加速度但方向相反
並且令座標原點為計算角動量之參考點

$$\tau_i = x_i F_{gi}$$

$$= x_i m_i g_i = g(x_i m_i)$$

$$\tau_{net} = \sum_i \tau_i = g \sum_i (x_i m_i)$$

$$= \underbrace{Mg}_{\text{大小及方向皆同外重力總合的力}} \ \underbrace{\frac{\sum_i (x_i m_i)}{M}}_{\text{center of mass 與原點之距離}}$$

$$M \equiv \sum_i m_i$$