呂浩宇

## §11-1 Rolling Smoothly (without slipping or bouncing)

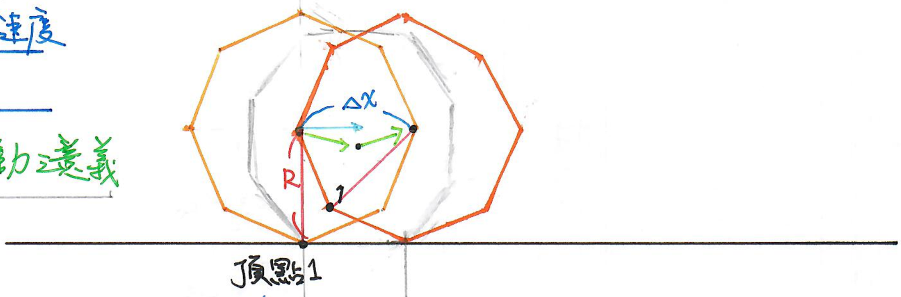
(純滾動：無滑動與跳動)

跳動 → 垂直接觸面之相對運動

滑動 → 平行接觸面之相對運動

問題：輪子質心移動速度與輪子繞輪軸角速度之關係

解題關鍵：了解純滾動之意義




頂點在有接觸地面時皆無橫向或縱向運動

物理與家解決問題之循序思路：

若遇涉到無窮大或小的問題太抽象，就先簡化為有限問題確實地分析問題後再回頭令有限之變數趨近無限

此例：圓為有無窮多個頂點之正多邊形

可先討論"頂點與地面無相對運動之滾動"，頂點回到原來高度，接地頂点與正多边形中心連線沿鉛垂方向的運動中，正多边形旋轉了幾度，而正多边形中心移動了多少距離？

要求中心回到原來高度使原本看中心橫向位移速度的物理問題概念乾淨

以正八边形為例：

觀察：(1) 頂点1與輪中心之連線轉了角度 $\Delta\theta = 2\pi/8$

(2) 中心前進距離為底边長（中心與接地頂点皆在鉛垂線方向）

其長度為 $2R\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{8}\right) = 2R\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) = \Delta x$

推廣到正N边形時也有以上類似關係：$\begin{cases}\Delta\theta = 2\pi/N \\ \Delta x = 2R\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)\end{cases}$

$$\lim_{\Delta N\to\infty}\Delta x = 2R\cdot\frac{\Delta\theta}{2} = R\Delta\theta$$

純滾動，輪心經過的橫向距離等於與地面接觸過的弧長

左右對時間微分：$v_{com} = R\omega$ 正N边形圍繞其中心轉動之角速度

center of mass velocity

$\Rightarrow a_{com} = R\alpha$

呂浩宇

## § 11-1 Rolling Smoothly (without slipping or bouncing)

問題2：在實驗室座標系(laboratory frame)以純滾動等速前進的輪子其動能為何？

回頭觀察 page 1 正八边形的例子，在 laboratory frame，任一瞬時，正八邊形之運動皆為繞頂點1之轉動，其角速率為 $\omega$

由 lecture notes：Rotation, page 2 得知

動能為：$K = \frac{1}{2} I_p \omega^2$，$I_p$ 為正八边形繞頂点1之轉動慣量

由 parallel axis theorem：$I_p = I_{com} + \overbrace{M}^{\text{正八边形質量}}\underbrace{R}_{\text{正八边形半径}}{}^2$

$$\Rightarrow K = \overbrace{\frac{1}{2} I_{com}\omega^2}^{\text{質心轉動動能}} + \overbrace{\frac{1}{2} M v_{com}^2}^{\text{質心移動動能}}$$

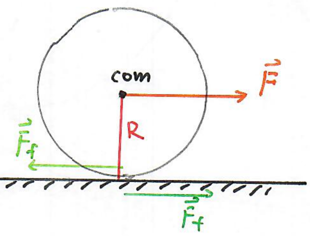
(利用 $v_{com} = R\omega$)

總動能等於質心移動動能加質心轉動動能

### 有外力及摩擦力之情形

先想像輪子不可轉動之情形

摩擦力向外力之反方向作用，減少淨力



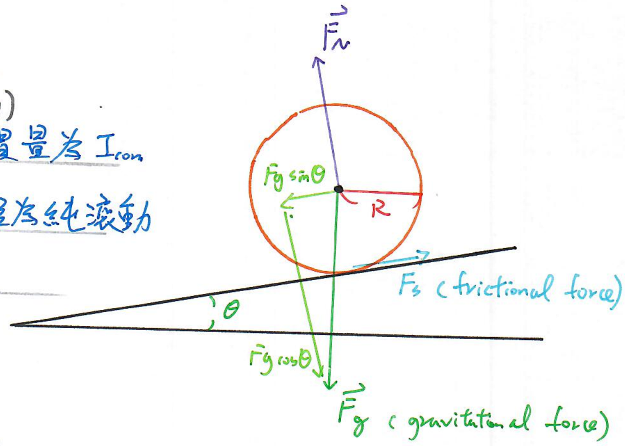

有摩擦力之情形亦類似，摩擦力造成相對於輪子質心之力矩，使輪轉動

### Example：Rolling down a ramp (斜面)

問題：質量為 $M$，半徑為 $R$，繞質心轉動慣量為 $I_{com}$ 之輪子受重力加速度下滑，下滑過程為純滾動

問：輪子沿斜坡方向之加速度大小

(假設斜坡固定不動)




解題策略：1. 依題設作力的分解

2. 利用物理定律找變數間之關係 { 力的作用 / 力矩的作用

3. 利用題設解變數間之關係 (如此例為純滾動)

呂浩宇

# §11-1 Rolling Smoothly (without slipping or bouncing)

力的作用：

- 垂直斜面：$|\vec{F}_N| = Mg\cos\theta$ 確定正向力大小 —— (1) → 知道摩擦係數時，正向力大小為有用信息
- 平行斜面：牛頓 2nd law：$|\vec{F}_s| - Mg\sin\theta = M|\vec{a}_{com}|$ —— (2)
  輪子沿斜面之加速度
  有兩未知數，$|\vec{F}_s|$，$|\vec{a}_{com}|$，需要由更多條件列出 equations 才能解

力矩的作用：$R|\vec{F}_s| = I_{com}|\vec{\alpha}|$ —— (3)
輪子角加速度
多列了這個 equation 又多了一個變數 $|\vec{\alpha}|$，故仍需再找條件列 equation 才能解

題設純滾動：(page 1)：$|\vec{a}_{com}| = R|\vec{\alpha}|$ —— (4)
新的 equation，沒多出新的自由變數，問題可解了

看題目問的是什麼，過程中就優先消掉其它變數，留下題目問的

解：(4) 代入 (3) $\Rightarrow |\vec{F}_s| = I_{com}\dfrac{|\vec{\alpha}|}{R} = I_{com}\dfrac{|\vec{a}_{com}|}{R^2}$ —— (5)

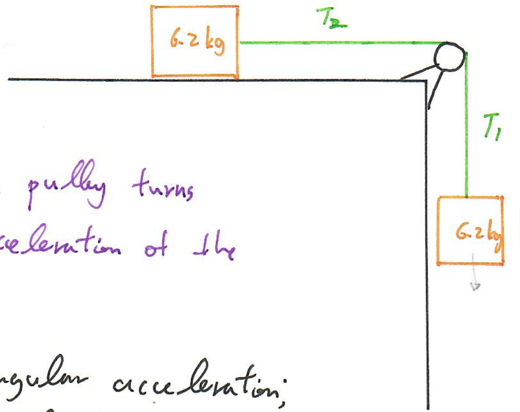
(5) 代入 (2) $\Rightarrow$ $$I_{com}\frac{|\vec{a}_{com}|}{R^2} - Mg\sin\theta = M|\vec{a}_{com}|$$

$$\Rightarrow |\vec{a}_{com}| = \frac{g\sin\theta}{1 + I_{com}/MR^2}$$

若定義右邊為負方向，則 $a_{com} = -\dfrac{g\sin\theta}{1 + I_{com}/MR^2}$

# Chapter 10 Problem 17.

① pulley : $\begin{cases} 2.40 \text{ cm radius} \\ 7.4 \cdot 10^{-4} \text{ rotational inertia} \end{cases}$




② The string does not slip on the pulley

③ the pulley's axis is frictionless

④ when the system is released from rest, the pulley turns through 0.13 rad in 91.0 ms and the acceleration of the blocks is constant.

what are (a) the magnitude of the pulleys angular acceleration;
(b) the magnitude of either block's acceleration,
(c) string tension $T_1$, and (d) string tension $T_2$ ?

(a)

$0.13 = \frac{1}{2}\alpha(0.091)^2 \Rightarrow \alpha \sim 31.4 \text{ rad/s}^2$

(b)

$a = r\alpha \Rightarrow a = 0.024 \cdot 31.4 \cong 0.754 \text{ m/s}^2$

(c)

$6.2 \cdot g - T_1 = 6.2 \cdot a \quad , \quad g = 9.8$

$\Rightarrow T_1 = 6.2(9.8 - 0.754) \cong 56.1 \, N$

(d)

滑輪與繩子間的摩擦力 : $F \cdot 0.024 = I\alpha = 7.4 \cdot 10^{-4} \cdot 31.4$

$\Rightarrow F = 0.968$

$T_2 = T_1 - F \cong 55.1 \, N$

呂浩宇

# General Physics (I) Angular Momentum and Conservation of It
## 角動量及角動量守恆

移動與轉動之簡單對應：

力：動量的變化率 —— 不受外力之情形：動量守恆

力矩：角動量的變化率 —— 無外力矩之情形：角動量守恆

## Angular Momentum (角動量)

### 單一質量固定之質點

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times\frac{d}{dt}(\vec{p})$$

直接表示為物理量對時間的微分，因最終對時間全微分感性趣

$$= \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}}\times\overset{m\vec{v}}{(\vec{p})} + \vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}\times(\vec{p})}_{=0}$$

$$= \frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p})$$

$$\frac{\delta(ab)}{\delta t} = \frac{1}{\delta t}[(a+\delta a)(b+\delta b)-ab]$$

$$= \frac{1}{\delta t}[a\delta b + b\delta a]$$

$$= a\frac{\delta b}{\delta t} + b\frac{\delta a}{\delta t}$$

向量問題皆可用 summation convention 暴力處理

定義角動量 $\vec{\ell} = \vec{r}\times\vec{p}$，則力矩 $\vec{\tau}$ 為角動量對時間的全微分，即角動量的改變率

### N個質量固定質點

$$\vec{\tau}_1 = \frac{d}{dt}(\vec{r}_1\times\vec{p}_1) = \frac{d\vec{\ell}_1}{dt}$$

$$\vec{\tau}_2 = \frac{d}{dt}(\vec{r}_2\times\vec{p}_2) = \frac{d\vec{\ell}_2}{dt}$$

$$\vdots$$

$$+\quad \vec{\tau}_N = \frac{d}{dt}(\vec{r}_N\times\vec{p}_N) = \frac{d\vec{\ell}_N}{dt}$$

$$\underbrace{\vec{\tau}_{net} = \frac{d}{dt}(\vec{\ell}_1+\vec{\ell}_2+\cdots+\vec{\ell}_N)}_{\text{淨總力矩等於總角動量改變率}} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{\ell}_i\right) \equiv \frac{d}{dt}\vec{L}$$

### 繞特定轉軸旋轉之剛体

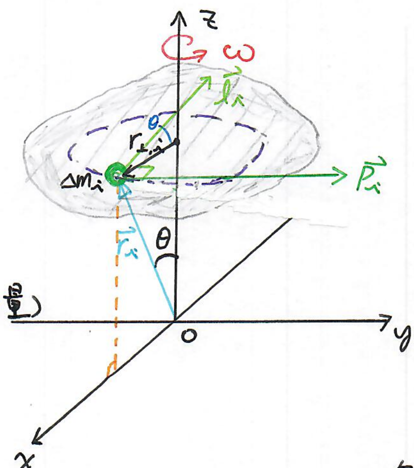
在剛体不轉動之座標系，組成剛体之質點之相對位移不隨時間改變

計算剛体相對於轉軸上一特定點 O 沿轉軸的角動量，先看其中一塊質量 $\Delta m_i$

為方便計算，選擇座標軸，使得 $\vec{r}_i$ 位於 x-z 平面之內，點 O 位於座標原点，並且轉軸與 z-軸重合 (此時即考慮角動量沿 z-軸分量)

→ 由於 $\Delta m_i$ 如圖中沿紫色虛線繞 z-軸轉動，$\Delta m_i$ 之速度垂直於半徑 $\vec{r}_{\perp,i}$ 方向，故其動量垂直於 x-z 平面

$\vec{r}_{\perp,i}$ 向量亦在 x-z 平面中



呂洁宇

# General Physics (I) Angular Momentum and Conservation of It

## 角動量及角動量守恆.

$\vec{l_i} = \vec{r_i} \times \vec{p_i}$

$\vec{l_i}$ 的大小 $|\vec{l_i}| = |\vec{r_i}||\vec{p_i}| \overbrace{\sin\frac{\pi}{2}}^{1.0} = r_i \Delta m_i \overbrace{v_i}^{\text{圓切線方向速率}}$

$\vec{l_i}$ 向量亦在 $x$-$z$ 平面之內, $\vec{l_i}$ 垂直 $\vec{r_i}$, 其沿 $z$-軸分量

$$l_{iz} = |\vec{l_i}|\sin\theta = (r_i \sin\theta)(\Delta m_i v_i)$$
$$= r_{\perp i} \Delta m_i v_i$$
$$= r_{\perp i} \Delta m_i (r_{\perp i}\, \omega)$$
$$= \omega(\Delta m_i r_{\perp i}^2)$$

對於整個剛体, 沿 $z$ 軸之角動量

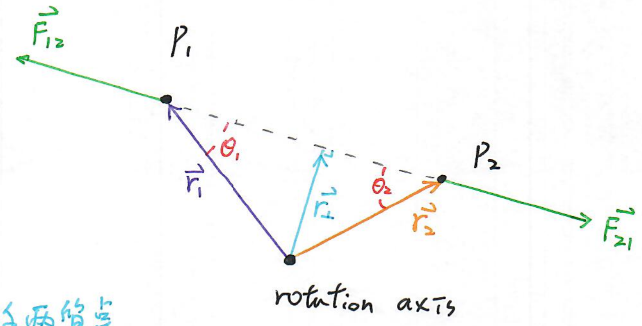
$$L_z = \sum_i l_{iz} = \omega\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{m} \Delta m\, r_{\perp i}^2}_{\text{剛体沿轉軸(即z-軸)之轉動慣量 I}}\Big) = \omega I$$

## Conservation of Angular Momentum (角動量守恆)

質點 $P_1$ 受力矩: $|\vec{r_1} \times \vec{F_{12}}| = |\vec{r_1}||\vec{F_{12}}| \sin\theta_1 = |\vec{r_\perp}||\vec{F_{12}}|$

質點 $P_2$ 受力矩: $|\vec{r_2} \times \vec{F_{21}}| = |\vec{r_\perp}||\vec{F_{21}}|$

Newton's 3rd law: $|\vec{F_{12}}| = |\vec{F_{21}}|$




故質點 $P_1$ 與 $P_2$ 所受力矩大小相等而方向相反

合力矩為零

↓

可簡單推廣為結論: 一多質點系統中的任兩質點

之交互作用力為系統帶來的合力矩為 0

↓

若無外力矩, 則系統所受合力矩為零, 總角動量不隨時間改變