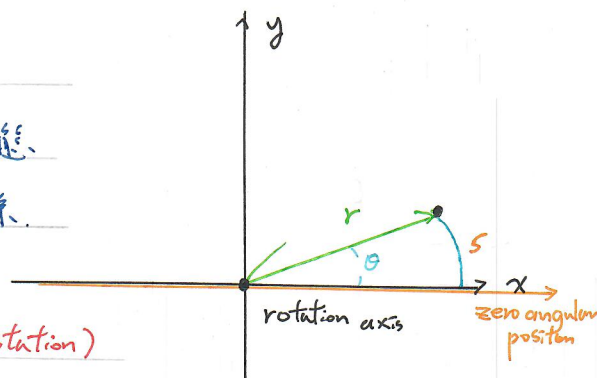


General Physics (I) Rotation

類似了解一維加速度運動的策略，先建構描述系統的方式（座標）然後看外力與系統狀態隨時間的改變率，及其隨時間之改變率的關係。



質點若繞某特定轉軸 (rotation axis, or axis of rotation)

在垂直轉軸的平面可定義“角度位置零點” (zero angular position)

為平面上之一特定方向。則質點之“角位置” (angular position) θ

為由 rotation axis 連到質點之向量與 zero angular position 方向間的角度差。

轉動 (rotation) 為運動中，不使質點與轉軸之距離改變，而使 θ 改變之過程。在純粹的轉動運動中，質點經過之弧長 $s = r\theta$

角位移 angular displacement: $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$

角速度 (率) angular velocity: $\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$ (單位時間角位移改變量)

角加速度 angular acceleration: $\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$ (單位時間角速度改變量)

一般習慣定義逆時針轉動之 $\Delta\theta$ 為正

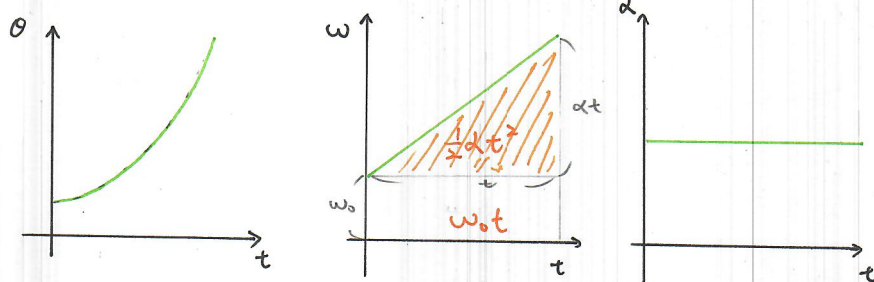
在三維空間中 $\vec{\omega}$ 與 $\vec{\alpha}$ 以向量表示，其方向為轉軸方向

亦可以用右手定則判斷該如何定義 $\vec{\omega}$ 及 $\vec{\alpha}$ 之方向 (見課本 §10-1)

等角加速度運動 (constant angular acceleration)

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \end{cases}$$

推導與等加速度運動完全相同



角變數與線變數之關係 (relating the linear and angular variable)

左右對時間微分 $s = r\theta$ (弧長等於半徑乘以角度差；若 $\theta = 2\pi$ ，則弧長 s 等於圓周長。注意此處 θ 為 radian measure。若 θ 為圓周率之一半，即 π ，則 s 為半圓周長)

左右對時間微分 $v = r\omega$ (想像 $\Delta\theta \rightarrow 0$ 之情形，弧長即等於徑過之直線距離，例如人在地球表面行走)

$a_t = r\alpha$ (a_t 為切向加速度, tangential component of acceleration)

$a_r = v^2/r = r\omega^2$ (徑方向加速度之推導在第一週講義 page 15)

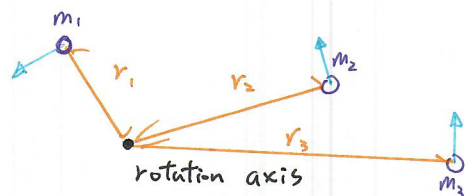
General Physics (I) Rotation

Moment of inertia (or rotational inertia) 轉動慣量 and kinetic energy of rotation

若有多個質點繞著某個轉軸轉動且它們的角速度相同

離轉軸距離不變，切方向速率為 $v = r\omega$ 之運動

$$\begin{aligned}
 \text{動能 } K &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \\
 &= \sum_i \frac{1}{2} m_i (r_i \omega)^2 \\
 &= \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \right) \omega^2
 \end{aligned}$$

定義這項為 moment of inertia (或稱 rotational inertia), 符號用 I

慣性. 對於某種運動的慣性愈大, 愈難做該種運動

推廣為連續體情形

$$I = \int r^2 dm$$

意義: 把無窮多塊無窮小質量 dm 與它們到轉軸距離乘積加起來依此定義, 重新表示轉動動能為: $K = \frac{1}{2} I \omega^2$

注意, 一物體之轉動慣量大小與轉軸之選擇有關

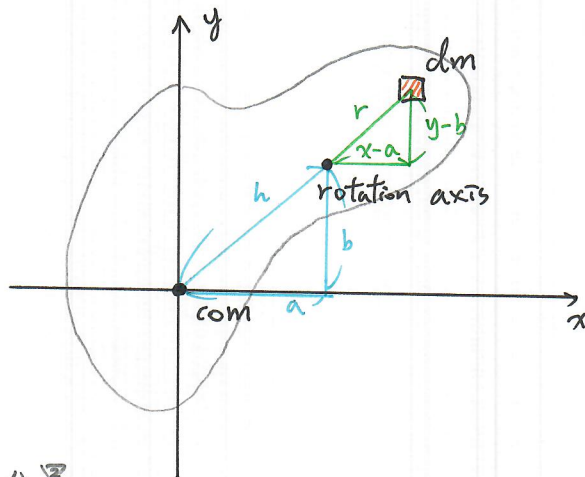
Parallel-Axis Theorem: $I = I_{\text{com}} + Mh^2$

物體繞任意轉軸轉動時, 轉動慣量 $\left\{ \begin{array}{l} I_{\text{com}}: \text{以質心為轉軸所定義之轉動慣量} \\ M: \text{物體總質量} \\ h: \text{質心到轉軸之距離} \end{array} \right.$

為物體繞穿過質心, 平行此任意轉軸之轉軸之轉動慣量 I_{com} , 加上視物體之質量為 M 之質心繞此任意轉軸之轉動慣量

Proof: 先令質心為座標原點

$$\begin{aligned}
 I &= \int r^2 dm = \int [(x-a)^2 + (y-b)^2] dm \\
 &= \underbrace{\int (x^2 + y^2) dm}_{I_{\text{com}}} - \underbrace{2a \int x dm}_0 - \underbrace{2b \int y dm}_0 + \underbrace{\int (a^2 + b^2) dm}_{Mh^2}
 \end{aligned}$$

此計算結果即為物體在 x 方向之質心位置因選擇座標原點為質心位置, 故此計算結果為 0 (y 方向同理)

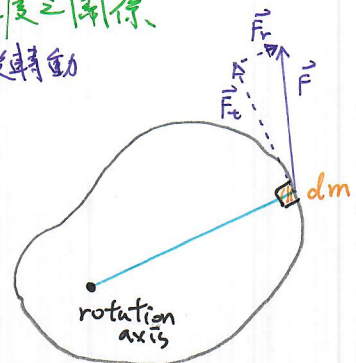
General Physics (I) Rotation

Torque (力矩) 探討外力與角加速度之關係

探討外力與切方向加速度之關係

\vec{F}_r : 外力沿徑方向之分量, 不改變轉動
 \vec{F}_t : 外力沿切方向之分量

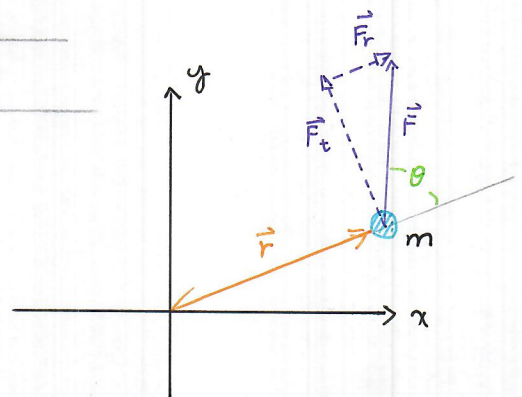
具體問題: 具有特定「大小」、「方向」、「作用點」之
 外力如何影響物體繞特定轉軸
 之轉動?



處理物理問題之思路: 化繁為簡.

連續體太複雜就先看離散質點之問題

多個離散質點太複雜就先看一質點

要看什麼? 角加速度 α

$$\alpha = \frac{a_t}{r} = \frac{F_t/m}{r}$$

$$\Rightarrow F_t = mr\alpha$$

以向量表示, α 為穿出紙面之向量, mr 為純量故 \vec{F}_t 亦為穿出紙面之向量, 其大小為 $|\vec{F}| \sin \theta$ 怎麼得到此向量? $\vec{F}_t = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \times \vec{F}$ 徑向方向向量
角加速

$$\text{等式左右同乘 } |\vec{r}| \Rightarrow \vec{r} \times \vec{F} = mr^2 \alpha$$

 τ : torque
力矩I: 質點對於選定轉軸之
轉動慣量

力矩與施力大小及力臂長度皆成正比

多個這種式子之
簡單相加

若有多個離散質點且它們繞轉軸之角速度永遠相同 (e.g. 剛體)

rigid body

$$\sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = (\sum m_i r_i^2) \alpha$$

總力矩等於總轉動慣量乘以角加速度

此結論可簡單推廣到連續體

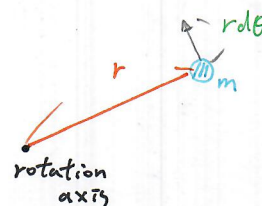
General Physics (I) Rotation

Work and rotational kinetic energy (功與轉動動能)

看外力作功如何影響系統的轉動動能

先看最簡化情形，系統為一質點繞固定轉軸轉動

受外力加速運動，經過無窮小位移後系統（即質點）之動能改變量。



$$\text{由 } \Delta K = K_f - K_i$$

$$= \frac{1}{2} m (v_i + \delta v)^2 - \frac{1}{2} m (v_i)^2 \text{ 出發推導可得}$$

$$dK = F dx = F r d\theta = \tau d\theta$$

$$\Rightarrow \Delta K = \int \tau d\theta \quad (\text{類比於 } \Delta K = \int F dx) \quad \text{轉動動能增加量等於力矩對角度積分}$$

$$\text{功率} = \frac{dK}{dt} = F r \frac{d\theta}{dt} = \tau \omega \quad (\text{類比於 } P = Fv)$$

外力在單位時間所做的功

power

可簡單推廣到多個質點

或連續剛體之情形，手法同 page 3 底部之推導

$$\Rightarrow \frac{1}{2} I \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \omega_i^2 = \int \tau d\theta$$