呂浩宇

General Physics (I) Potential Energy and Conservation of Energy

觀察：物體可做等速及加速度運動。為什麼有加速度？

假說(定律)：由觀測及實驗歸納得到，物體有加速度時，必然有受到外界的施力，且合力不等於 0

問題：什麼是力？為什麼會有力？

討論、推論：假設物理原理有方向上的對稱性，問，施力的過程中，物體的什麼基本性質被改變了？

考慮最簡單情形：物體為一無窮小質點，受力前與受力後具有性質：(1) 質量 m (2) 速度 $\vec{v}$

不考慮狹義相對論效應的話，受力前後質量不改變。考慮方向對稱性，則被改變之根本性質須由純量 m 及 $\vec{v}\cdot\vec{v}$ 建構。

最直覺之建構方式為一正比於 $m\vec{v}\cdot\vec{v}$ 之物理量，即由 $\vec{v}\cdot\vec{v}$ 之最低次方項開始考慮。依此建構方式，若有兩同樣質量為 m 之物體受同樣施力過程，則此根本物理量之總改變量等於單一物體此物理量之改變量，符合直覺。

(試想，以 $m+\vec{v}\cdot\vec{v}$ 等形式建構基本純量性質則不符合此直覺)

猜想：質點具有純量物理性質 $\frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}m|\vec{v}|^2$，稱為動能。

施力的過程可賦與或取走質點之此物理性質。

如何賦與？如何取走？

猜想系統可用別的形式儲存此物理性質。作正功時提取出而作為質點的動能之用；作負功時，將質點此物理性質取走後存入。

strategy：先看特例，再推廣為一般型式

呂浩宇

General Physics (I) Potential Energy and Conservation of Energy

Gravitational force (重力)

考慮接近地表之簡化情形，即令重力加速度為常數 $g = 9.8\ m/s^2$

僅考慮垂直地表之運動（向上定義為 $+y$ 方向）

若質點以初速度 v_i 由位置 y_i 出發到達 y_f

依等加速度運動公式：$v_f^2 = v_i^2 - 2g(y_f - y_i)$ —— (1)

(i) 當 $y_f > y_i$，$v_f^2 < v_i^2$，物體動能減小，能量 $2g(y_f - y_i)$ 以別的形式被儲存

(ii) 當 $y_f < y_i$，$v_f^2 > v_i^2$，物體動能增加，能量 $|2g(y_f - y_i)|$ 被提取，成為物體增加之動能

乘以 $\frac{1}{2}m$ 將 (1) 左右皆化為能量因次

$$\underbrace{\overbrace{\tfrac{1}{2}mv_f^2}^{\text{質點末動能}} + \underbrace{mgy_f}_{\text{系統末位能}}}_{\text{系統末總機械能}} = \underbrace{\overbrace{\tfrac{1}{2}mv_i^2}^{\text{質點初動能}} + \underbrace{mgy_i}_{\text{系統初位能 (potential energy)}}}_{\text{系統初總機械能}}$$

系統末總機械能 mechanical energy E_{mec}

$K_f + U_f = K_i + U_i$

總機械能不隨位移改變

在此問題中，能量可以重力位能之形式儲存，並以施力之方式，使得質點動能與系統重力位能互相轉換

且在此特定問題，位能僅為垂直方向位置之函數而非速度或速率之函數

令 $\Delta y = y_f - y_i$，看單位垂直方向位移之動能改變量

$$\frac{\frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2)}{y_f - y_i} = \frac{-mg(y_f - y_i)}{y_f - y_i} = -mg$$

觀察：在此特例問題中，垂直向下之重力 $-mg$ 等於單位位移中質點之動能改變量。

以微分形式表示：$\frac{dK}{dy} = -mg$

即 $\lim \Delta y \to 0$ 情形

$\Downarrow$

$$K = \int -mg\,dy + C$$

以重力對路徑積分得到位能改變量，位能改變量又等於動能改變量

C：積分常數，物理意義為在某特定參考位置之位能 reference point

呂浩宇

General Physics (I) Potential Energy and Conservation of Energy

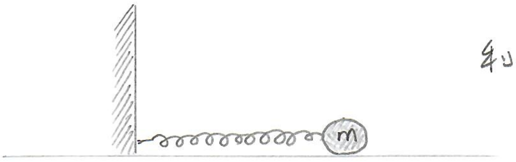
Spring force (彈簧力)

偏離 relax position 之位移量

考慮理想彈簧，彈力滿足 Hook's law：$\vec{F} = -k\Delta\vec{x}$

看簡化之一維問題，

非等加速度運動，看施力如何改變質量為 m 質點之動能？



利用已建構理論
- 加速度 a：單位時間內速度之改變量
- 牛頓定律：$F = \underline{-kx} = ma = m\frac{dv}{dt}$

此處簡單把 Δx 寫作 x 避免符號太多

$$\overbrace{\frac{1}{2}m(v+\delta v)^2}^{K_f} \underset{(\delta t \to 0)}{\sim} \frac{1}{2}mv^2 + m\delta v = \frac{1}{2}mv^2 + m\delta v\left(\frac{1}{\delta t}\delta t\right)v$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + m\frac{\delta v}{\delta t}(v\delta t)$$

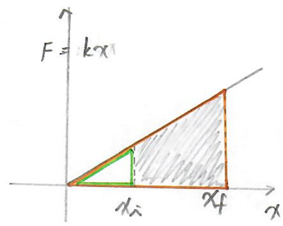
$$= \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{K_i} + \underbrace{ma\,\delta x}_{\text{施力乘以無窮小位移}}$$

$$\Rightarrow \underline{\delta K = K_f - K_i = ma\,\delta x}$$

在無窮小的位移過程中的(無窮小)動能改變量為施力乘以無窮小位移。

以微積分表示：$\frac{dK}{dx} = ma = -kx$

若不習慣此符號之意義就用差分來想像



$$K_f - K_i = \int_{x_i}^{x_f} dK = \int_{x_i}^{x_f} \frac{dK}{dx}dx = \int_{x_i}^{x_f} -kx\,dx$$

(兩三角形面積的差)

$$= -k\left(\frac{1}{2}x_f^2 - \frac{1}{2}x_i^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2}k\left(x_f^2 - x_i^2\right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\overbrace{K_f}^{\text{質點末動能}} + \underbrace{\frac{1}{2}kx_f^2}_{\text{系統末彈力位能}}}_{\text{系統末總機械能}} = K_i + \frac{1}{2}kx_i^2 \longrightarrow \underline{K_f + U_f = K_i + U_i}$$

1. 在此問題中，能量可以彈力位能之形式儲存。且彈力位能僅為位移而不為速度(率)之函數。
2. 總機械能不隨位移改變。

呂浩宇

General Physics (1) Potential Energy and Conservation of Energy

一維空間一般性理論

若作用力僅為位置之函數 ($F = F(x)$)，且 $f(x)$ 可表為函數 $U(x)$ 負對位置 x 的全微分 ($\frac{dU}{dx} = -F(x)$)，則

example : $-mg = \frac{d(-mgy)}{dy}$, and $-kx = \frac{d}{dx}(-\frac{1}{2}kx^2)$, 位能為 mgy 及 $\frac{1}{2}kx^2$

(1) 可定義系統之位能為 $U(x)$，即位能僅與系統之位置有關.

(2) 動能位能可互相轉換.

(3) 机械能守恆。動能為總机械能減位能

系統之末動能僅與系統之初動能及系統之初始位置及末位置有關而沒有對行動路徑之直接 dependence.

$$\Delta U = U_f - U_i = \underbrace{\int_{x_i}^{x_f} dU}_{\text{差分情形}:(U_2-U_1)+(U_3-U_2)+(U_4-U_3)+\cdots+(U_N-U_{N-1})=U_N-U_1} = \int_{x_i}^{x_f} \frac{dU}{dx}dx = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx$$

注意:若非保守力，即力無法表示為某僅有空間 dependence 函數之空間梯度，則力所做的功僅能以此積分表示，一般與行經的路徑有關 (無法定義僅與位置有關之位能)

依 page 3 : $$\Delta K = K_f - K_i = \underbrace{\int_{x_i}^{x_f} ma\,dx = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx}_{\text{Newton's second law}}$$

$$\Delta U + \Delta K = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx + \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx = 0$$

—— 位能的增加量總是等於動能的減少量。因此，動能及位能的總合，即總机械能，為守恆量.

此處推導可簡單推廣到 3+1 維時空 : $-\vec{\nabla}U = -\frac{\partial}{\partial x}U\hat{i} - \frac{\partial}{\partial y}U\hat{j} - \frac{\partial}{\partial z}U\hat{k} = \vec{F}(\vec{x})$

$K = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$, x, y, z 之分量各別之處理與上述推導無異

$\vec{F}(\vec{x})$: 表示向量力為三維空間座標 x, y, z 之函數，亦可寫作 $\vec{F}(x, y, z)$

由於上述之作用力形式使總机械能守恆 (conserve total mechanical energy)

稱此種作用力為 conservative force (保守力)

呂浩宇

General Physics (I) Potential Energy and Conservation of Energy

總體之一般性論述（假說 or 理論）

Potential Energy：當一個系統中的物質或物體有對互相的交互作用力，這個系統在特定的組態（configuration）下，帶有一種形式的能量，稱為位能（potential energy）

Configuration 一般意指空間分佈。

位能之空間梯度造成物體或物質受力，從而傾向轉變為最低總位能的 configuration

（例）如物體受重力加速度影響而下墜。

在古典物理的框架下，基本之交互作用力只有電磁力及重力。電力與重力皆為距離之平方反比定律，具保守力之形式，因而可用電位能及重力位能描述系統狀態，滿足總機械能守恆。

其它形式的力，如摩擦力或 drag force，為這些力作用在大量物體時之統計表現行為（如以熱能作為大量物體隨机運動之統計描述），亦滿足能量守恆。摩擦力作功 $\int F_k dx$ 將系統之机械能耗散為熱能 E_{th}，$\left|\int F_k dx\right| = \Delta E_{th}$
能量守恆之形式為 $E_{mec} + E_{th} = constant.$

有磁力之情形之能量守恆的論述較為複雜（磁力與帶電粒子之速度有關）在電動力學之課程才有完整論述。

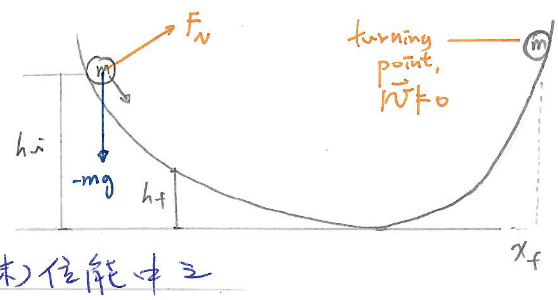
粗略而方便記憶之說法：為什麼可以因施力造成動能改變？

(1) 因為有（電及重力）位能

(2) 位能與動能可互相轉換

呂浩宇

Application (應用)



在僅需考慮保守力場的情形中，利用(1)位能僅與位置有關之特性，及(2)總機械能守恆，只要知道物體之初(末)動能及初(末)位能中之其中三個，就可以簡單算出剩下的一個，而迴避處理複雜之力、速度，及加速度之向量運算。

(一般而言，純量之運算總是比向量好處理。盡可能把向量問題化成等價之純量問題)

Example :

如圖中之系統，假設無摩擦力，則若知道球滑下斜坡時之初速度及高度 h_i，就可以簡單算出球滑到高度 h_f 時帶有的動能，進而得到球的速率。

或是若知道初始速度及高度，亦可簡單知道球到達折反點時($|\vec{v}|=0$，動能亦為 0 之遠端點)，球的高度 [若知道斜坡之軌跡則亦可得知在橫向走了多遠，而無需由速度計算橫向位移]

因保守力可寫為對位置函數之全微分，質点出發後沿封閉路徑回到原点，保守力做的總功為 0，與路徑無關

$$\int_{x_i}^{x_i} F(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_i} \frac{dU}{dx}\,dx = \underbrace{\int_{x_i}^{x_i} dU}_{} = 0$$

差分：$(U_2-U_1)+(U_3-U_2)+\cdots+(U_N-U_{N-1})=0$
if $U_N=U_1$

結論與中間看到的任何其它 U 值無關。

Generalize 功(work)的定義

不再侷限為對系統動能造成的改變，而為對系統總能量造成的改變。

(非保守力之例子：如與速度相關之 drag force 等。因物體在同一位置可能具有不同速度，與速度相關的力無法單純以空間函數的空間微分[仍為空間函數]表示