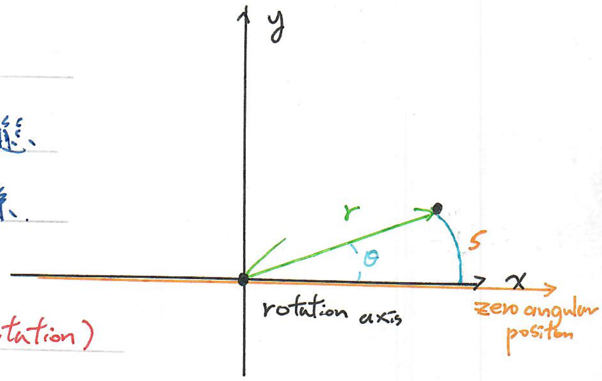
呂浩宇

General Physics (I)　Rotation

類似了解一維加速度運動的策略，先建構描述系統的方式（座標）然後看外力與系統狀態隨時間的改變率，及其隨時間之改變率的關係。



質點若繞某特定轉軸 (rotation axis, or axis of rotation)
在垂直轉軸的平面可定義"角度位置零點" (zero angular position) 為平面上之一特定方向。則質點之"角位置" (angular position) θ 為由 rotation axis 連到質點之向量與 zero angular position 方向間的角度差。
轉動 (rotation) 為運動中，不使質點與轉軸之距離改變，而使 θ 改變之過程。在純粹的轉動運動中，質點經過之弧長 $s = r\theta$

角位移 angular displacement: $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$

角速度(率) angular velocity: $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$ （單位時間角位移改變量）

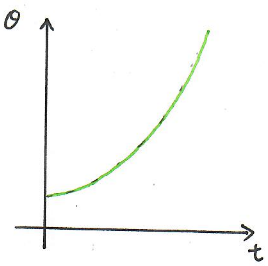
角加速度 angular acceleration: $\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$ （單位時間角速度改變量）

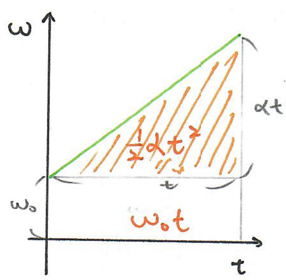
一般習慣定義逆時針轉動之 $\Delta\theta$ 為正
在三維空間中 $\vec{\omega}$ 與 $\vec{\alpha}$ 以向量表示，其方向為轉軸方向
亦可以右手定則判斷該如何定義 $\vec{\omega}$ 及 $\vec{\alpha}$ 之方向（見課本 §10-1）

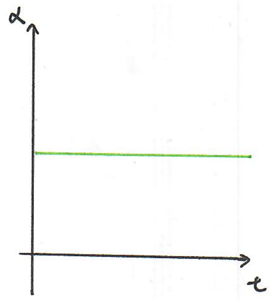
等角加速度運動 (constant angular acceleration)

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \end{cases}$$

推導與等加速度運動完全相同







角度數與線變數之關係 (relating the linear and angular variable)

左右對時間微分

$s = r\theta$（弧長等於半徑乘以角度差；若 $\theta = 2\pi$，則弧長 s 等於圓周長。注意此處 θ 為 radian measure. 若 θ 為圓周率之一半，即 π，則 s 為半圓周長）

$\overset{\frac{d}{dt}}{v} = r\overset{\frac{d}{dt}}{\omega}$（想像 $\Delta\theta \to 0$ 之情形，弧長即等於經過之直線距離，例如人在地球表面行走）

左右對時間微分

$a_t = r\alpha$（a_t 為切方向加速度, tangential component of acceleration）

$a_r = v^2/r = r\omega^2$（徑方向加速度之推導在第一週講義 page 15）

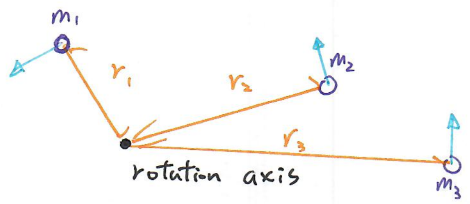
呂浩宇

General Physics (I) Rotation

Moment of inertia (or rotational inertia) 轉動慣量 and kinetic energy of rotation

若有多個質點繞著某個轉軸轉動且它們的角速度相同

離轉軸距離不變，切線方向速率為 $v = r\omega$ 之運動



$$\text{動能 } K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (r_i \omega)^2 = \left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2 \frac{1}{2}$$

定義這項為 moment of inertia (或稱 rotational inertia)，符號用 I

慣性，對於某種運動的慣性愈大，愈難做該種運動

推廣為連續體情形

$$I = \int r^2 \, dm$$

意義：把無窮多塊無窮小質量 dm 與它們到轉軸距離乘積加起來

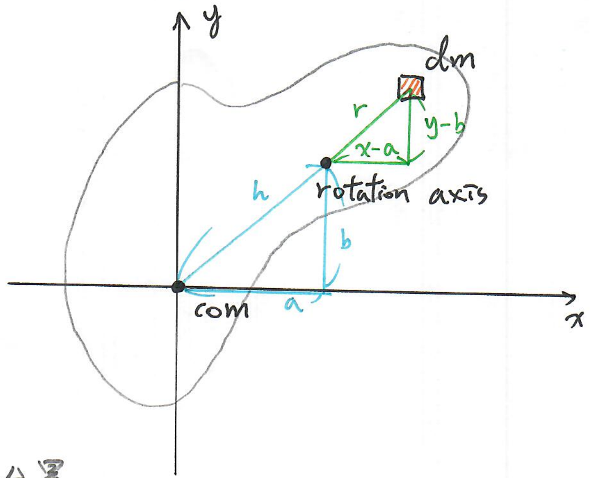
依此定義，重新表示轉動動能為：$K = \frac{1}{2} I \omega^2$

注意，一物體之轉動慣量大小與轉軸之選擇有關

Parallel-Axis Theorem : $I = I_{com} + Mh^2$

物體繞任意轉軸轉動時，轉動慣量為物體繞穿過質心，平行此任意轉軸之轉軸之轉動慣量 I_{com}，加上視物體為質量為 M 之質點繞此任意轉軸之轉動慣量

- I_{com}：以質心為轉軸所定義之轉慣量
- M：物體總質量
- h：質心到轉軸之距離



Proof：先令質心為座標原點

$$I = \int r^2 \, dm = \int [(x-a)^2 + (y-b)^2] \, dm$$

$$= \underbrace{\int (x^2+y^2)\,dm}_{I_{com}} \underbrace{- 2a\int x\,dm}_{0} \underbrace{- 2b\int y\,dm}_{0} + \underbrace{\int (a^2+b^2)\,dm}_{Mh^2}$$

此計算結果即為物體在 x 方向之質心位置

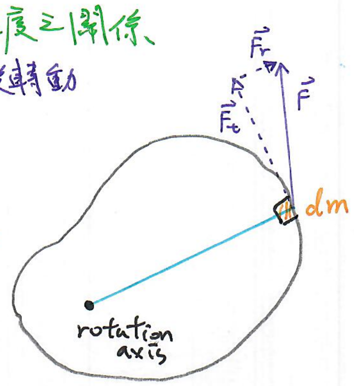
因選擇座標原點為質心位置，故此計算積分為 0 (y方向同理)

呂喆宇

General Physics (I) Rotation

Torque (力矩) 探討外力與角加速度之關係

探討外力與切方向加速度之關係、



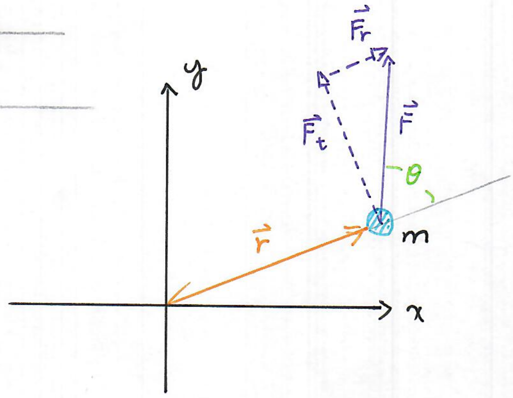
- $\vec{F_r}$：外力沿徑方向之分量，不改變轉動
- $\vec{F_t}$：外力沿切方向之分量。

具体問題：具有特定「大小」、「方向」、「作用點」之外力如何影響物体繞特定轉軸之轉動？

處理物理問題之思路：化繁為簡。

連續体太複雜就先看離散質点之問題

多個離散質点太複雜就先看一質点



要看什麼？角加速度 α

$$\alpha = \frac{a_t}{r} = \frac{F_t/m}{r}$$

$$\Longrightarrow F_t = m r \alpha$$

以向量表示，$\vec{\alpha}$ 為穿出紙面之向量，mr 為純量

故 $\vec{F_t}$ 亦為穿出紙面之向量，其大小為 $|\vec{F}|\sin\theta$

怎麼得到此向量？ $\vec{F_t} = \underbrace{\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}}_{\text{徑向方向向量}} \times \vec{F}$

兩式左右同乘 $|\vec{r}|$ $\Longrightarrow$ $\underbrace{\vec{r} \times \vec{F}}_{\tau\text{: torque 力矩}} = \underbrace{mr^2}_{I\text{: 質点對於選定轉軸之轉動慣量}} \overset{\text{角加速}}{\vec{\alpha}}$

力矩與施力大小及力臂長度皆成正比

多個這種式子之簡單相加

若有多個離散質点且它們繞轉軸之角速度永遠相同 (e.g. 剛体)
rigid body

$$\sum_i \vec{r_i} \times \vec{F_i} = \left(\sum_i m_i r_i^2\right) \vec{\alpha}$$

總力矩等於總轉動慣量乘以角加速度

此結論可簡單推廣到連續体

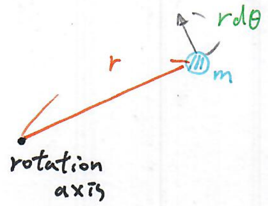
呂浩宇

General Physics (I) Rotation

Work and rotational kinetic energy (功與轉動動能)

看外力作功如何影響系統的轉動動能

先看最簡化情形, 系統為一質點繞選定轉軸轉動



受外力加速運動, 經過無窮小位移後系統(即質點)之動能改變量.

由 $\Delta K = K_f - K_i$

$$= \frac{1}{2}m(v_i + \delta v) - \frac{1}{2}m(v_i)^2$$ 出發推導可得

$$dK = F\,dx = F\,r\,d\theta = \tau\,d\theta$$

$$\Rightarrow \Delta K = \int \tau\,d\theta$$ (類比於 $\Delta K = \int F\,dx$) 轉動動能增加量等於力矩對角度積分

功率 $= \dfrac{dK}{dt} = F r \dfrac{d\theta}{dt} = \tau\omega$ (類比於 $P = Fv$) power

外力在單位時間所做的功

可簡單推廣到多個質點

或連續剛体之情形, 手法同 page 3 底部之推導

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2 = \int \tau\,d\theta$$