呂浩宇

General Physics (I) Waves

Types of Waves

1. Mechanical waves (机械波): 遵守牛頓運動定律, 需要介質傳遞。

Traveling wave 在空間中行進的波
- Transverse waves: 局部運動速度垂直波傳遞之方向.
- Longitudinal waves: 局部運動速度平行波傳遞之方向

2. Electromagnetic waves (電磁波): 遵守 Maxwell's equations, 不需介質傳遞。

3. Matter waves (物質波): 遵守量子力學原理, 描述物質出現之机率幅
(於普通物理二課程再詳細介紹)

wave form: 波形

What is wave: 在時空中變化的物理量, 其變化方式遵守波方程 (wave equation)

Example: 1. 如繩子上的 transverse wave, 為隨時間與空間變化的繩子偏離平衡位置的量。

2. 空氣中的聲波, 為空氣密度及壓力隨時間及空間的改變

3. 電磁波為隨時間及空間改變的電場及磁場強度。

Wave equation 的通解具有形式: $h(kx \pm \omega t)$, k, ω 皆為常數

h 可代表任意的函數形式, 視邊界條件可用不同的基底函數展開, 例如寫作 sine 及 cosine functions 的線性組合。

解亦可稱為波形 (wave form) $\begin{cases} h(kx-\omega t) \\ h(kx+\omega t) \end{cases}$ 代表向 $\begin{cases} \text{正} \\ \text{負} \end{cases}$ x-軸方向傳遞之行進波 (traveling wave)

用來判斷 speed of a traveling wave 之條件: $kx - \omega t = \text{constant}$

對時間微分 (即問經過時間 dt 後, 在距離 x 的位置 dx 為多大之處可以看到原來的波形?)

$$\Longrightarrow k\frac{dx}{dt} - \omega = 0$$

若為 sine/cosine wave, 可明確定義頻率 f 及波長 λ

$$\Longrightarrow \frac{dx}{dt} \equiv \underbrace{v}_{\text{speed of traveling wave}} = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{\frac{2\pi}{\lambda}} = f\lambda$$

波速等於波長乘以頻率

呂浩宇

General Physics (I) Waves

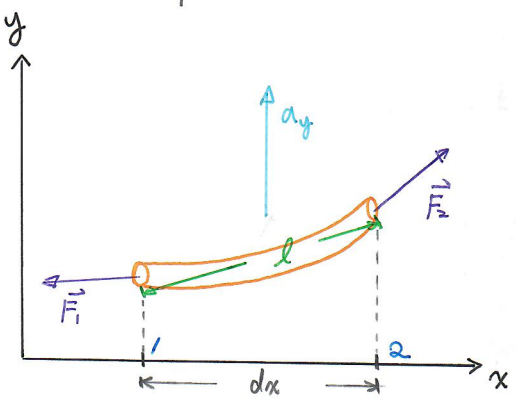
最常見之 wave equation 形式：$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

此處 x, t 為空間及時間座標，y 為隨時空變化而形成波之物理量.

量子力學中的 Schrödinger equation 亦為為 wave equation，有 $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi$，將在下學期介紹

Example: transverse wave on a rope (繩上之高低波)

(遵照課本推導方式)



基本假設：

1. 繩子隨處近乎保持水平(波為微擾)
2. 單位繩長之質量為 μ，即 $dm = \mu dx$
3. 繩張力為 τ
4. 繩子雖可拉伸，但幅度極小
5. 忽略重力

(i) 力的分解 ($\vec{F_1}, \vec{F_2}$ 平行於繩子之切方向，即可用斜率描述方向

(ii) 物理定律：$F = ma$，$\vec{F}_{1,2}$ 隨處大小皆為等大之張力

在 y 方向 $a_y \equiv \frac{dy^2}{dt^2}$，$dm = \mu dx$

令繩子在兩端點，即位置 1 與 2 處的斜率 $\frac{dy}{dx}$ 為 s_1 及 s_2

則繩子在 y 方向所受之總力可近似為

$$|\vec{F_2}|s_2 - |\vec{F_1}|s_1 = \tau s_2 - \tau s_1 = \tau(s_2 - s_1)$$

$$F = ma \Rightarrow \tau(s_2 - s_1) = \mu dx \frac{dy^2}{dt^2}$$

此項即斜率對空間的二次微分

$$\Rightarrow \frac{s_2 - s_1}{dx} = \frac{\mu}{\tau}\frac{dy^2}{dt^2} \Longrightarrow \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{\mu}{\tau}\frac{dy^2}{dt^2}$$

$$\Longrightarrow \text{波速 } v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$

1. 張力愈大，波速愈快
2. 單位長度之質量愈大，波速愈慢

注意在波的傳遞中，繩子作為繩波傳遞的介質，

並不在波的行進方向上移動。有移動的是波形而非介質。

呂浩宇

General Physics (I) Waves

Wave equation $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ 的解滿足 Principle of Superposition (疊加原理)

即若 $y_1(x,t)$ 與 $y_2(x,t)$ 皆為 wave equation 的解，則混成波

$y'(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$ 亦滿足 wave equation，為 wave equation 的解 (證明過程 trivial)

稱 $y'(x,t)$ 為 resultant wave (or net wave)

Principle of superposition 可推論，在運動方程須滿足上述 wave eq 的條件下

1. 描述在時空中交會的 traveling wave，僅須將它們簡單相加
2. 容許用特定的正交基底將任意 wave form $h(x,t)$ 做線性展開，

   如對 $h(x,t)$ 做 Fourier transform [即以 sine 或 cosine function 展開 $h(x,t)$]

   故了解 sine 或 cosine functions 形式的解通常有助了解任意形式 wave form 的行為

Sinusoidal wave functions：以 sine 函式為例，cosine 函式的情形類似

$$y(x,t) = \underbrace{y_m}_{\text{amplitude}} \sin(kx - \omega t + \underbrace{\phi}_{\text{phase constant}})$$

$$\begin{cases} k = \dfrac{2\pi}{\lambda} & \text{angular wave number (或簡稱 wave number)}, \ \lambda \text{: wave length} \\ \omega = 2\pi f = 2\pi \dfrac{1}{T} & f \text{: frequency}, \ T \text{: period}, \ \omega \text{: angular frequency} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial y^2}{\partial x^2} &= -y_m k^2 \sin(kx - \omega t + \phi) \\ \frac{\partial y^2}{\partial t^2} &= -y_m \omega^2 \sin(kx - \omega t + \phi) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{k^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

具有上述 wave equation 之形式

$$\Rightarrow v = \frac{\omega}{k}$$

(1) 對於空間中的任一特定位置 $x = x_0$，$y(x_0,t) = y_m \sin(-\omega t + (kx_0 + \phi))$

為振幅為 y_m，頻率為 f，phase constant 為 $(kx_0 + \phi)$ 的 simple harmonic motion.

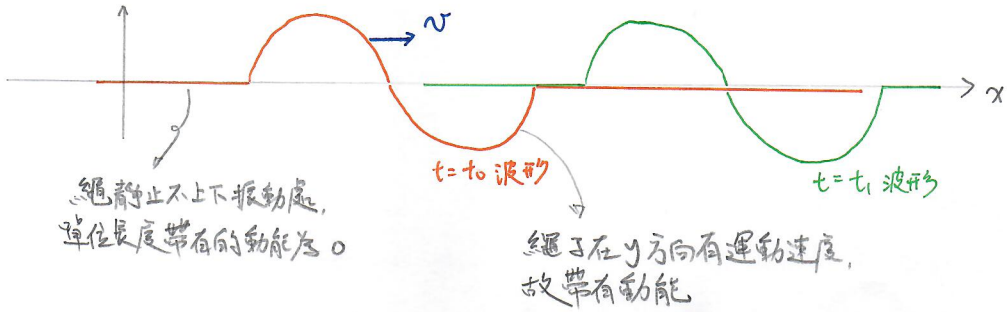
(2) 對於任意特定時間 $t = t_0$，每經過距離 $\Delta x = \lambda$，(即 $kx = \frac{2\pi}{\lambda}\lambda = 2\pi$)

則此正弦波的波形完整地重現一次。故稱 λ 為此正弦波之波長。

呂浩宇

General Physics (I) Waves

Energy transportation in string waves (繩波中的能量傳遞)



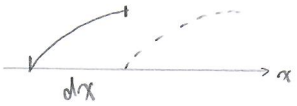
波形 $h(x-vt)$ 由左向右傳遞，故使得單位長度上帶有動能的位分由空間中左邊的位置移動到空間中右邊的位置。淨效果即為動能隨著波由空間的左邊傳遞到空間的右邊。

以正弦波為例：

若單位長度的質量為 μ，即 $dm = \mu dx$，則 sine wave 傳遞的動能可利用以下估計

小段繩子上的動能

$$dK = \frac{1}{2} dm \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}(\mu\, dx)\underbrace{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}_{y\text{ 方向速度平方}}$$



if $y = y_m \sin(kx - \omega t)$

then $dK = \frac{1}{2}(\mu dx)\,\omega^2 y_m^2 \cos^2(kx-\omega t)$

因波速為 v，在經過時間 $dt = \frac{v}{dx}$ 後，這小段繩子原本帶有的能量可以完全傳遞到它的右邊（即正 x 方向）

故單位時間傳遞之能量可表為 $\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2}\mu \frac{dx}{dt}\omega^2 y_m^2 \cos^2(kx-\omega t)$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\mu v \omega^2 y_m^2 \cos^2(kx-\omega t)}$$

動能通量隨時間空間變化。

工程及物理上比較實用的問題為：經過無窮多週期後，平均單位時間通過的動能為多少，i.e.

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dK}{dt}dt}{\int_{-\infty}^{\infty}dt} = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 y_m^2 \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\cos^2(kx-\omega t)dt}{\int_{-\infty}^{\infty}dt} = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 y_m^2 \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}(\cos 2(kx-\omega t)+1)dt}{\int_{-\infty}^{\infty}dt}$$

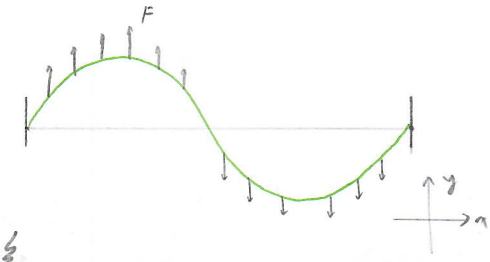
$$= \frac{1}{2}\mu v\omega^2 y_m^2 \lim_{T\to\infty}\frac{2\cdot\frac{1}{2}T}{2T}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4}\mu v\omega^2 y_m^2}$$

因次為功率 (power)

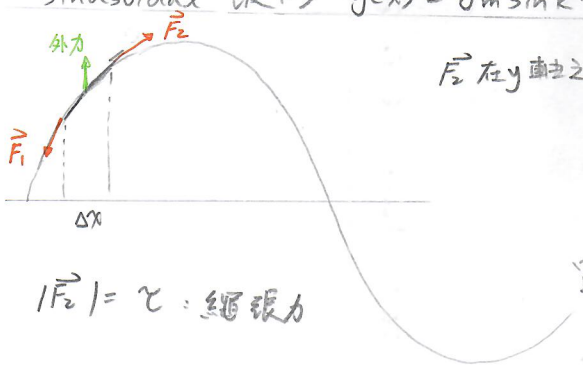
呂浩宇

General Physics (I) Waves



綳緊的繩索需以一定的力拉，才可以維持具有一定functional form的靜止狀態。鬆手後則繩子彈回，局部具有y方向速度。故鬆手後為位能轉換為動能的過程，滿足能量守恒。故知繩子在有張力時，若 $y(x)$ 不隨處為0，則帶有一定的位能。在鬆手後位能亦可由產生的繩波傳遞。

sinusoidal 波形 $y(x) = y_m \sin kx$ 具有的位能（參考 page 2 對張力之計算）



$|\vec{F_2}| = \tau$：繩張力

$\vec{F_2}$ 在y軸之分量大小：$F_2^y = |\vec{F_2^y}| = \tau \left.\frac{dy}{dx}\right|_2$

$F_1^y = |\vec{F_1^y}| = \tau \left.\frac{dy}{dx}\right|_1$

單位長度之外力：$\frac{-(F_2 - F_1)}{\Delta x} = \tau \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \tau \frac{d^2y}{dx^2}$

$= \tau k^2 y$

若要將振幅由 $y=0$ 拉到 $y = y_m \sin kx$，局部單位長度由外力輸入的功為

$$\int_0^{y_m} (\tau k^2 y)\, y \sin kx \, dy = \int_0^{y_m} \tau k^2 y^2 \sin^2 kx \, dy = \frac{1}{2}\tau k^2 y^2 \Big|_0^{y_m} \sin^2 kx$$

$$= \frac{1}{2}\tau k^2 y_m^2 \sin^2 kx$$

若為傳遞中的波，則有 $k = \frac{\omega}{v}$（page 3）及 $v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$（page 2）

單位長度的位能 $\frac{1}{2}\tau k^2 y_m^2 \sin^2 kx$

$= \frac{1}{2}\tau \frac{\omega^2}{v^2} y_m^2 \sin^2 kx$

$= \frac{1}{2}\tau \omega^2 \frac{\mu}{\tau} y_m^2 \sin^2 kx$

$= \frac{1}{2}\mu \omega^2 y_m^2 \sin^2 kx$

對無窮多個波形平均後為 $\frac{1}{4}\mu\omega^2 y_m^2$

故單位時間傳遞的位能為 $\frac{1}{4}\mu\omega^2 \Delta x\, y_m^2 / \Delta t = \frac{1}{4}\mu v \omega^2 y_m^2$

與傳遞的動能相等，符合物理直覺

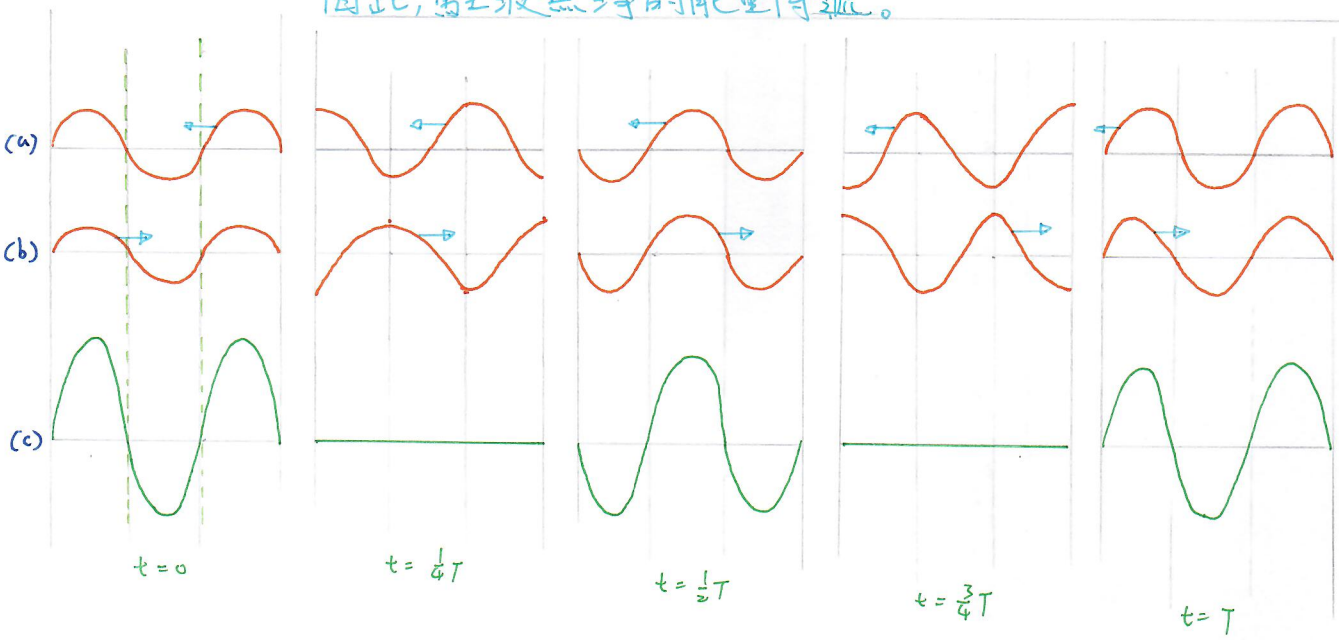
行進波的功率為單位時間傳遞動能與位能之和：$P_{avg} = \frac{1}{2}\mu v \omega^2 y_m^2$

呂浩宇

General Physics (I) Waves

Standing waves (駐波)

本身不為行進波 (traveling wave)，即無法表示為 $h(x-vt)$ 之形式，但可視為兩振幅相同，方向向反之行進波的疊加。因此，駐波無淨的能量傳遞。



(課本 Fig 16-17)

兩 amplitude 相同，方向相反的 sine wave 疊加

$$y_1(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t)$$

$$y_2(x,t) = y_m \sin(kx + \omega t)$$

$$\Rightarrow y' = y_1 + y_2$$

$$= \underline{2 y_m \sin(kx) \cos(\omega t)}$$

Using trigonometric identity $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

繩上隨處皆為簡諧運動，振幅與位置有關，為 $2y_m \sin(kx)$ 的絕對值

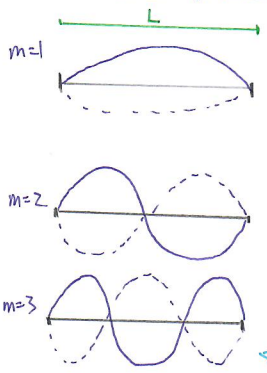
nodes：駐波上振幅為 0 處，滿足 $kx = n\pi$，$n = 0, 1, 2, \cdots$

antinodes：駐波上振幅最大處，滿足 $kx = (n+\frac{1}{2})\pi$，$n = 0, 1, 2, \cdots$

形成駐波之條件：$\lambda = \frac{2L}{m}$，$m = 1, 2, 3, \cdots$ (即 L 為 $\frac{\lambda}{2}$ 的整數倍)

$$\Rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = m\frac{v}{2L}$$

m 稱為 harmonic number



$m=1$，稱 fundamental mode 或 first harmonic

$m=2$：second harmonic

$m=3$：third harmonic

harmonic series：collection of all possible harmonic number.

The pattern consist m loops

呂浩宇

General Physics (I) Waves

Intensity I (長時間平均下來，單位時間，單位面積接收到的能量)

注意不同研究領域對 intensity 之定義小有不同，最好闡明所選定義

$$I \equiv \frac{\overline{P}}{A}$$

經過長時間平均後，單位時間收到或發出的能量，即功率

考量机械波在二維或三維介質中傳遞，或電磁波在三維空間中傳遞（即 3+1 維時空）

$$I \propto \underbrace{v}_{\text{波速}} \overbrace{s_m^2}^{\text{振幅平方}}$$

(Intensity 正比於波速乘以振幅平方)

空間中的能量密度，即單位體積中在瞬時所帶有的能量，總是正比於振幅平方。假設空間中長時間平均下來，單位體積中帶有的能量為 Cs_m^2，C 為比係數，若波往正 x-軸方向以速率 v 傳遞，則單位時間通過垂直 x-軸的表面積 A 的能量，為波前 (wave front) 所掃過的空間體積中所帶有之總能量，即 $\underbrace{(Av)(Cs_m^2)}_{\text{體積乘以能量密度}}$

wave front (波前)：行進波中 $\overbrace{\text{相位}}^{kx-\omega t+\phi}$ 相同的點連成的曲線或二維平面

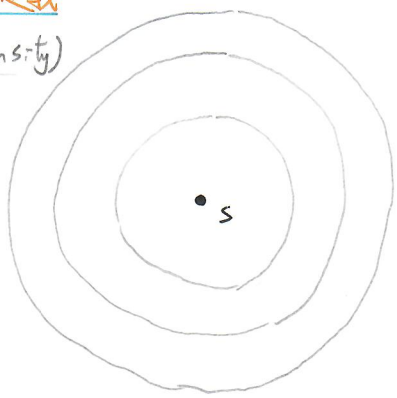
Isotropic point source (均向之點波源)：$I = \dfrac{P_s}{4\pi r^2}$

距波源愈遠，單位面積接收到的能量愈小，符合能量守恒

The Decibel Scale (分貝) 工程領域極常用之定義

用來描述任意兩 scaler 物理量之比例 (如 intensity)

$$\beta \equiv (10\ \underbrace{dB}_{\text{decibel (分貝) 之縮寫}}) \log \frac{I}{I_0}$$



Example：

(1) 若 $I = I_0$，$\beta = 0$，稱 I 比 I_0 強 0 分貝

(2) 若 $I = 10^4 I_0$，$\beta = 40\ dB$，稱 I 比 I_0 強 40 分貝

強度每乘以 10 倍，分貝數加 10

呂浩宇

General Physics (I) Waves

注意：僅適用於波源運動速度低於波速之情形

(non-relativistic) Doppler effect (非相對論性的都卜勒效應) → 不適用電磁波

(普物課程僅看一維相對運動，即波源與探測器皆只在它們連線方向上運動的特例。)

參考座標系 (reference frame) 之選擇：
選定在無波動時，介質為靜止之座標系為 reference frame。位置及速度皆為在此參考座標系之中的測量值。

$$f' = f\,\frac{v \pm v_D}{v \pm v_s}$$

f：波源發出之波的頻率

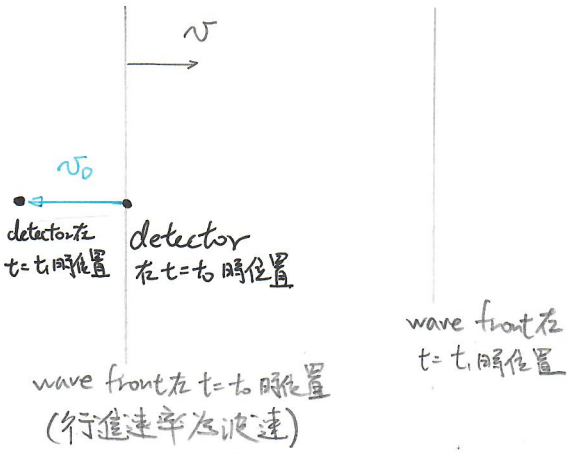
f'：探測器接收到的波的頻率

v_D：探測器在參考座標系中的速度

v_s：波源在參考座標系中的速度

(i) $v_s = 0$, $v_D \neq 0$ 之特例

波源活動穩定，討論探測器觸及某特定相位波前之頻率



計算 detector 與波前在 $t=t_1$ 時之距離為幾個波長，即為 dector 在時間 t_0 到 t_1 之間所觸碰到同樣波前的數目

$$(\#\text{ of wave length}) = (v+v_D)(t_1-t_0)/\lambda$$

using $v = f\lambda$

$$= f\cdot\frac{v+v_D}{v}(t_1-t_0)$$

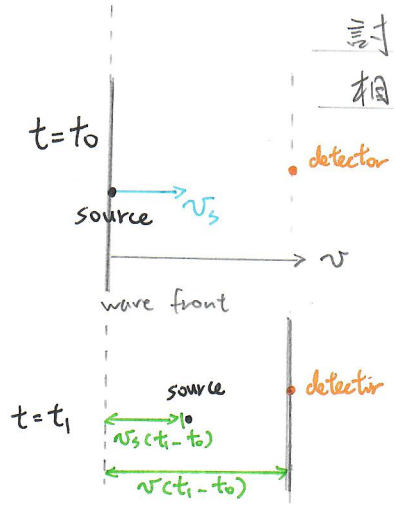
在時間 t_0 到 t_1 間，每單位時間探測器觸及的波前數即為探測器所感受到的頻率

$$f' = \frac{(\#\text{ of wave length})}{(t_1-t_0)} = f\,\frac{v+v_D}{v}$$

以上為相對運動速度方向相同之情形，速度方向相反情形可以此類推

(ii) $v_s \neq 0$, $v_D = 0$ 之特例

討論波源之運動如何影響前後不同時間所發出的相鄰兩波源的間距



假想波源在時間 $t=t_0$ 時發出一波前，速度為 v，在經歷一週期 $1/f$ 後發出第二個波前，速度亦為 v。此二波前的間距除以 v 即為探測器所感受到的週期

$$(\text{間距}) = v(t_1-t_0) - v_s(t_1-t_0)$$

呂浩宇

General Physics (I) Waves

探測器感受之週期：$\dfrac{(v-v_s)(t_1-t_0)}{v}$

by definition, $t_1 - t_0 = \dfrac{1}{f}$

$\Rightarrow$ 探測器感受之週期：$\dfrac{1}{f}\dfrac{v-v_s}{v}$ 其倒數為探測器感受之頻率

$f' = f\dfrac{v}{v-v_s}$

以上為 source 與波速度方向相同之情形。速度方向相反之情形可以此類推。

(iii) 一般情形 ($v_s \neq 0$, $v_D \neq 0$)

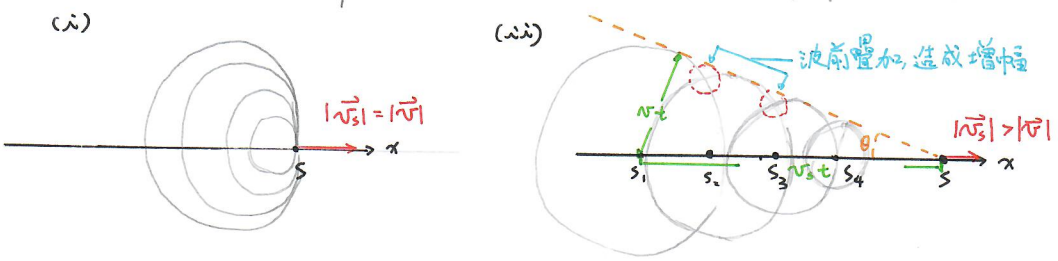
視 $v_s \neq 0$ 之波源為頻率為 $f\dfrac{v}{v-v_s}$ 之等效靜止(在參考座標系)波源。以特例 $v_s = 0$, $v_D \neq 0$ 情形之計算方式估計探測器觸及特定相位波前之頻率 f' 即為

$$f' = \left(f\frac{v}{v \pm v_s}\right)\left(\frac{v \pm v_D}{v}\right) = f\frac{v \pm v_D}{v \pm v_s}$$

※ 若探測器往波源方向移動，頻率變大，分子正負號取正，反之取負。若波源往探測器方向移動，頻率變大，分母正負號取正，反之則取負。

Supersonic speeds, shock waves

若波源運動速度超過波速，稱此運動速度為 supersonic (不僅用於形容聲波)



(i) 波源速度等於波速，則波前皆在波源位置疊加，形成 shock wave

(ii) 波源速度大於波速，則波前近似地在黃色虛線處疊加，形成 shock wave. 稱黃色虛線代表的二維平面為 Mach cone. 定義

$$\text{Mach number} = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{v}_s|} = \frac{|\vec{v}|t}{|\vec{v}_s|t} = \sin\theta$$

呂浩宇

General Physics (I) Waves

Beats (拍音)

兩頻率與振幅皆相近(如長度稍有不同之琴弦，或長度相同，但相對於空氣有不同且微小相對運動之兩琴弦)的波源產生之現象。其混成波頻率為兩波源頻率的平均，振幅隨時間作簡諧振盪。

$$s_1 = s_m \cos\omega_1 t, \qquad s_2 = s_m \cos\omega_2 t, \qquad \omega_1 \gtrsim \omega_2$$

trigonometric identity

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left[\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\right]\cos\left[\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]$$

$$s = s_1 + s_2 = s_m(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)$$

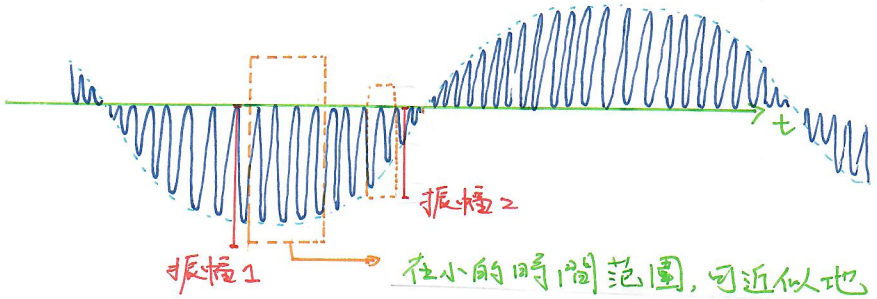
$$= 2 s_m \cos\left[\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)t\right]\cos\left[\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)t\right]$$

define $\begin{cases}\omega' = \frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\\ \omega = \frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)\end{cases}$

$$= [2 s_m \cos\omega' t]\cos\omega t$$

因 $\omega_1 \sim \omega_2$，ω' 為不大，$[2 s_m \cos\omega' t]$ 項的效果可看成隨頻率作簡諧震盪的振幅。$\cos\omega t$ 為以兩波源之平均頻率作振盪之高頻振動。

beat frequency: $f_{beat} = \frac{1}{2\pi}(\omega_1-\omega_2) = f_1 - f_2$



波形

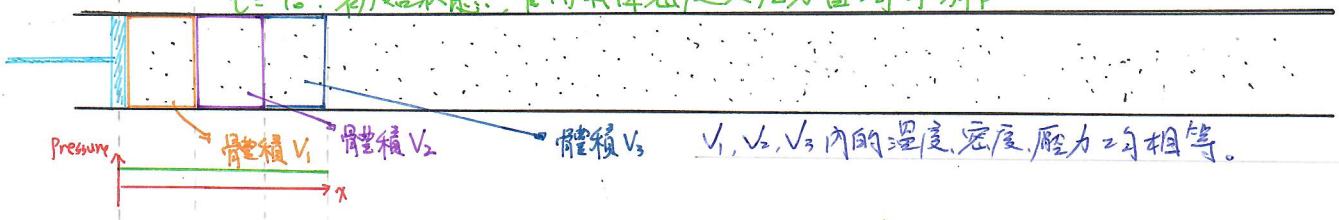
在小的時間範圍，可近似地看作振幅固定，頻率為 $\frac{1}{2}(f_1+f_2)$ 之振盪。在不時間尺度看則振幅隨時間改變。

呂浩宇

General Physics (I) Waves

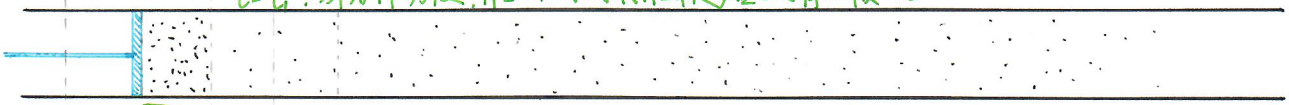
Qualitative description of sound waves (聲波形成原理之定性描述)

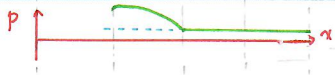
$t=t_0$. 初始狀態，管內氣体密度與压力皆均勻分佈



V_1, V_2, V_3 內的溫度、密度、壓力均相等。

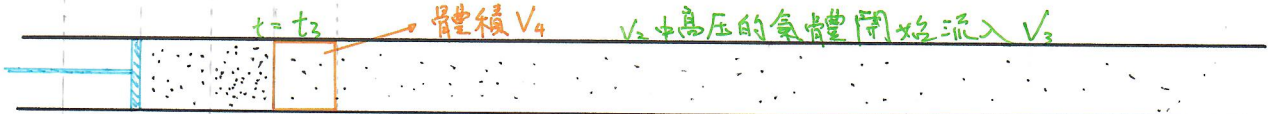
$t=t_1$. 外力作功後，體積 V_1 內的氣體被壓入體積 V_2

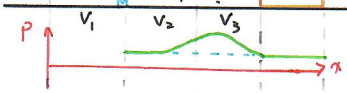




因 V_2 內压力高於 V_3 內压力，故氣体往 V_3 膨脹

$t=t_3$ 體積 V_4 V_2 中高压的氣體開始流入 V_3





V_3 中氣體密度及壓力升高，傾向往 V_2 及 V_4 膨脹

$t=t_4$ V_3 中氣體往左右膨脹，V_2 中氣體密度及壓力再度靠向初始值

(i) 因為慣性，V_2 中氣體繼續流入 V_3，使得 V_2 中的压力低於其初始压力

(ii) 依此類推，在活塞 (piston) 擠壓後，形成向正 x 方向傳遞的 impulse

(iii) 若活塞不斷以頻率 f 來回運動，則形成頻率為 f 的 sound wave

實際推導聲波的 wave equation 的過程為作下列三方程式的一階微擾理論

(i) 質量守恒 (equation of continuity)

(ii) 動量守恒 (Newton's law + transportation)

(iii) 能量守恒 或 $\underbrace{\text{equation of state}}_{\text{流體密度及压力間的關係}}$

因 (iii) 的部分在熱力學章節才會介紹，故此處不作 wave equation 之推導也不解 wave equation. 建議對定量描述有興趣者參考課本解說