呂浩宇

General Physics (I) Measurements, Vectors, and Motions

態度：（高中與大學之不同）

1. 教授（professor）與教師（teacher）不同。前者僅受過專業研究方面之訓練，後者則僅受過教學方面之訓練。
2. 大學理學院之課程之深度與廣度遠超高中課程，必須付出超過高中時期之用功程度，才可能學好。覺得課程太難是理所當然的，若無法接受這種難度，就回去讀高中。標準的普物教材已無法再更簡單。
3. 大學生必須培養自行由閱讀課本學會東西到有實作習題能力之程度。若依賴老師教才學東西而不自行閱讀課本，等同沒念過大學，僅有高中水平。
4. 分數的高低是相對的。你在國際人材市場的競爭力，重要性高於你覺得來上課開不開心。請大家一起維護中山大學這個品牌之起薪。
5. 未來，碩博士及博後皆畢，到成為助理教授，可閱讀課本的時間只會愈變愈少。想成為教授者，現在就必須學到可以開課教普物之水平。

總論： 普物（I）旨在熟悉如何量化地描述自然界中發生之現象，並歸納出有預測力，可供驗證之物理定律。學習時必須重視物理量之因次、單位，並練習作數量級估計。

本課程由對質點之運動的描述開始，推廣至介紹剛体、非剛性之連續体，最後到介紹如何統計地描述大量質點之性質，即氣体動力論及熱力學之部分。

熱力學對化學系之學生尤為重要，務必耐心修習。

※ 科学與科技界是結果論的世界，無論學習時感覺如何良好，覺得自己學得多會，只要碰到沒看過的相關問題時解不出來，粗心錯、忘記，結果皆全等於從未沒有學過。

※ 談話時，知道自己在說什麼，及碰到不知道的就查，是大家要共同努力的素養。

呂浩宇

General Physics (I) Measurements, Vectors, and Motions.

1. Measurements and Standards (測量及標準)

Use measurements to quantify phenomena → from the quantitative measurements, deduce governing rules.

Physical principles, that can be verified/falsified by more measurements.

→ Need to be
1. repeatable
2. able to be compared with each other, and with the theories.

測量須有可再現性，並可方便地互相比較及與理論預測做比較

單位：unit　公制單位：International System of Units, or SI Unit

→ 藉由製定單位之標準，做為重複的測量間互相比較，以及不同的測量互相比較時之參考依據。

所有的測量皆先與制定之標準做比較得到比較之倍數，再做這些倍數間的比較。
如，測量長度時，所有的長度都先和公尺原器比較，知道長度為公尺原器長度的幾倍

Example：

1. 相對性之測量，不使用單位

同學A長得比同學B高 → 測量具有可再現性，但難以與其它的測量比較，即它人很難真正了解兩個同學分別為多高。

如：難以回答兩位同學身高比猴子高或矮，即便已知猴子身長為120公分

2. 使用非標準之單位

同學A的身高為我的影子長度的多少倍 → 由於影子長度會隨時間變化，測量無再現性，亦無法與其它測量互相比較

3. 使用標準單位

同學A的身高為1.83公尺 → 測量有再現性，若知道猴子身長為幾公分，則可直接與猴子的身長相比

Physical Quantities (物理量) 具有因次 (說明為哪一種物理量)，並以特定的單位做測量基準

可分為基本物理量 (basic quantities) 及由基本物理量的組成之物理量

如速度由長度及時間兩個基本物理量組成

基本物理量之標準單位稱為基本標準 (basic standards)

基本物理量及其公制單位 (SI unit，又稱mks制)

meter/kilogram/second，相對應cgs制為cm/g/s

time	length	mass	electric current	thermodynamic temperature	amount of substance	(亮度) intensity
second	meter	kilogram	ampere	kelvin	mole	(燭光) candela

ampere：使兩相距1公尺之長直導線，產生每米 $2\cdot10^{-7}$ newton 之作用力之電流大小

mole：0.012公斤的純碳所含之碳原子數

candela：單位時間通過單位 solid angle 的能量

呂浩宇

General Physics (I) Measurements, Vectors, and Motions

standards were chosen in the way:
- (1) easy to reproduce (with less or no ambiguity)
- (2) easy to apply when making measurements.
- (3) allow to be measured with high precision.

如最初之長度標準為北極點到赤道距離的千萬分之一，不好應用

Length (長度標準)

(i) 1792: 10^{-7} time的distance from north pole to equator

好處: 隨時間的變化，以比例來說很小

壞處: 測量困難，應用起來麻煩

(ii) 1889: (platinum-iridium) standard meter bar 鉑銥合金國際公尺原器

好處: 高熔點(極低揮發性)，高硬度，抗化學腐蝕，方便用於比較測量.

壞處: 複製時的誤差與其它物理環境造成的變化限制精度

(iii) 1960: 1,650,763.73 times the wavelength of a specific ^{86}Kr (氪) transition.
[讀作 krypton-86]

依照現在對原子的了解，每個原子都是相同的，fundamentally不可區別。故只要觀測氪原子在特定能階躍遷時發出的光，任何人測到的波長應該都是相同的

但原子的熱運動限制應用時測量到波長之精度。

(iv) 1983: path length traveled by light over 1/299792458 seconds in vacuum.

光速為基本物理常數，在任意環境測量都有可再現性。

目前技術上可以極高的精度測量光速

發展方向: 再現時變化小，測量精度高之技術

Time (時間標準)

任何以穩定頻率運行的系統皆可作為測量時間的standards.

例如地球自/公轉週期、撥動吉它弦後弦的振盪頻率(共振之特徵頻率)，石英振盪器之特徵共振頻率，原子鐘(atomic clock)

What is this?
Do you know?

What is its principle?
Have you heard about this

呂浩宇

General Physics (I) Measurements, Vectors, and Motions

Significant Figures and Decimal Places 有效位數及小數點位數

Values	Decimal Places
1.1	1
1.12	2
1.1234	4
1.1234567	7

有效位數（對測量精度之表示）→ 目前重要性見仁見智，數位時代，有更完整的測量誤差之統計表示方式

（課堂討論，加減乘除，指數，對數之運算，應如何取有效位數）
check wiki

加減法：$\underbrace{1.23456}_{\text{有效2位}} + \underbrace{234.5678912}_{\text{有效6位}} = (\overbrace{1.2}^{\text{確定之測量}} + \overbrace{0.03456}^{\text{不確定之測量}}) + (\underbrace{234.5}_{\text{確定}} + \underbrace{0.067}_{\text{確定}}\underbrace{8912}_{\text{不確定}})$

$= \underbrace{235.7 + 0.1024512 = 235.8024512}$

判定計算結果，到小數點後一位皆為有效，更後面位數則不確定。結果有效位數共4位

歸納出規則：

先完成計算後四捨五入，最低的有效數字的位置，為加數與被加數中最低的有效數字中，高的那一個決定。如此例中，是以 1.23456 中的 2 的位置決定加法結果中有效數字最低可到哪位。

（擇一同學上台舉例說明乘法結果有效位數如何取）
學期成績 +2分

呂浩宇

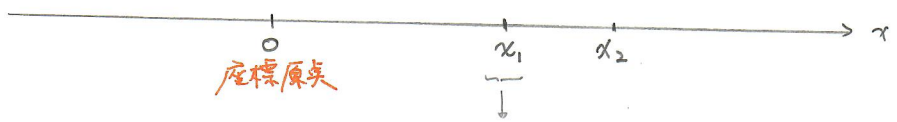
General Physics (I) Measurements, Vectors, and Motions

kinematics = 運動學: classifying and comparing motions.

II. Motion Along a Straight Line (直線運動)

建構座標系 → 定義速度, 加速度 → 介紹等速及等加速度運動之軌跡

定義其中一個方向為正方向, 另一個方向即為負方向



座標的值為該點到座標原點之距離之絕對值(長度因次)
前面以正負号表示該點在座標原點之右邊或左邊, 如紀作 $x_1 = +5m$

常用Δ表示物理量的改變量.

displacement $\Delta x \equiv x_2 - x_1$ (長度因次). 若 Δx 為正數, 則 x_2 在 x_1 的右邊, 反之 x_2 在 x_1 左邊

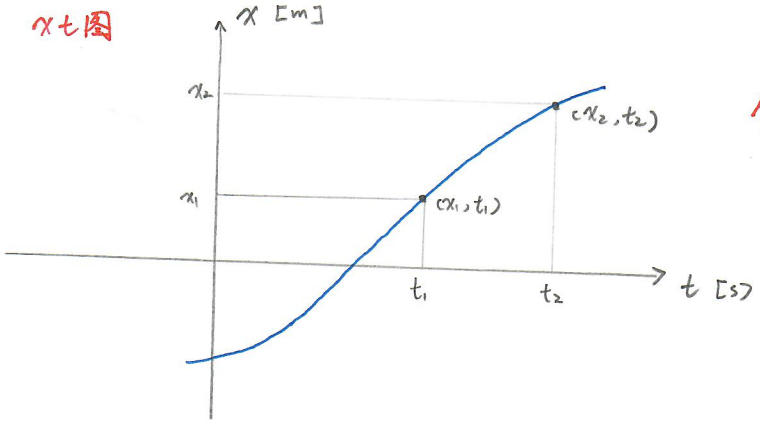
displacement 為向量, 具有方向, 為正時, 正號可省略

正負号 = sign
大小 = magnitude

Average Velocity and Average Speed 平均速度與速率

練習以口語敘述 equations:
速度為單位時間內位置的改變量, 即位置的改變率

xt 圖

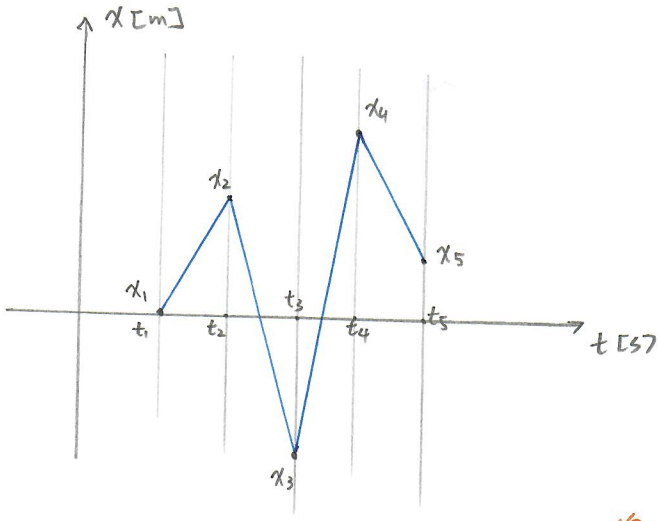


Average velocity $= v_{avg} \equiv \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$

平均速度為運動起始點與終點在 xt 圖上的斜率

speed 為 velocity 之絕對值

Average speed S_{avg}: 運動過程中速率之平均值, 亦可表示為行經的總距離除以經過之總時間



在 t_1 到 t_5 間的平均速率 S_{avg}:

假設 $t_5 - t_1 = \Delta t$

$t_5 - t_4 = t_4 - t_3 = t_3 - t_2 = t_2 - t_1 = \frac{1}{4}\Delta t$

$$S_{avg} = \underbrace{\frac{\frac{1}{4}|x_2 - x_1|}{t_2 - t_1} + \frac{\frac{1}{4}|x_3 - x_2|}{t_3 - t_2} + \frac{\frac{1}{4}|x_4 - x_3|}{t_4 - t_3} + \frac{\frac{1}{4}|x_5 - x_4|}{t_5 - t_4}}_{\text{速率之平均值}}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{1}{4}\Delta t}\left(|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + |x_4 - x_3| + |x_5 - x_4|\right)$$

總行經距離除以總經過時間

$$= \frac{(|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + |x_4 - x_3| + |x_5 - x_4|)}{\Delta t}$$

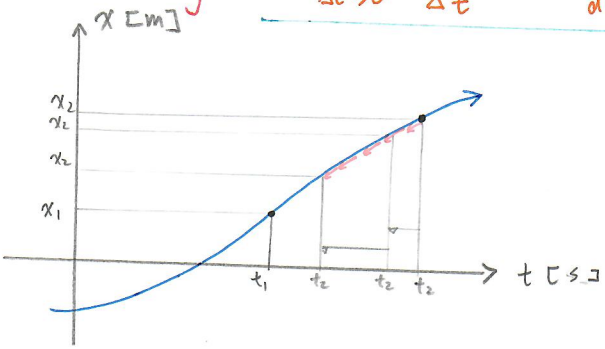
呂浩宇

General Physics (I) Measurements, Vectors, and Motions

Instantaneous Velocity and Speed 瞬時速度及速率

instantaneous velocity $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$ → 常用 d 表示趨近於無窮小的物理量改變量

瞬時速度為無窮小的時間間隔內之平均速度



運動軌跡：可表示為 $x(t)$，即位置 x 為時間 t 的函數。在此軌跡上取時間 t_1 及 t_2。固定 t_1，令 t_2 逐漸靠近 t_1，則在此例中，x_2 亦逐漸靠近 x_1。當 t_2 無窮靠近 t_1 所取的斜率 $\frac{x_2 - t_1}{t_2 - t_1}$ 即為在時間 t_1 之瞬時速度 v_1 → 即 $\lim_{\Delta t \to 0}$

$\lim_{t_2 \to t_1}$ 或 $\lim_{t_2 - t_1 \to 0}$ 之定義：對於任意正實數 ϵ，$|t_2 - t_1| < \epsilon$

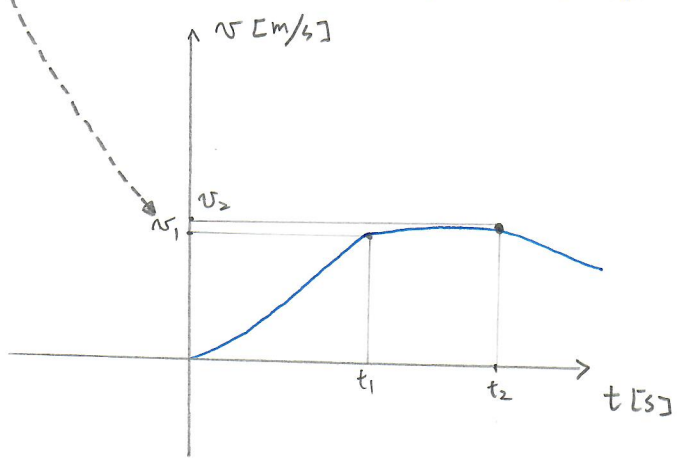
古典物理中假設軌跡為連續可微分，瞬時速率為瞬時速度之絕對值。

Acceleration (加速度)

加速度為速度的改變率：

$$a_{avg} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

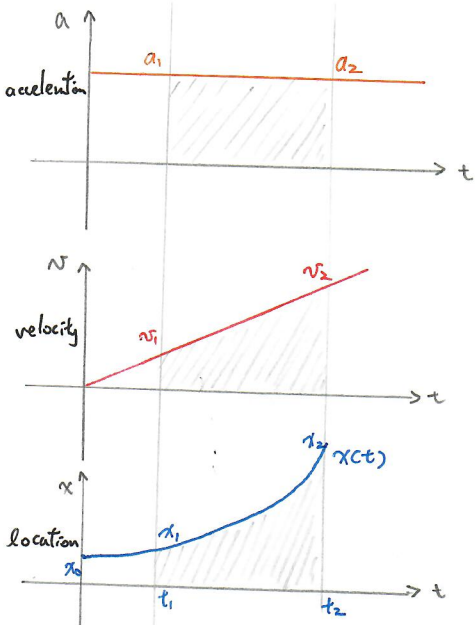
$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$



呂浩宇

Constant Acceleration (等加速度運動)

Instantaneous acceleration is the slope of velocity. When the acceleration a is a constant of time, the slope of v is a constant of time, meaning that v should be a straight line in the vt-diagram. Since v is the slope of the location x, and v is higher at later time, therefore, the curve $x(t)$ in the xt diagram has an upward trend.



$$v_2 = v_1 + a(t_2 - t_1)$$ 末速度等於初速度加速度的改變率乘時間

見 page 5 式子

$$x_2 = x_1 + v_{avg} \cdot (t_2 - t_1)$$

$$v_{avg} = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) = \frac{1}{2}[v_1 + v_1 + a(t_2 - t_1)]$$
$$= v_1 + \frac{1}{2}a(t_2 - t_1)$$

$$\Rightarrow x_2 = x_1 + [v_1 + \frac{1}{2}a(t_2 - t_1)](t_2 - t_1)$$
$$= x_1 + v_1\Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2$$

(可應用於地表附近，僅受重力加速度影響之質點的運動方程)

由於 x 為 t 的函數，且 x 與 t 為一對一映成關係(即任意的 x 值只對應到唯一的 t 值，並且任意的 t 值只對應到唯一的 x 值)故也可視 t 為 x 的函數，由此可得到 v 與 x 的關係

$$x_2 = x_1 + v_{avg} \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{v_{avg}} = \frac{\Delta x}{\frac{1}{2}(v_1 + v_2)}$$

$$v_2 = v_1 + a\Delta t \Rightarrow v_2 - v_1 = a\Delta t$$
$$= a\frac{\Delta x}{\frac{1}{2}(v_1 + v_2)}$$

$$\Rightarrow (v_2 - v_1)(v_2 + v_1) = 2a\Delta x$$
$$\Rightarrow v_2^2 = v_1^2 + 2a\Delta x$$

知道初速及位移
便可計算終端速度

呂浩宇

General Physics (I) Measurement, Vectors, and Motions.

利用微積分計算技巧處理等加速度運動問題

加速度為速度之變化率：$a = \frac{dv}{dt}$

速度在無窮小的時間區間的改變量為：$dv = a\,dt$

infinitesimal time interval

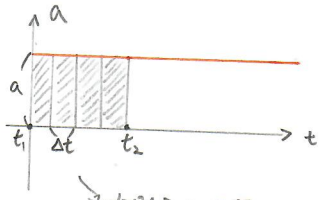
積分：加總無窮多的無窮小變化，以符號 $\int$ 表示

$$\Delta v = \int dv = \int_{t_1}^{t_2} a\,dt$$

積分上界

積分下界

取 Δt 無窮小之極限，即 N 無窮大（此處 Δt 為 $\frac{1}{N}(t_2-t_1)$）



陰影部分面積：

$a\Delta t + a\Delta t + a\Delta t + a\Delta t$

若切成四等份，表示為

$[a \cdot \frac{1}{4}(t_2-t_1)] \cdot 4$

若切成 N 等份，表示為

$[a \cdot \underbrace{\frac{1}{N}(t_2-t_1)}_{dt}] \cdot N$

$$\Rightarrow \Delta v = a\int_{t_1}^{t_2} dt = a\,t\Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$= a(t_2 - t_1)$$

時間改變量的加總，以差分看：

$$\overbrace{(t_2-t_1)}^{\Delta t_1} + \overbrace{(t_3-t_2)}^{\Delta t_2} + \overbrace{(t_4-t_3)}^{\Delta t_3} + \overbrace{(t_5-t_4)}^{\Delta t_4} + \cdots + (t_N - t_{N-1})$$

$$= t_N - t_1$$

即使在 $\Delta t \longrightarrow 0$ 的極限，積分結果亦為積分上界減積分下界

※ 加速度為速度之斜率，速度之變化量為 at 圖覆蓋之面積。
末速度為初速度加 at 圖覆蓋之面積

$\Longrightarrow$ 同理，位置的改變量為 vt 圖覆蓋之面積
末位置為初位置加位置之改變量

$v_2 = v_1 + a\Delta t$

$$\Delta x = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)\cdot(t_2 - t_1)$$ 梯型面積公式

$$= \frac{1}{2}(2v_1 + a\Delta t)\,\Delta t = v_1\Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2$$

$$\Rightarrow x_2 = x_1 + \Delta x = x_1 + v_1\Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2$$

標準多項式積分作法：$x_2 = x_1 + \int_{t_1}^{t_2} v\,dt = x_1 + \int_{t_1}^{t_2}[v_1 + a(t-t_1)]\,dt$

$$= x_1 + v_1\Delta t + \frac{1}{2}a(t-t_1)^2\Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$= x_1 + v_1\Delta t + \frac{1}{2}a(t_2-t_1)^2 - \cancel{\frac{1}{2}a(t_1-t_1)^2}$$

呂浩宇

General Physics (1) Measurements, Vectors, and Motions

III. Vectors (向量) 定義，及加法與乘法(dot and cross product)的運算

Vector：帶有方向(direction)，具有大小(magnitude)

方便描述方向與大小皆有意義之物理量，如

1. 我用多大的力氣往某方向施力
2. 我用多快的速度往哪個方向跑
   → 快慢為速度因次，在公制單位以 [m/s] 測度

Vector quantity：帶有方向並具有大小的物理量

相對的，也有不具方向之物理量，如 溫度 (temperature)，壓力 (pressure)，能量 (energy)
稱為純量 (scalar)

Expression and Components of vectors.

習慣上，vector quantity 以上方帶有箭頭的符號，或是粗體符號表示，e.g.

Scalar : A

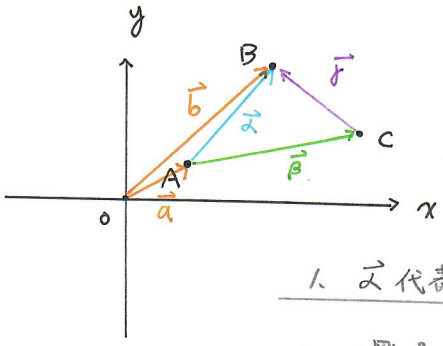
Vector : $\vec{A}$ or $\mathbf{A}$

若要提取向量的大小而不管方向，以絕對值符號 $|\vec{A}|$ 表示

圖示時，以帶箭頭的線表示，線長度正比於 magnitude，方向即為 direction

Example：在二維座標系中的 displacement vectors

表示空間中兩點的位置差(包含大小及方向)
習慣上由出發點畫線，箭頭指向終點



1. $\vec{\alpha}$ 代表由A點走到B點該走之距離(magnitude)與方向(direction)
2. A點及B點的座標即為原點到A點的 displacement vector $\vec{a}$ 及原點到B點的 displacement vector $\vec{b}$

※ 利用幾何意義定義向量加法：運算符號 +，雷同純量加法運算符

定義：$\vec{b} = \vec{a} + \vec{\alpha}$

口語表述："由原點到B點之位移"等於
"由原點到A點之位移"加"由A點到B點之位移"

健康的定義方式，座標原點之地位應與空間中任意點之地位相同，故上述加法運算規則可套用於空間中任意選取之三點：A, B, C，如上圖：$\vec{\alpha} = \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ (由A點到B點的位移等於由A點到C點的位移加由C點到B點的位移)

呂浩宇

General Physics (I) Measurements, Vectors, and Motion

向量加法的 identity 符號為 0 (與純量加法 identity 符號雷同)

$$\vec{A} + 0 = 0 + \vec{A} = \vec{A}$$

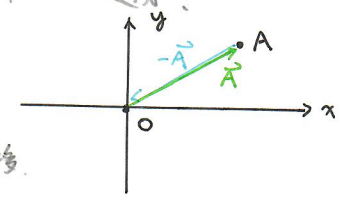
在上例中代表沒有作任何位移

負號：定義 $-\vec{A}$ 為與 $\vec{A}$ 大小相同，方向相反之向量

什麼叫方向相反之定義？

$$\vec{A} + (-\vec{A}) = 0$$

無位移



由座標原點出發，往特定反向作了某大小之位移，則往相反方向再做同樣大小之位移後，總位移為 0

定義減法運算為加上負的減數向量：$\vec{A} - \vec{B} \equiv \vec{A} + (-\vec{B})$

$-\vec{B}$ 為與 $\vec{B}$ 大小相同，方向相反之向量

定義向量與純量相乘(除)，結果為將向量大小乘(除)以此純量，但方向不變：$2\vec{A} = \vec{A} + \vec{A}$

同方向之向量相加不加變方向

(分量) Components of Vectors / Adding Vectors by Components

(有了加法之定義後)

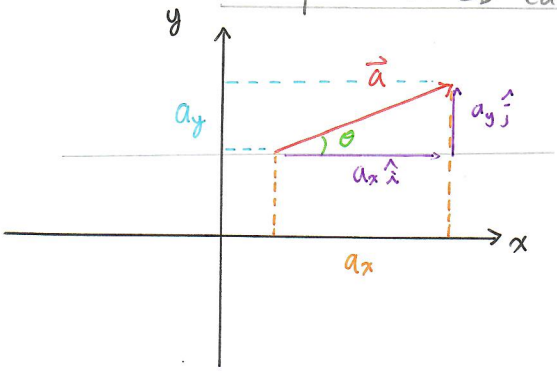
概念：在有限維度之向量空間，以一組正交(orthogonal)且完備(complete)之基底向量(basis)，其倍數之線性組合來表示任意向量。

此處先 sloppy 地假設一定可以找出基底

※基底可有多種選法 (e.g. 座標轉換之概念)
向量間之相互關係以及物理定律不隨基底選擇改變

對於選定之 basis，任意向量之表示法為唯一。向量的 components (分量) 定義為在此表示法中，平行於某特定基底向量之部分。列出一向量之所有 components 之過程稱 resolving the vector

Example: in 2D Cartesian Coordinate System



選擇 basis vectors 為 $\begin{cases} \text{(i) 平行 } x\text{-軸長度為 1 之向量 } \hat{i} \\ \text{(ii) 平行 } y\text{-軸長度為 1 之向量 } \hat{j} \end{cases}$

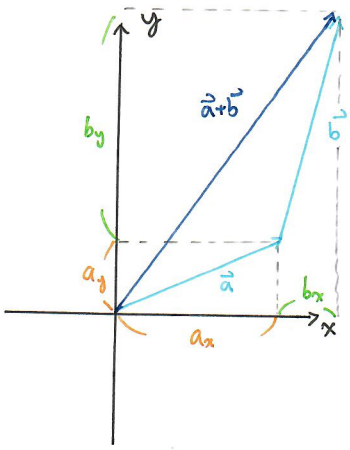
$\vec{a}$ 可表示為 $\begin{cases} \vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} \\ a_x = |\vec{a}|\cos\theta \\ a_y = |\vec{a}|\sin\theta \end{cases}$

即 a_x, a_y 為向量 $\vec{a}$ 在 x-軸及 y-軸之投影長

呂浩宇

General Physics (I) Measurements, Vectors, and Motion

Example :



$$\vec{a} = \underbrace{a_x \hat{i} + a_y \hat{j}}_{\text{稱此表示為 unit vector notation}}, \quad \vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = a_x \hat{i} + b_x \hat{i} + a_y \hat{j} + b_y \hat{j}$$

$$= (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j}$$

※ 任意兩向量相加，只需把分量分別相加

可以 summation convention 表示為

$$\vec{a} + \vec{b} = \sum_i (a_i + b_i)\hat{i}$$

summing over all possible indices.

Multiplying a vector by a vector (向量乘法)

Scalar product (or dot product, or inner product) (內積或純量積)

$$\overbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}^{\text{讀作 a dot b}} = \underbrace{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\phi}_{\text{結果為純量 (scalar)}}, \quad \phi \text{ is the angle between } \vec{a} \text{ and } \vec{b}$$

Example: 三維 Cartisian coordinate，選用 orthonormal basis

$$\left.\begin{array}{l} \hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1 \\ \hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{i}\cdot\hat{k} = \hat{j}\cdot\hat{k} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k})\cdot(b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k})$$

$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

利用 Summation convention 表示 $= \sum_i a_i b_i$

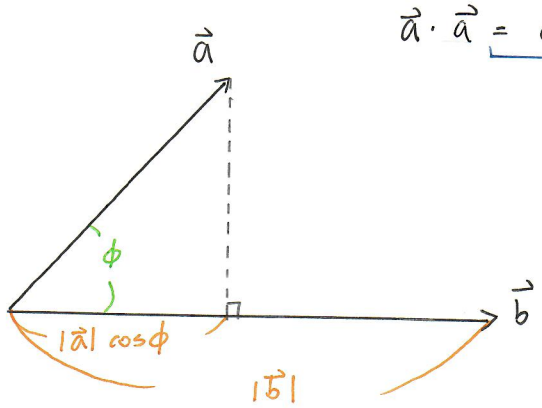
※ 即兩向量之內積為 components 內積之和

物理意義：將一向量投影在另一向量之方向後，求它們長度之乘積

obviously, $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

由三角函數知

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = \underbrace{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = |\vec{a}|^2}_{\text{向量對自己之內積為其長度之平方}}$$



可利用內積求夾角：$\cos\phi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$$\Rightarrow \phi = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)$$

呂浩宇

General Physics (I) Measurements, Vectors, and Motion

Vector product (外積或向量積)

在物理中應用廣泛
在稍後之章節便會用上

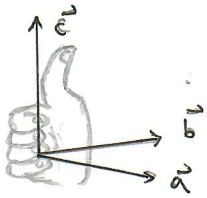
讀作 a cross b

若 $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

即 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 為兩邊之平行四邊型之面積

則 $\vec{c}$ 的大小為 $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\phi$，$\phi$ 為 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角

$\vec{c}$ 的方向垂直於 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 的方向，朝向以右手定則決定



Example. 三維 Cartisian coordinate system

令 $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ 為平行於 x, y, z 軸之單位向量，亦可選作為基底向量

$$\begin{cases} \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, & (\text{同理}, \hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}) \\ \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \\ \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}, & \hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0 \end{cases}$$

Example: $\vec{a} \times \vec{b}$ in components

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) \times (b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k})$$

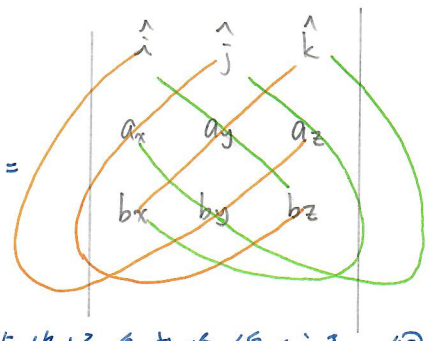
$$= a_x b_y \hat{k} - a_x b_z \hat{j} - a_y b_x \hat{k} + a_y b_z \hat{i} + a_z b_x \hat{j} - a_z b_y \hat{i}$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}$$

以 summation convention 紀錄

$$= \varepsilon_{ijk} a_i b_j \hat{k}$$

亦可利用此計算規則：$\vec{c} =$



由上至下依序
1. basis vectors
2. $\vec{a}$ 的分量，
3. $\vec{b}$ 的分量

每條橘線或綠線代表一個項，項為線通過的符號之乘積，橘線的項要額外乘上負號。

把六條線代表之六個項加總起來即為 $\vec{c}$

呂浩宇

IV. Motion in Two and Three Dimensions

在三維空間中直角座標 (x, y, z) 描述質點位置。x, y, z 為長度因次，在 SI 制中可以公尺為單位，如 $x = 5\,m$.

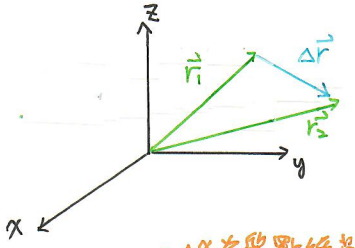
亦可以向量符號表示質點距某參考點之位置差.

注意：向量雖可依此用座標系的兩矢來定義，但兩向量一但大小與方向皆相同它們就全等，與用來定義它們之座標無關

position vector : $\vec{r} = \underbrace{x}_{5\,m}\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

Example : $\vec{r} = (-3m)\hat{i} + (2m)\hat{j} + (5m)\hat{k}$

Example :



$$\Delta\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$$
$$= (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$
$$= \Delta x\,\hat{i} + \Delta y\,\hat{j} + \Delta z\,\hat{k}$$

由於 $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ 平行於質點軌跡之切線方向，故速度之方向亦平行於質點軌跡之切線方向

Δx 為質點經過時間 Δt 後之位移量

average velocity $\vec{v}_{avg} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \dfrac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j} + \dfrac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k}$

instantaneous velocity $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\hat{i} + \dfrac{dy}{dt}\hat{j} + \dfrac{dz}{dt}\hat{k}$

$$= \underbrace{v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}}$$

$$\begin{cases} v_x = dx/dt \\ v_y = dy/dt \\ v_z = dz/dt \end{cases}$$

average acceleration $\vec{a}_{avg} = \dfrac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

instantaneous acceleration $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}\right)$

$$= \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}$$

$$= \underbrace{a_x\hat{i}} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} \\ a_z = \dfrac{dv_z}{dt} \end{cases}$$

加速度在 x-軸的分量等於速度在 x-軸的分量的變化率

呂浩宇

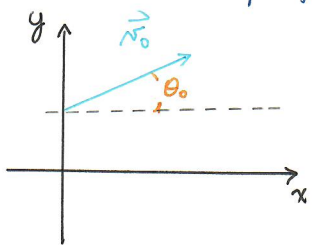
General Physics (I) Measurements, Vectors, and Motion

Projectile Motion (拋物運動)

projectile：初速為 $\vec{v}_0$，$\begin{cases}\text{在水平方向加速度衡為 0 (即 } a_x = 0\text{)}, \\ \text{在垂直方向加速度衡為重力加速度 } -g \text{ (} a_y = -g\text{)}\end{cases}$ 之物体

大小為 g，以負號代表方向向下

令 $\vec{v}_0$ 與水平線之夾角為 θ_0



$$\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}$$

$$= |\vec{v}_0|\cos\theta_0\,\hat{i} + |\vec{v}_0|\sin\theta_0\,\hat{j}$$

水平方向 $\begin{cases}\text{位置}\\ \text{速度}\end{cases}$ 隨時間之變化：$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t \\ v_x = v_{0x}\end{cases}$ (一維等速運動)

垂直方向 $\begin{cases}\text{位置}\\ \text{速度}\end{cases}$ 隨時間之變化：$\begin{cases} y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_y = v_{0y} - gt\end{cases}$ (一維等加速運動)

→ 可利用第7頁最底之關係換算速度隨位置之變化

trajectory (軌跡)：x 與 y 軸位置之關係

因 x 與 t 之關係為一對一映成，可將 t 表示為 x 的函數

$$t = \frac{(x - x_0)}{v_{0x}}$$

名詞定義：horizontal range

拋体拿回初始高度時，在水平方向行經的距離

代入 y 與 t 之關係後得到

$$(y - y_0) = v_{0y}\frac{(x-x_0)}{v_{0x}} - \frac{1}{2}g\frac{(x-x_0)^2}{v_{0x}^2}$$

型式為 parabola：$y = ax^2 + bx + c$ (拋物線)

故此種軌跡稱為 parabolic $\begin{cases}\text{path}\\ \text{trajectory}\end{cases}$

Uniform Circular Motion (等速率圓周運動)

質點繞圓心做圓周運動，速率 (speed) 為常數，即 $|\vec{v}|$ 不隨時間改變，

加速度 (acceleration) 之作用為改變 $\vec{v}$ 之方向

稱為向心加速度：centripetal acceleration

令運動速率為 v，半徑為 r，則

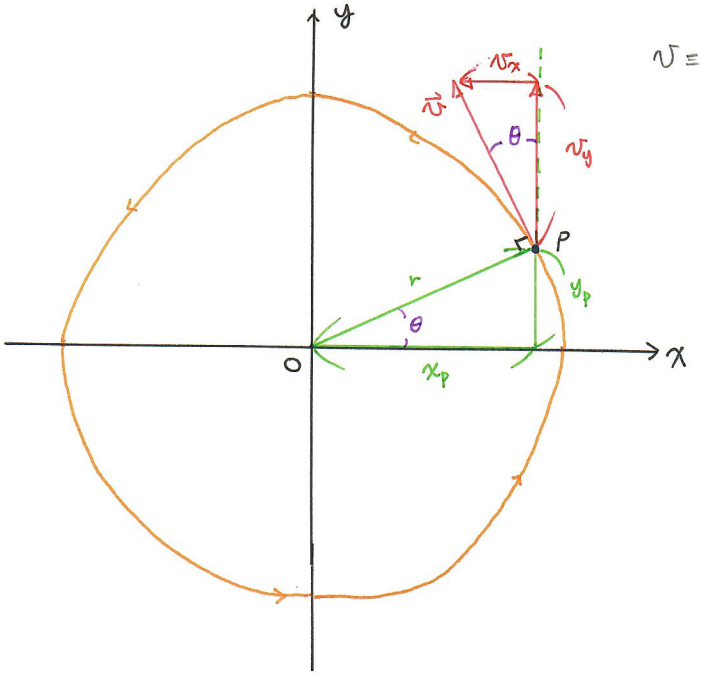
運動週期 (period)：$T = \frac{2\pi r}{v}$

向心加速度大小：$a = \frac{v^2}{r}$ (※非常重要，要記)

→ 可描述運動為：$\begin{cases} r = \text{constant} \\ \theta = 2\pi\frac{t}{T}\end{cases}$ (即當 t 改變量為一週期，角度加 2π)

呂浩宇

General Physics (I) Measurements, Vectors, and Motion



$v \equiv |\vec{v}|$

$$\begin{cases} x_p = r\cos\theta, \quad y_p = r\sin\theta \\ v_x = -v\sin\theta, \quad v_y = v\cos\theta \\ v_x = \frac{dx_p}{dt}, \quad v_y = \frac{dy_p}{dt} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \sin\theta = -\frac{v_x}{v} = \frac{y_p}{r} \\ \cos\theta = \frac{v_y}{v} = \frac{x_p}{r} \end{cases}$$

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} = (-v\sin\theta)\hat{i} + (v\cos\theta)\hat{j}$$

$$= -\frac{y_p}{r}v\,\hat{i} + \frac{x_p}{r}v\,\hat{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{v}{r}\frac{dy_p}{dt}\hat{i} + \frac{v}{r}\frac{dx_p}{dt}\hat{j}$$

策略：先寫下 $\frac{d\vec{v}}{dt}$，然後試著用 v 與 x 之關係消掉所有的 x

$$= -\frac{v}{r}v_y\hat{i} + \frac{v}{r}v_x\hat{j}$$

$$\Longrightarrow a^2 = |\vec{a}|^2 = \frac{v^2}{r^2}(v_y^2 + v_x^2)$$

$$= \frac{v^2}{r^2} \Longrightarrow a = \frac{v^2}{r}$$

Reference frame and relative motions (參考座標系及相對運動)

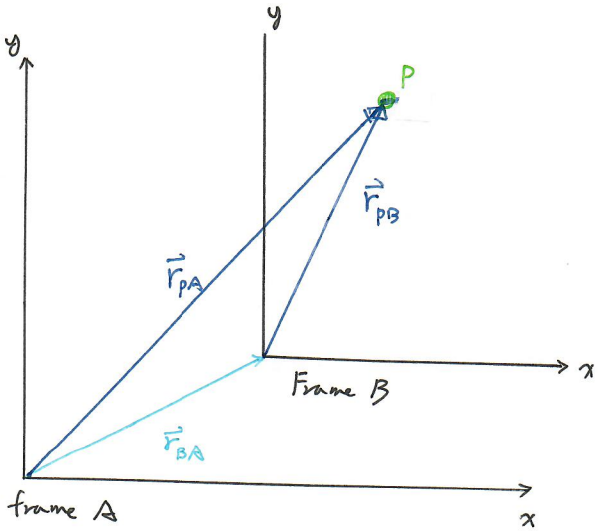
質點P到座標系A原點之距離　　座標系B原點到座標系A原點之距離

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA}$$

質點P到座標系B原點之距離

$$\frac{d\vec{r}_{PA}}{dt} = \vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}$$

由座標系A看質點P之運動速度，等於由座標系B看質點P之運動速度加上座標系B相對於座標系A之運動速度



$$\frac{d\vec{v}_{PA}}{dt} = \vec{a}_{PA} = \frac{d\vec{v}_{PB}}{dt} + \frac{d\vec{v}_{BA}}{dt} = \vec{a}_{PB} + \frac{d}{dt}\vec{v}_{BA}$$

若 $\frac{d}{dt}\vec{v}_{BA} = 0$，即兩座標系相對運動速度為常數，則 $\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}$，即在兩座標系中觀察到之質點加速度相同