呂浩宇

General Physics (1) Force, Motion, Kinetic Energy, Work

在牛頓力學之前，由於對力的本質不了解，而認為為維持物体等速運動，必須不斷施力。

Newtonian Mechanics 牛頓力學

(Isaac Newton 1642-1727)

(現在了解施力是為了克服 friction, drag force, 或 viscosity 造成的力)

Force (力): what causes acceleration. (vector quantity) $\vec{F}$

1. dimension and unit: the force that induces 1 $\frac{m}{s^2}$ of a 1 kg body is 1 newton (abbreviated 縮寫 N)

2. If the magnitude of acceleration is fixed, then the required force is proportional to mass, 質量 (恰好正比於重量)

   注意物理名詞 weight 與中文之"重量"意思與因次皆不同。Weight 因次同 kg m/s², 為在地表上為阻止物体自由下落所需之向上的力大小

3. If the mass is fixed, the required force is proportional to acceleration.

4. principle of superposition: the net force, which is the vector sum of the individual forces, has the same effect as the single force that has the same magnitude and direction as the net force.

I. Newton's First Law (慣性定律)

If no force acts on a body, the body's velocity will be a constant of time.

inertial reference frames (or inertial frame) 慣性座標系

使任意物体皆滿足 Newton's First Law 的座標系。

否則稱為 nonintertial frame (非慣性座標系)

Example: 例如使得一行進中公車之座椅皆為靜止之座標系即為非慣性座標系。乘客在公車加減速時，因感受到假力 (fictitious force) 而站不穩。

定義某 mass standard 之質量為 1 kg，如某物理作用可使該 mass standard 以 1 m/s² 等加速度運動，則稱該物理作用施加的力為 1 N。若增強此物理作用，使 1 kg 之 mass standard 以 2 m/s² 等加速運動，此時，物理作用施加的力為 2 N。若維持此時之物理作用，即 $|\vec{F}| = 2N$，但作用在另一物体上，若另一物体之加速度為 a m/s²，則該物体之質量為 $\frac{2}{a}$ kg。即質量是以施力及加速度測量。

II. Newton's Second Law (運動定律)

$$\vec{F}_{net} = m\vec{a} \xrightarrow[\text{只造成 x 方向的加速度}]{\text{施力在 x 方向的分量}} \begin{cases} F_{net,x} = m a_x \\ F_{net,y} = m a_y \\ F_{net,z} = m a_z \end{cases}$$

在慣性座標系中，物体所受之淨外力 (external forces) 等於物體質量乘以物體加速度

在外力完全相消稱物體達到淨力平衡 (forces in equilibrium), $\vec{a} = 0$

呂喆宇

General Physics (I) Force, Motion, Kinetic Energy, Work

III. Newton's Third Law (作用力與反作用力定律)

施力方與受力方必然受到大小相等，方向相反的力

Definition of some particular forces

Normal force $\vec{F_N}$ (正向力)

當施力於物体表面時，物體產生之反作用力垂直於物体表面的 component.

Friction (磨擦力)
- static frictional force (靜磨擦力)
- kinetic frictional force (動磨擦力)

當兩相接觸的物體有沿接觸面之相對運動時，物體所受平行於接觸表面，方向相反於自身運動方向之力。

Tension (張力)

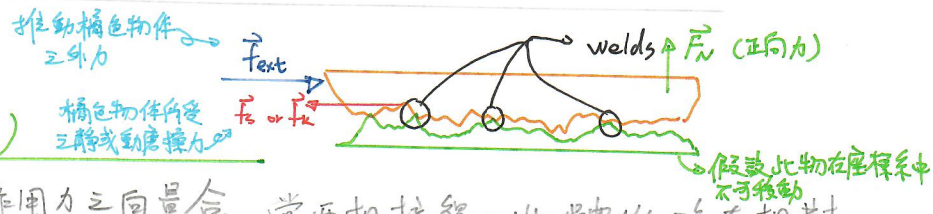
pulley = 滑輪

若觀念不清楚，見課本 Sample problems. 5.03, 5.04, 5.05, 5.06

拉緊的繩索上傳遞的力。如在桌面上放一物体並綁上繩索，以手拉繩索平行桌面對物体施力 $\vec{T}$，則張力大小為 $|\vec{T}|$

Drag force (阻力)

行進中物體所受，與其速度相關，方向與其運動方向相反之力。



Friction (磨擦力)

接觸面之原子交互作用力之向量合。當兩相接觸之物體從沒有相對運動到有相對運動時，首先，接觸面上之連結点 (welds) 被撕開。tearing
之後則隨机地形成連結点並隨運動再被撕開。
連結点愈多，磨擦力愈強。當兩物之正向力較大時，會始連結點增多，使得靜磨擦力及動磨擦力都增強。

呂浩宇

General Physics (I) Force, Motion, Kinetic Energy, Work

Properties.

(i) 若接觸之兩物体尚未有相對運動，則 $\overbrace{\text{靜摩擦力}}^{f_s}$ 恰好抵消平行於接觸面之施力，即 $\vec{f_{ext}} = -\vec{f_s}$ （見 page 2 底下之圖）

(ii) 若逐漸增大 $|\vec{f_{ext}}|$，两物体可保持沒有相對運動直到 $|\vec{f_{ext}}|$ 恰好等於最大靜摩擦力 (maximum static friction) $f_{s,max}$

若再增大 $|\vec{f_{ext}}|$ 則两物体開始有平行接觸面之相對運動。

$$f_{s,max} = \mu_s F_N, \quad \begin{cases} \mu_s = \text{coefficient of static friction (靜摩擦系數)} \\ F_N = \text{normal force} \end{cases}$$

(iii) 當两物體開始有相對運動後，摩擦力變成以動摩擦力 f_k 描述，大小較最大靜摩擦力小，其值為

$$f_k = \mu_k F_N, \quad \mu_k = \text{coefficient of kinetic friction (動摩擦系數)}$$

(iv) μ_s 及 μ_k 為無因次之係數（使得等式左右皆為力的因次）

其值與接觸面之性質有關，必須以實驗測量決定

一般假設 μ_k 的大小與两接觸物体之相對速度無關，但需以實驗驗證

若要使物体進行等速運動，外力必須等於摩擦力（即 $f_{net}=0$）

（假設沒其它重要的外力。若有其它外力，就考量力之總合為0就好）

Drag Force and Terminal Speed 摩擦力與終端速度

流體 (fluid) 可流動之物質，如氣體 (gas) 或液體 (liquid)

任意物體若在流體中，作與流體有相對速度之運動，則感受到與其運動速度方向相反之 drag force $\vec{D}$

切入 turbulent fluid 中的鈍型物體其受到的 drag force 為

$$|\vec{D}| = \frac{1}{2} \underbrace{C}_{\text{drag coefficient}} \underbrace{\rho}_{\text{mass density of the fluid (i.e., mass per unit volume)}} \underbrace{A}_{\text{effective cross-section}} v^2$$

v 為物體與其週遭流體之相對速度

速度愈快，受到的 drag force 愈大

當自由落體達到 terminal velocity 時，$|\vec{D}| = \overbrace{|\vec{F_g}|}^{\text{gravitational acceleration force}}$

呂浩宇

General Physics (I) Force, Motion, Kinetic Energy, Work

Energy：某種與物體或物質有關之物理純量，因次為重量乘速度平方。具有不同形式並可能互相轉換（如動能、熱能）。並且，經驗上，知道總能量必須守恆（即不隨時間改變）。

公制單位：
joule (J) (焦耳)
1 joule = 1J = 1 kg·m²/s²

thinking：why energy needs to be conserved?
永動機基本違反了能量守恆，但能量守恆真的是不可違反？
（試著 google，或問 chatGPT）

Kinetic Energy (動能)

energy that is associated with the state of motion 與物體運動狀態有關之能量

if $v \ll c$, （speed of light）

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

（kinetic energy；mass；speed）

$$= \frac{1}{2} m \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

質量固定之物体，運動速率愈快，動能愈大。當速率為 0，則動能亦為 0。因動能為大於等於 0 之物理純量。

常見之猜物理定律/理之方式。
若要用向量湊成純量，就取平方來消去方向之相關
（在 summation convention 之術語稱 contraction of index）

Work (功)

能量因次，公制單位為焦耳

為名詞。是一種能量形式：特指以施力的方式傳到某物體或物質之能量。若 A 物對 B 物施力，稱
work is done on object B by object A

因施力使得物体具有加速度（單位時間內物体速度之改變量），因物体之速度改變，動能亦隨之改變。因可視功為因施力而造成的，物體動能之改變量。

※ 注意改變量可有正或負。若物體動能增加，為對物體作正功，反之為對物體作負功

$\boxed{\text{Work - kinetic energy theorem}}$

$$\underbrace{\Delta K}_{\text{物體動能的改變量}} = \underbrace{K_f}_{\text{物體的末動能}} - \underbrace{K_i}_{\text{物體的初動能}} = \underbrace{\Delta W}_{\text{外界對物體所做的總淨功}}$$

呂浩宇

General Physics (I) Force, Motion, Kinetic Energy, Work

Work done by a general variable force 有時變之外力的作功

一維情形

kinetic energy : $K = \frac{1}{2}mv^2$

若因外力使得速度 v 在時間差 δt 或位移 δx 間有無窮小的改變量 δv

則動能亦改變為 $K + \underbrace{\delta K}_{\text{動能的改變量}}$

$$K + \delta K = \frac{1}{2}m(v+\delta v)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mv\delta v + \underbrace{\frac{1}{2}m\delta v^2}_{\text{在 } \delta v \to 0 \text{ 之極限下，忽略此項}}$$

$$\sim \frac{1}{2}mv^2 + mv\delta v$$

$$\Rightarrow \delta K = \delta W \sim mv\delta v = mv\left(\delta t \frac{\delta v}{\delta t}\right)$$

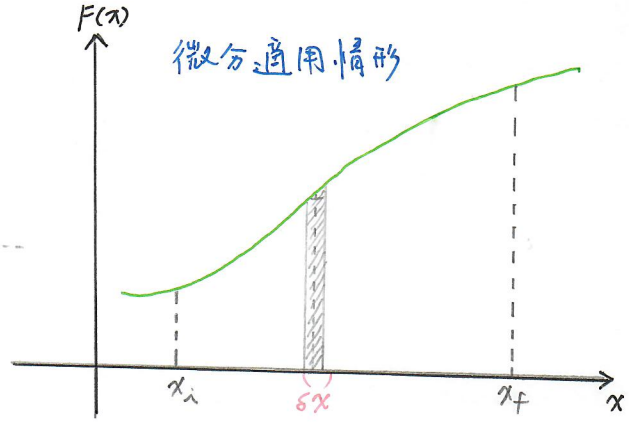
$$= m\overbrace{(v\delta t)}^{\delta t \text{ 時間內之位移}}\underbrace{\frac{\delta v}{\delta t}}_{\text{單位時間內速度的改變量，即加速度 } a}$$

$$= m\delta x\, a$$

$$= (ma)\delta x = F\delta x$$

$\delta W = \delta K = F\delta x$: 當物體在位置 $x(t)$ 時受到的外力為 $F = F(x(t))$，則在物體經過無窮小的位移 δx 之過程中，外力 F 造成之物體動能改變量為 δK，即外力作了無窮小的功 $\delta W = \delta K = F\delta x$

由 $F-x$ 圖看此問題，$F\delta x$ 即為圖中陰影部分之面積.



差分情形：

總功 $W = \sum_i \Delta W_i = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \cdots$

$= F_1\Delta x + F_2\Delta x + F_3\Delta x \cdots$

微分情形：

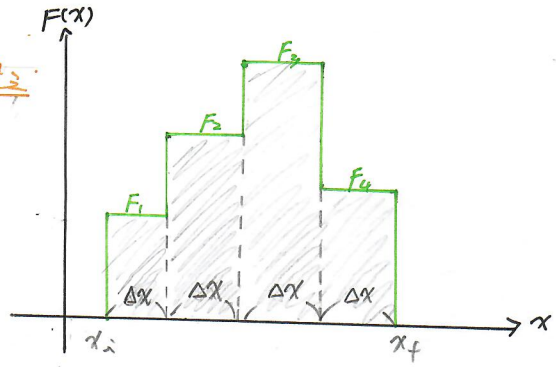
總功

$$W = \int_{x_i}^{x_f} \delta W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx$$

積分符號之意義：

化做 $\Delta x \to 0$ 之極限.

把無窮多個在無窮小位移量之外力作功加總起來



操作上即為計算在 F-t 圖中，$F(x)=0$ 以上，線線以下，左右側被 $x=x_i$ 及 $x=x_f$ 部分圍住之部分之面積

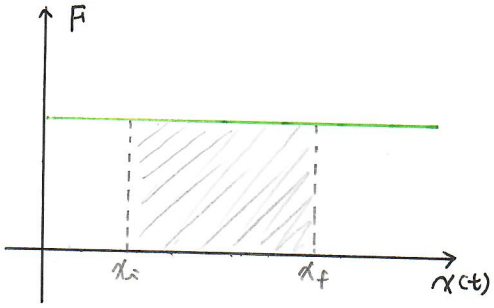
呂浩宇

General Physics (1) Force, Motion, Kinetic Energy, Work

一維等加速度運動 (constant force and acceleration)

(i) 依照上頁結論直接積分陰影部分面積

$$W=\int_{x_i}^{x_f} F\,dx = F(x_f-x_i) = F\Delta x$$



(ii) 依照講義 Measurements, Vectors, and Motions page 7 有等加速度運動速度平方與位移之關係

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a\Delta x = v_i^2 + 2\frac{F}{m}\Delta x$$

$$\text{作功} = \text{動能差} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = F\Delta x$$

課本§1-3 一維重力加速度問題即為一維等加速度運動之一特例，理解與解題方式與這部分完全相同。

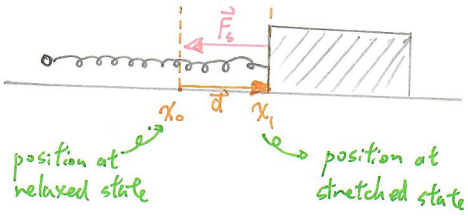
Work done by a spring (彈簧) force (彈簧之作功)

relaxed state：彈簧不施力的狀態，長度為某特定長度

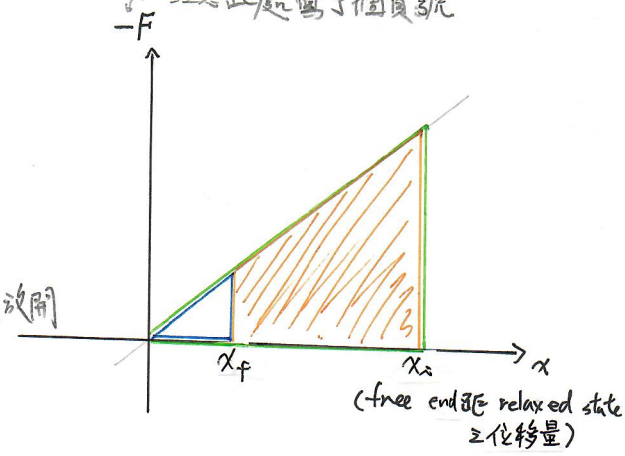
restoring force：被拉伸或壓縮的彈簧為回復為 relaxed state 而產生的力

Hooke's law (虎克定律)：$\vec{F_s} = -k\vec{d}$ （spring constant）

若彈簧之一端點被固定，另一端點可有位移（稱為 free end）則當 free end 之位移量為 $\vec{d}$ 時，對 free end 上掛載之外物之施力為 $-k\vec{d}$，（注意 $\vec{F_s}$ 與 $\vec{d}$ 皆為向量，$\vec{F_s}$ 與 $\vec{d}$ 方向相反）



注意此處寫了個負號



若將物體與彈簧一同拉伸到位置 x_i 後先靜止再放開，則彈簧由 x_i 縮回到 x_f 位置的過程中，對物體的作功為

$$W=\int_{x_i}^{x_f} F\,dx = \int_{x_i}^{x_f} -kx\,dx = -\frac{1}{2}kx^2\Big|_{x_i}^{x_f} = -\frac{1}{2}k(x_f^2-x_i^2)$$

對於尚未學習積分之同學，此處功之大小可為綠色三角形面積減去藍色三角形面積，因物体在過程中為由靜止到有一定之速度，動能增加，故判斷為作正功

呂浩宇

General Physics (I) Force, Motion, Kinetic Energy, Work

任意維度之情形

$$K + \delta K = \frac{1}{2} m \sum_i (v_i + \delta v_i)^2$$

$$= \frac{1}{2} m \sum_i (v_i^2 + 2 v_i \delta v_i + \underbrace{\delta v_i^2}_{\text{速度變化量為無窮小時忽略此項}})$$

依照 page 5 之推導簡單得到 $\delta K = \sum_i m a_i \delta x_i = \sum_i F_i \delta x_i$

eg. 二維情形：$\delta K = F_x \delta x + F_y \delta y$

注意動能改變量為純量

利用向量符號之表示式：$\delta K = \vec{F} \cdot \delta \vec{x}$

向量符號與 summation convention

間之互換關係見講義：measurements, vectors, and Motions page 11.

三維空間情形：$d\vec{r} = \delta x \hat{i} + \delta y \hat{j} + \delta z \hat{k}$

$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$

$\delta K = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z$

總功：$W = \int_{r_i}^{r_f} dW = \underbrace{\int_{x_i}^{x_f} F_x dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z dz}$

將每個座標軸分開計算即可。

例子：等速率圓周運動

若施力方向正交於位移方向，則施力並不作功

物体之動能並不因為此力而改變

等速率圓周運動 → 質點之速率為定值，動能為時間軸上的常數

Power (功率)

definition

$P_{avg} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$ (average power) —— 時間 Δt 間作用在物体上的功

$P = \frac{dW}{dt}$ (instantaneous power) —— 單位時間作用在物體上的功

因次：能量每單位時間

公制單位：watt (W)：1 watt = 1 W = 1 J s^{-1}

瓦

(常用單位：馬力 (horsepower)：1 horsepower = 1 hp = 746 W

$\because dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} \Longrightarrow P = \frac{dW}{ds} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ 功率為力與速度之內積