電波干涉儀 — 什麼是电波干涉儀？為何要用电波干涉儀

↳ 望遠鏡的一種 ⟶ 最重要之參數：角分辨率

視場

望遠鏡口徑愈大，解析力愈好；觀測之波長愈短，解析力愈好

(之後詳述原因) ⟵ 最小可分辨之角度差：$\Delta\theta \sim \frac{\lambda}{D}$

(diffraction limited angular resolution)

10" 角析力

$1^\circ = 60' = 3600''$

實際人眼解析力為 1'

可見光 $\lambda \sim 0.5 \cdot 10^{-6}$ m —— 1 cm 口徑

SMA/ALMA $\lambda \sim 10^{-3}$ m ⟶ 2000 cm ~ 20 m 口徑

↳ 大型單天線毫米波望遠鏡，如 JCMT 15m, IRAM 30m

若 $\delta\theta < \Delta\theta$，則無法解析二天体 Rayleigh's criterion

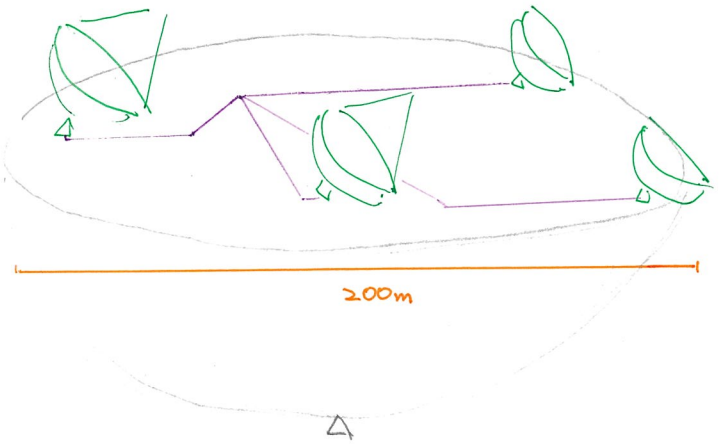
water maser $\lambda \sim 1$ cm ⟶ 200 m 口徑 ⟶ 結構過於巨大，無法建造

對於測量 blackhole mass 有重要應用

干涉儀計術

nebula 投影在天球上

將多個小电波望遠鏡置於 200m 直徑範圍內，利用干涉技術使該光學系統具有一口徑為 200 m 之單鏡之角分辨率



直接測量結果為天空中亮度分佈經傅利葉轉換之傅利葉係數，需經校正及反轉換回推原本的亮度分佈

此為大部分人僅知的，含糊籠統的說法

② 電波干涉儀 一

課程目標：
1. 定性理解運作原理
2. 熟悉術語（干涉極多元件）

干涉儀為光學系統（或儀器）的一種

所需了解面相

每個原理的部分皆有相對應的簡單例子。熟悉簡單例子，便可理解複雜系統

原理
- 反射、折射（與 n 有關）
  - 通常只需要記得入射角等於反射角及 $n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2$
  - Snell's law
  - θ為入/折射線與介面法線之夾角
- 干涉、繞射（與傳遞與疊加有關）

光學系統

架構及用途 — 估計
- 系統性誤差
- 熱噪聲/雜訊

1) 電磁波傳遞滿足波方程（單色光）
平面波在傳遞方向

$$E_0\cos(\underbrace{kx}_{\frac{2\pi}{\lambda}} - \underbrace{\omega t}_{2\pi\nu} + \phi_0)$$

ω：角頻率，ν：頻率

ϕ_0：相位角 offset

2) 傳遞滿足 Huygen's principle
- 波前球狀傳遞
- 波前視為新的光源

3) 波方程的解滿足線性疊加原理

4) 真空中電磁波速為 C

在 index of refraction 為 n 的介質中，
- 電磁波速為 $\frac{c}{n}$
- 頻率不變，波長變為 $\frac{\lambda_0}{n}$ → 真空中波長

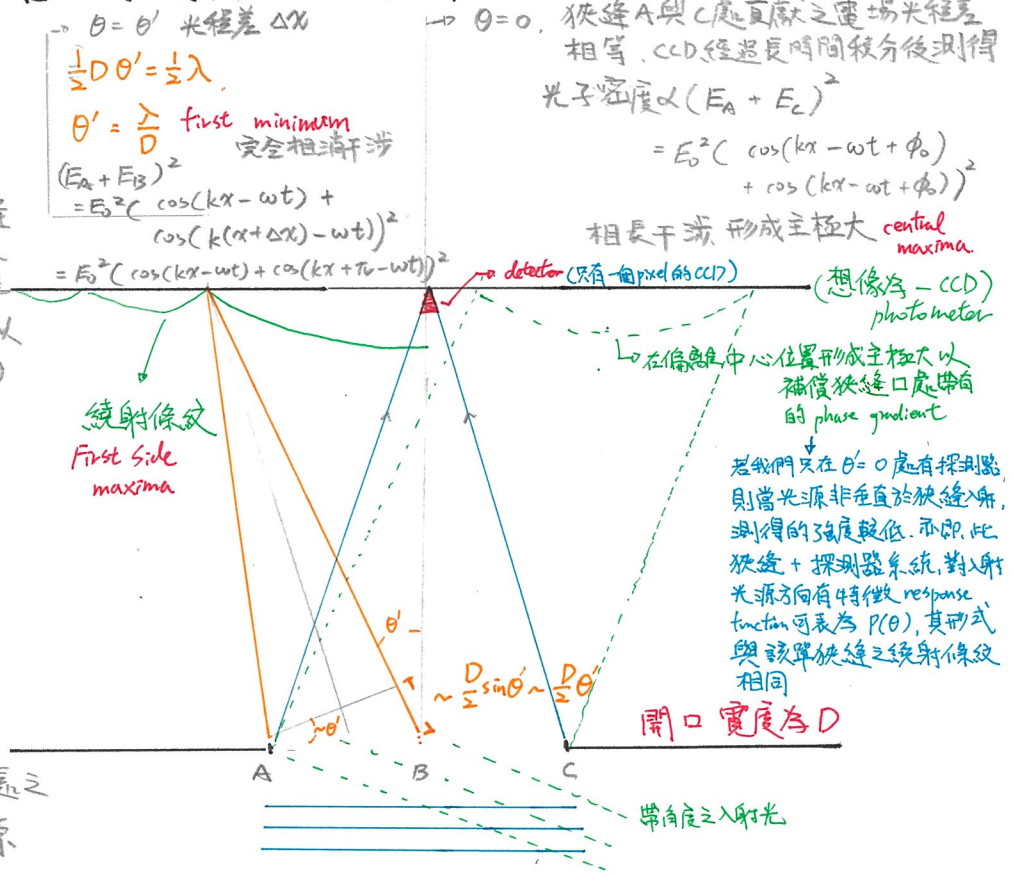
5) 光子流量正比於 E_0^2（單位時間單位面積通過之光子數）

例. 普物等級單狹縫繞射（單色光情形）

[只有通過狹縫的入射線可能成像]

≈ 無窮遠處之投影幕，狹縫上各點到此投影幕之距離幾平方以常數近似（但一次項重要）

≈



無窮遠處之平行光源

完整計算，將狹縫 A → C 切成 N 塊，N → ∞

對於出射角 θ′，光子數 ∝

$$\left(\sum_{n=0}^{N}\cos\left(k(x+\Delta x(n)) - \omega t\right)\right)^2$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{N}\cos\left(kx + k\underbrace{\frac{nD}{N}\sin\theta'}_{\text{光程差}} - \omega t\right)\right)^2$$

當 N → ∞ 時，$\frac{nD}{N}$ 視為上下界為 [0, D] 之積分變數，故

在出射角 θ′ 之光強度 ∝ $\frac{(\sin\frac{1}{2}k\sin\theta')^2}{(k\sin\theta')^2}$

利用和差化積處理積分上下界

$$\sin\theta - \sin\varphi = 2\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)$$

混成電場

$$\frac{\sin(kx + kD\sin\theta' - \omega t) - \sin(kx - \omega t)}{k\sin\theta'}$$

$$= -\frac{\sin\left(\frac{1}{2}kD\sin\theta'\right)}{\frac{1}{2}k\sin\theta'}\cos\left(kx - \omega t + \underbrace{\tfrac{1}{2}kD\sin\theta'}_{\text{phase offset}}\right)$$

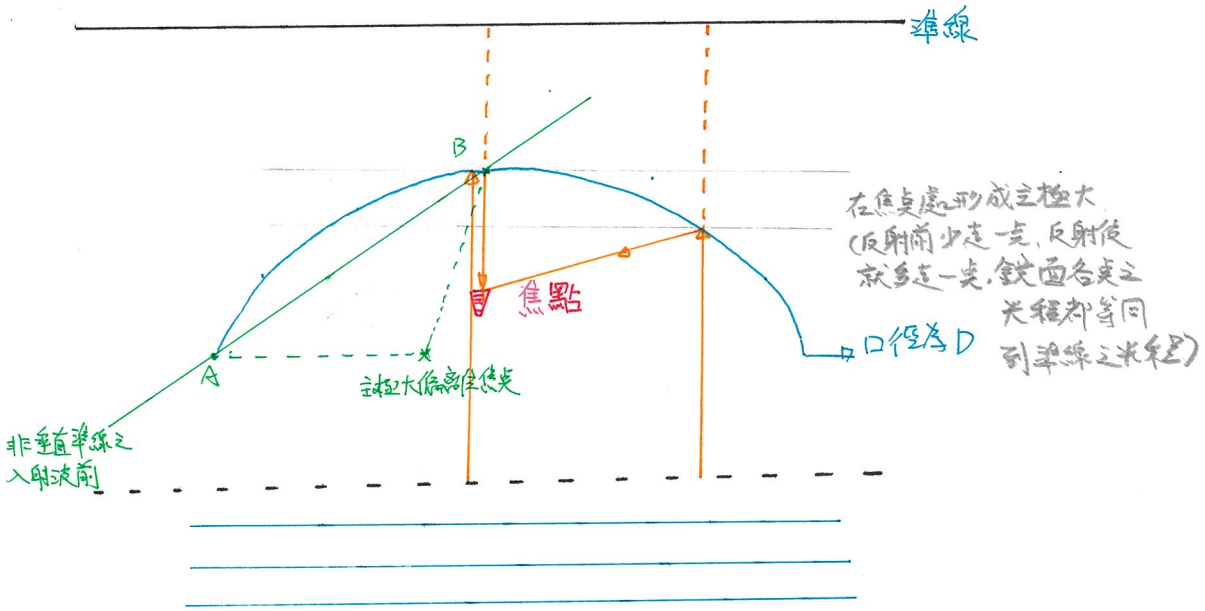
amplitude modulation
- 分子：正弦形式
- 分母：線性遞減

小結：對於一出射角 θ′，混成電場與原電磁波頻率相同，但相位與強度皆受到與 D 與 θ′ 相關之 modulation

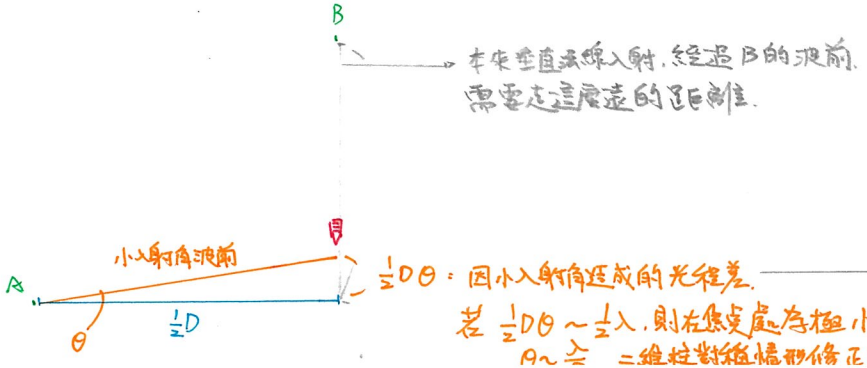
電波干涉儀一 拋物面鏡

拋物面鏡：[只有與鏡面相交的入射線可能成像]

1. 以準線及焦点定義
2. 垂直準線的線到拋物面之距離等於拋物面上該点到焦点的距離
3. 垂直於準線之入射光源經拋物面反射到達焦点



如何在焦点處產生極小(小入射角近似)



若 $\frac{1}{2}D\theta \sim \frac{1}{2}\lambda$，則在焦点處為極小，即 $\theta \sim \frac{\lambda}{D}$ 二維柱對稱繞射情形修正為 $1.22\frac{\lambda}{D}$

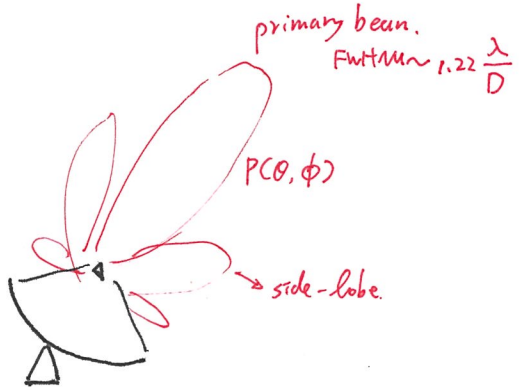
dish 淨效果：在成像處(焦点或焦平面)，類似單狹縫，混成電場與入射电磁波頻率相同，但相位及振幅帶有常數 modulation.

口徑愈大，集光能力愈强，並且角分辨力愈好

(任何反射鏡系統，皆可以此概念理解)

↓

e.g. 蓋賽格林式

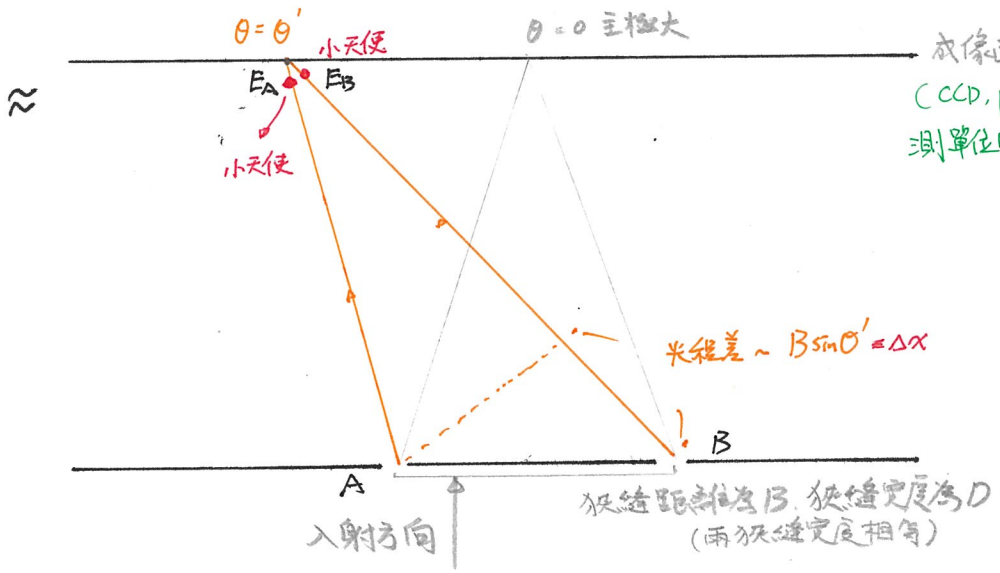


非單色光為單色光之線性疊加

對於任意怪異鏡面，皆可依此原理解析或數值地計算 response function

電波干涉儀一　雙狹縫

馬：一個狹縫不夠，那你有用兩個嗎？



長時間曝光之干涉條紋可表示為：

$$\frac{I(\theta')}{A} = P(\theta')\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}B\theta'\right)\right] = P(\theta')\left[1 + \cos(2\pi u\theta')\right]$$

雙狹縫 + CCD 兩成系統之 response function

$I(\theta')$：photometer 測得之強度；時間入射光子密度

A：代表光源強度之正比比例數

1：auto-correlation 項

$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}B\theta'\right)$：cross-correlation 項

$u \equiv \frac{B}{\lambda}$：以波長為單位測量狹縫間距

$\cos(2\pi u\theta')$：cross-correlation 項造成 auto-correlation 項對角度敏感

(ii) 若狹縫 $D \sim 0$ 對於波長為 λ 之垂直成像面之入射光，[做長時間曝光]

光源 A、B 可視為初始相位相同之單色點光源

成像面 $\theta = \theta'$ 處之光子密度

$$\propto \Big(\underbrace{\cos(kx - \omega t + \phi_0)}_{E_A}\ +\ \underbrace{\cos(k(x+\Delta x) - \omega t + \phi_0)}_{E_B}\Big)^2$$

E_A：光源 A 貢獻的電場

狹縫寬度 D 不趨近於 0 時，單狹縫繞射造成場強隨 θ' modulate $\frac{\sin(\frac{1}{2}kD\sin\theta')}{\frac{1}{2}k\sin\theta'}$，並有 phase offset $\frac{1}{2}kD\sin\theta'$ $+\phi$

① 場強的 modulation 可提到平方之外，不影響干涉之計算

② 兩狹縫之 phase offset 相同也不影響干涉之計算

$$= \underbrace{\cos^2(kx - \omega t + \phi_0)}_{\text{auto-correlation}} + \underbrace{\cos^2(k(x+\Delta x) - \omega t + \phi_0)}_{\text{auto-correlation，時間軸上積分後 } \frac{1}{2}}$$

$$+ \underbrace{2\cos(kx - \omega t + \phi_0)\cos(k(x+\Delta x) - \omega t + \phi_0)}_{\text{cross-correlation}}$$

$$= \underbrace{\cos(k\Delta x)}_{} + \underbrace{\cos(2kx - 2\omega t + 2\phi_0 + k\Delta x)}_{\text{長時間平均期望值為 0}}$$

identity：

$$\cos\theta\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(\cos(\theta - \varphi) + \cos(\theta + \varphi)\right)$$

振幅為 1，極小處 $\cos(k\Delta x) = -1$ 足以 cancel auto-correlation 項之貢獻

$$\frac{2\pi}{\lambda}\cdot B\sin\theta = m\pi,\quad m = 1, 3, 5, \cdots$$

$$\theta' \sim \frac{m}{2}\frac{\lambda}{D}$$

若測得 $I(\theta')$，$P(\theta')$ 與 u 為已知

但 θ' 僅相對於一 arbitrarily 選擇之基準決定，而非絕對

$$I(\theta') = A\,P(\theta')\left[1 + \cos(2\pi u\theta')\right]$$

至少要兩個以上 $I(\theta')$ 在不同 θ' 角度的測量值，才能 un-ambiguously 的解兩獨立變數 θ' 與 A

電波技術：

測量電場 $E_0\cos(kx - \omega t + \phi_0)$ 而非測量光子密度，i.e.

測：$E_A = \cos(kx - \omega t + \phi_0)$

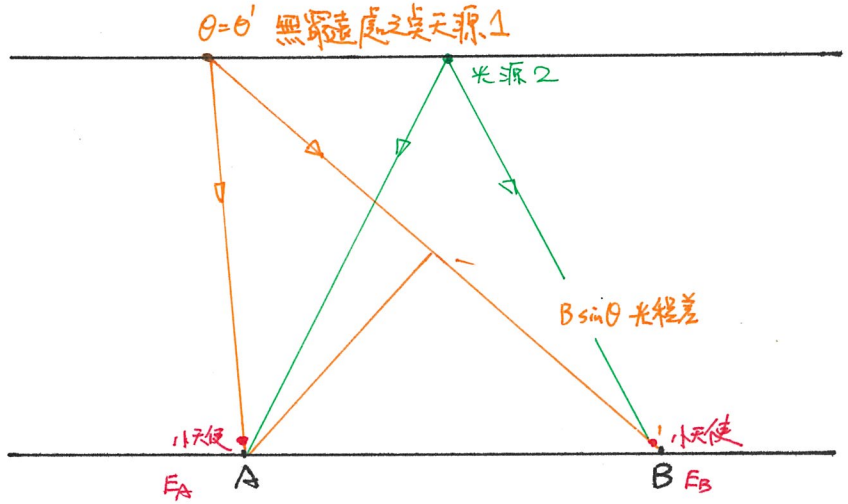
$E_B = \cos(k(x+\Delta x) - \omega t + \phi_0)$

用 correlator 計算

$\langle E_A^2\rangle$，$\langle E_B^2\rangle$，$\langle E_A E_B\rangle$

長時間積分取時間平均

電波干涉儀 — 電波干涉儀



(i) 單一單色無窮遠處光源情形，得到與雙狹縫情形完全相同之 $\langle E_A E_B \rangle$

(ii) 若有兩個光源，註記為 1, 2，則：$E_A = E_A^1 + E_A^2$

$E_B = E_B^1 + E_B^2$

$\langle (E_A + E_B)^2 \rangle = \langle E_A^{1\,2} \rangle + \langle E_B^{1\,2} \rangle + \langle 2E_A^1 E_B^1 \rangle +$ → 光源一獨立干涉之結果

$\langle E_A^{2\,2} \rangle + \langle E_B^{2\,2} \rangle + \langle 2E_A^2 E_B^2 \rangle +$ → 光源二獨立干涉之結果

$\langle 2E_A^1 E_A^2 \rangle + \langle 2E_A^1 E_B^2 \rangle + \cdots\cdots$

若兩光源之間無相關係，則 phase 為 random walk，時間軸平均之期望值為 0

↓

Acoherent source

↓

雜訊視為 acoherent source，期望值之貢獻為 0，但方均根為正實數

若有 N 個 source，則在 soure 為 acoherent 之情形，comelator output 為 N 個 soure 各自進行干涉後之線性疊加

只看 cross-comelation 項的話，

$$\langle E_A E_B \rangle \propto \sum_{i=0}^{N} P(\theta_i') A_i \cos(2\pi u \theta')$$

波源 i 之強度

↓ 連續波源

$$\int \underbrace{P(\theta)A(\theta)}_{\text{光源強度分佈乘以 primary beam response function}} \overbrace{\cos(2\pi u \theta)\, d\theta}^{\text{Fourier transform}}$$

cosine comelator（對對稱的 $P(\theta)A(\theta)$ 敏感）

F.T. 之係數 ←

若能手動在 E_A 相位加 $\frac{1}{2}\pi$，則可測

$$\int P(\theta)A(\theta)\sin(2\pi u \theta)\, d\theta$$

sine comelator.（對反對稱的 $P(\theta)A(\theta)$ 敏感）

→ 組成複數測量，稱為 complex visibility.

cosine / sine comelator 的測量為實及虛部.

對單一點光源，此二獨立測量可決定光源位置及強度

$\langle E_A E_B \rangle \to P(\theta)A(\theta)$

若小天使不可連續移動則為 incompletely sampling 情形，需 imaging 來完成 inversion ←

※ 若小天使位置可移動，即可連續的變化 u，則可完整對 $P(\theta)A(\theta)$ 做 F.T.

電波干涉儀一　以點光源為例

$$A(\theta) = \delta(\theta - \theta')$$

⇒ cosine correlator output

gain

$$= g \int p(\theta)\,\delta(\theta-\theta')\cos(2\pi u\theta)\,d\theta$$

$$= g\,p(\theta')\cos(2\pi u\theta') \quad \text{for any } u$$

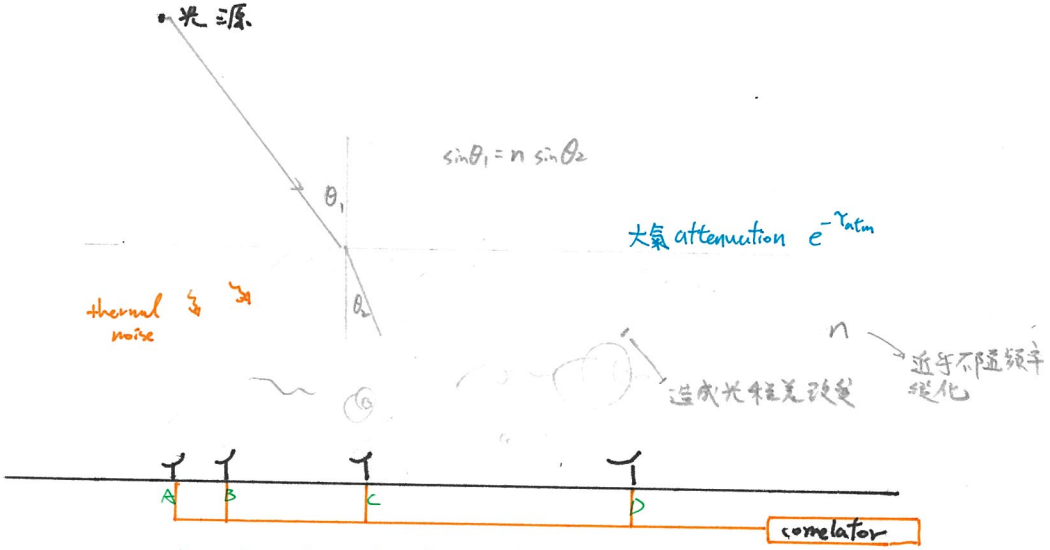
sine correlator output $= g\,p(\theta')\sin(2\pi u\theta')$

complex visibility $= g\,p(\theta')\left(\cos(2\pi u\theta') + i\sin(2\pi u\theta')\right)$

$$= \underbrace{g\,p(\theta')}_{\text{uncalibrated visibility amplitude, 一般為电压單位}}\; e^{i\,\underbrace{2\pi u\theta'}_{\text{phase}}}$$

小結：若測量單一點光源，visibility不隨u變化。
若θ'固定，則phase與u為線性關係。
可視 2πu 為 phase 隨 θ' 之變化率。
若狹縫間距愈大（|u|愈大），phase隨θ'變化程度愈大

干涉陣列



U_{AB}, U_{AC}, U_{AD}, U_{BC}, U_{BD}, U_{CD}, ...

independent baseline 數：$\frac{1}{2}N(N-1)$

愈能減少 U_{ij} 長度的重疊性，對影像的重建愈有利

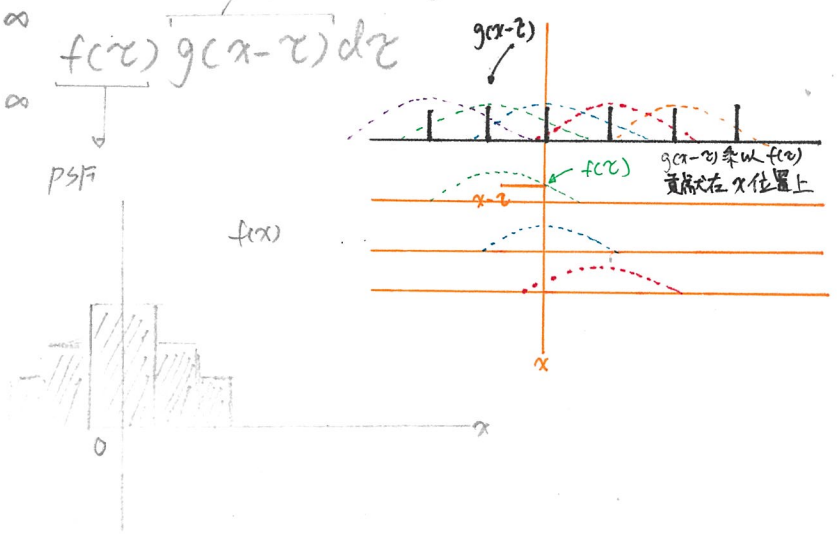
① 電波干涉儀二

baobabyoo.github.io/pages/students-topics/AstroBasic-RadioInterferometer.html

天文影像皆受到 point spread function 影響，其數學型式之概念為表示 point spread function 之數學型式 convolution

[先介紹 resolution 及 PSF 的概念，再看干涉儀如何形成 PSF]

$$\underbrace{h(x)}_{\text{受PSF影響之image}} = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(\tau)}_{\text{PSF}} \overbrace{g(x-\tau)}^{\text{原始影像, e.g. 點光}} d\tau$$



$$g(x) = \delta(x)$$

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,\delta(x-\tau)\,d\tau = f(x)$$

即受了PSF影響之位於原点之点光源，其影像peak仍在原点，但形狀與PSF相同。

任意光源可想像為点光源之線性疊加

光學元件的特性或是大氣擾動 (seeing) 都會帶給影像一定的 PSF (diffraction limited resolution, 繞射條紋, seeing)

Convolution Theorem:

$$F.T.(f * g) = F.T.(f) \cdot F.T.(g)$$

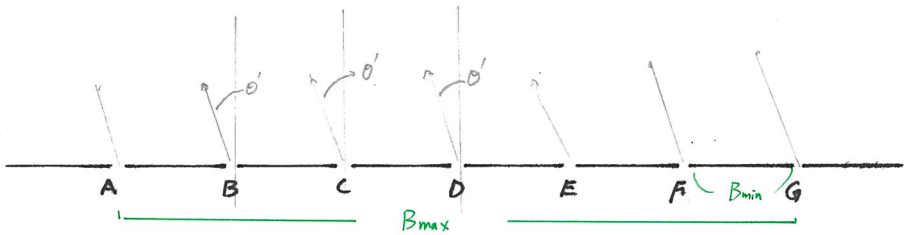
$$F.T.(f \cdot g) = F.T.(f) * F.T.(g)$$

若測得 F.T.(f·g)，並且 PSF 之型式已知，則反推 g 的過程稱為 deconvolution，大部分情形依賴非線性之演算法

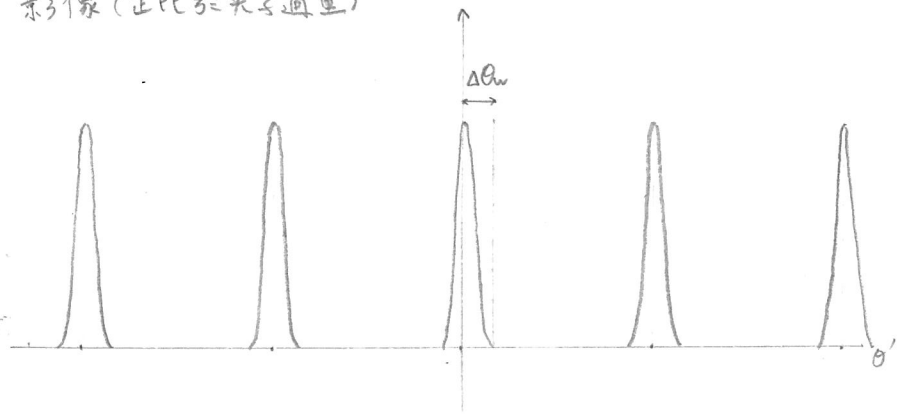
電波干涉儀二　影像形成

以光柵為例 理解干涉陣列 (Halliday 普物 §36-5)

≈

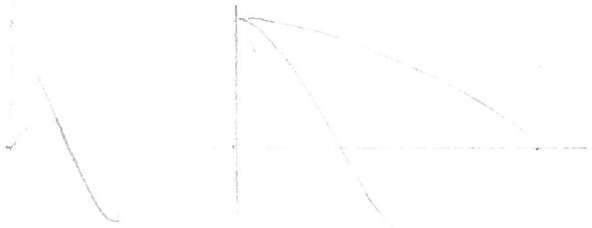


影像 (正比於光子通量)



極大間距: $B_{min}\sin\theta = m\lambda$, $m = 0, 1, 2, 3, \cdots$

條紋寬度: $\frac{1}{2}B_{max}\sin(\Delta\theta_w) = \frac{1}{2}\lambda$ (將整個寬度為 B_{max} 的光柵視為一單狹縫)



$$E_A = E_0\cos(kx - \omega t + \phi_0)$$

$$\langle (E_A + E_B + E_C + E_D + \cdots + E_G)^2 \rangle = \langle E_A^2 \rangle + \langle E_B^2 \rangle + \cdots + \langle E_G^2 \rangle + \langle 2E_AE_B \rangle + \langle 2E_AE_C \rangle + 2\langle E_AE_D \rangle + \cdots$$

$$\cos\theta\cos\phi = \frac{1}{2}\left(\cos(\theta-\phi) + \cos(\theta+\phi)\right)$$

因和差化積, cross-term 具有形式

$$\text{光子通量} \propto 2E_0^2 \langle \cos(kx - \omega t + \phi_0)\cos(k(x+\Delta x) - \omega t + \phi_0) \rangle$$

$$\propto \frac{1}{2}\langle \cos(k\Delta x) \rangle + \underbrace{\frac{1}{2}\langle \cos(2kx - 2\omega t + 2\phi_0 + k\Delta x) \rangle}_{=0}$$

$$\Delta x = nB_{min}\sin\theta'$$

$$\simeq \frac{1}{2}\left\langle \cos\left(2\pi\frac{nB_{min}}{\lambda}\theta'\right) \right\rangle$$ 在 $\frac{nB_{min}}{\lambda}\theta \sim m\pi$ 處形成極大

狹縫間距愈大, 干涉條紋間距愈小

$$\theta = m\frac{\pi\lambda}{nB_{min}}$$

光柵干涉條紋為所有這些項之線性疊加

1. 對於所有的 n, $\theta = 0$ 處總是相長干涉為主極大
2. $n=1$ 條紋的極大位置, 對於其它的 n 值, 亦為極大, e.g. $(n=1, m=5)$ 極大為 $(n=2, m=10)$ 或 $(n=3, m=15)$ 之極大
3. $n=1$ 的條紋之間, 易發生相消干涉, 而使光子通量在 B_{max} 大時趨近於 0

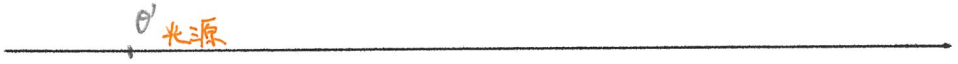
以光子通量表示繞射條紋, 考量所有的 E_iE_j pair, 其型式為 (忽略 auto-correlation)

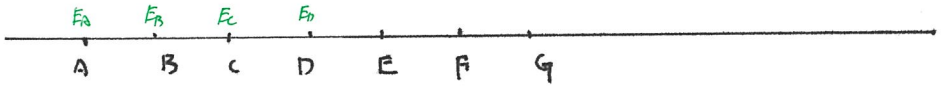
$$\frac{1}{2}\sum_{i,j}\cos\left(2\pi\frac{B_{ij}}{\lambda}\theta'\right) \equiv \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{M}\cos(2\pi u_k\theta') \quad \text{——— (1)}$$

B_{ij}: 狹縫 i 與 j 之間距

電波干涉儀二　影像形成

單一單色，無窮遠處之点光源





任意兩 antenna 測量的 cross-correlation 長時間平均

$$\langle E_i E_j \rangle_{cos} = \left\langle \cos\left(2\pi \frac{B_{ij}}{\lambda}\theta'\right)\right\rangle = \left\langle \int \underbrace{\delta(\theta-\theta')}_{\text{光源}} \cos(2\pi u_{ij}\theta)\, d\theta \right\rangle$$

$$\langle E_i E_j \rangle_{sin} = \left\langle \int \delta(\theta-\theta') \sin(2\pi u_{ij}\theta)\, d\theta \right\rangle$$

$$V_{ij} = \int \delta(\theta-\theta')\, e^{i 2\pi u_{ij}\theta}\, d\theta$$

對於任意光源及基線長度 u

$$V \equiv V(u) = \int A(\theta)\, e^{i2\pi u\theta}\, d\theta$$ 為 Fourier transform 之形式

在對於 u 有連續測量的情形下，
可藉由 inverse Fourier transform 由 $V(u)$ 回推光源強度分布

$$A(\theta') = \int_{-\infty}^{\infty} V(u)\, e^{-i2\pi u\theta'}\, du$$

若實測上只有由兩兩 antenna 非連續地給出 u_{ij}，
即只能測得 sampling function

$$S(u) = \sum_{k=1}^{M} \delta(u-u_k)$$

含蓋到的不連續 u_k 值，則 inverse Fourier transform $F.T.^{-1}$ 得到

影像

$$\underbrace{A^D(\theta')}_{\text{dirty image}} = \int S(u)V(u)\, e^{-2\pi i u\theta'}\, du$$

$$= \underbrace{\left(\int S(u)\, e^{-2\pi i u\theta'}\, du\right)}_{\text{dirty beam}\quad f(\tau)} * \underbrace{\left(\int V(u)\, e^{-2\pi i u\theta'}\, du\right)}_{A(\theta')\quad g(x-\tau)}$$

$\|$ (取實部) → u 無方向性，有 u 的測量即代表有 $-u$ 的測量，可以消掉虛部

$$\sum_{k=1}^{M} \int \delta(u-u_k) \cos(2\pi u\theta')\, du$$

$$= \sum_{k=1}^{M} \cos(2\pi u_k \theta') \quad \text{———} \quad (2)$$

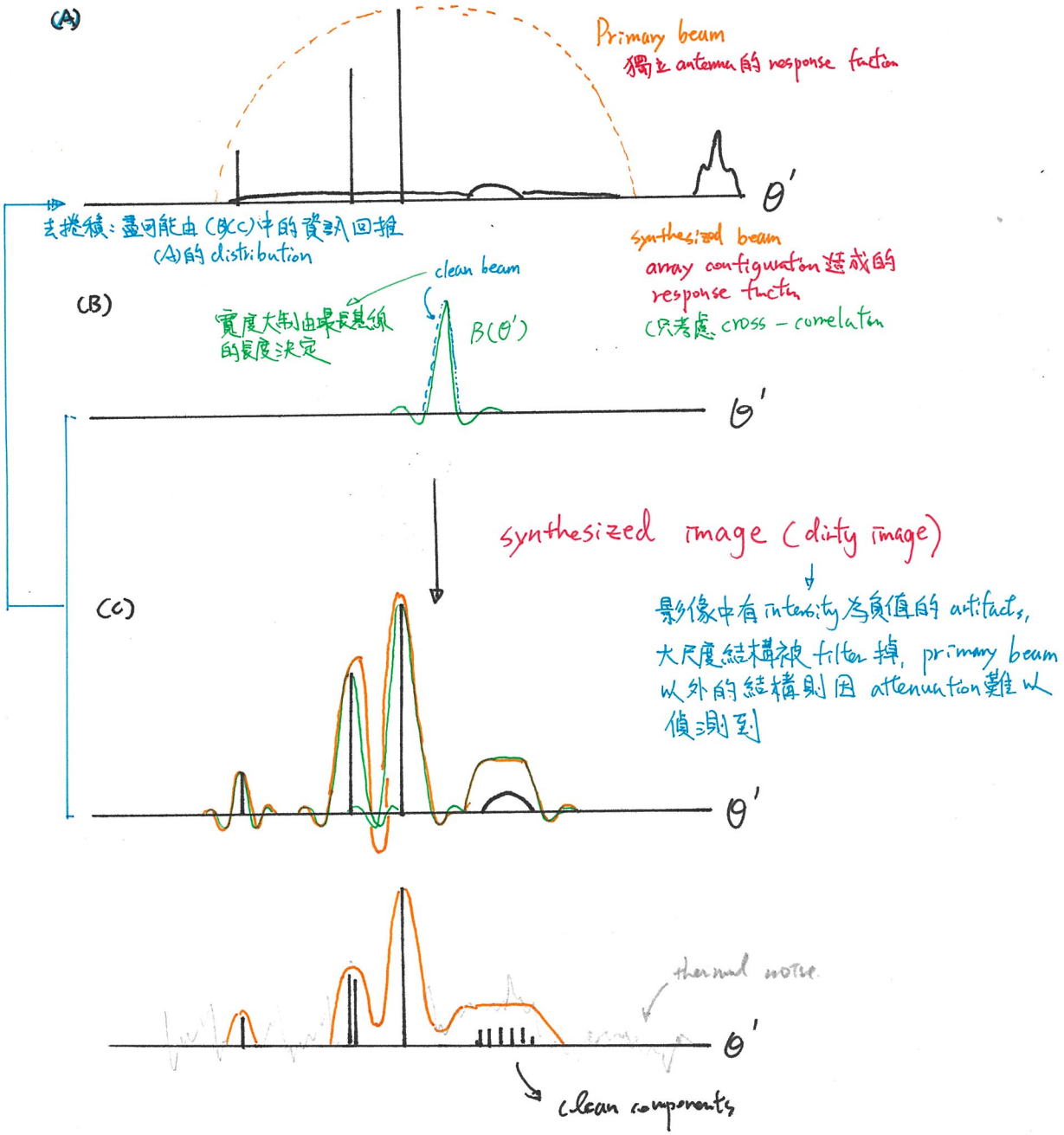
式(2)與式(1)數學型式相同.
此干涉儀之 point spread function
即為光柵之干涉條紋的數學型式

術語上稱為：dirty beam
主極大的寬度由最長的 baseline 的長度決定

此數學型式對天線任意的擺放方式皆成立.
擺放方式(位置)稱為 array configuration

dirty image 為我們做 $F.T.^{-1}$ 之後得到的，dirty beam 是從 array configuration 知道的，Imaging 的目的為依此資訊回推 $A(\theta)$

電波干涉儀二 Deconvolution (去捲積)



電波干涉儀community常用的去捲積演算法：CLEAN

Högbom algorithm

1. 在dirty image裡面找peak，如peak intensity為 I^D，位置為 θ'
2. 在dirty image裡減掉 $I^D \cdot \gamma \cdot (B * \delta(\theta-\theta'))$
   γ：loop gain，值≤1，一般介於0.05–0.1之間
3. 記錄此 $(I^D \cdot \gamma,\ \theta')$ 值，稱為clean components.
4. 回步驟一直到image中剩餘的peak低於某使用者設定之threshold
5. 將所有的clean components convolve clean beam，一般為2D Gaussian，由fit dirty beam而得其major/minor axes寬度。Convolved完之後的image再疊加上residual得到restored image.

※ clean components在Fourier transform之後才與直接測量的complex visibility吻合。Restored image不與complex visibility吻合，但容易正確了解angular resolution

↓

在有噪聲的情形，理論上無法解析比clean beam小的結構。

其它常用的演算法如Clark與Cotton–Schwab亦類似。

電波干涉儀二　噪聲簡介

auto-correlation
(對於單天線 i)

由噪聲源貢獻的隨机电場

若 noise 與光源無 correlation

power $\propto \langle (E_i + n_i)^2 \rangle = \langle E_i^2 \rangle + \langle n_i^2 \rangle + 2\underbrace{\langle E_i n_i \rangle}_{=0}$

$\propto (T_{Ai} + T_{sys\,i})\Delta\Omega$

↳ system temperature

T_A: antenna temperature.
T_{sys}: system temperature.　: 與光源與噪聲源貢獻同樣 power 之黑体之等效溫度

↳ 來源：大氣與光路本身的熱輻射, antenna sidelobe 接收的地面輻射, 光路設計間 loss 的等效表示, etc.

cross-correlation

power $\propto \langle (E_i + n_i)(E_j + n_j) \rangle$

$= \langle E_i E_j \rangle + \underbrace{\langle E_i n_j \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle n_i E_j \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle n_i n_j \rangle}_{=0}$

∴ cross correlation 長時間平均不受噪聲 bias (無系統性偏差)

噪聲之行為類似 random walk, 經歷長時間後之終端位置期望值為 0

机率分佈以方均根表示 (單位積分時間, 單位積分頻率, cross-correlation 之噪聲方均根)

$\propto \sigma^2 \propto \langle [(E_i + n_i)(E_j + n_j)]^2 \rangle - \langle E_i E_j \rangle^2 \overset{\text{high noise}}{\sim} \langle n_i^2 n_j^2 \rangle \propto T_{sys}^2$　if $n_i = n_j$

$1\ Jy = 10^{-26}\ \frac{W}{m^2\,Hz}$

經長時間與在一定的頻率範圍內積分, 由於 noise 互相 cancel 在噪聲遠大於光源強度的極限, noise (per visibility) 單一偏振可表為

用來把 T_{sys} 換回 flux density 單位之係數

標準差 $\Delta S_{ij}\,[Jy] = \frac{1}{\eta_s} \frac{T_{sys}/K}{\sqrt{2\,\Delta\tau\,\Delta\nu}}$

積分頻寬

積分時間

$\eta_s < 1$, 用以考量 electronics 或任何造成 cross-correlation 信号喪失之原因

Visibility $\begin{cases} \text{amplitude} & \sqrt{S_R^2 + S_I^2} \\ \text{phase} & \tan^{-1}(S_I / S_R) \end{cases}$

誤差可在假設為 Gaussian random noise 之情形下, 解析地估算

image 之中, intensity 之標準(誤)差

$$\Delta I_m = \frac{1}{\eta_s} \frac{T_{sys}/K}{\sqrt{2\,\Delta\nu\,\Delta\tau}\,\sqrt{\frac{1}{2}N(N-1)}}$$

N 個 antenna, 一共形成 C^N_2 個 baseline, 其 noise 互相 cancel 之結果

難以區分 intensity ~ ΔI_m 的信号為真的信号或是 thermal random noise

電波干涉儀二　大氣之影響及(等效) T_{sys} 之測量

毫米波受大氣熱輻射及消光之影響大，需在考量消光後計算等效之熱輻射

大氣之光學厚度：τ_{atm}

$-\frac{d}{ds}I = \kappa I$　定義 $d\tau = \kappa ds$

$\Rightarrow -\frac{d}{d\tau}I = I$

想像大量光子通過厚度為 ds 之大氣被擋下來，這些粒子擁有面積愈大，κ 愈大

消光係數：$G_{atm} = e^{-\tau_{atm}}$　[Equation of radiation transfer]

熱輻射(以等效溫度表示)　$T_B^{atm} = T_{atm}(1 - e^{-\tau_{atm}})$

若 $\tau_{atm} \to \infty$，則 $G_{atm} \to 0$，$T_B^{atm} \to T_{atm}$，黑体輻射

若 $\tau_{atm} \to 0$，則 $T_B^{atm} \sim T_{atm}\tau_{atm}$ (若大氣中可發光的粒子沒有多到可以互相遮擋，則總熱輻射強度正比於大氣溫度及總粒數

為方便在考量消光的情形下比較光源原始亮度與熱噪聲，即比較

$T_{soure} G_{atm} = T_{soure} e^{-\tau_{atm}}$ 與 $T_B^{atm} + T_{rec}$，

定義 $T_{sys}^{eff} = e^{\tau_{atm}}\left[(1-e^{-\tau_{atm}})T_{atm} + T_{rec}\right]$

effective system temperature. → ALMA 與 SMA community 直接稱此項為 system temperature

測量 T_{sys}：T_{sys} (或 T_{sys}^{eff}) 及 G_{atm} 為 unknown

觀測 blanck sky

$P_{CMB} = G_{atm}T_{CMB} + T_{sys} = G_{atm}(T_{CMB} + T_{sys}^{eff}) \Rightarrow (T_{sys}^{eff} + T_{CMB}) = \frac{P_{CMB}}{G_{atm}}$

$P_{BB} = T_{atm} + T_{rec} = T_{atm}G_{atm} + \underbrace{(1-G_{atm})T_{atm} + T_{rec}}_{T_{sys}}$

$= T_{atm}G_{atm} + G_{atm}T_{sys}^{eff}$

$= G_{atm}(T_{atm} + T_{sys}^{eff})$

溫度為 T_{atm} 黑体

直接把 $T = T_{atm}$ 之黑体擋在 receiver 之前

$\Rightarrow P_{BB} - P_{CMB} = G_{atm}(T_{atm} - T_{CMB})$

$$T_{sys}^{eff} = \underbrace{\frac{T_{atm} - T_{CMB}}{P_{BB} - P_{CMB}}}_{G_{atm}^{-1}} \cdot P_{CMB} - T_{CMB}$$

若 $T_{rec} \gg (1-e^{-\tau_{atm}})T_{atm}$，則把干涉儀數據乘上 $T_{sys}^{eff} \sim e^{\tau_{atm}}T_{rec}$ 可較正大氣消光之效果

T_{sys} application

然絕對的 absolute flux scale 仍需校正

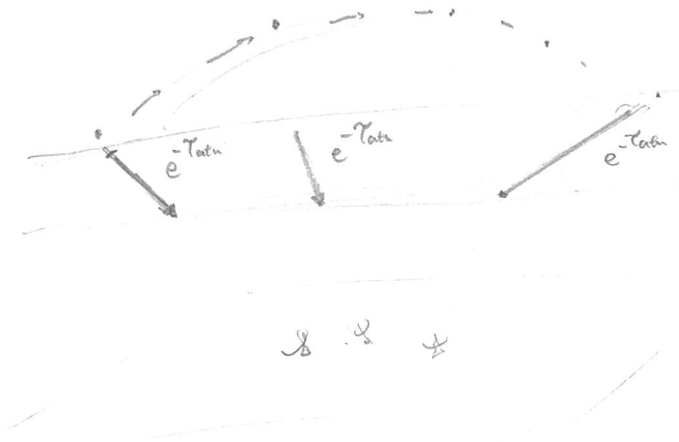
↳ 觀測絕對亮度已知之天体

電波干涉儀二 數據校正

1. 首先做 T_{sys}^{eff} application 修正在不同的仰角及天氣，大氣的 attenuation 對 cross-correlation 造成的偏差

2. 若為頻率解析之觀測，對一光譜為已知或好預測之光源做長時間觀測，以校正儀器在不同頻率響應之偏差。
   passband calibrator

3. 比較觀測中，絕對亮度已知之天体 (absolute flux calibrator) 與其它天体觀測之 visibility amplitude，得到 absolute flux calibration 之係數。

4. 藉由往復地對位置已知，亮度在觀測當晚約略不變之点光源 (gain calibrator) 與 target source 觀測，較正大氣擾動對 amplitude 及 phase 之影響

5. 完成校正後做 visibility 之複利葉反轉換，進行 deconvolution