Dạng 3. Đường tròn

Nhận dạng phương trình đường tròn. Tìm tâm và bán kính đường tròn

Cách 1:

- Đưa phương trình về dạng: $(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \;\; (1)P$
- Xét dấu biểu thức $P = a^2 + b^2 - c$

  Nếu $P > 0$ thì (1) là phương trình đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

  Nếu $P \le 0$ thì (1) không phải là phương trình đường tròn.

Cách 2: Đưa phương trình về dạng: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = P \;\; (2)$.

Nếu $P > 0$ thì (2) là phương trình đường tròn có tâm $I(a;b)$ và bán kính $R = \sqrt{P}$

Nếu $P \le 0$ thì (2) không phải là phương trình đường tròn.

Vị trí tương đối của điểm; đường thẳng; đường tròn với đường tròn

- Vị trí tương đối của điểm M và đường tròn (C)

  Xác định tâm I và bán kính R của đường tròn (C) và tính IM

  + Nếu $IM < R$ suy ra M nằm trong đường tròn
  + Nếu $IM = R$ suy ra M thuộc đường tròn
  + Nếu $IM > R$ suy ra M nằm ngoài đường tròn
- *Vị trí tương đối giữa đường thẳng Δ và đường tròn (C)*

  Xác định tâm I và bán kính R của đường tròn (C) và tính $d(I;\Delta)$

  + Nếu $d(I;\Delta) < R$ suy ra Δ cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt
  + Nếu $d(I;\Delta) = R$ suy ra Δ tiếp xúc với đường tròn
  + Nếu $d(I;\Delta) > R$ suy ra Δ không cắt đường tròn

Chú ý: Số nghiệm của hệ phương trình tạo bởi phương trình đường thẳng Δ và đường tròn (C) bằng số giao điểm của chúng. Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ.

- Vị trí tương đối giữa đường tròn (C) và đường tròn (C')

  Xác định tâm I, bán kính R của đường tròn (C) và tâm I', bán kính R' của đường tròn (C') và tính II', $R + R'$, $|R - R'|$

  + Nếu $II' > R + R'$ suy ra hai đường tròn không cắt nhau và ở ngoài nhau
  + Nếu $II' = R + R'$ suy ra hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau
  + Nếu $II' < |R - R'|$ suy ra hai đường tròn không cắt nhau và lồng vào nhau
  + Nếu $II' = |R - R'|$ suy ra hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau

\+ Nếu $\left|R - R'\right| < II' < R + R'$ suy ra hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt

Chú ý: Số nghiệm của hệ phương trình tạo bởi phương trình đường thẳng (C) và đường tròn (C') bằng số giao điểm của chúng. Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ.

Ví dụ 1 Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, viết đường tròn

1. Đi qua ba điểm: $M(-2;4)$, $N(5;5)$, $P(6;-2)$

2. Đi qua $A(3;4)$ và các hình chiếu của A lên các trục tọa độ.

3. Đi qua ba điểm H, M, N. Gọi H là chân đường cao kẻ từ B và M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Biết rằng: $A(0;2), B(-2;-2)$, $C(4;-2)$.

4. Tiếp xúc với trục hoành tại $A(2;0)$ khoảng cách từ tâm của (C) đến điểm $B(6;4)$ bằng 5.

Lời giải

1. Cách 1:

Gọi phương trình đường tròn (C) có dạng là: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$.

Do đường tròn đi qua ba điểm M, N, P nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4 + 16 + 4a - 8b + c = 0 \\ 25 + 25 - 10a - 10b + c = 0 \\ 36 + 4 - 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -20 \end{cases}$$

Vậy, phương trình đường tròn cần tìm là: $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$

Cách 2: Gọi $I(x;y)$ và R là tâm và bán kính đường tròn cần tìm

Vì $IM = IN = IP \Leftrightarrow \begin{cases} IM^2 = IN^2 \\ IM^2 = IP^2 \end{cases}$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y-4)^2 = (x-5)^2 + (y-5)^2 \\ (x+2)^2 + (y-4)^2 = (x-6)^2 + (y+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

2. Gọi A_1, A_2 lần lượt là hình chiếu của A lên hai trục Ox, Oy, suy ra $A_1(3;0)$, $A_2(0;4)$.

Giả sử $(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$.

Do $A, A_1, A_2 \in (C)$ nên ta có hệ: $\begin{cases} -6a-8b+c=-25 \\ -6a+c=-9 \\ -8b+c=-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{3}{2} \\ b=2 \\ c=0 \end{cases}$.

Vậy, phương trình $(C): x^2+y^2-3x-4y=0$.

3. Ta có $M(-1;0)$, $N(1;-2)$, $\overrightarrow{AC}=(4;-4)$.

Gọi $H(x;y)$, ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \\ H \in AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x+2)-4(y+2)=0 \\ 4x+4(y-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow H(1;1)$

Giả sử phương trình đường tròn có dạng: $x^2+y^2+ax+by+c=0$.

Ba điểm M, N, H thuộc đường tròn nên ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} a-c=1 \\ a-2b+c=-5 \\ a+b+c=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \\ c=-2 \end{cases}.$$

Phương trình đường tròn: $x^2+y^2-x+y-2=0$.

4. Gọi $I(a;b)$ và R lần lượt là tâm của và bán kính của (C)

Vì (C) tiếp xúc với Ox tại A nên $a=2$ và $R=|b|$

Mặt khác: $IB=5 \Leftrightarrow 4^2+(b-4)^2=5^2 \Leftrightarrow b=1, b=7$

Với $b=1$ thì phương trình đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-1)^2=1$.

Với $b=7$ thì phương trình đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-7)^2=49$.

Ví dụ 2 Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, viết đường tròn

1. Có tâm nằm trên đường thẳng $d: x-6y-10=0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng có phương trình $d_1: 3x+4y+5=0$ và $d_2: 4x-3y-5=0$.

2. có tâm nằm trên đường tròn $(C_1):(x-2)^2+y^2=\dfrac{4}{5}$ và tiếp xúc với hai đường thẳng $\Delta_1: x-y=0$ và $\Delta_2: x-7y=0$.

3. Đi qua $M(6;6)$ và tiếp xúc với hai đường thẳng $\Delta_1: 4x-3y-24=0$ và $\Delta_2: 4x+3y+8=0$.

4. Có tâm M nằm trên $d: x-y+3=0$, bán kính bằng 2 lần bán kính đường tròn (C) và (C) tiếp xúc ngoài với đường tròn $(C'):\ x^2+y^2-2x-2y+1=0$

Lời giải

1. Vì đường tròn cần tìm có tâm K nằm trên đường thẳng d nên gọi $K(6a+10;a)$

Mặt khác đường tròn tiếp xúc với d_1, d_2 nên khoảng cách từ tâm K đến hai đường thẳng này bằng nhau và bằng bán kính R suy ra

$\frac{|3(6a+10)+4a+5|}{5} = \frac{|4(6a+10)-3a-5|}{5}$ $|22a+35| = |21a+35| \Leftrightarrow a = 0$

hoặc $a = \frac{-70}{43}$

- Với $a=0$ thì $K(10;0)$ và $R=7$ suy ra $(C):(x-10)^2+y^2=49$
- Với $a = \frac{-70}{43}$ thì $K\left(\frac{10}{43};\frac{-70}{43}\right)$ và $R=\frac{7}{43}$ suy ra

$(C):\left(x-\frac{10}{43}\right)^2+\left(y+\frac{70}{43}\right)^2=\left(\frac{7}{43}\right)^2$

Vậy, có hai đường tròn thỏa mãn có phương trình là:

$(C):(x-10)^2+y^2=49$ và $(C):\left(x-\frac{10}{43}\right)^2+\left(y+\frac{70}{43}\right)^2=\left(\frac{7}{43}\right)^2$

2. Gọi $I(a;b)$ là tâm của đường tròn (C), vì $I\in(C_1)$ nên: $(a-2)^2+b^2=\frac{4}{5}$ $(*)$

Do (C) tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1,Δ_2 nên $d(I,\Delta_1)=d(I,\Delta_2)$

$$\Leftrightarrow \frac{|a-b|}{\sqrt{2}} = \frac{|a-7b|}{5\sqrt{2}} \Leftrightarrow b=-2a \text{ hoặc } a=2b$$

- $b=-2a$ thay vào $(*)$ ta có được: $(a-2)^2+4a^2=\frac{4}{5} \Leftrightarrow 5a^2-4a+\frac{16}{5}=0$ phương trình này vô nghiệm.
- $a=2b$ thay vào $(*)$ ta có: $(2b-2)^2+b^2=\frac{4}{5} \Leftrightarrow b=\frac{4}{5}, a=\frac{8}{5}$.

Suy ra $R=d(I,\Delta_1)=\frac{4}{5\sqrt{2}}$.

Vậy, phương trình $(C):\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+\left(y-\frac{4}{5}\right)^2=\frac{8}{25}$.

3. Gọi $I(a;b)$ là tâm và R là bán kính của đường tròn (C).

Vì (C) tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 nên ta có $d(I,\Delta_1)=d(I,\Delta_2)$

Hay $\frac{|4a-3b-24|}{5}=\frac{|4a+3b+8|}{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4a-3b-24=4a+3b+8\\4a-3b-24=-4a-3b-8\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}b=-\frac{16}{3}\\a=2\end{array}\right.$.

- $a=2$, phương trình $(C):(x-2)^2+(y-b)^2=\frac{(3b+16)^2}{25}$.

Do $M\in(C)$ nên $(6-2)^2+(6-b)^2=\frac{(3b+16)^2}{25} \Leftrightarrow b=3$ hoặc $b=\frac{87}{4}$

Suy ra phương trình $(C):(x-2)^2+(y-3)^2=25$ hoặc

$(C):(x-2)^2+\left(y-\frac{87}{4}\right)^2=\frac{4225}{16}$.

- $b=-\frac{16}{3}$, phương trình của (C): $(x-a)^2+\left(y+\frac{16}{3}\right)^2=\frac{(4a-8)^2}{25}$

Do $M\in(C)$ nên $(6-a)^2+\left(6+\frac{16}{3}\right)^2=\frac{(4a-8)^2}{25}$ phương trình vô nghiệm.

4. Đường tròn (C') có tâm $I(1;1)$ bán kính $R=1$

Ta có $M\in d \Rightarrow M(x;x+3)$.

Vì (C) và (C') tiếp xúc ngoài nên ta có $MI=3R \Leftrightarrow (x-1)^2+(x+2)^2=9$

$\Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=-2$ hoặc $x=1$.

Vậy có hai đường tròn thỏa yêu cầu bài toán là:

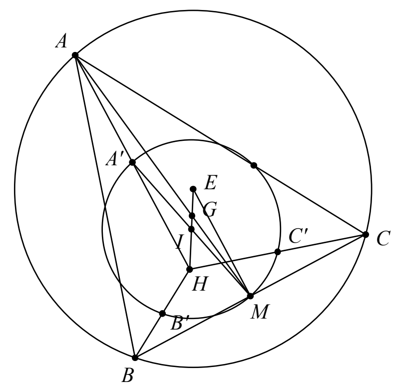
$(x-1)^2+(y-4)^2=4$ và $(x+2)^2+(y-1)^2=4$.

Ví dụ 3 Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, viết đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có trọng tâm $G(2;3)$. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Biết đường tròn đi qua ba trung điểm của ba đoạn thẳng HA, HB, HC có phương trình: $(x-1)^2+(y-1)^2=10$

Lời giải

Gọi (C) là đường tròn $(x-1)^2+(y-1)^2=10$, suy ra (C) có tâm $I(1;1)$, bán kính $R=\sqrt{10}$.

Ta có kết quả sau đây trong hình học phẳng:
"Trong tam giác, 9 điểm gồm trung điểm của ba cạnh, chân ba đường cao và ba trung điểm của các đoạn nối trực tâm với đỉnh nằm trên một đường tròn có tâm I, G, H thẳng hàng và $IH = 3IG$".
Gọi E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và M là trung điểm BC. Phép vị tự $V_{(G,-2)}: I \to E,\ M \to A$ và $M \in (C)$ nên ta có: $E(4;7)$ và $EA = 2IM = 2\sqrt{10}$



Vậy, phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là:

$$(x-1)^2 + (y-10)^2 = 40.$$

Ví dụ 4 Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$ và đường thẳng $d: 2x - y - 1 = 0$. Lập phương trình đường tròn (C') có tâm nằm trên d và hoành độ lớn hơn 2, đồng thời (C') cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho dây cung AB có độ dài bằng $4\sqrt{5}$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 3x - y + 15 = 0$.

Lời giải

Cách 1: Đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$, bán kính $R = 5$.

Gọi I' là tâm của đường tròn (C'), $I' \in d$ nên suy ra $I'(m; 2m-1), m > 2$ và R' là bán kính.

Ta có: $R' = d(I', \Delta) = \dfrac{|m+16|}{\sqrt{10}}$.

Gọi H là giao điểm của II' và AB, suy ra H là trung điểm của AB nên $AH = 2\sqrt{5}$.

Vì $IH + I'H = II'$ nên $\sqrt{R^2 - AH^2} + \sqrt{R'^2 - AH^2} = II'$ hoặc $\left|\sqrt{R^2 - AH^2} - \sqrt{R'^2 - AH^2}\right| = II'$

TH1: $\sqrt{R^2 - AH^2} + \sqrt{R'^2 - AH^2} = II'$

$\Leftrightarrow \sqrt{5}+\sqrt{\dfrac{(m+16)^2}{10}-20}=\sqrt{(m-1)^2+(2m-2)^2}$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{2}+\sqrt{m^2+32m+56}=5\sqrt{2}|m-1|$

$\Leftrightarrow m^2+32m+56=50\left(m^2-2m+2-2|m-1|\right)$

$\Leftrightarrow 49m^2-132m+44=100|m-1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}49m^2-232m+144=0\\ 49m^2-32m-56=0\end{array}\right. \Leftrightarrow m=4$ (do $m>2$).

TH2: $\left|\sqrt{R^2-AH^2}-\sqrt{R'^2-AH^2}\right|=II' \Leftrightarrow \left|5\sqrt{2}-\sqrt{m^2+32m+56}\right|=5\sqrt{2}|m-1|$

$\Leftrightarrow 50-10\sqrt{2(m^2+32m+56)}+m^2+32m+56=50m^2-100m+50$

$\Leftrightarrow 49m^2-132m-56+10\sqrt{2(m^2+32m+56)}=0\ (*)$

Do $m>2$ nên $49m^2-132m-56+10\sqrt{2(m^2+32m+56)}>32$ nên $(*)$ vô nghiệm.

Vậy, phương trình $(C'):(x-4)^2+(y-7)^2=40$.

Cách 2: (C) và (C') cắt nhau tại A,B nên $AB\perp d$ và $AB:x+2y+t=0$

Gọi H là trung điểm AB nên $AH=2\sqrt{5}$

ΔIAH vuông tại H nên $IH=\sqrt{5}=d(I,AB)$, từ đạy tìm được: $t=-8$ hoặc $t=2$

$*$ Với $t=2\Rightarrow AB:x+2y+2=0$. Tọa độ A,B thỏa mãn hệ phương trình:

$\begin{cases}x+2y+2=0\\ (x-1)^2+(y-1)^2=25\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x;y)=(-4;1)\\ (x;y)=(4;-3)\end{array}\right.$

(C') tiếp xúc với đường thẳng $\Delta:3x-y+15=0$ nên có: $I'A=d(I',\Delta)$

Tức là phải có: $\sqrt{(m+4)^2+(2m-2)^2}=\dfrac{|3m-2m+1+15|}{\sqrt{10}}$

$\Leftrightarrow 49m^2-32m-56=0$ không thỏa với $m>2$

$*$ $t=-8$, tìm được $A(-2;5),B(6;1)$ hoặc ngược lại.

(C') tiếp xúc với đường thẳng $\Delta:3x-y+15=0$ nên có: $I'A=d(I',\Delta)$

Tức là phải có: $49m^2-232m+144=0\Rightarrow m=4\Rightarrow I'(4;7)$

Vậy, phương trình $(C'):(x-4)^2+(y-7)^2=40$.

Ví dụ 5 Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy

1. Cho đường tròn (C): $x^2+y^2-4x+6y-12=0$. Lập phương trình đường thẳng đi qua $M(1;1)$ và cắt đường tròn (C) tại 2 điểm A,B sao cho $MA=2MB$.

2. **C**ho hai đường tròn: $(C): x^2+y^2-2x-2y+1=0$, $(C'): x^2+y^2+4x-5=0$ cùng đi qua $M(1;0)$. Viết phương trình đường thẳng qua M cắt hai đường tròn lần lượt tại A,B sao cho $MA=2MB$.

Lời giải

1. Gọi d là đường thẳng cần tìm có dạng $ax+by+c=0$, d đi qua $M(1;1)$

Suy ra $d: ax+by-a-b=0$.

Phương tích của điểm M đối với đường tròn :

$\overline{MA}.\overline{MB}=-8 \Leftrightarrow -MA.MB=-8 \Leftrightarrow MB=2 \Rightarrow AB=6$

Gọi H là trung điểm AB, ta có: $IH=\sqrt{R^2-AH^2} \Leftrightarrow \dfrac{|a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=4$

$$\Leftrightarrow 15a^2=-8ab \Leftrightarrow a=0 \text{ hoặc } 15a=-8b.$$

$*$ $a=0$ thì $d: y-1=0$ vì $b\neq 0$

$*$ $15a=-8b$ thì $d: 8x-15y+7=0$

Vậy, có 2 đường thẳng cần tìm: $y-1=0$ và $8x-15y+7=0$.

2. (C) có tâm $I(1;1)$, bán kính $R=1$ và (C') có tâm $I'(-2;0)$, bán kính $R'=3$.

Đường thẳng (d) đi qua M có phương trình:

$a(x-1)+b(y-0)=0 \Leftrightarrow ax+by-a=0, \left(a^2+b^2>0\right)$ $(*)$.

Gọi H,H' lần lượt là trung điểm AM,BM.

Khi đó: $MA=2MB \Leftrightarrow \sqrt{IA^2-IH^2}=2\sqrt{I'A^2-I'H'^2}$

$\Leftrightarrow 1-\left[d(I,d)\right]^2=4\left\{9-\left[d(I',d)\right]^2\right\}, IA>IH.$

$\Leftrightarrow 4\left[d(I',d)\right]^2-\left[d(I,d)\right]^2=35 \Leftrightarrow 4.\dfrac{9a^2}{a^2+b^2}-\dfrac{b^2}{a^2+b^2}=35$

$\Leftrightarrow \dfrac{36a^2-b^2}{a^2+b^2}=35 \Leftrightarrow a^2=36b^2 \Rightarrow a=\pm 6b$

$*$ Với $a=-6b \Rightarrow d: -6x+y+6=0$

$*$ Với $a=6b \Rightarrow d: 6x+y-6=0$

Vậy, có 2 đường thẳng cần tìm: $-6x+y+6=0$, $6x+y-6=0$

Ví dụ 6 Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, cho đường tròn

$(C):(x-1)^2+(y-2)^2=5$. Tìm tọa độ các đỉnh B,C,D của hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp trong (C), có $A(-1;3)$.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$, bán kính $R=\sqrt{5}$

Điểm C đối xứng A qua $I \Rightarrow C(3;1)$.

Đường thẳng BD đi qua I và vuông góc với AC nên nhận $\overrightarrow{AC}=(4;-2)$ làm vectơ pháp tuyến, suy ra $(BD):\ 2x-y=0$

Tọa độ điểm B,D là nghiệm của hệ: $\begin{cases}2x-y=0\\(x-1)^2+(y-2)^2=5\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=0,y=0\\x=2,y=4\end{array}\right.$

Vậy, $B(0;0)$, $C(3;1)$, $D(2;4)$ hoặc $B(2;4)$, $C(3;1)$, $D(0;0)$ thỏa bài toán.

Ví dụ 7 Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, cho $A(7;1)$, B và C là 2 điểm lần lượt thuộc đường thẳng $(d):\ 2x+y+7=0$ và $(d'):\ 4x+3y-27=0$. Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC, biết ΔABC có trọng tâm $G\left(\frac{7}{3};\frac{5}{3}\right)$

Lời giải

$B\in(d)\Rightarrow B(x_B;-7-2x_B)$, $C\in(d')\Rightarrow C\left(x_C;\frac{27-4x_C}{3}\right)$

Vì $G\left(\frac{7}{3};\frac{5}{3}\right)$ là trọng tâm ΔABC nên có:

$$\begin{cases}\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{7}{3}\\ \dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=\dfrac{5}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_B+x_C=0\\3x_B+2x_C=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_B=-3,y_B=-1\Rightarrow B(-3;-1)\\x_C=3,y_C=5\Rightarrow C(3;5)\end{cases}$$

Bài toán trở thành: "Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC, biết rằng $A(7;1)$, $B(-3;-1)$, $C(3;5)$".

Gọi $I(a;b)$ là tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Ta có: $\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 5a + b = 10 \end{cases} \Rightarrow I(2;0) \Rightarrow R = IA = 26$

Vậy, phương trình đường tròn cần tìm có tâm $I(2;0)$, bán kính $R = 26$

$$(x-2)^2 + y^2 = 26.$$

Ví dụ 8. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+2)^2=5$, $\widehat{ABC}=90^0, A(2;0)$ và diện tích tam giác ABC bằng 4. Tìm toạ độ đỉnh B, C.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$.

Vì ABC có $\widehat{ABC}=90^0 \Rightarrow C$ đối xứng A qua tâm $I(1;-2)$, nên $C(0;-4)$.

Phương trình đường thẳng (AC): $2x-y-4=0$

Diện tích tam giác ABC bằng 4, nên khoảng cách từ B đến cạnh AC là :

$$d=\frac{2S}{AC}=\frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Do đó B nằm trên đường thẳng $(d) \parallel (AC)$ nên phương trình (d):

$2x-y+m=0$. (d) cách AC một khoảng bằng $\frac{4}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{|4+m|}{\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow m=0$ hoặc $m=-8$.

* Với $m=0 \Rightarrow (d_1)$: $2x-y=0$, toạ độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x-y=0 \\ (x-1)^2+(y+2)^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=-\frac{6}{5} \\ y=-\frac{12}{5} \end{cases}.$$

* Với $m=-8 \Rightarrow (d_2)$: $2x-y-8=0$, toạ độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 2x-y-8=0 \\ (x-1)^2+(y+2)^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=\frac{16}{5} \\ y=-\frac{8}{5} \end{cases}$.

Vậy, toạ độ $C(0;-4)$, toạ độ B hoặc (0; 0) hoặc $\left(-\frac{6}{5};-\frac{12}{5}\right)$ hoặc $(2;-4)$ hoặc $\left(\frac{16}{5};-\frac{8}{5}\right)$

Ví dụ 9 Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, cho đường tròn (C): $x^2+y^2+2x-2y+1=0$. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) xuất phát từ $A(2;-3)$.

Lời giải

(C) có tâm $I(-1;1)$, bán kính $R=1$.

Ta thấy, $IA>R$ nên A nằm ngoài đường tròn.

Do đó qua A kẻ được 2 tiếp tuyến đến (C).

Đường thẳng Δ qua A có phương trình: $a(x+2)+b(y+3)=0$

Δ tiếp xúc (C) khi $d(I\ ;\ \Delta)=R \Leftrightarrow \dfrac{|a+4b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1 \Leftrightarrow 8ab+15b^2=0$

$\Leftrightarrow b(8a+15b)=0 \Leftrightarrow b=0$ hoặc $b=-\dfrac{8}{15}a$

* Với $b=0 \Rightarrow a(x+2)+0(y+3)=0 \Rightarrow x+2=0$ vì $a\neq 0$.
* Với $b=-\dfrac{8}{15}a \Rightarrow a(x+2)-\dfrac{8}{15}a(y+3)=0$ hay $15x-8y+6=0$ vì $a\neq 0$.

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa mãn đề bài: $x+2=0,\ 15x-8y+6=0$.

Ví dụ 10 Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, cho đường tròn (C): $(x-4)^2+y^2=4$ và điểm $E(4;1)$. Tìm tọa độ điểm M trên trục tung sao cho từ M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (C) với A, B là hai tiếp điểm sao cho đường thẳng AB đi qua E.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(4;0)$, bán kính $R=2$.

Gọi $M(0;m)$, giả sử $T(x;y)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến vẽ từ M tới (C).

Suy ra $\overrightarrow{MT}=(x;y-m)$, $\overrightarrow{IT}=(x-4;y)$.

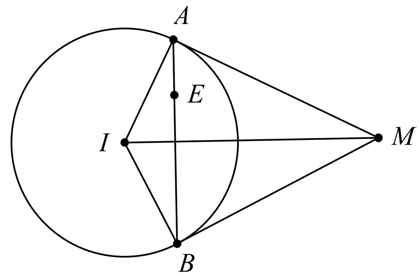
$\begin{cases} T \in (C) \\ \overrightarrow{MT}.\overrightarrow{IT} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - my = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow 4x - my - 12 = 0$

Do đó, phương trình đường thẳng $AB : 4x - my - 12 = 0$

AB đi qua $E \Leftrightarrow 16 - m - 12 = 0$

$\Leftrightarrow m = 4$. Vậy $M(0;4)$ là điểm cần tìm.



Ví dụ 11 Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, cho phương trình là $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ và đường thẳng d có phương trình là $3x + 4y - 1 = 0$. Gọi (C') là đường tròn có bán kính bằng 5 tiếp xúc với ngoài với (C) tại A và tiếp xúc với d tại B. Tính đoạn AB.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(2;-3)$, bán kính $R = 4$.

Gọi $I'(a;b)$, R' lần lượt là tâm và bán kính của (C'), suy ra $R' = 5$ và $II' = R + R' = 9$

Áp dụng định lí cô sin cho tam giác $AI'B$ ta có:

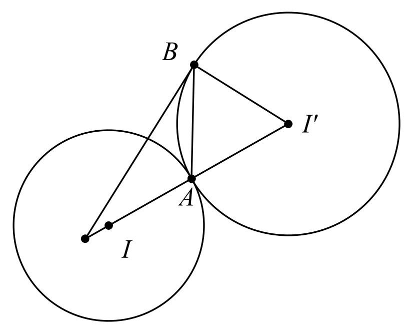
$AB^2 = I'A^2 + I'B^2 - 2.I'A.I'B.\cos\widehat{AI'B} = 50(1 - \cos\widehat{AI'B})$

Mà $\cos\widehat{AI'B} = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_\Delta}, \overrightarrow{I'I}\right)\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{n_\Delta}.\overrightarrow{I'I}\right|}{\left|\overrightarrow{n_\Delta}\right|.\left|\overrightarrow{I'I}\right|}$

$= \dfrac{|3(a-2) + 4(b+3)|}{5.9} = \dfrac{|3a + 4b + 6|}{45}$

Mặt khác: $d(I', \Delta) = 5 \Rightarrow \dfrac{|3a + 4b - 1|}{5} = 5$

$\Leftrightarrow 3a + 4b = 26$ hoặc $3a + 4b = -24$



- $3a + 4b = 26 \Rightarrow \cos\widehat{AI'B} = \dfrac{32}{45} \Rightarrow AB^2 = 50\left(1 - \dfrac{32}{45}\right) = \dfrac{130}{9} \Rightarrow AB = \dfrac{\sqrt{130}}{3}$
- $3a + 4b = -24 \Rightarrow \cos\widehat{AI'B} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow AB^2 = 50\left(1 - \dfrac{2}{5}\right) = 30 \Rightarrow AB = \sqrt{30}$

Ví dụ 12 Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, cho hai đường tròn (C_1): $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 9$ và $(C_2) : (x-7)^2 + (y+1)^2 = 4$. Chứng minh (C_1) và (C_2)

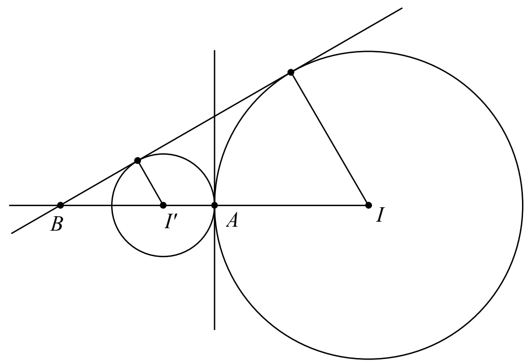
tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Viết phương trình tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) tại A. Gọi d là một tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) không đi qua A, đường thẳng d cắt đường thẳng nối hai tâm tại B. Tìm tọa độ điểm B.

Lời giải

Đường tròn (C_1) có tâm $I(3;2)$ và bán kính $R = 3$.

Đường tròn (C_2) có tâm $I'(7;-1)$ và bán kính $R' = 2$.

Gọi $A(x;y)$. Theo giả thiết ta có: $\frac{AI'}{AI} = \frac{R'}{R} \Leftrightarrow \overrightarrow{I'A} = -\frac{R'}{R}\overrightarrow{IA}$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 7 = -\frac{2}{3}(x-3) \\ y + 1 = -\frac{2}{3}(y-2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{27}{5} \\ y = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow A = \left(\frac{27}{5}; \frac{1}{5}\right)$$

Tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) tại A và vuông góc II' nên có véctơ pháp tuyến $\vec{n} = \overrightarrow{II'} = (4;-3)$, có phương trình: $4x - 3y - 21 = 0$.

Gọi $B(x_0;y_0)$, theo giả thiết ta có $\frac{BI'}{BI} = \frac{R'}{R}$

Suy ra $\overrightarrow{IB'} = \frac{R'}{R}\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 7 = \frac{2}{3}(x_0 - 3) \\ y_0 + 1 = \frac{2}{3}(y_0 - 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 15 \\ y_0 = -7 \end{cases} \Rightarrow B(15;-7)$.

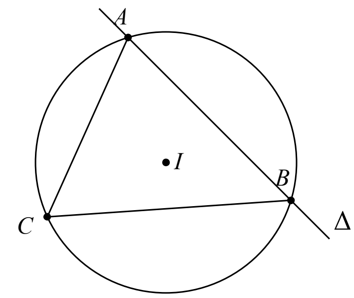
Ví dụ 13 Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, cho đường thẳng Δ: $x + y - 2 = 0$ và đường tròn $(T): x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$. Chứng minh rằng Δ cắt (T) tại hai điểm phân biệt A, B và tìm toạ độ nguyên của điểm C trên (T) sao cho tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{\sqrt{14}}{2}$.

Lời giải

Đường tròn (T) có tâm $I(1;-1)$, bán kính $R = 3$

Ta có $d(I,\Delta) = \sqrt{2} < R \Rightarrow \Delta$ và (T) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B

Và $AB = 2\sqrt{R^2 - d^2(I,\Delta)} = 2\sqrt{7}$.



Giả sử $C(x_0;y_0) \in (T) \Rightarrow (x_0-1)^2 + (y_0+1)^2 = 9 \quad (*)$

Diện tích tam giác ABC: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}d(C,AB).AB = \sqrt{7}.d(C,\Delta)$

Do đó, $S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{14}}{2} \Rightarrow d(C,\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Mà $d(C,\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|x_0 + y_0 - 2\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left|x_0 + y_0 - 2\right| = 1 \Leftrightarrow x_0 + y_0 - 2 = \pm 1$.

- $x_0 + y_0 - 2 = 1 \Rightarrow x_0 = 3 - y_0$ thay vào $(*)$, ta được:

$$(2-y_0)^2 + (y_0+1)^2 = 9 \Leftrightarrow y_0^2 - y_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow y_0 = -1 \text{ hoặc } y_0 = 2$$

Với $y_0 = -1 \Rightarrow x_0 = 4 \Rightarrow C(4;-1)$

Với $y_0 = 2 \Rightarrow x_0 = 1 \Rightarrow C(1;2)$

- $x_0 + y_0 - 2 = -1 \Rightarrow x_0 = 1 - y_0$ thay vào $(*)$ ta được:

$$(-y_0)^2 + (y_0+1)^2 = 9 \Leftrightarrow y_0 = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \text{ (lẻ).}$$

Vậy, $C(4;-1)$, $C(1;2)$ là tọa độ cần tìm.

Ví dụ 14 Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, cho cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) có phương trình : $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 10$. Điểm $M(0;2)$ là trung điểm cạnh BC và diện tích tam giác ABC bằng 12. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$, suy ra $\overrightarrow{MI} = (1;-1)$.

Vì BC đi qua M và vuông góc với MI nên $BC: x - y + 2 = 0$.

Tọa độ B,C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 10 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ x^2 = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, y=4 \\ x=-2, y=0 \end{array}\right.$

Suy ra $B(2;4), C(-2;0)$ hoặc $B(-2;0), C(2;4)$

Gọi $A(a;b)$, suy ra $(a-1)^2+(b-1)^2=10 \quad (*)$

Ta có: $d(A,BC)=\dfrac{|a-b+2|}{\sqrt{2}}, BC=4\sqrt{2} \Rightarrow S_{\Delta ABC}=2|a-b+2|$

Nên ta có $|a-b+2|=6 \Leftrightarrow a=b+4, a=b-8$.

- $a=b+4$ thay vào $(*)$ ta được: $(b+3)^2+(b-1)^2=10 \Leftrightarrow b^2+2b=0$

$\Leftrightarrow b=0, b=-2$

- $a=b-8$ thay vào $(*)$ ta có: $(b-9)^2+(b-1)^2=10$ vô nghiệm.

Vậy, $A(0;4)$ hoặc $A(2;-2)$.

Ví dụ 15 Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, cho hai đường tròn (C_1): $x^2+y^2=13$ và $(C_2):(x-6)^2+y^2=25$. Gọi A là giao điểm của (C_1) và (C_2) với $y_A<0$. Viết phương trình đường thẳng đi qua A và cắt (C_1), (C_2) theo 2 dây cung có độ dài bằng nhau.

Lời giải

Xét hệ: $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ (x-6)^2+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\pm 3 \end{cases} \Rightarrow A(2;-3), B(2;3)$.

Gọi Δ là đường thẳng cần lập.

- $\Delta \equiv AB$ thỏa yêu cầu bài toán
- $\Delta \neq AB$ giả sử Δ cắt hai đường tròn (C_1), (C_2) lần lượt tại M, N

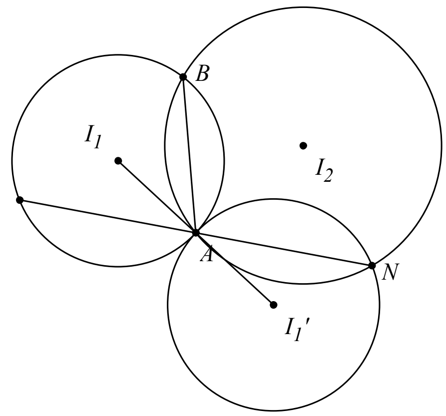
Phép đối xứng tâm A biến M thành N và (C_1) thành (C_3)

$M \in (C_1) \Rightarrow N \in (C_3) \Rightarrow N \in (C_2) \cap (C_3)$

$\Rightarrow (C_3): (x-4)^2 + (y+6)^2 = 13$.

Suy ra $N: \begin{cases} (x-4)^2 + (y+6)^2 = 13 \\ (x-6)^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

$\Rightarrow N\left(\dfrac{37}{5}; -\dfrac{24}{5}\right)$



Suy ra $\overrightarrow{AN} = \left(\dfrac{27}{5}; -\dfrac{9}{5}\right) \Rightarrow \Delta$ có $\vec{n} = (1;3)$ là VTPT.

Phương trình $\Delta: x + 3y + 7 = 0$.

Ví dụ 16 Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, cho cho ΔABC với $A(2;3)$, $B(2;1), C(6;3)$. Gọi D là giao điểm của đường phân giác trong góc $\widehat{BAC}$ với BC. Tìm tất cả các điểm M thuộc đường tròn (C): $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 25$ sao cho : $S_{MDC} = 2S_{ADB}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (0;2), \overrightarrow{AC} = (4;0), \overrightarrow{BC} = (4;2)$

Vì $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC} \Rightarrow D\left(\dfrac{10}{3}; \dfrac{5}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \left(-\dfrac{8}{3}; -\dfrac{4}{3}\right)$.

Phương trình $AB: x - 2 = 0$, nên

$d(D, AB) = \dfrac{4}{3} \Rightarrow S_{\Delta ABD} = \dfrac{1}{2}AB.d(D, AB) = \dfrac{1}{2}.2.\dfrac{4}{3} = \dfrac{4}{3}$

Phương trình $DC: x - 2y = 0$.

Gọi $M(a;b) \Rightarrow (a-3)^2 + (b-1)^2 = 25 \quad (*)$

Mặt khác: $S_{\Delta MCD} = 2S_{\Delta ABD} \Rightarrow \dfrac{1}{2}CD.d(M, CD) = \dfrac{8}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}.\dfrac{4}{3}\sqrt{5}.\dfrac{|a-2b|}{\sqrt{5}} = \dfrac{8}{3}$

$\Leftrightarrow |a-2b| = 4 \Leftrightarrow a = 2b + 4$ hoặc $a = 2b - 4$

- $a = 2b - 4$ thay vào $(*)$ ta có được: $(2b-7)^2 + (b-1)^2 = 25 \Leftrightarrow b^2 - 6b + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \Rightarrow a=-2 \Rightarrow M(-2;1) \\ b=5 \Rightarrow a=6 \Rightarrow M(6;5) \end{array}\right.$$

- $a=2b+4$ thay vào $(*)$ ta có được: $(2b+1)^2+(b-1)^2=25$

$\Leftrightarrow 5b^2+2b-23=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=\dfrac{-1+2\sqrt{29}}{5} \Rightarrow a=\dfrac{18+4\sqrt{29}}{5} \Rightarrow M\left(\dfrac{-1+2\sqrt{29}}{5};\dfrac{18+4\sqrt{29}}{5}\right) \\ b=\dfrac{-1-2\sqrt{29}}{5} \Rightarrow a=\dfrac{18-4\sqrt{29}}{5} \Rightarrow M\left(\dfrac{-1-2\sqrt{29}}{5};\dfrac{18-4\sqrt{29}}{5}\right) \end{array}\right.$$

Ví dụ 17 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2+y^2-2x+4y-20=0$ và đường thẳng $(d): 3x+4y-20=0$. Chứng minh d tiếp xúc với (C). Tam giác ABC có đỉnh A thuộc (C), các đỉnh B và C thuộc d, trung điểm cạnh AB thuộc (C). Tìm tọa độ các đỉnh A,B,C biết trực tâm của tam giác ABC trùng với tâm của đường tròn (C) và điểm B có hoành độ dương.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$ và bán kính $R=5$

$d(I,d)=\dfrac{|3-8-20|}{\sqrt{3^2+4^2}}=5=R$. Suy ra d tiếp xúc với (C)

Gọi H là tiếp điểm của (C) và d. Tọa độ H là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x+4y-20=0 \\ x^2+y^2-2x+4y-20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow H(4;2)$$

Do I là trực tâm ΔABC và $IH \perp BC \Rightarrow A \in IH$. Kết hợp $A \in (C) \Rightarrow$ là điểm đối xứng của H qua $I \Rightarrow \begin{cases} x_A=2x_I-x_H \\ y_A=2y_I-y_H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A=-2 \\ y_A=-6 \end{cases} \Rightarrow A(-2;-6)$

Gọi M là trung điểm cạnh AB. Do HA là đường kính nên $HM \perp AM$

Tam giác HAB có HM vừa là trung tuyến vừa là đường cao nên ΔHAB cân tại $H \Rightarrow HB=HA=2R=10$, $B \in d \Rightarrow B\left(b;\dfrac{20-3b}{4}\right)$.

$$HB=10 \Leftrightarrow \sqrt{(b-4)^2+\left(\dfrac{20-3b}{4}-2\right)^2}=10 \Leftrightarrow (b-4)^2+\left(\dfrac{20-3b}{4}-2\right)^2=100$$

$\Leftrightarrow (b-4)^2 + \left(\frac{12-3b}{4}\right)^2 = 100 \Leftrightarrow b^2 - 8b - 48 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=-4 \\ b=12 \end{array}\right.$. Do $x_B > 0 \Rightarrow B(12;-4)$

$c \in d \Rightarrow C\left(c;\frac{20-3c}{4}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \left(c+2;\frac{44-3c}{4}\right)$, $\overrightarrow{BI} = (-11;2)$

$AC \perp BI \Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BI} = 0 \Leftrightarrow -11(c+2) + 2\frac{44-3c}{4} = 0 \Leftrightarrow c = 0 \Rightarrow C(0;5)$