Dạng 2. Đường thẳng

Viết phương trình của đường thẳng.

- Để viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ ta cần xác định
  - Điểm $A(x_0;y_0)\in\Delta$
  - Một vectơ pháp tuyến $\vec{n}(a;b)$ của Δ

  Khi đó phương trình tổng quát của Δ là $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$
- Để viết phương trình tham số của đường thẳng Δ ta cần xác định
  - Điểm $A(x_0;y_0)\in\Delta$
  - Một vectơ chỉ phương $\vec{u}(a;b)$ của Δ

  Khi đó phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.
- Để viết phương trình chính tắc của đường thẳng Δ ta cần xác định
  - Điểm $A(x_0;y_0)\in\Delta$
  - Một vectơ chỉ phương $\vec{u}(a;b), ab\neq 0$ của Δ

  Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}$

Chú ý:

- Nếu hai đường thẳng song song với nhau thì chúng có cùng VTCP và VTPT.
- Hai đường thẳng vuông góc với nhau thì VTCP của đường thẳng này là VTPT của đường thẳng kia và ngược lại
- Phương trình đường thẳng Δ qua điểm $M(x_0;y_0)$ có dạng

  $$\Delta: a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \text{ với } a^2+b^2>0$$
- Phương trình đường thẳng đi qua $A(a;0), B(0;b)$ với $ab\neq 0$ có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng.

Để xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

$$d_1: a_1x+b_1y+c_1=0;\ d_2: a_2x+b_2y+c_2=0.$$

Ta xét hệ $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$ (I)

+ Hệ (I) vô nghiệm suy ra $d_1 \parallel d_2$.

+ Hệ (I) vô số nghiệm suy ra $d_1 \equiv d_2$
+ Hệ (I) có nghiệm duy nhất suy ra d_1 và d_2 cắt nhau và nghiệm của hệ là tọa độ giao điểm.

Chú ý: Với trường hợp $a_2.b_2.c_2 \neq 0$ khi đó:

+ Nếu $\dfrac{a_1}{b_1} \neq \dfrac{a_2}{b_2}$ thì hai đường thẳng cắt nhau.
+ Nếu $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ thì hai đường thẳng song song nhau.
+ Nếu $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ thì hai đường thẳng trùng nhau.

Ví dụ 1.

1. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc $0xy$, cho các đường thẳng $d_1 : x + y + 3 = 0,\ d_2 : x - y - 4 = 0,\ d_3 : x - 2y = 0$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên đường thẳng d_3 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng d_1 bằng hai lần khoảng cách từ M đến đường thẳng d_2

2. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường thẳng d_1: $3x + y + 5 = 0$, d_2: $3x + y + 1 = 0$ và điểm $I(1;-2)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua I và cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B sao cho $AB = 2\sqrt{2}$.

3. Trong mặt phẳng Oxy, tìm toạ độ các đỉnh của một tam giác vuông cân, biết đỉnh $C(3;-1)$ và phương trình của cạnh huyền là $3x - y + 2 = 0$.

Lời giải

1. Ta có $M \in d_3 \Rightarrow M(2m;m)$. Suy ra $d(M,d_1) = \dfrac{|3m+3|}{\sqrt{2}},\ d(M,d_2) = \dfrac{|m-4|}{\sqrt{2}}$

Theo giả thiết ta có: $d(M,d_1) = 2d(M,d_2) \Leftrightarrow \dfrac{|3m+3|}{\sqrt{2}} = 2.\dfrac{|m-4|}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3m+3 = 2m-8 \\ 3m+3 = -2m+8 \end{array}\right. \Leftrightarrow m = -11 \text{ hoặc } m = 1.$$

- Với $m = -11 \Rightarrow M(-22;-11)$.
- Với $m = 1 \Rightarrow M(2;1)$.

2. $A \in d_1 \Rightarrow A(a;-3a-5)$, $B \in d_2 \Rightarrow B(b;-3b-1)$

$\overrightarrow{IA} = (a-1;-3a-3) \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{IB} = (b-1;-3b+1)$

I, A, B thẳng hàng $\Rightarrow \overrightarrow{IB} = k\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow \begin{cases} b-1 = k(a-1) \\ -3b+1 = k(-3a-3) \end{cases}$

Nếu $a = 1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow AB = 4$ (không thỏa mãn)

Nếu $-3b+1 = \dfrac{b-1}{a-1}(-3a-3) \Leftrightarrow a = 3b-2$

$AB = \sqrt{(b-a)^2 + [3(a-b)+4]^2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow t^2 + (3t+4)^2 = 8$, với $t = b-a$

$\Leftrightarrow 5t^2 + 12t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = -2$ hoặc $t = -\dfrac{2}{5}$

Với $t = -2 \Rightarrow b - a = -2 \Rightarrow b = 2, a = 4 \Rightarrow \Delta: 5x + y - 3 = 0$

Với $t = -\dfrac{2}{5} \Rightarrow b - a = -\dfrac{2}{5} \Rightarrow b = \dfrac{6}{5}, a = \dfrac{8}{5} \Rightarrow \Delta: 13x + y - 11 = 0$

3. Gọi hai đỉnh còn lại là A, B. Toạ độ điểm C không thoả mãn phương trình cạnh huyền nên tam giác ABC vuông cân tại C.

Gọi I là hình chiếu vuông góc của C lên cạnh huyền (I là trung điểm của AB).

Phương trình đường thẳng CI là $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y+1}{-1} \Leftrightarrow x + 3y = 0$.

Toạ độ điểm I là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 3x - y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow I\left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{1}{5}\right)$

A, B nằm trên đường tròn tâm I, bán kính $CI = \sqrt{\dfrac{72}{5}}$ có phương trình:

$$\left(x + \frac{3}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{5}\right)^2 = \frac{72}{5}$$

Toạ độ hai điểm A, B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 3x - y + 2 = 0 \\ \left(x + \dfrac{3}{5}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{5}\right)^2 = \dfrac{72}{5} \end{cases}$.

Giải hệ ta được $(x;y) = \left(\dfrac{3}{5};\dfrac{19}{5}\right), \left(-\dfrac{9}{5};-\dfrac{17}{5}\right)$.

Vậy, toạ độ hai đỉnh cần tìm là : $(x;y) = \left(\dfrac{3}{5};\dfrac{19}{5}\right), \left(-\dfrac{9}{5};-\dfrac{17}{5}\right)$

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, cho tam giác ABC.

1. Xác định tọa độ đỉnh C, biết $H(-1;-1)$ hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB, đường phân giác trong của góc A có phương trình $x-y+2=0$ và đường cao kẻ từ B có phương trình $4x+3y-1=0$.

2. Xác định tọa độ đỉnh B,C. Phương trình đường trung trực d của cạnh BC, đường trung tuyến CC' lần lượt là $x+y-6=0$ và $2x-y+3=0$

3. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC cân tại C có phương trình cạnh AB là $x-2y=0$, điểm $I(4;2)$ là trung điểm của AB, điểm $M\left(4;\frac{9}{2}\right)$ thuộc cạnh BC, diện tích tam giác ABC bằng 10. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết tung độ điểm B lớn hơn hoặc bằng 3.

Lời giải

1. Kí hiệu $d_1: x-y+2=0,\ \ d_2: 4x+3y-1=0$.

Gọi H' là điểm đối xứng với H qua d_1. Khi đó $H' \in AC$.

Δ là đường thẳng đi qua H và vuông góc với d_1, nên có: $\Delta: x+y+2=0$

Gọi I là giao điểm của d_1 và Δ nên tọa độ I thỏa: $\begin{cases} x+y+2=0 \\ x-y+2=0 \end{cases} \Rightarrow I(-2;0)$

Vì I là trung điểm của HH' nên $H'(-3;1)$.

Đường thẳng AC đi qua H' và vuông góc với d_2 nên có phương trình : $3x-4y+13=0$.

AC cắt d_1 tại A. Tọa độ A là nghiệm hệ: $\begin{cases} x-y+2=0 \\ 3x-4y+13=0 \end{cases} \Rightarrow A(5;7)$

Do CH đi qua H và vuông với AH, suy ra phương trình của $CH: 3x+4y+7=0$

Tọa độ điểm C là nghiệm hệ : $\begin{cases} 3x+4y+7=0 \\ 3x-4y+13=0 \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{10}{3};\frac{3}{4}\right)$

2. Gọi $C(c;2c+3) \in CC'$. Khi đó: phương trình $BC: x-y+c+3=0$

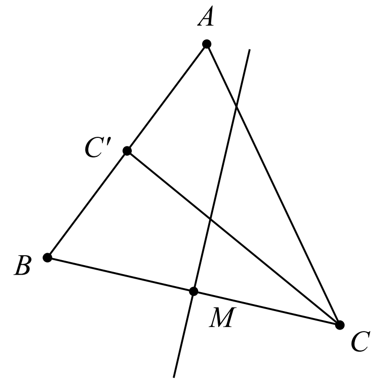
Gọi M là trung điểm của BC, suy ra

$$M:\begin{cases}x+y-6=0\\x-y+c+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3-c}{2}\\y=\dfrac{c+9}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow B(3-2c;6-c)\Rightarrow C'\left(4-c;4-\frac{c}{2}\right)$$

Vì $C'\in CC'$ nên $2(4-c)-\left(4-\dfrac{c}{2}\right)+3=0$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}c+7=0\Rightarrow c=\frac{14}{3}$$



Vậy, $B\left(-\dfrac{19}{3};\dfrac{4}{3}\right)$, $C\left(\dfrac{14}{3};\dfrac{37}{3}\right)$ là tọa độ cần tìm.

3. Gọi tọa độ điểm $B(2y_B;y_B), y_B\ge 3 \Rightarrow A(8-2y_B;4-y_B)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{20}\left|y_B-2\right|$

Gọi tọa độ điểm $C(x_C;10-2x_C)\Rightarrow\left|\overrightarrow{CI}\right|=\sqrt{5}\left|4-x_C\right|$

Diện tích tam giác ABC là : $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}CI.AB=10\Leftrightarrow\left|4y_B+2x_C-x_Cy_B-8\right|=2$

$\Leftrightarrow x_Cy_B-4y_B-2x_C=-6\ (1)$ hoặc $x_Cy_B-4y_B-2x_C=-10\ (2)$

Vì $M\in BC\Rightarrow\overrightarrow{CM}=k\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\begin{cases}4-x_C=k(2y_B-4)\\-\dfrac{11}{2}+2x_C=k\left(y_B-\dfrac{9}{2}\right)\end{cases}$

$\Rightarrow 2x_Cy_B-6y_B-5x_C+16=0\ (3)$

Từ (1) và (3): $\begin{cases}x_Cy_B-4y_B-2x_C=-6\\2x_Cy_B-6y_B-5x_C+16=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_B=-1-\sqrt{2}\\y_B=-1+\sqrt{2}\end{cases}$ không thỏa $y_B\ge 3$

Từ (2) và (3): $\begin{cases}x_Cy_B-4y_B-2x_C=-10\\2x_Cy_B-6y_B-5x_C+16=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_B=3\\x_C=2\end{cases}$

Vậy, tọa độ các đỉnh của tam giác ABC là: $A(2;1)$, $B(6;3)$, $C(2;6)$

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc $0xy$, cho ΔABC, biết:

1. $A(-2;1)$, $B(2;3)$, $C(1;-5)$. Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm D,G với D là chân đường phân giác trong góc A và G là trọng tâm của ΔABC

2. $A(4;-1)$, đường cao kẻ từ B có phương trình $\Delta: 2x-3y=0$, trung tuyến đi qua đỉnh C có phương trình $\Delta': 2x+3y=0$. Lập phương trình các cạnh của ΔABC

Lời giải

1. Gọi $D(x_D;y_D)$ là chân đường phân giác hạ từ A của ΔABC

Ta có $AB=\sqrt{(-2-2)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{5}$, $AC=\sqrt{(1+2)^2+(-5-1)^2}=3\sqrt{5}$

Do đó $\overrightarrow{BD}=\frac{AB}{AC}\overrightarrow{DC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D-2=\frac{2}{3}(1-x_D)\\ y_D-3=\frac{2}{3}(-5-y_D)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{8}{5}\\ y=\frac{-1}{5}\end{cases}\Rightarrow D\left(\frac{8}{5};-\frac{1}{5}\right)$

$G\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$ là trọng tâm của ΔABC

Ta có $\overrightarrow{DG}\left(-\frac{19}{15};-\frac{2}{15}\right)$ suy ra đường thẳng DG nhận $\vec{u}(19;2)$ làm VTCP nên có phương trình là $\begin{cases}x=\frac{1}{3}+19t\\ y=-\frac{1}{3}+2t\end{cases}$

2. Ta có AC đi qua $A(4;-1)$ và vuông góc với Δ nên nhận $\vec{u}(3;2)$ làm VTPT nên có phương trình là $3(x-4)+2(y+1)=0$ hay $3x+2y-10=0$

Suy ra toạ độ C là nghiệm của hệ : $\begin{cases}3x+2y-10=0\\ 2x+3y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\ y=-4\end{cases}\Rightarrow C(6;-4)$

Giả sử $B(x_B;y_B)$ suy ra trung điểm $I\left(\frac{x_B+4}{2};\frac{y_B-1}{2}\right)$ của AB thuộc đường thẳng Δ' do đó : $2.\frac{x_B+4}{2}+3.\frac{y_B-1}{2}=0$ hay $2x_B+3y_B+5=0$ (1)

Mặt khác $B\in\Delta$ suy ra $2x_B-3y_B=0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $B\left(-\frac{5}{4};-\frac{5}{6}\right)$

Ta có $\overrightarrow{AB}\left(-\frac{21}{4};\frac{1}{6}\right)$, $\overrightarrow{BC}\left(-\frac{31}{4};\frac{19}{6}\right)$.

Phương trình đường thẳng $AB: \begin{cases} x = 4 - \frac{21}{4}t \\ y = -1 + \frac{1}{6}t \end{cases}$, $BC: \begin{cases} x = 6 - \frac{31}{4}t' \\ y = -4 + \frac{19}{6}t' \end{cases}$

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm $I\left(\frac{1}{2};0\right)$. Phương trình đường thẳng AB ;à : $x - 2y + 2 = 0$ và $AB = 2AD$. Tìm tọa độ các đỉnh A,B,C,D; biết rằng A có hoành độ âm.

Lời giải

Cách 1:

- Dựng $IH \perp AB \Rightarrow AD = 2IH \Rightarrow AH = 2HI = 2d(I;AB) = \sqrt{5}$
- Xét tam giác vuông AIH : $AI^2 = AH^2 + HI^2 = \frac{25}{4}$
- Gọi $A(a;b)$, $a < 0$ thì $b = \frac{a+2}{2}$. Do $A \in AB$

Nên $IA^2 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+2}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow a = -2 \Rightarrow A(-2;0)$

Tương tự $B(2;2)$. Dựa vào tính chất trung điểm tìm được $C(3;0), D(-1;-2)$

Cách 2:

$(AB): x - 2y + 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{x+2}{2} = \frac{x}{2} + 1$

Gọi $A\left(a;\frac{a}{2}+1\right)$, $B\left(b;\frac{b}{2}+1\right)$, $a < 0$, $a \neq b$. I là trung điểm AC và BD nên

$C\left(1-a;-\frac{a}{2}-1\right)$, $D\left(1-b;-\frac{b}{2}-1\right)$

Từ tính chất hình chữ nhật : $\left.\begin{matrix} AC = BD \\ AB = 2AD \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = -b \\ a^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow A(-2;0)$, $B(2;2)$, $C(3;0)$, $D(-1;-2)$

Cách 3: Khoảng cách từ I đến AB là $IH = d(I;AB) = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow AD = 2IH = \sqrt{5}$

Và $IA = IB = \frac{5}{2} \Rightarrow A, B$ là các giao điểm của đường thẳng AB với đường tròn tâm I và bán kính $R = \frac{5}{2}$. Tọa độ A, B là nghiệm hệ $\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-2;0),\ B(2;2),\ C(3;0),\ D(-1;-2)$ là tọa độ cần tìm.

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, cho hình vuông $ABCD$, có tâm $I\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)$, phương trình cạnh AB là : $4x + 3y - 5 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D biết rằng C có hoành độ dương.

Lời giải

$(AB): 4x + 3y - 5 = 0 \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3} \Rightarrow A\left(a; -\frac{4}{3}a + \frac{5}{3}\right),\ B\left(b; -\frac{4}{3}b + \frac{5}{3}\right)$

Do I là giao điểm 2 đường chéo $\Rightarrow C\left(5 - a; \frac{4}{3}a + \frac{10}{3}\right),\ D\left(5 - b; \frac{4}{3}b + \frac{10}{3}\right)$

Theo tính chất hình vuông : $\begin{cases} BI \perp AC \\ BI = \frac{1}{2}AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ BI^2 = \frac{1}{4}AC^2 \end{cases} \quad (I)$

Mà $\overrightarrow{BI} = \left(\frac{5}{2} - b; \frac{4}{3}b + \frac{5}{6}\right); \overrightarrow{AC} = \left(5 - 2a; \frac{8}{3}a + \frac{5}{3}\right)$

Từ $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} (a - b)^2 = 25 \\ 50b^2 - 50b + 125 = \frac{1}{4}\left(2a^2 - 2a + 5\right) \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = 10 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = -1 \\ b = 7 \end{array}\right.$

Vậy, $\left[\begin{array}{l} A(2;-1), B(-1;3), C(3;6), D(6;2) \\ A\left(10; -\frac{35}{3}\right), B\left(7; -\frac{23}{3}\right), C\left(-5; \frac{50}{3}\right), D\left(-2; \frac{38}{3}\right) \end{array}\right.$

Mà $x_C > 0 \quad \Rightarrow A(2;-1), B(-1;3), C(3;6), D(6;2)$ là tọa độ cần tìm.

Ví dụ 6. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, cho ΔABC vuông tại A, phương trình đường thẳng BC là : $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$, các đỉnh A và B thuộc trục hoành và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 2. Tìm tọa độ trọng tâm G của ΔABC.

Lời giải

Cách 1 : Vì $B=(BC)\cap Ox$ nên $B(1;0)$

$(BC): y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}\Rightarrow$ hệ số góc của (BC) là $k=\tan\hat{B}=\sqrt{3}$

hay $\hat{B}=60^0\Rightarrow\hat{C}=30^0$

Giả sử $A(a;0), C\left(a;\sqrt{3}a-\sqrt{3}\right)\in(BC)$

Khi đó : $AB=r\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}\right)$ hay $|a-1|=2\left(1+\sqrt{3}\right)$.

TH1: $a-1=2\left(1+\sqrt{3}\right)\Rightarrow a=2\sqrt{3}+3\Rightarrow\begin{cases}A\left(2\sqrt{3}+3;0\right)\\C\left(2\sqrt{3}+3;6+2\sqrt{3}\right)\end{cases}$

Khi đó $G\left(\frac{7+4\sqrt{3}}{3};\frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right)$

TH2: $a-1=-2\left(1+\sqrt{3}\right)\Rightarrow a=-2\sqrt{3}-1\Rightarrow\begin{cases}A\left(-2\sqrt{3}-1;0\right)\\C\left(-2\sqrt{3}-1;-6-2\sqrt{3}\right)\end{cases}$

Khi đó $G'=\left(\frac{-1-4\sqrt{3}}{3};\frac{-6-2\sqrt{3}}{3}\right)$

Cách 2 : Phương trình đường (d_1) phân giác trong của góc A là : $y=-x+a$

Phương trình đường (d_2) phân giác trong của góc B là : $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Tọa độ tâm I_1 là giao điểm $(d_1),(d_2)$ nên $I\left(\frac{1+\sqrt{3}a}{1+\sqrt{3}};\frac{a-1}{1+\sqrt{3}}\right)$

Theo giả thiết : $d(I;AB)=d(I;Ox)=2\Rightarrow$ tìm $a\Rightarrow$ ycbt (Cách 1)

Cách 3: ta có $AB=|a-1|, AC=\sqrt{3}|a-1|, BC=2|a-1|$

$$\left.\begin{array}{l}S=\frac{1}{2}.AB.AC=\frac{\sqrt{3}}{2}(a-1)^2\\P=\frac{3|a-1|+\sqrt{3}|a-1|}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow r=\frac{S}{P}=\frac{|a-1|}{\sqrt{3}+1}=2\Rightarrow|a-1|=2\left(\sqrt{3}+1\right)$$

* $a=2\sqrt{3}+3\Rightarrow G\left(\frac{7+4\sqrt{3}}{3};\frac{6+\sqrt{3}}{3}\right)$

* $a=-2\sqrt{3}-1\Rightarrow G\left(\frac{-4\sqrt{3}-1}{3};\frac{-6-2\sqrt{3}}{3}\right)$

Cách 4 : Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC vì $r=2\Rightarrow y=\pm2$

Phương trình $BI: y = \tan 30^0 (x-1) = \frac{x-1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \pm 2 = \frac{x-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = 1 \pm 2\sqrt{3}$

* Nếu A và O khác phía đối với $B \Rightarrow x = 1 + 2\sqrt{3}$ và $d(I;AC) = 2 \Rightarrow a = x + 2$

$\Rightarrow G\left(\frac{7+4\sqrt{3}}{3}; \frac{6+\sqrt{3}}{3}\right)$

* Nếu A và O cùng phía đối với $B \Rightarrow x = 1 - 2\sqrt{3} \Rightarrow a = x - 2$

Ví dụ 7. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy

1. Cho ΔABC với $AB = \sqrt{5}$, đỉnh $C(-1;-1)$, đường thẳng (AB): $x + 2y - 3 = 0$ và trọng tâm G của ΔABC thuộc đường thẳng $x + y - 2 = 0$. Xác định tọa độ A, B của tam giác.

2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có phương trình cạnh AB: $x - 2y - 1 = 0$, đường chéo BD: $x - 7y + 14 = 0$ và đường chéo AC đi qua điểm $E(2;1)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.

Lời giải

1. Gọi I là trung điểm AB, $G(x_G; y_G)$ là tọa độ trọng tâm ΔABC

$$\Rightarrow \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CI} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{2x-1}{3} \\ y_G = \frac{2y-1}{3} \end{cases}$$

$G \in x + y - 2 = 0$ nên có: $\frac{2x-1}{3} + \frac{2y-1}{3} - 2 = 0$

Tọa độ điểm I thỏa mãn hệ: $\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ \frac{2x-1}{3} + \frac{2y-1}{3} - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(5;-1)$

Gọi $A(x_A; y_A) \Rightarrow IA^2 = (x_A - 5)^2 + (y_A + 1)^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$

Hơn nữa $A \in x + 2y - 3 = 0$ suy ra tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x_A + 2y_A - 3 = 0 \\ (x_A - 5)^2 + (y_A + 1)^2 = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 4 \\ y_A = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_A = 6 \\ y_A = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy, $A\left(4,-\dfrac{1}{2}\right), B\left(6;-\dfrac{3}{2}\right)$ hoặc ngược lại là tọa độ cần tìm.

2. $B = AB \cap BD \Rightarrow$ toạ độ điểm B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-2y-1=0 \\ x-7y+14=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow B=(7;\ 3)$$

Giả sử: $A=(2a+1;\ a)\in AB: 2-2y-1=0$,

$D(7d-14;\ d)\in BD: x-7y+14=0$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(6-2a;\ 3-a),\ \overrightarrow{BD}=(7d-21;\ d-3),\ \overrightarrow{AD}=(7d-2a-15;\ d-a)$

Vì $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0\Leftrightarrow(3-a)(15d-5a-30)=0\Leftrightarrow a=3$ (không thỏa)

hoặc $3d-a-6=0$

$\Rightarrow a=3d-6\Rightarrow\overrightarrow{AD}=(d-3;6-2d)$. Hơn nữa: $\overrightarrow{BC}=(x_C-7;\ y_C-3)$

$ABCD$ là hình chữ nhật nên

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\begin{cases} d-3=x_C-7 \\ 6-2d=y_C-3 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_C=d+4 \\ y_C=9-2d \end{cases}\Rightarrow C=(d+4;\ 9-2d)$$

$\Rightarrow\overrightarrow{EA}=(6d-13;\ 3d-7),\ \overrightarrow{EC}=(d+2;\ 8-2d)$ và $d\neq 3$

Lại có: $E(2;1)\in AC\Rightarrow\overrightarrow{EA},\ \overrightarrow{EC}$ cùng phương

$\Leftrightarrow(6d-13)(8-2d)=(d+2)(3d-7)\Leftrightarrow d^2-5d+6=0$

$\Leftrightarrow d=2\Rightarrow a=0\Rightarrow A(1;\ 0),\ B(7;\ 3),\ C(6;\ 5),\ D(0;\ 0)$

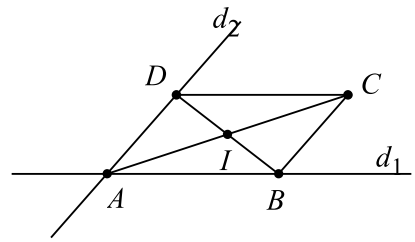
Vậy, $A(1;\ 0),\ B(7;\ 3),\ C(6;\ 5),\ D(0;\ 0)$ là các đỉnh của hình chữ nhật cần tìm.

Ví dụ 8. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: x+y-1=0$, $d_2: 3x-y+5=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình bình hành $ABCD$, biết $I(3;3)$ là giao điểm của hai đường chéo, hai cạnh của hình bình hành nằm trên hai đường thẳng d_1, d_2 và giao điểm của hai đường thẳng đó là một đỉnh của hình bình hành.

Lời giải

Tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x+y-1=0 \\ 3x-y+5=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$.

Ta giả sử $A(-1;2)$ và $AB\equiv d_1, AD\equiv d_2$, suy ra $C(7;4)$.



Gọi d là đường thẳng đi qua I và song song với AB, suy ra phương trình $d: x+y-6=0$.

Tọa độ giao điểm của d và AD:

$$\begin{cases} x+y-6=0 \\ 3x-y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{4} \\ y=\dfrac{23}{4} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{4};\frac{23}{4}\right)$$

M là trung điểm của AD. Khi đó $D\left(\frac{3}{2};\frac{19}{2}\right)$, suy ra $B\left(\frac{9}{2};-\frac{7}{2}\right)$.

Ví dụ 9. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc $0xy$

1. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh AB: $x-3y+5=0$, đường chéo BD: $x-y-1=0$ và đường chéo AC đi qua điểm $M(-9;2)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$.

2. Cho 3 đường thẳng $d_1: x-3y=0$, $d_2: 2x+y-5=0$, $d_3: x-y=0$. Tìm tọa độ các điểm $A\in d_1$, $B\in d_2$, $C, D\in d_3$ để tứ giác $ABCD$ là một hình vuông.

Lời giải

1. Tọa độ điểm B là nghiệm hệ phương trình: $\begin{cases} x-3y+5=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow B(4;3)$.

Gọi $A(-5+3a;a)\in AB \Rightarrow \overrightarrow{MA}=(4+3a;-2+a) \Rightarrow \overrightarrow{n_{AC}}=(2-a;4+3a)$

Ta có: $\overrightarrow{n_{AB}}=(1;-3)$, $\overrightarrow{n_{BD}}=(1;-1)$, $\overrightarrow{n_{AC}}=(2-a;4+3a)$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của AB, BD, AC. Hơn nữa $\widehat{ABD}=\widehat{BAC} \Rightarrow \cos\widehat{ABD}=\cos\widehat{BAC}$

Mà $\cos\widehat{ABD}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{10|a+1|}{\sqrt{10}\sqrt{(2-a)^2+(4+3a)^2}}$

Nên có: $\dfrac{10|a+1|}{\sqrt{10}\sqrt{(2-a)^2+(4+3a)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, bình phương 2 vế, rút gọn ta được phương trình: $a^2+2a-3=0 \Leftrightarrow a=-3$ hoặc $a=1$

* Với $a=-3$ không thỏa vì $AC \parallel BD$

$*$ Với $a=1\Rightarrow A\left(-2;1\right)$. Đường thẳng AD đi qua A và vuông góc với AB nên có phương trình : $3x+y+5=0$

Tọa độ điểm D là nghiệm của hệ : $\begin{cases}x-y-1=0\\3x+y+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}\Rightarrow D\left(-1;-2\right)$

Gọi $I\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ là trung điểm BD do đó I cũng là trung điểm $AC\Rightarrow C\left(5;0\right)$

Vậy, $A\left(-2;1\right)$, $B\left(4;3\right)$, $C\left(5;0\right)$, $D\left(-1;-2\right)$ là tọa độ cần tìm.

2. Gọi $B\left(b;5-2b\right)\in d_2$. Đường thẳng Δ_1 qua B và vuông góc d_3 cắt d_3 tại C.

Phương trình $\Delta_1: x+y+b-5=0$

Tọa độ của C là nghiệm hệ $\begin{cases}x-y=0\\x+y+b-5=0\end{cases}\Rightarrow C\left(\dfrac{5-b}{2};\dfrac{5-b}{2}\right)$

Đường thẳng $AB\parallel d_3$ nên có phương trình $x-y+5-3b=0$.

Tọa độ A là nghiệm hệ $\begin{cases}x-y+5-3b=0\\x-3y=0\end{cases}\Rightarrow A\left(\dfrac{9b-15}{2};\dfrac{3b-5}{2}\right)$

Đường thẳng Δ_2 qua A và vuông góc d_3 cắt d_3 tại D.

Phương trình $\Delta_1: x+y-6b+10=0$

Tọa độ của D là nghiệm của hệ $\begin{cases}x-y=0\\x+y-6b+10=0\end{cases}\Rightarrow D\left(3b-5;3b-5\right)$

ABCD là hình vuông $\Leftrightarrow AD=CD\Leftrightarrow 2b^2-9b+10=0\Leftrightarrow b=2$ hoặc $b=\dfrac{5}{2}$

$b=2\Rightarrow A\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right), B\left(2;1\right), C\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right), D\left(1;1\right)$ hoặc

$b=\dfrac{5}{2}\Rightarrow A\left(\dfrac{15}{4};\dfrac{5}{4}\right), B\left(\dfrac{5}{2};0\right), C\left(\dfrac{5}{4};\dfrac{5}{4}\right), D\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{5}{2}\right)$

Ví dụ 10. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc 0xy

1. Cho đường thẳng $\left(d\right)$: $x+2y-1=0$, $\left(d'\right)$: $3x+y-7=0$ cắt nhau tại I. Viết phương trình đường thẳng đi qua $M\left(1;2\right)$, đồng thời cắt 2 đường thẳng $\left(d\right)$ và $\left(d'\right)$ lần lượt tại A và B sao cho $AI=\sqrt{2}AB$.

2. Cho các điểm $A\left(1;0\right), B\left(-2;4\right), C\left(-1;4\right), D\left(3;5\right)$ và đường thẳng d: $3x-y-5=0$. Tìm điểm M trên $\left(d\right)$ sao cho hai tam giác MAB, MCD có diện tích bằng nhau.

Lời giải

1. Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+2y-1=0 \\ 3x+y-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow I(-3;2).$$

Lấy $H(1;0)\in(d)$ và $K\in(d')\Rightarrow K(a;-7-3a)$ sao cho $IH=\sqrt{2}KH$.

Ta có, $\overrightarrow{HI}=(-4;2)$ và $\overrightarrow{HK}=(-1+a;-7-3a)$

Mà $IH=\sqrt{2}KH \Leftrightarrow IH^2=KH^2 \Leftrightarrow 20=2\left[(a-1)^2+(7+3a)^2\right]\Rightarrow a=-2$

Ta có: $\begin{cases} AI=\sqrt{2}AB \\ IH=\sqrt{2}KH \end{cases} \Rightarrow \dfrac{IH}{AI}=\dfrac{HK}{AB}\Rightarrow HK \parallel AB$

Vậy, đường thẳng cần tìm là đường thẳng đi qua M và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{KH}=(3;1)$ có phương trình: $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{1}$.

2. $M(x;y)\in d \Leftrightarrow 3x-y-5=0$. $AB=5, CD=\sqrt{17}$

Ta có: $\overrightarrow{AB}(-3;4)\Rightarrow \overrightarrow{n_{AB}}(4;3)\Rightarrow$ phương trình đường thẳng $AB: 4x+3y-4=0$

$\overrightarrow{CD}(4;1)\Rightarrow \overrightarrow{n_{CD}}(1;-4)\Rightarrow$ phương trình đường thẳng $CD: x-4y+17=0$

$$S_{MAB}=S_{MCD}\Leftrightarrow AB.d(M,AB)=CD.d(M,CD)\Leftrightarrow 5\cdot\frac{|4x+3y-4|}{5}=\sqrt{17}\cdot\frac{|x-4y+17|}{\sqrt{17}}$$

$$\Leftrightarrow |4x+3y-4|=|x-4y+17|$$

Tọa độ M cần tìm là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x-y-5=0 \\ |4x+3y-4|=|x-4y+17| \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x-y-5=0 \\ 3x+7y-21=0 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x-y-5=0 \\ 5x-y+13=0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow M_1\left(\frac{7}{3};2\right), M_2(-9;-32)$$

Ví dụ 11. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc $0xy$

1. Cho tam giác ABC có diện tích bằng 96. Gọi $M(2;0)$ là trung điểm của AB, phân giác trong của góc A có phương trình: $(d): x-y-10=0$. Đường thẳng AB

tạo với (d) một góc φ thỏa mãn $\cos\varphi = \frac{3}{5}$. Xác định của các đỉnh của tam giác ABC.

2. Cho 3 điểm $A(1;1)$, $B(3;2)$, $C(7;10)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A sao cho tổng các khoảng cách từ B và C tới đường thẳng Δ lớn nhất.

Lời giải

1. M' đối xứng với $M(2;0)$ qua $(d): x - y - 10 = 0 \Rightarrow M'(10;-8)$.

Đường thẳng qua $M(2;0)$ với vectơ pháp tuyến $\vec{n}(a;b)$ có phương trình:

$a(x-2) + by = 0$ tạo với $(d): x - y - 10 = 0$ một góc

$$\varphi \Rightarrow \frac{|a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{2}} = \cos\varphi = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 7b \\ b = 7a \end{array}\right.$$

$*$ Với $a = 7b \Rightarrow (AB):\ 7x + y - 14 = 0$

AB cắt d tại $A \Rightarrow A(3;-7)$ và B đối xứng A qua $M \Rightarrow B(1;7)$

$$\Rightarrow AB = 10\sqrt{2} \Rightarrow S_{\Delta AM'B} = \frac{1}{2}AB.d[M', AB] = 48 = \frac{1}{2}S_{\Delta ABC} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM'}$$

$\Rightarrow C(17;-9)$

$*$ Với $b = 7a \Rightarrow (AB):\ x + 7y - 2 = 0$

AB cắt d tại $A \Rightarrow A(9;-1)$ và B đối xứng A qua $M \Rightarrow B(-5;1)$

$$\Rightarrow AB = 10\sqrt{2} \Rightarrow S_{\Delta AM'B} = \frac{1}{2}AB.d[M', AB] = 48 = \frac{1}{2}S_{\Delta ABC} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM'}$$

$\Rightarrow C(11;-15)$

Vậy, $A(3;-7), B(1;7), C(17;-9)$ hoặc $A(9;-1), B(-5;1), C(11;-15)$ là tọa độ cần tìm.

2. $*$ Nếu đường thẳng Δ cắt đoạn BC tại 1 điểm M. Khi đó:
$d[B,\Delta] + d[C,\Delta] \le BM + CM = BC$. Đẳng thức xảy ra khi đường thẳng Δ vuông góc với BC.

$*$ Nếu đường thẳng Δ không cắt đoạn BC. Gọi $I(5;6)$ là trung điểm BC.

Ta có: $d[B,\Delta] + d[C,\Delta] \le 2d[I,\Delta] \le 2AI$. Đẳng thức xảy ra khi đường thẳng Δ vuông góc với AI

Vì ΔABC nhọn nên $2AI > BC$, do đó $d\left[B,\Delta\right]+d\left[C,\Delta\right]$ lớn nhất khi và chỉ khi đường thẳng Δ đi qua A và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{AI}=(4;5)$

Đường thẳng cần tìm: $4(x-1)+5(y-1)=0$ hay $4x+5y-9=0$

Ví dụ 12. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc $0xy$, cho đường thẳng Δ: $x-2y-3=0$ và hai điểm $A(3;2)$, $B(-1;4)$.

1. Tìm điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất.

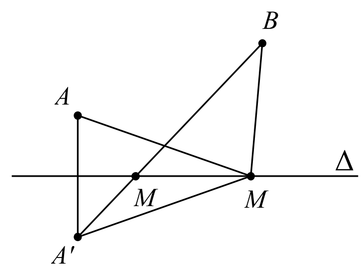
2. Viết phương trình đường thẳng d' sao cho đường thẳng $d:3x+4y+1=0$ là đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng d và d'.

Lời giải

1. Nhận thấy A và B nằm về một phía so với đường thẳng Δ. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua Δ. Khi đó với mọi điểm M thuộc Δ, luôn có: $MA=MA'$

Do đó: $MA+MB=A'M+MB\geq A'B$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M=A'B\cap\Delta$. Vì $A'A\perp\Delta$ nên AA' có phương trình: $2x+y-8=0$

Gọi $H=\Delta\cap AA'\Rightarrow H:\begin{cases}2x+y-8=0\\x-2y-3=0\end{cases}$



$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{19}{5}\\y=\dfrac{2}{5}\end{cases}\Rightarrow H\left(\dfrac{19}{5};\dfrac{2}{5}\right)$.

Vì H là trung điểm của AA' nên

$\begin{cases}x_{A'}=2x_H-x_A=\dfrac{23}{5}\\y_{A'}=2y_H-y_A=-\dfrac{6}{5}\end{cases}\Rightarrow A'\left(\dfrac{23}{5};-\dfrac{6}{5}\right)$

Suy ra $\overrightarrow{A'B}=\left(-\dfrac{28}{5};\dfrac{26}{5}\right)$, khi đó phương trình $A'B$: $13x+14y-43=0$

Tọa độ M thỏa hệ phương trình: $\begin{cases}x-2y-3=0\\13x+14y-43=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{16}{5}\\y=\dfrac{1}{10}\end{cases}$

$\Rightarrow M\left(\frac{16}{5};\frac{1}{10}\right)$

2. Gọi I là giao điểm của Δ và d nên tọa độ điểm I thỏa hệ phương trình :

$$\begin{cases} x-2y-3=0 \\ 3x+4y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow I(1;-1)$$

Vì d là phân giác của góc hợp bởi giữa hai đường thẳng Δ và d' nên d và d' đối xứng nhau qua d, do đó $I \in d'$.

Lấy $E(3;0) \in \Delta$, tìm được $F\left(\frac{3}{5};-\frac{16}{5}\right)$ là điểm đối xứng với E qua d và $F \in d'$

Suy ra $\overrightarrow{FI} = \left(\frac{2}{5};\frac{11}{5}\right)$, khi đó phương trình $d': 11x-2y-13=0$.

Ví dụ 13. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc $0xy$, cho tam giác ABC

1. $M(-1;-1), N(0;2)$ lần lượt là trung điểm của AB, AC và $D(1;0)$ là chân đường phân giác trong góc A. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác.

2. $M(1;4)$, $N(-1;3)$ là trung điểm của BC, CA và $H\left(\frac{1}{3};-\frac{5}{3}\right)$ là trực tâm tam giác ABC.

3. $D(2;-1), E(2;2), F(-2;2)$ là chân đường cao hạ từ A, B, C. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Lời giải

1. Gọi $A(a;b) \Rightarrow B(-2-a;-2-b), C(-a;4-b)$.

Suy ra $\overrightarrow{BD} = (a+3;b+2)$, $\overrightarrow{CD} = (a+1;b-4)$.

Vì B, C, D thẳng hàng nên $\frac{a+3}{a+1} = \frac{b+2}{b-4} \Leftrightarrow 3a-b+7=0 \Rightarrow b=3a+7 \quad (1)$.

Mặt khác D là chân đường phân giác trong góc A nên $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\right)$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right) = \cos\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\right) \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}}{AC} \quad (*)$$

Mà $\overrightarrow{AD}=(1-a;-b),\overrightarrow{AB}=(-2a-2;-2b-2),\overrightarrow{AC}=(-2a;4-2b)$

Nên $(*)\Leftrightarrow \dfrac{(a-1)(a+1)+b(b+1)}{\sqrt{(a+1)^2+(b+1)^2}}=\dfrac{(a-1)a+(b-2)b}{\sqrt{a^2+(b-2)^2}}$ (2)

Thay (1) vào (2) ta có: $\dfrac{a^2-1+(3a+7)(3a+8)}{\sqrt{(a+1)^2+(3a+8)^2}}=\dfrac{a^2-a+(3a+5)(3a+7)}{\sqrt{a^2+(3a+5)^2}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2a^2+9a+11}{\sqrt{2a^2+10a+13}}=\dfrac{2a^2+7a+7}{\sqrt{2a^2+6a+5}}$

$\Leftrightarrow (2a^2+9a+11)^2(2a^2+6a+5)-(2a^2+7a+7)^2(2a^2+10a+13)=0$

$\Leftrightarrow a^3+6a^2+12a+8=0\Leftrightarrow (a+2)(a^2+4a+4)=0\Leftrightarrow a=-2,b=1$.

Vậy, $A(-2;1),B(0;-3),C(2;3)$.

Gợi ý cách khác:

Gọi M' là điểm đối xứng của M qua AD và $AC\equiv M'N$

Gọi N' là điểm đối xứng của N qua AD và $AB\equiv MN'$

2. Gọi $C(x;y)\Rightarrow B(2-x;8-y)$, $A(-2-x;6-y)$

Vì $H\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{5}{3}\right)$ là trực tâm tam giác ABC nên $\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{MN}=0\end{cases}$ $(*)$

Mà $\overrightarrow{AH}=\left(\dfrac{7}{3}+x;-\dfrac{23}{3}+y\right)$, $\overrightarrow{BC}=(2x-2;2y-8)$,

$\overrightarrow{CH}=\left(\dfrac{1}{3}-x;-\dfrac{5}{3}-y\right)$, $\overrightarrow{MN}=(-2;-1)$

Nên $(*)\Leftrightarrow \begin{cases}\left(\dfrac{7}{3}+x\right)[2x-2]+\left(-\dfrac{23}{3}+y\right)(2y-8)=0 & (1)\\ 2\left(x-\dfrac{1}{3}\right)+y+\dfrac{5}{3}=0 & (2)\end{cases}$

$(2)\Leftrightarrow 2x+y+1=0\Rightarrow y=-1-2x$ thay vào (1) ta được :

$\left(\dfrac{7}{3}+x\right)(2x-2)+\left(\dfrac{26}{3}+2x\right)(10+4x)=0 \Leftrightarrow 15x^2+86x+123=0$

$\Leftrightarrow x=-3$ hoặc $x=-\dfrac{41}{15}$.

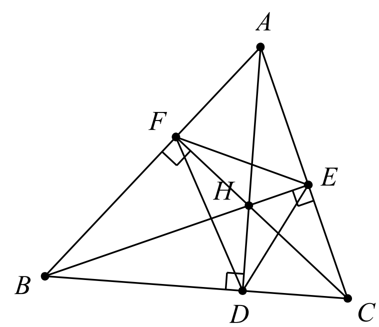
- $x=-3 \Rightarrow y=5 \Rightarrow A(1;1),\ B(5;3),\ C(-3;5)$
- $x=-\dfrac{41}{15} \Rightarrow y=\dfrac{67}{15} \Rightarrow A\left(\dfrac{11}{15};\dfrac{23}{15}\right),\ B\left(\dfrac{71}{15};\dfrac{53}{15}\right),\ C\left(-\dfrac{41}{15};\dfrac{76}{15}\right)$.

3. Gọi $H(a;b)$ là trực tâm tam giác ABC.

Ta có tứ giác BDHF, CDHE, BCEF là các tứ giác nội tiếp nên suy ra

$\widehat{HDF}=\widehat{HBF};\ \widehat{HDE}=\widehat{HCE};\ \widehat{HBF}=\widehat{HCE} \Rightarrow \widehat{HDF}=\widehat{HDE} \Rightarrow AH$ là phân giác trong góc $\widehat{EDF}$.

Tương tự, ta có BH là phân giác trong của góc $\widehat{DEF}$. Suy ra H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.



Ta có : $\begin{cases} \dfrac{\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{EF}}{EF}=\dfrac{\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{ED}}{ED} \\ \dfrac{\overrightarrow{FH}.\overrightarrow{FE}}{EF}=\dfrac{\overrightarrow{FH}.\overrightarrow{FD}}{FD} \end{cases}$, giải hệ này ta tìm được $a=1, b=1$ hay $H(1;1)$.

Suy ra $\overrightarrow{HD}=(1;-2)$ nên phương trình BC : $x-2y-4=0$.

$\overrightarrow{HE}=(1;1)$ nên phương trình AC : $x+y-4=0$

$\overrightarrow{HF}=(-3;1)$ nên phương trình AB : $3x-y+8=0$.

Vì $A=AB\cap AC \Rightarrow A:\begin{cases}3x-y+8=0\\ x+y-4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\ y=5\end{cases} \Rightarrow A(-1;5)$

Tương tự, ta tìm được $B(-4;-4), C(4;0)$.

Ví dụ 14. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc 0xy, cho điểm $A(3;2)$, các đường thẳng $d_1: x+y-3=0$ và: $d_2: x+y-9=0$. Tìm tọa độ điểm $B \in d_1$, và $C \in d_2$ sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Lời giải

Vì $B \in d_1: x+y-3=0$ nên $B(b;3-b)$, $C \in d_2: x+y-9=0$ nên $C(c;9-c)$.

Tam giác ABC vuông cân tại A khi và chỉ khi $\begin{cases} AB = AC \\ AB \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB^2 = AC^2 \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$

Hay $\begin{cases} (b-3)^2 + (b-1)^2 = (c-3)^2 + (c-7)^2 \\ (b-3)(c-3) + (b-1)(c-7) = 0 \end{cases}$.

Đặt $u = b-3, v = c-2$, ta có: $\begin{cases} u^2 + (u+2)^2 = (v-1)^2 + (v-5)^2 \\ u(v-1) + (u+2)(v-5) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (u+1)^2 = (v-3)^2 + 3 \\ uv - 3u + v - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \dfrac{3u+5}{u+1} \\ (u+1)^2 = \dfrac{4}{(u+1)^2} + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \dfrac{3u+5}{u+1} \\ (u+1)^2 = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 4 \end{cases} \begin{cases} u = -3 \\ v = 2 \end{cases}$

Vậy có hai cặp điểm thỏa yêu cầu bài toán là: $B(4;-1), C(6;3)$ hoặc $B(0;3), C(4;5)$.

Chú ý: Ngoài cách trên, ta có thể giải theo cách khác như sau:

Tịnh tiến hệ trục tọa độ Oxy về hệ tục XAY theo véc tơ $\overrightarrow{OA}$, ta có công thức dời trục: $\begin{cases} x = X + 3 \\ y = Y + 2 \end{cases}$.

Trong hệ trục mới, ta có phương trình của $d_1: X + Y + 2 = 0$, $d_2: X + Y - 4 = 0$.

Vì tam giác ABC vuông cân tại A nên phép quay $Q_{(A,\pm 90^0)}: B \to C$

Mà $B \in d_1 \Rightarrow C \in d_1' = Q_{(A;\pm 90^0)}(d_1)$, do đó $C \equiv d_2 \cap d_1'$.

- Xét phép quay $Q_{(A;90^0)}$, ta có phương trình $d_1': X - Y - 2 = 0$

Do đó tọa độ của C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} X - Y - 2 = 0 \\ X + Y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 3 \\ Y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$.

- Xét phép quay $Q_{(A;-90^0)}$, ta có phương trình $d_1': X - Y + 2 = 0$

Do đó tọa độ của C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} X - Y + 2 = 0 \\ X + Y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ Y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$.

Từ đó ta tìm được B, C.

Ví dụ 15. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang cân $ABCD$ có diện tích bằng 18, đáy lớn CD nằm trên đường thẳng có phương trình: $x - y + 2 = 0$. Biết hai đường chéo AC, BD vuông góc với nhau và cắt nhau tại điểm $I(3;1)$. Hãy viết phương trình đường thẳng BC biết điểm C có hoành độ âm.

Lời giải

ΔICD cân tại $I(3;1)$, $C(t; t+2) \in (d)$ với $t < 0$, $IC = \sqrt{2t^2 - 4t + 10}$,

$IH = d(I, CD) = 2\sqrt{2} \Rightarrow CI = 4 = \sqrt{2t^2 - 4t + 10} \Rightarrow t = 3$ (không thỏa) hoặc $t = -1 \Rightarrow C(-1;1)$

$H(a; a+2) \in (d)$, $\overrightarrow{IH} = (a - 3; a + 1)$, $\overrightarrow{IH} \perp \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow a - 3 + a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$

$H(1;3) \Rightarrow D(3;5) \Rightarrow CD = 4\sqrt{2}$

$(IC): y = 1$, $A(x;1) \in IC$ $\quad (x > 3) \Rightarrow IA = |x - 3|$ $\quad IK = |x - 3|\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AB = |x - 3|\sqrt{2}$

ΔIAB vuông cân

$S_{ABCD} = \dfrac{(AB + CD).(IH + IK)}{2} \Leftrightarrow 36 = \left(|x - 3|\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2} + |x - 3|\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 36 = \left(|x - 3| + 4\right)^2 \Leftrightarrow |x - 3| = 2 \Leftrightarrow x = 1$ (không thỏa) hoặc $x = 5 \Rightarrow A(5;1)$

$\left.\begin{matrix} AB \parallel d: x - y - 4 = 0 \\ DI: x = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow B(3;-1) = AB \cap DI \Rightarrow BC: x + 2y - 1 = 0$