

## HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TỌA ĐỘ OXY

### Dạng 1. Tọa độ vector

**1. Định nghĩa:** Hệ trục tọa độ gồm hai trục vuông góc  $Ox$  và  $Oy$  với hai vector đơn vị lần lượt là  $\vec{i}, \vec{j}$ . Điểm  $O$  gọi là *gốc tọa độ*,  $Ox$  gọi là *trục hoành* và  $Oy$  gọi là *trục tung*.

Kí hiệu  $Oxy$  hay  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

**2. Tọa độ điểm, tọa độ vector.**

+ Trong hệ trục tọa độ  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  nếu  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  thì cặp số  $(x; y)$  được gọi là tọa độ của vector  $\vec{u}$ , kí hiệu là  $\vec{u} = (x; y)$  hay  $\vec{u}(x; y)$ .  $x$  được gọi là hoành độ,  $y$  được gọi là tung độ của vector  $\vec{u}$

+ Trong hệ trục tọa độ  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , tọa độ của vector  $\overrightarrow{OM}$  gọi là tọa độ của điểm

$M$ , kí hiệu là  $M = (x; y)$  hay  $M(x; y)$ .  $x$  được gọi là hoành độ,  $y$  được gọi là tung độ của điểm  $M$ .

*Nhận xét:* Gọi  $H, K$  lần lượt là hình chiếu của  $M$  lên  $Ox$  và  $Oy$  thì  $M(x; y)$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK}$$

Như vậy  $\overrightarrow{OH} = x\vec{i}, \overrightarrow{OK} = y\vec{j}$  hay  $x = \overline{OH}, y = \overline{OK}$

**3. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng. Tọa độ trọng tâm tam giác.**

+ Cho  $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$  và  $M$  là trung điểm  $AB$ . Tọa độ trung điểm

$$M(x_M; y_M) \text{ của đoạn thẳng } AB \text{ là } x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

+ Cho tam giác  $ABC$  có  $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B), C(x_C; y_C)$ . Tọa độ trọng tâm

$$G(x_G; y_G) \text{ của tam giác } ABC \text{ là } x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

**4. Biểu thức tọa độ của các phép toán vector.**

Cho  $\vec{u} = (x; y); \vec{u}' = (x'; y')$  và số thực  $k$ . Khi đó ta có :

$$+ \vec{u} = \vec{u}' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

$$+ \vec{u} \pm \vec{v} = (x \pm x'; y \pm y')$$

$$+ k.\vec{u} = (kx; ky)$$

$$+ \vec{u}' \text{ cùng phương } \vec{u} (\vec{u} \neq \vec{0}) \text{ khi và chỉ khi có số } k \text{ sao cho } \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$

+ Cho  $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$  thì  $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$

**Ví dụ 1.** Cho các vector  $\vec{a} = (-2; 3), \vec{b} = (1; -2), \vec{c} = (-3; -5)$

1. Tìm các số  $m, n$  sao cho :  $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$

2. Tìm vector  $\vec{u}$  sao cho :  $\vec{a} \cdot \vec{u} = 15$  và  $\vec{b} \cdot \vec{u} = -11$

#### Lời giải

1. Ta có  $m\vec{a} = (-2m; 3m), n\vec{b} = (n; -2n) \Rightarrow m\vec{a} + n\vec{b} = (-2m + n; 3m - 2n)$

$$\text{Vậy } \vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m + n = -3 \\ 3m - n = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 11 \\ n = 19 \end{cases}$$

2. Gọi  $\vec{u}(x; y)$

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{u} = 15 \\ \vec{b} \cdot \vec{u} = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3y = 15 \\ x - 2y = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = (3; 7)$$

**Ví dụ 2.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy

1. Cho  $A(2; 2), B(5; -2)$ . Tìm trên trục hoành điểm  $C$  để  $\triangle ABC$  vuông.

2. Tìm trên trục hoành điểm  $A$ , cách  $B(2; -3)$ , một khoảng bằng 5.

3. Tìm trên trục tung điểm  $C$  cách điểm  $D(-8; 13)$  một khoảng bằng 17.

4. Tìm điểm  $M$  trên trục tung cách đều 2 điểm  $A(-1; 3)$  và  $B(1; 4)$ .

#### Lời giải

1. Gọi  $C(x_0; 0) \in Ox \Rightarrow \overrightarrow{AC} = (x_0 - 2; -2), \overrightarrow{BC} = (x_0 - 5; 2), \overrightarrow{AB} = (3; -4)$

$$* \triangle ABC \text{ vuông tại } A \Leftrightarrow AB \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow C\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$$

$$* \triangle ABC \text{ vuông tại } B \Leftrightarrow AB \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow C\left(\frac{22}{3}; 0\right)$$

$$* \triangle ABC \text{ vuông tại } C \Leftrightarrow CA \perp CB \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow C(1; 0), C(6; 0)$$

2. Gọi  $A(x_0; 0) \in Ox \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2 - x_0; -3), AB = 5$

$$\Leftrightarrow (2 - x_0)^2 + (-3)^2 = 5^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ x_0 = 6 \end{cases} \Rightarrow A(-2; 0), A(6; 0)$$

3. Gọi  $C(x_0; y_0) \in Oy : \overrightarrow{CD} = (-8; 13 - y), CD = 17$

$$\Leftrightarrow (13 - y_0)^2 + (-8)^2 = 17^2 \Rightarrow \begin{cases} y_0 = -2 \\ y_0 = 28 \end{cases} \Rightarrow C(0; -2), C(0; 28)$$

4. Gọi  $M(0; y_0) \in Oy$ . Khi đó :  $MA = MB \Leftrightarrow MA^2 = MB^2$

$$\Leftrightarrow (-1)^2 + (3 - y_0)^2 = 1^2 + (4 - y_0)^2 \Rightarrow y_0 = \frac{7}{2} \Rightarrow M\left(0; \frac{7}{2}\right)$$

**Ví dụ 3.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy, cho điểm  $A(4; 2)$ . Tìm tọa độ điểm B sao cho

1. OAB là tam giác đều,  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = 60^\circ$ .

2. OAB là tam giác cân,  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = 45^\circ$

#### Lời giải

1. Ta có :  $\tan(Ox; OA) = \tan(\alpha + 60^\circ) = \frac{\tan \alpha + \tan 60^\circ}{1 - \tan \alpha \cdot \tan 60^\circ}$

$$\tan \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan(Ox; OA) = \frac{1 + 2\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$$

$$\text{Từ đó : } (OB) : y = \left( \frac{1 + 2\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \right) x \Rightarrow B \left( x_0; \frac{1 + 2\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} x_0 \right)$$

$$\text{Khi đó } OA = OB \Leftrightarrow x_0^2 + \left( \frac{1 + 2\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} x_0 \right)^2 = 20 \Leftrightarrow x_0^2 = (2 - \sqrt{3})^2$$

$$\text{Vì } y_0 > 0 \Rightarrow x_0 > 0 \Rightarrow x_0 = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow B(1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3})$$

2. Tương tự  $\tan(Ox; OB) = \tan(\alpha + 45^\circ) = \frac{\tan \alpha + \tan 45^\circ}{1 - \tan \alpha \cdot \tan 45^\circ} = 3$

$\Rightarrow (OB) : y = 3x$ . (AB) đi qua A và vuông góc OA nên (AB) có phương trình :

$$4(x - 4) + 2(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 10 = 0$$

$$B \text{ là giao điểm } OB \text{ và } AB \text{ nên } B : \begin{cases} y = 3x \\ 2x + y - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(2; 6)$$

**Ví dụ 4.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy, cho  $\triangle ABC$  biết  $A(1; 1); B(-3; -2); C(0; 1)$ .

1. Tìm tọa độ trực tâm H của  $\triangle ABC$  ;

2. Tìm tọa độ chân đường cao  $A'$  vẽ từ A.

**Lời giải**

$$1. \text{ Gọi } H(x; y) \text{ là trực tâm } \triangle ABC \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \quad (I)$$

$$\overrightarrow{AH} = (x-1; y-1), \overrightarrow{BH} = (x+3; y+2), \overrightarrow{BC} = (3; 3), \overrightarrow{AC} = (-1; 0)$$

$$\text{Khi đó (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x-1) + 3(y-1) = 0 \\ -(x+3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow H(-3; 5)$$

$$2. \text{ Gọi } A'(a; b) \text{ là chân đường cao } AA' \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \text{ và } \overrightarrow{BA'} \text{ cùng phương } \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AA'} = (a-1; b-1), \overrightarrow{BA'} = (a+3; b+2), \overrightarrow{BC} = (3; 3)$$

$$\text{Khi đó, ta có hệ: } \begin{cases} 3(a-1) + 3(b-1) = 0 \\ 3(b+2) - 3(a+3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow A'\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

**Ví dụ 5.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy, cho  $A(2; 1)$ ,  $B(3; -1)$ ,  $C(-2; 3)$ . Tìm điểm  $E \in Oy$  để ABEC là hình thang có 2 đáy AB và CE với K là giao điểm K của AC và BE.

**Lời giải**

$$\bullet \text{ Gọi } E(0; e) \in Oy$$

$$ABEC \text{ là hình thang có 2 đáy AB và CE} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \text{ cùng phương } \overrightarrow{CE} \quad (*)$$

$$\overrightarrow{AB} = (1; -2), \overrightarrow{CE} = (2; e+3). \text{ Thì } (*) \Leftrightarrow e+3+4=0 \Rightarrow e=-7 = E(0; -7)$$

$$\bullet \text{ } K = AC \cap BE \Rightarrow A, C, K \text{ thẳng hàng và } B, E, K \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AK} \\ \overrightarrow{BE} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BK} \end{cases} \quad (**)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-4; -4), \overrightarrow{AK} = (x_K - 2; y_K - 1), \overrightarrow{BE} = (-3; -6), \overrightarrow{BK} = (x_K - 3; y_K + 1)$$

$$\text{Khi đó } (**) \Leftrightarrow \begin{cases} -4(y_K - 1) + 4(x_K - 2) = 0 \\ -3(y_K + 1) + 6(x_K - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K - y_K = 1 \\ 2x_K - y_K = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_K = 6 \\ y_K = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow K(6; 5)$$

**Ví dụ 6.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy

1. Cho  $A(3; 0)$  và  $C(-4; 1)$  là đỉnh đối nhau của hình vuông. Tìm 2 đỉnh còn lại.

2. Cho  $A(2; -1)$  và  $B(-1; 3)$  là 2 đỉnh liên tiếp hình vuông. Tìm 2 đỉnh còn lại.

3. Cho  $A(2;4); B(1;1)$ . Tính tọa độ  $C, D$  biết  $ABCD$  là hình vuông.

**Lời giải**

1. Gọi  $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$  là trung điểm  $AC$ , gọi  $B(a;b)$

$$\text{Ta có } \begin{cases} BI \perp AC \\ BI = \frac{1}{2}AC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ BI^2 = \frac{1}{4}AC^2 \end{cases} \text{ (I), trong đó } \overrightarrow{BI} = \left(a + \frac{1}{2}; b - \frac{1}{2}\right), \overrightarrow{AC} = (-7; 1)$$

$$\text{Từ (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} -7\left(a + \frac{1}{2}\right) + b - \frac{1}{2} = 0 \\ \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(5\sqrt{2})^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + a = 0 \\ b = 7a + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, y = 4 \\ a = -1, b = -3 \end{cases}$$

Vậy  $B(0;4)$  hoặc  $B(-1;-3)$ ;  $D(0;4)$  hoặc  $D(-1;-3)$

2. Gọi  $C(c;d)$  là đỉnh đối diện  $A$ . Ta có  $\begin{cases} AB = BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB^2 = BC^2 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \end{cases} \text{ (II)}$

$$\overrightarrow{AB} = (-3; 4), \overrightarrow{BC} = (c+1; d-3)$$

$$\text{(II)} \Leftrightarrow \begin{cases} (c+1)^2 + (d-3)^2 = 25 \\ -3(c+1) + 4(d-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3, d = 6 \\ c = -5, d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(3;6) \\ C(-5;0) \end{cases}$$

Vì  $ABCD$  là hình vuông  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$$* \ C(3;6), \text{ ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{BC} = (4; -3) \\ \overrightarrow{AD} = (x-2; y+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2 = 4 \\ y+1 = 3 \end{cases} \Rightarrow D(6;2)$$

$$* \ C(-5;0), \text{ ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{BC} = (-4; -3) \\ \overrightarrow{AD} = (x-2; y+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2 = -4 \\ y+1 = -3 \end{cases} \Rightarrow D(-2; -4)$$

Vậy,  $C(3;6); D(6;2)$  hoặc  $C(-5;0); D(-2;-4)$

3. Gọi  $C(x;y)$ , ta có:  $BA = 10, BC^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2$

$$ABCD \text{ là hình vuông} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC} \\ BA = BC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \cdot (x-1) + 3(y-1) = 0 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

**TH1:**  $C(4;0) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow D(5;3)$

$$\text{TH2: } C(-2;2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow D(-1;5)$$

**Ví dụ 7.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy, cho 2 điểm  $M(1;1), N(7;5)$  và đường thẳng  $(d): x + y - 8 = 0$ .

1. Tìm điểm  $P \in (d)$  sao cho  $\triangle PMN$  cân đỉnh P
2. Tìm điểm  $Q \in (d)$  sao cho  $\triangle QMN$  vuông đỉnh Q

#### Lời giải

$$1. P(x_0; y_0) \in (d): x_0 + y_0 - 8 = 0$$

$$\triangle PMN \text{ cân đỉnh P} \Leftrightarrow PM = PN$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_0 - 1)^2 + (y_0 - 1)^2} = \sqrt{(x_0 - 7)^2 + (y_0 - 5)^2}$$

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} x_0 + y_0 - 8 = 0 \\ (x_0 - 1)^2 + (y_0 - 1)^2 = (x_0 - 7)^2 + (y_0 - 5)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 6 \end{cases} \Rightarrow P(2;6)$$

$$2. Q(x_1; y_1) \in (d): x_1 + y_1 - 8 = 0. \quad \overrightarrow{QM} = (1 - x_1; 1 - y_1), \quad \overrightarrow{QN} = (7 - x_1; 5 - y_1)$$

$$\triangle QMN \text{ vuông đỉnh Q} \Leftrightarrow \overrightarrow{QM} \perp \overrightarrow{QN} \Leftrightarrow (1 - x_1)(7 - x_1) + (1 - y_1)(5 - y_1) = 0$$

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} x_1 + y_1 - 8 = 0 \\ (1 - x_1)(7 - x_1) + (1 - y_1)(5 - y_1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 7 \\ y_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow Q(7;1)$$

**Ví dụ 8.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy, cho  $\triangle ABC$  biết  $A(3;1), B(1;-3)$  trọng tâm G của  $\triangle ABC$  nằm trên Ox. Tìm tọa độ đỉnh C biết diện tích  $\triangle ABC$  bằng 3.

#### Lời giải

$$* \quad G(x;0) \in Ox, \quad G \text{ là trọng tâm } \triangle ABC \Leftrightarrow AG = \frac{2}{3}AM \Leftrightarrow 3AG = 2AM$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AM}; \quad \overrightarrow{AG} = (x - 3; -1), \overrightarrow{AM} = (x_M - 3; y_M - 1)$$

$$2\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x - 3) = 2(x_M - 3) \\ -3 = 2(y_M - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{3}{2}(x - 1) \\ y_M = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}(x - 1); -\frac{1}{2}\right)$$

\* Mặt khác M là trung điểm BC

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}(x-1) = \frac{1+x_C}{2} \\ -\frac{1}{2} = \frac{-3+y_C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 3x-4 \\ y_C = 2 \end{cases} \Rightarrow C(3x-4; 2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}(x-1) = \frac{1+x_C}{2} \\ -\frac{1}{2} = \frac{-3+y_C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 3x-4 \\ y_C = 2 \end{cases} \Rightarrow C(3x-4; 2)$$

$$\overrightarrow{CA} = (7-3x; -1), \overrightarrow{CB} = (5-3x; -5)$$

$$S_{\Delta ABC} = 3 \Leftrightarrow 3 = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{CA} \\ \overrightarrow{CB} \end{pmatrix} \right| \Leftrightarrow 6 = |-5(7-3x) + (5-3x)|$$

$$\Leftrightarrow |2x-5| = 1 \Leftrightarrow x = 3 \text{ hoặc } x = 2$$

Vậy,  $C(2; 2)$  hoặc  $C(3; 2)$  là tọa độ cần tìm.

**Ví dụ 9.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy, cho hình thoi ABCD biết  $A(3; 1)$ ,  $B(-2; 4)$  và giao điểm I của 2 đường chéo nằm trên Ox. Hãy xác định tọa độ điểm C và D.

#### Lời giải

Gọi  $I(x_0; 0) \in Ox \Rightarrow AI = (x_0 - 3; -1), BI = (x_0 + 2; -4)$

I là giao điểm 2 đường chéo hình thoi

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{BI} \Leftrightarrow (x-3)(x+2) + (-1)(-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1, x = 2 \Rightarrow I(-1; 0) \text{ hoặc } I'(2; 0)$$

$$* I(-1; 0). I \text{ là trung điểm } AC \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2x_I - x_A = -5 \\ y_C = 2y_I - y_A = -1 \end{cases} \Rightarrow C(-5; -1)$$

$$\text{và } I \text{ là trung điểm } BD \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 2x_I - x_B = 0 \\ y_D = 2y_I - y_B = -4 \end{cases} \Rightarrow D(0; -4)$$

$$* I(2; 0) \Rightarrow C(1; -1), D(6; -4)$$

**Ví dụ 10.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy

1. Cho tứ giác ABCD có  $A(-2; 14), B(4; -2), C(6; -2), D(6; 10)$ . Tìm tọa độ M giao điểm 2 đường chéo AC và BD.

2. Cho  $\Delta ABC$  với  $A(3; 5), B(-5; 1), C(5; -9)$ . Tính góc  $\widehat{BAD}$ , AD là trung tuyến.

**Lời giải**

$$1. \begin{cases} \overrightarrow{BM} = (x_M - 4; y_M + 2) \\ \overrightarrow{BD} = (2; 12) \end{cases} \Rightarrow 12(x_M - 2) - 2(y_M + 2) = 0 \Leftrightarrow 6x_M - y_M - 26 = 0$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{CM} = (x_M - 6; y_M + 2) \\ \overrightarrow{CA} = (-8; 16) \end{cases} \Rightarrow 16(x_M - 6) + 8(y_M + 2) = 0 \Leftrightarrow 2x_M + y_M - 10 = 0$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 6x_M - y_M - 26 = 0 \\ 2x_M + y_M - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{9}{2} \\ y_M = 1 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{9}{2}; 1\right)$$

$$2. D(1; -4) \text{ có } \overrightarrow{AB} = (-8; -4), \overrightarrow{AD} = (-3; -9)$$

$$\cos \widehat{BAD} = \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{AB \cdot AD} = \frac{24 + 36}{4\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{BAD} = 45^\circ$$

**Ví dụ 11.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy, cho điểm  $A(a; b)$  và  $B(0; a\sqrt{3} - b)$  với  $a, b \neq 0$ . Tìm điểm  $C$  trên trục Ox sao cho  $\triangle ABC$  cân tại  $C$ . Khi đó chứng tỏ  $\triangle ABC$  còn là tam giác đều.

**Lời giải**

$$\text{Gọi } C(x_0; 0) \in Ox$$

$$\text{Do } \triangle ABC \text{ là tam giác cân tại } C \Leftrightarrow AB = BC \Leftrightarrow AC^2 = BC^2$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - a)^2 + (0 - b)^2 = (x_0 - 0)^2 + (0 - a\sqrt{3} + b)^2 \Leftrightarrow x_0 = \sqrt{3}b - a \Rightarrow C(b\sqrt{3} - a; 0)$$

$$\text{Với } C(b\sqrt{3} - a; 0) \Rightarrow \begin{cases} AB^2 = 4a^2 - 4ab\sqrt{3} + 4b^2 \\ AC^2 = 4a^2 - 4ab\sqrt{3} + 4b^2 \end{cases} \Rightarrow AB^2 = AC^2 \Rightarrow AB = AC$$

Vậy  $\triangle ABC$  là tam giác đều

**Ví dụ 12.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy

1. Cho 4 điểm  $A(-2; -6), B(4; -4), C(2; -2), D(-1; -3)$ . Chứng minh rằng tam giác ABC vuông và tứ giác ABCD là hình thang.

2. Cho  $M(1; 1 - \cos a), N(3; 4)$ . Tính OM, MN. Tính giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của

$$y = \sqrt{\cos^2 a - 2 \cos a + 2} + \sqrt{\cos^2 a + 6 \cos a + 13}$$

**Lời giải**



1.  $\begin{cases} \overrightarrow{AC} = (4; 4) \\ \overrightarrow{BC} = (-2; 2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 4(-2) + 4 \cdot 2 = 0 \Rightarrow AC \perp BC \text{ hay } \triangle ABC \text{ vuông tại } C$
- Ta có  $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (6; 2) = 2(3; 1) \\ \overrightarrow{DC} = (3; 1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DC} \Rightarrow AB \parallel CD \text{ hay } ABCD \text{ là hình thang}$
2.  $\begin{cases} OM = \sqrt{1^2 + (1 - \cos a)^2} = \sqrt{\cos^2 a - 2 \cos a + 2} \\ MN = \sqrt{(3 - 1)^2 + (4 - 1 + \cos a)^2} = \sqrt{\cos^2 a + 6 \cos a + 13} \end{cases}$
- Vì  $0 \leq 1 - \cos a \leq 2$  nên M di động trên  $M_1M_2$  với  $M_1(1; 0), M_2(1; 2)$  và
- $y = OM + MN \geq ON \Rightarrow \min y = ON = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$  khi : O, M, N thẳng hàng
- $OM_1 + M_1N = 1 + \sqrt{(3 - 1)^2 + 4^2} = 1 + \sqrt{20}$
- $OM_2 + M_2N = \sqrt{1^2 + 2^2} + \sqrt{(3 - 1)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{5} + \sqrt{8}$
- $y = OM + MN \leq OM_1 + M_1N = 1 + \sqrt{20} = 1 + 2\sqrt{5} \Rightarrow \max y = 1 + 2\sqrt{5}$
- Khi  $M \equiv M_1(1; 0)$

**Ví dụ 13.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy

1. Cho  $\triangle ABC$  có các đỉnh  $A(2; 6), B(-3; -4), C(5; 0)$ . Xác định tọa độ chân đường phân giác AD.
2. cho  $\triangle ABC$  có  $A(5; 4), B(-1; 1), C(3; -2)$ , M là điểm di động thỏa  $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = \vec{0}$  ( $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ ). Xác định M để  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}|$  nhỏ nhất.

**Lời giải**

1.  $AB = \sqrt{(-5)^2 + (-10)^2} = 5\sqrt{5}, AC = \sqrt{(3)^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{5}$

$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{3} \Rightarrow \overrightarrow{DB} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{DC}, D \text{ chia } BC \text{ theo tỉ } k = -\frac{5}{3}$

Vậy  $\begin{cases} x_D = \frac{-3 + \frac{5}{3} \cdot 5}{1 + \frac{5}{3}} = 2 \\ y_D = \frac{-4 + \frac{5}{3} \cdot 0}{1 + \frac{5}{3}} = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow D\left(2; -\frac{3}{2}\right)$

$$2. \text{ Nếu } \begin{cases} \beta \neq 0 \\ \alpha \neq 0 \end{cases} \text{ thì } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = -\frac{\alpha + \beta}{\beta} \overrightarrow{MA} \\ \overrightarrow{AB} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha} \overrightarrow{MB} \end{cases} \Rightarrow M \text{ nằm trên } AB.$$

Gọi I là trung điểm AC thì  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI} \Rightarrow |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$  nhỏ nhất khi  $|2\overrightarrow{MI}|$  nhỏ nhất. Do I cố định nên MI nhỏ nhất khi M là hình chiếu của I trên AB

$$\overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \frac{x_M - 5}{-6} = \frac{y_M - 4}{-3} \Rightarrow x_M - 2y_M + 3 = 0$$

$$\overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0; (I(4;1)) \Leftrightarrow 2x_M + y_M - 9 = 0$$

$$\text{Vậy, tọa độ điểm M là nghiệm hệ: } \begin{cases} x_M - 2y_M + 3 = 0 \\ 2x_M + y_M - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 3 \\ y_M = 3 \end{cases} \Rightarrow M(3;3)$$

**Ví dụ 14.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy, cho đường thẳng (d):  $2x - y + 2 = 0$  và 2 điểm  $A(4;6), B(0;-4)$ . Tìm trên đường thẳng (d) điểm M sao cho vector:  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$  có độ dài nhỏ nhất.

#### Lời giải

$$\text{Gọi } M(x_0; y_0) \in (d): 2x_0 - y_0 + 2 = 0 \Rightarrow y_0 = 2x_0 + 2 \Rightarrow M(x_0; 2x_0 + 2)$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AM} = (x_0 - 4; y_0 - 6) \\ \overrightarrow{BM} = (x_0; y_0 + 4) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = (2x_0 - 4; 2y_0 - 2)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}| = \sqrt{(2x_0 - 4)^2 + (2y_0 - 2)^2} = \sqrt{20x_0^2 - 32x_0 + 20}$$

**Cách 1:**  $f(x_0) = 20x_0^2 - 32x_0 + 20$  là hàm bậc 2, có hệ số  $a = 5 > 0$  nên

$$\min f(x_0) \Leftrightarrow x_0 = x_5 = -\frac{b}{2a} = \frac{32}{20} = \frac{4}{5} \Rightarrow y_0 = \frac{18}{5} \Rightarrow M\left(\frac{4}{5}; \frac{18}{5}\right)$$

**Cách 2:** Đặt  $f(x_0) = 20x_0^2 - 32x_0 + 20$  có  $f'(x_0) = 40x_0 - 32 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{4}{5}$

$x_0$	$-\infty$	$\frac{4}{5}$	$+\infty$
$f'(x_0)$	-	0	+
$f(x_0)$	$+\infty$	$\frac{36}{5}$	$+\infty$

$$\Rightarrow \min f(x_0) = \frac{36}{5} \text{ tại } x_0 = \frac{4}{5} \Rightarrow y_0 = \frac{18}{5}$$

Vậy  $M\left(\frac{4}{5}; \frac{18}{5}\right)$  thì độ dài  $|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}| = \sqrt{\frac{36}{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$  đạt giá trị nhỏ nhất

### Bài tập tự luyện

**Bài tập 1.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy

- Cho  $A(1;2), B(3;-1)$  và hình vuông ABCD theo chiều dương. Tìm tọa độ đỉnh C, D.
- Cho 2 điểm  $A(4;3), B(2;5)$ . Tìm trong mặt phẳng một điểm C để tam giác ABC là tam giác vuông cân.

**Bài tập 2.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy

- Cho tam giác ABC có  $A(1;-1), B(5;-3)$  và  $C \in Oy$ , trọng tâm G của tam giác ở trên Ox. Xác định tọa độ C và G.
- Cho 4 điểm  $A(3;2), B(7;4), C(4;5), D(2;4)$ . Chứng minh ABCD là hình thang vuông. Tính chu vi và diện tích ABCD.

**Bài tập 3.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy, cho điểm

$A(-3;2), B(4;3)$ .

- Tìm điểm  $M \in Ox$  sao cho  $\triangle MAB$  vuông tại M.
- Gọi C là điểm nằm trên Oy và G là trọng tâm  $\triangle ABC$ . Tìm tọa độ điểm C, biết G nằm trên Ox.

**Bài tập 4.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy, cho 2 điểm  $B(2;1), C(6;1)$

- Tìm điểm  $A(x;y), (x > 0, y > 0)$  sao cho tam giác ABC đều.
- Tìm  $A'$  đối xứng với A qua C.
- Tìm tọa độ điểm D sao cho  $\overrightarrow{AD} - 3\overrightarrow{BD} + 4\overrightarrow{CD} = 0$ .
- Tìm điểm M sao cho tứ giác ABCM là hình bình hành. Xác định tâm của nó.

**Bài tập 5.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy, cho tứ giác ABCD có

$A(-2;14), B(4;-2), C(5;-4), D(5;8)$ . Tìm tọa độ giao điểm của 2 đường chéo AC và BD.

**Bài tập 6.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy, tam giác ABC có trung

điểm các cạnh BC, AC, AB lần lượt là  $M(2;4), N(-3;0), P(2;1)$

- Tìm tọa độ đỉnh của tam giác ABC.
- Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC; chứng minh G cũng là trọng tâm của tam giác MNP.

**Bài tập 7.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy, cho 3 điểm

$A(1;-2), B(2;3), C(-1;-2)$ . Tìm điểm D trên Oy sao cho ABCD là hình thang có cạnh đáy là AD. Tìm giao điểm I của 2 đường chéo.

**Bài tập 8.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy, cho 4 điểm  $A(-2;-3),$

$B(4;-1), C(2;1), D(-1;0)$

a. Chứng minh ABCD là hình thang

b. Tìm giao điểm của AB với Ox

c. Tìm điểm M trên đường thẳng CD, biết  $y_M = 2$ . Khi đó ABMD là hình gì?

d. Tìm giao điểm của AC và BD

**Bài tập 9.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy, cho  $\triangle ABC$ , biết  $A(4;6),$

$B(-4;0), C(-1;-4)$

a. Tìm tọa độ trực tâm H, trọng tâm G, tâm I và bán kính R đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$

b. Kẻ đường cao AD. Tìm tọa độ D

c. Tìm độ dài trung tuyến BE

**Bài tập 10.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy, cho  $A(-2;3), B(2;5)$ .

Đỉnh C nằm trên đường thẳng  $x - 3y = 5$ . Tâm I(1;2) đường tròn ngoại tiếp tam giác.

a. Tìm tọa độ C.

b. Tìm tọa độ trọng tâm G, trực tâm H. Chứng minh rằng: G, H, I thẳng hàng.

**Bài tập 11.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy, cho điểm  $A(2;1)$ . Tìm

tọa độ điểm B biết rằng đường thẳng AB cắt Oy tại C chia đoạn AB theo tỉ số  $\frac{2}{3}$

và đường thẳng AB cắt Ox tại D chia đoạn AB theo tỉ số  $-\frac{3}{4}$ .

**Bài tập 12.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy, cho 3 điểm  $A(-3;6),$

$B(1;-2), C(6;3)$ .

a. Chứng minh A, B, C là 3 đỉnh của một tam giác.

b. Tìm tọa độ chân đường cao A' xuất phát từ A.

c. Tính tọa độ trọng tâm G, trực tâm H và tâm I của tam giác ABC. Có nhận xét gì về điểm G, H, I?

**Bài tập 13.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy, cho điểm  $A(0;4)$ , và

đường thẳng  $y = 8$ . Tìm trên đường thẳng  $y = 0$  điểm  $B(x_B; 0)$  và trên đường thẳng  $y = 8$  điểm  $C(x_C; 8)$  sao cho  $AB = AC$  và tam giác  $ABC$  có diện tích bằng 24.

**Bài tập 14.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy, 3 điểm

$$A(3; 5), B(1; 2), C(5; 1)$$

- Tìm tọa độ trọng tâm  $G$ , trục tâm  $H$ , tìm chân đường cao  $A'$  của  $AA'$ .
- Xác định tọa độ tâm  $I$  đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ . Chứng minh  $G, H, I$  thẳng hàng.

**Bài tập 15.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy, cho 3 điểm  $A(3; 1)$ ,

$$B(-1; -1), C(6; 0).$$

Tìm tọa độ đỉnh  $D$  của hình thang cân cạnh đáy  $AB, CD$ .

**Bài tập 16.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy

- Cho 2 điểm  $A(a; 0), C(2a; 3a)$ . Đường thẳng đi qua  $A$  và vuông góc với  $AC$  cắt đường thẳng  $x + 2a = 0$  tại điểm  $B$ . Chứng minh tam giác  $ABC$  là tam giác cân.
- Cho 2 đường thẳng  $3x - 4y + 6 = 0$  và  $4x - 3y - 9 = 0$ . Tìm một điểm  $M$  trên trục Oxy cách đều 2 đường thẳng ấy.
- Cho  $\triangle ABC$  với  $A(1; 3), B(0; 1), C(-4; -1)$ . Tìm tọa độ chân đường cao  $H$  kẻ từ  $A$ .
- Tìm tọa độ  $A, B$ , biết đường thẳng  $(d)$  đi qua  $M(-4; 3)$  và cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại  $A, B$  thỏa  $\overrightarrow{AM} : \overrightarrow{MB} = 3 : 5$

**Bài tập 17.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy

- Cho 3 điểm  $A(2; 3), B(-1; 4), C(x; -2)$ . Xác định hoành độ của điểm  $C$  để tổng  $AC + CB$  đạt giá trị nhỏ nhất.
- Cho 2 điểm  $A(1; -1), B(5; -3)$  và đường thẳng  $(\Delta): 5x - 12y + 32 = 0$ . Tìm  $M$  để  $MA = MB$  và khoảng cách từ  $M$  đến  $(\Delta)$  bằng 4.

**Bài tập 18.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy, cho đường thẳng

$$(\Delta): 2x + y - 2 = 0 \text{ và 3 điểm } A(8; 1), B(-3; 2), C(1; 4)$$

- Tìm trên  $(\Delta)$  một điểm  $M$  để tổng  $MA + MB$  có độ dài nhỏ nhất.
- Tìm trên  $(\Delta)$  một điểm  $N$  để tổng  $NA + NC$  có độ dài nhỏ nhất.

**Bài tập 19.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy

- Trên đường thẳng  $x - 2y + 10 = 0$ , tìm điểm  $M$  sao cho  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$  có độ dài nhỏ nhất, với  $A(6; \sqrt{5}), B(-4; \sqrt{5})$

**b.** Cho  $A(1;2), B(2;4)$ . Tìm trên trục hoành điểm  $P$  sao cho  $(AP + PB)$  nhỏ nhất.

**c.** Cho đường thẳng  $(d): x - 2y + 2 = 0$  và  $A(0;6), B(2;5)$ . Tìm trên  $(d)$  điểm  $M$  sao cho  $|MA - MB|$  lớn nhất;  $(MA + MB)$  nhỏ nhất.

**Bài tập 20.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy, cho  $A(1;6), B(-3;-4)$  và đường thẳng  $(\Delta): 2x - y - 1 = 0$ . Tìm điểm  $M$  trên  $(\Delta)$  sao cho vector:  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$  có độ dài nhỏ nhất.

**Bài tập 21.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy, cho  $(\Delta): 2x + y + 1 = 0$ ,  $M(0;3), N(1;5)$ .

**a.** Tìm  $I \in \Delta$  sao cho:  $(IM + IN)$  min.

**b.** Tìm  $J \in \Delta$  sao cho:  $|JM - JN|$  max.

**Bài tập 22.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy, cho đường thẳng

$(T): 2x - y - 1 = 0$  và 5 điểm  $A(0;-1), B(2;3), C\left(\frac{1}{2};0\right), E(1;6), F(-3;-4)$

**a.** Tìm trên  $(T)$  điểm  $D$  sao cho 4 điểm  $A, B, C, D$  lập thành hàng điểm điều hòa.

**b.** Tìm điểm  $M$  trên  $(T)$  sao cho  $\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{FM}$  có độ dài nhỏ nhất.

**Bài tập 23.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy

**a.** Cho 2 điểm  $A(1;-3), B(5;-1)$ . Tìm  $M$  trên Ox sao cho  $AM + BM$  ngắn nhất.

**b.** Tìm trên trục hoành sao cho tổng khoảng cách từ  $M$  đến 2 điểm  $A(1;2), B(3;4)$  là nhỏ nhất.

**c.** Cho 2 điểm  $A(0;5), B(4;1)$  và đường thẳng  $(\Delta): x - 4y + 7 = 0$ . Tìm một điểm  $C$  trên  $(\Delta)$  sao cho  $\Delta ABC$  là tam giác cân, đáy  $AB$ .

**Bài tập 24.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy, cho tam giác  $ABC$ , biết

$A(6;4), B(-4;-1), C(2;-4)$

**a.** Tìm tọa độ chân đường phân giác trong  $AD$  của góc  $A$ . Tính độ dài  $AD$ .

**b.** Tìm tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ .

**Bài tập 25.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy

- a. Cho tam giác ABC với  $A(1;5), B(-4;-5), C(4;-1)$ . Tìm tọa độ chân đường phân giác trong và ngoài góc A. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ .
- b. Cho điểm  $A(4;-3), B(3;1)$ . Tìm điểm M trên trục Ox sao cho  $\widehat{AMB} = \frac{\pi}{4}$ .
- c. Cho các điểm  $A(2;1), B(0;1), C(3;5), D(-3;-1)$ . Tính tọa độ các đỉnh hình vuông có 2 cạnh song song đi qua A và C, 2 cạnh song song còn lại đi qua B và D, biết rằng tọa độ các đỉnh hình vuông đều dương.

**Bài tập 26.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy, cho  $\triangle ABC$  có  $A(-3;6), B(1;-2)$ . Đỉnh C có tọa độ thỏa  $x_C - 2y_C = 0$ . Tâm đường tròn ngoại tiếp là  $I(1;3)$ . Tìm tọa độ đỉnh C và bán kính nội tiếp  $\triangle ABC$ .

**Bài tập 27.** Trong mặt phẳng tọa độ đề các vuông góc Oxy, cho  $\triangle ABC, A(1;6), B(-4;-4), C(4;0)$ . Tìm tọa độ chân đường phân giác trong và ngoài góc A và tọa độ tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ .

#### Hướng dẫn giải

**Bài tập 1. a.**  $\overrightarrow{AB} = (2;-3)$  mà  $\begin{cases} AD = AB \\ AD \perp AB \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = (3;2) \Rightarrow \begin{cases} x_D = 4 \\ y_D = 4 \end{cases} \Rightarrow D(4;4)$

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 6 \\ y_C = 1 \end{cases} \Rightarrow C(6;1)$$

$$\text{b. } * \triangle ABC \text{ vuông cân tại } C \Leftrightarrow \begin{cases} CA \perp CB \\ CA = CB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \\ CA^2 = CB^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 8y + 23 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(4;5) \text{ và } C'(2;3)$$

$$* \triangle ABC \text{ vuông tại } A \Leftrightarrow \begin{cases} CA \perp BA \\ CA = BA \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C(6;5) \\ C'(2;1) \end{cases}$$

$$* \triangle ABC \text{ vuông cân tại } B \Leftrightarrow C(0;3), C'(4;7)$$

**Bài tập 2. a.** Gọi  $G(x;0), C(0;y)$ . Trung điểm I của AB:  $\Rightarrow I(3;-2)$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{IG} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = 3(x-3) \\ y+2 = 3(0+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G(2;0) \\ C(0;4) \end{cases}$$

$$\text{b. } AB = 2\sqrt{5}, CD = AD = \sqrt{5}, BC = \sqrt{10} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases} \Rightarrow ABCD \text{ là hình thang}$$

vuông.

$$P = AB + BC + CD + AD = 4\sqrt{5} + \sqrt{10}, S = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot AD = \frac{15}{2}$$

$$\text{Bài tập 3. a. } M \in Ox \Rightarrow M(m; 0) \Rightarrow \overrightarrow{MB} = (4 - m; 3), \overrightarrow{MA} = (-3 - m; 2)$$

$$\Delta MAB \text{ vuông tại } M \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow (4 - m)(-3 - m) + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(4; 0) \\ M(-3; 0) \end{cases}$$

$$\text{b. } C \in Oy \Rightarrow C(0; y_C), G \in Ox \Rightarrow G(x_G; 0)$$

$$G \text{ là trọng tâm } \Delta ABC, \text{ ta có } \begin{cases} 3x_G = x_A + x_B + x_C \\ 3y_G = y_A + y_B + y_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_G = -3 + 4 \\ 0 = 2 + 3 + y_C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{1}{3} \\ y_C = -5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow G\left(\frac{1}{3}; 0\right), C(0; -5).$$

$$\text{Bài tập 4.a. Tam giác } ABC \text{ đều} \Leftrightarrow \begin{cases} AB^2 = BC^2 \\ AC^2 = BC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4^2 \\ (x-6)^2 + (y-1)^2 = 4^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 + 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow A(4; 1 + 2\sqrt{3})$$

$$\text{b. } A' \text{ đối xứng } A \text{ qua } C \Leftrightarrow C(6; 1) \text{ là trung điểm } A' \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \\ y_C = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 8 \\ y_{A'} = 1 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{c. } \overrightarrow{AD} = (x - 4; y - 1 - 2\sqrt{3}), \overrightarrow{BD} = (x - 2; y - 1), \overrightarrow{CD} = (x - 6; y - 1)$$

$$\overrightarrow{AD} - 3\overrightarrow{BD} + 4\overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow x = 11, y = -1 - \sqrt{3}$$

$$\text{d. } ABCM \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AM} = (x - 4; y - 1 - 2\sqrt{2}), \overrightarrow{BC} = (4; 0)$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow x = 8, y = 1 + 2\sqrt{3}$$

Gọi I là tâm hình bình hành ABCM khi I là trung điểm AC



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_C}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = 5 \\ y_I = 1 + \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow I(5; 1 + \sqrt{3})$$

**Bài tập 5.** Gọi  $I(x; y)$  là giao điểm 2 đường chéo  $AC, BD$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AI} \uparrow \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{BI} \uparrow \overrightarrow{BD} \end{cases} \text{ với } \begin{cases} \overrightarrow{AI} = (x+2; y+4), \overrightarrow{AC} = (7; -18) \\ \overrightarrow{BI} = (x-4; y+2), \overrightarrow{BD} = (1; 10) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7(y-14) + 18(x+2) = 0 \\ 10(x-4) - (y+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{89}{22} \\ y = -\frac{17}{11} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{89}{22}; -\frac{17}{11}\right)$$

**Bài tập 6a.** Ta có  $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A - 2 = -3 - 2 \\ y_A - 1 = 0 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -3 \\ y_A = -3 \end{cases}$   
:  $A(-3; -3); B(7; 5); C(-3; 3)$

**b.** Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ . Ta có :  $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{GM} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - (-3) = 3(2 - x_G) \\ 4 - (-3) = 3(4 - y_G) \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$   
 $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = 0 \Rightarrow G$  là trọng tâm  $\triangle MNP$ .

**Bài tập 7.** Ta có  $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1; 5) \\ \overrightarrow{AC} = (-2; 0) \end{cases} \Rightarrow \frac{-2}{1} \neq \frac{0}{5} \Rightarrow \overrightarrow{AB}$  không cùng phương  $\overrightarrow{AC}$ . Do đó  $A, B, C$  không thẳng hàng.

$$D(0; y_0) \in Oy \quad \overrightarrow{CB} = (3; 5); \overrightarrow{AD} = (-1; y_0 + 2)$$

\*  $ABCD$  là hình thang có đáy  $AD \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}$  cùng phương  $\overrightarrow{CB}$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot (y_0 + 2) - (-1) \cdot 5 = 0 \Rightarrow y_0 = -\frac{11}{3} \Rightarrow D\left(0; -\frac{11}{3}\right)$$

Gọi  $I(a, b)$  là giao điểm 2 đường chéo  $AC$  và  $BD$

$$\text{Ta có : } \overrightarrow{AC} = (-2; 0); \overrightarrow{AI} = (a-1; b+2); \overrightarrow{BD} = \left(-2; -\frac{20}{3}\right); \overrightarrow{BI} = (a-2; b-3)$$

$I$  là giao điểm  $AC$  và  $BD \Leftrightarrow A, I, C$  thẳng hàng và  $B, I, D$  thẳng hàng  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}$  cùng phương  $\overrightarrow{AI}$  và  $\overrightarrow{BD}$  cùng phương  $\overrightarrow{BI}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2.(b+2) - 0.(a-1) = 0 \\ -2.(b-3) + \frac{20}{3}.(a-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{1}{2}; -2\right)$$

**Bài tập 8a.**  $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (6; 2) \\ \overrightarrow{DC} = (3; 1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC} \text{ cùng phương hay } ABCD \text{ là hình}$

thang.

**b.**  $(AB) \cap Ox = N(x_0; 0) \Leftrightarrow \overrightarrow{AN}$  cùng phương  $\overrightarrow{AB}$  với  $\overrightarrow{AN} = (x_0 + 2; 3); \overrightarrow{AB} = (6; 2)$

$$\overrightarrow{AN} \parallel \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 2(x_0 + 2) - 3.6 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 7 \Rightarrow N(7; 0)$$

**c.**  $M \in (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}$  cùng phương  $CD$  với  $\overrightarrow{CM} = (x - 2; 1); \overrightarrow{CD} = (-3; -1)$

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{1}{-1} \Leftrightarrow x = 5 \Rightarrow M(5; 2) \Rightarrow \overrightarrow{DM} = (6; 2) = \overrightarrow{AB}$$

$\Rightarrow ABMD$  là hình bình hành.

**d.** Tương tự trên  $I\left(\frac{2}{3}; \frac{-1}{3}\right)$

**Bài tập 9a.** \*  $H(x; y)$  là tọa độ trực tâm  $H$  của  $\triangle ABC$ , ta có

$$\begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \quad (I)$$

$$\text{mà } \begin{cases} \overrightarrow{AH} = (x-4; y-6) \\ \overrightarrow{BC} = (3; -4) \end{cases} ; \begin{cases} \overrightarrow{BH} = (x+4; y) \\ \overrightarrow{AC} = (-5; -4) \end{cases} \quad \text{và } (I) \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x-4) - 4(y-6) = 0 \\ -5(x+4) - 10y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow H(-4; 0) : H \equiv B \Rightarrow \triangle ABC \text{ vuông tại } B$$

$$\text{* Trọng tâm } G: \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = -\frac{1}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

\* Tọa độ tâm  $I(a; b)$  của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$  là giao điểm của 2 đường trung trực

$$\text{Gọi } M, N \text{ lần lượt là trung điểm } AB, BC, \text{ ta có } \begin{cases} x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B) = 0 \\ y_M = \frac{1}{2}(y_A + y_B) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_N = \frac{1}{2}(x_B + x_C) \\ y_N = \frac{1}{2}(y_B + y_C) \end{cases} \Rightarrow M(0;3); N\left(-\frac{5}{2}; -2\right)$$

Theo bài toán ta có :  $\begin{cases} MI \perp AB \\ NI \perp BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{NI} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \end{cases} \quad (\text{II}) \quad \text{mà} \quad \begin{cases} \overrightarrow{MI} = (a; b-3) \\ \overrightarrow{NI} = \left(a + \frac{5}{2}; b+2\right) \end{cases}$

$$\overrightarrow{AB} = (-8; -6); \overrightarrow{BC} = (3; -4)$$

$$\text{Vậy (II)} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 3(b-3) = 0 \\ 3\left(a + \frac{5}{2}\right) - 4(b+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{3}{2}; 1\right)$$

\* Do  $\triangle ABC$  vuông tại B nên  $R = \frac{1}{2}AC = \frac{5\sqrt{5}}{2}$

b. Gọi D là tọa độ chân đường cao thì :  $\begin{cases} AD \perp BD \\ AD \perp CD \end{cases}$

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \\ \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)(x+4) + y(y-6) = 0 \\ (x-4)(x+1) + (y+4)(y-6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 16 = 0 \\ y = 3 + \frac{3}{4}x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -4; y = 0; B(-4; 0) \\ x = 4; y = 6; A(4; 6) \end{cases} \Rightarrow D \equiv B = (-4; 0)$$

Cách khác : Do  $\triangle ABC$  vuông tại B, nên  $D \equiv B$

c. E là trung điểm BC nên  $E\left(\frac{3}{2}; 1\right); E \equiv I$  và  $\overrightarrow{BE} = \left(\frac{11}{2}; 1\right) \Rightarrow BE = \frac{5\sqrt{2}}{2} = R$

**Chú ý :** học sinh làm lại bài này nếu thay tọa độ A, B, C là  $A(2; 2), B(-5; 1), C(3; -5)$

**Bài tập 10.**  $C(x_C; y_C) \in x - 3y = 5 \Rightarrow x_C = 5 + 3y_C \Rightarrow C(5 + 3y_C; y_C)$

a. I là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC \Leftrightarrow IA = IC \quad (1)$

$$IA^2 = 10, IC^2 = (6 + 3y_C)^2 + (y_C - 2)^2$$

$$(1) \Leftrightarrow IA^2 = IC^2 \Leftrightarrow (6 + 3y_C)^2 + (y_C - 2)^2 = 10 \Leftrightarrow y_C^2 + 2y_C + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow y_C = -1 \Rightarrow x_C = 2 \Rightarrow C(2; -1)$$

b. Trọng tâm G :  $\begin{cases} x_G = \frac{2}{3} \\ y_G = \frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$

$$\text{Trục tâm H: } \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6(y_H - 3) = 0 \\ 4(x_H - 2) - 4(y_H - 5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_H = 3 \\ x_H = 0 \end{cases} \Rightarrow H(0; 3)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{IG} = \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}(-1; 1) \\ \overrightarrow{GH} = \left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}(-1; 1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{GH} = 2\overrightarrow{IG} \Rightarrow I, H, G \text{ thẳng hàng.}$$

**Bài tập 11.** Gọi  $C(0; c) \in Oy$ , ta có :

$$\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{2}{3} \Rightarrow x_C = \frac{x_A - k \cdot x_B}{1 - k} \Leftrightarrow 0 = \frac{2 - \frac{2}{3} \cdot x_B}{1 - \frac{2}{3}} \Rightarrow x_B = 3$$

$$D(d; 0) \in Ox, \text{ ta có: } \frac{DA}{DB} = -\frac{3}{4} \Rightarrow y_D = \frac{y_A - ky_B}{1 - k} \Leftrightarrow y_B = -\frac{4}{3} \Rightarrow B\left(3; -\frac{4}{3}\right)$$

**Bài tập 12a.**  $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (4; -8) \\ \overrightarrow{AC} = (9; -3) \end{cases}$  và  $\frac{4}{9} \neq \frac{-8}{-3} \Rightarrow A, B, C$  không thẳng hàng.

**b.**  $\begin{cases} \overrightarrow{BC} = (5; 5) \\ \overrightarrow{BA'} = (a - 1; b + 2); A'(a; b) \end{cases}$

$$\text{Vì } \begin{cases} \overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{BA'} \\ \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a-1}{5} = \frac{b+2}{5} \\ (a+3) \cdot 5 + (b-6) \cdot 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow A'(3; 0)$$

**c.**  $\begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(x_H + 3) + 5(y_H - 6) = 0 \\ 9(x_H - 1) + (-3)(y_H + 2) = 0 \end{cases} \Rightarrow H(2; 1)$

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{4}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}\right)$$

I là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC \Rightarrow IA = IB = IC$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = 1 \\ y_I = 3 \end{cases} \Rightarrow I(1; 3)$$

Ta có:  $\begin{cases} \overrightarrow{IH} = (1; -2) \\ \overrightarrow{IG} = \left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}(1; -2) = \frac{1}{3}\overrightarrow{IH} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{IG} \parallel \overrightarrow{IH}. \text{ Hay } G, H, I \text{ thẳng hàng.}$

**Bài tập 13.** Với  $\begin{cases} B(x_B; 0) \in y = 0 \\ C(x_C; 0) \in y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = \sqrt{x_B^2 + 16} \\ AC = \sqrt{x_C^2 + 16} \end{cases} \Rightarrow AB = AC \Leftrightarrow x_B^2 - x_C^2 = 0$

$$\overrightarrow{AB} = (x_B; -4), \overrightarrow{AC} = (x_C; 4) \Rightarrow S = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} x_B & -4 \\ x_C & 4 \end{vmatrix} \right\| = 24 \Leftrightarrow |x_B + x_C| = 24$$

Vậy,  $\begin{cases} x_B^2 - x_C^2 = 0 \\ |x_B + x_C| = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 6 \\ x_C = 6 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_B = -6 \\ x_C = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(6; 0) \\ C(6; 8) \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} B'(-6; 0) \\ C'(-6; 8) \end{cases}$

**Bài tập 14. a.** \* Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC :

$$G \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = 3 \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(3; \frac{8}{3}\right)$$

\*  $H(x; y)$  là tọa độ trực tâm của tam giác ABC với

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} = (x - 3; y - 5); \overrightarrow{BC} = (4; -1) \\ \overrightarrow{BH} = (x - 1; y - 2); \overrightarrow{AC} = (2; -4) \end{cases}$$

$$\text{Thỏa: } \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x - 3) + (y - 5)(-1) = 0 \\ 2(x - 1) + (y - 2)(-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{17}{7} \\ y = \frac{19}{7} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{17}{7}; \frac{19}{7}\right)$$

\*  $A'(x; y)$  là chân đường cao  $AA'$  khi  $\overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{BC}$  và  $\overrightarrow{BC}$  cùng phương  $\overrightarrow{BA'}$  (\*)

$$\text{Với } \overrightarrow{AA'} = (x - 3; y - 5); \overrightarrow{BC} = (4; -1), \overrightarrow{BA'} = (x + 1; y - 2)$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BC} \uparrow \overrightarrow{BA'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x - 3) - (y - 5) = 0 \\ 4(y - 2) + (x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y - 7 = 0 \\ x + 4y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow A'\left(\frac{37}{7}; \frac{99}{7}\right)$$

**b.** \*  $I(x; y)$  là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 5)^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 \\ (x - 3)^2 + (y - 5)^2 = (x - 5)^2 + (y - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{23}{7} \\ y = \frac{37}{14} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{23}{7}; \frac{37}{14}\right)$$

$$* G\left(3; \frac{8}{3}\right), H\left(\frac{17}{7}; \frac{19}{7}\right), I\left(\frac{23}{7}; \frac{37}{14}\right)$$

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{BH} &= \left(-\frac{4}{7}; \frac{1}{21}\right) \\ \overrightarrow{HI} &= \left(\frac{6}{7}; -\frac{1}{14}\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{HI} = \left(-\frac{4}{7}\right)\left(-\frac{1}{14}\right) - \left(\frac{1}{21}\right)\left(\frac{6}{7}\right) = 0$$

$\Rightarrow \overrightarrow{GI}$  và  $\overrightarrow{HI}$  cùng phương hay G, H, I thẳng hàng.

**Bài tập 15.** Gọi  $D(x; y)$ .

$$\overrightarrow{CD} = (x-6; y), \overrightarrow{BD} = (x+1; y+1), \overrightarrow{AB} = (-4; -2), \overrightarrow{AC} = (3; -1)$$

$$\text{Bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{AB} \\ BD = AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2(x-6) + 4y = 0 \\ \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow D(-2; -4)$$

**Bài tập 16.a.**  $B(-2a; -a), AB^2 = AC^2 = 10a^2$

b.  $M(0; 15), M'\left(0; -\frac{3}{7}\right)$

c. Gọi  $H(a; b)$ , ta có:  $\begin{cases} AH \perp BC \\ \overrightarrow{BH} \uparrow \uparrow \overrightarrow{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(a-1) + 2(b-2) = 0 \\ 2(a-0) - 4(b-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow H\left(\frac{8}{5}; \frac{9}{5}\right)$

d.  $A(a; 0), B(0; b), \overrightarrow{MA} : \overrightarrow{MB} = 3 : 5 \Leftrightarrow 5\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$

$$\Leftrightarrow 5(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}) = 3(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}) \Rightarrow 5\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} = 8\overrightarrow{OM} \Rightarrow A\left(-\frac{32}{5}; 0\right), B(0; 8)$$

**Bài tập 17.a.**  $AC + CB$  nhỏ nhất khi A, B, C thẳng hàng và  $x_C = 17$

b.  $M(4; 0), M'\left(\frac{180}{19}; \frac{208}{19}\right)$

**Bài tập 18. a.**  $(MA + MB)_{\min}$  khi A, M, B thẳng hàng và  $(\Delta) \cap (AB) = M\left(\frac{1}{7}; \frac{12}{7}\right)$

b. Gọi A' đối xứng A qua  $(\Delta)$  thì  $(A'C) \cap (\Delta) = N\left(-\frac{1}{19}; \frac{40}{19}\right)$

**Bài tập 19.a.**  $(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB})_{\min}$  khi  $M\left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

b. Gọi  $P(x_0; 0)$ , có  $AP + PB = \sqrt{(x_0 - 1)^2 + 4} + \sqrt{(x_0 - 3)^2 + 16}$

Xét  $\vec{a} = (x_0 - 1; 2), \vec{b} = (3 - x_0; 4)$

Ta có  $AP + PB = |\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}| = 2\sqrt{10} \Rightarrow (AP + PB)_{\min} = 2\sqrt{10}$

Khi  $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_0 - 2}{2} = \frac{3 - x_0}{4} \Leftrightarrow x_0 = \frac{5}{3} \Rightarrow P\left(\frac{5}{3}; 0\right)$

**Bài tập 22. a.** A, B, C, D lập thành điểm điều hòa  $\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}}$  với  $\begin{cases} \overrightarrow{CA} = \left(-\frac{1}{2}; -1\right) \\ \overrightarrow{CB} = \left(\frac{3}{2}; 3\right) \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}} = \frac{1}{3}; \left(k = \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = \frac{x_A - k \cdot x_B}{1 - k} = -1 \\ y_D = \frac{y_A - k \cdot y_B}{1 - k} = -3 \end{cases} \Rightarrow D(-1; -3)$$

**b.** Gọi  $M(x_0; y_0) \in (T)$ ,  $2x_0 - y_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow y_0 = 2x_0 - 1$

$$\begin{cases} \overrightarrow{EM} = (x_0 - 1; y_0 - 6) \\ \overrightarrow{FM} = (x_0 + 3; y_0 + 4) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{FM} = (2x_0 + 2; 2y_0 - 2)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{FM}| = \sqrt{(2x_0 + 2)^2 + (2y_0 - 2)^2} = 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{\left(x_0 - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{16}{25}}; y_0 = 2x_0 - 1$$

$$\text{Vậy } |\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{FM}|_{\min} = \frac{8\sqrt{5}}{5} \text{ khi } \left(x_0 - \frac{3}{5}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{3}{5} \Rightarrow y_0 = \frac{1}{5} \Rightarrow M\left(\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right)$$

**Bài tập 23. a.**  $M(4; 0)$

**b.**  $M\left(\frac{5}{3}; 0\right)$

**c.**  $C(1; 2)$

**Bài tập 24. a.**  $D\left(-\frac{2}{3}; -\frac{8}{3}\right), AD = \frac{20}{3}\sqrt{2}$

**b.**  $I(1; -1)$

**Bài tập 25. a.**  $\left(1; \frac{5}{2}\right), (16; 5), (1; 0)$

**b.**  $M\left(\frac{11 + \sqrt{33}}{2}; 0\right)$

**Bài tập 27.**  $\begin{cases} x_D = \frac{x_B - k \cdot x_C}{1 - k} \\ y_D = \frac{y_B - k \cdot x_C}{1 - k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D\left(1; -\frac{3}{2}\right) \\ k = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{3} \end{cases},$

$$E(16; 6) \Rightarrow \begin{cases} x_J = \frac{x_A - k' \cdot x_D}{1 - k'} \\ y_J = \frac{y_A - k' \cdot y_D}{1 - k'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I(1; 1) \\ k' = \frac{BA}{BD} = -2 \end{cases}$$