

## BÀI TẬP TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO

### Dạng 1: Tính tích vô hướng của hai vector

**Bài 1:** Cho  $\triangle ABC$  đều, cạnh bằng  $a$ , đường cao  $AH$ . Tính các tích vô hướng sau:

a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}; (2\overrightarrow{AB})(3\overrightarrow{HC})$       ĐS:  $\frac{a^2}{2}; -\frac{3a^2}{2}$       b)  $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$       ĐS: 0

**Bài 2:** Cho  $\triangle ABC$  có  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ .

a) Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  theo  $a, b, c$ . Từ đó suy ra:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$ .

ĐS  $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}; \dots$

b) Gọi  $G$  là trọng tâm của  $\triangle ABC$ , tính độ dài  $AG$  và cosin của góc nhọn tạo bởi  $AG$  và  $BC$ .

**Bài 3:** Cho hình thang vuông  $ABCD$ , đường cao  $AB = 2a$ , đáy lớn  $BC = 3a$ , đáy nhỏ  $AD = 2a$ .

a) Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}; \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$

b) Gọi  $I$  là trung điểm của  $CD$ , tính  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BD}$ . Từ đó suy ra góc của  $AI$  và  $BD$ .

**Bài 4:** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Tính các TVH sau:

a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$       b)

$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}); (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD})$

c)  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$       d)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$ ,  $M$  là điểm bất kì trên đường tròn nội tiếp hình vuông.

**Bài 5:** Cho  $\triangle ABC$  có  $BC = 4$ ,  $CA = 3$ ,  $AB = 2$ . Tính

a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ . Suy ra  $\cos A$

b) Gọi  $G$  là trọng tâm của  $\triangle ABC$ , tính  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC}$

c) Tính  $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}$

d) Gọi D là chân đường phân giác trong của góc A. Tính  $\overline{AD}$  theo  $\overline{AB}, \overline{AC}$ ; độ dài của AD

**Bài 6:** Cho  $\triangle ABC$  có  $BC = 6$ ,  $AB = 5$  và  $\overline{BC} \cdot \overline{BA} = 24$ .

a) Tính  $S_{\triangle ABC}$ ; AC

b) Tính độ dài trung tuyến BM và cosin của góc nhọn tạo bởi BM và đường cao AH.

**Bài 7:** Cho  $MM'$  là đường kính bất kỳ của đường tròn tâm O, bán kính R. A là điểm cố định và  $OA = d$ . AM cắt (O) tại N. CMR  $\overline{AM} \cdot \overline{AN}$ ;  $AM \cdot AN$  có giá trị không phụ thuộc vào M.

**Bài 8:** Cho 2 vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  thỏa mãn:  $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, |\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{15}$ .

a) Tính  $\vec{a} \cdot \vec{b}$

b) Xác định k để góc giữa  $(\vec{a} + \vec{b}), (2k\vec{a} - \vec{b})$  bằng

$60^\circ$ .

**Bài 9:** Cho  $\triangle ABC$  vuông có cạnh huyền  $BC = a\sqrt{3}$ . Gọi AM là trung tuyến, biết  $\overline{AM} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2}a^2$ .

Tính độ dài AB và AC.

**Bài 10:** Cho hình thang vuông ABCD, đường cao AB. Biết

$$\overline{AC} \cdot \overline{AB} = 4a^2, \overline{CA} \cdot \overline{CB} = 9a^2, \overline{CB} \cdot \overline{CD} = 6a^2.$$

a) Tính các cạnh của hình thang

b) Gọi IJ là đường trung bình của hình thang, tính độ dài hình chiếu của IJ trên BD.

c) Gọi M là điểm trên AC và  $\overline{AM} = k\overline{AC}$ . Tính k để  $BM \perp CD$ .

**Dạng 2: Chứng minh một đẳng thức về TVH hay tích độ dài**

**Bài 1:** Cho  $\triangle ABC$ , G là trọng tâm. CMR

a)  $\overline{MA} \cdot \overline{BC} + \overline{MB} \cdot \overline{CA} + \overline{MC} \cdot \overline{AB} = 0$

b)  $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$ , M bất kỳ. Suy ra  
 $MA^2 + MB^2 + MC^2$  đạt GTNN

**Bài 2:** Cho  $\triangle ABC$ , M là trung điểm BC và H là trực tâm. CMR

a)  $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4} BC^2$                       B)  $MA^2 + MH^2 = AH^2 + \frac{1}{2} BC^2$

**Bài 3:** Cho hình chữ nhật ABCD, M tùy ý. CMR

a)  $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$               b)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$               c)  $MA^2 = 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MO}$ , O

là tâm hcn và M thuộc đường tròn ngoại tiếp hcn.

**Bài 4:** CMR ABCD là hbk khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} = 0$ .

**Bài 5:** Cho tứ giác ABCD có P, Q là trung điểm của 2 đường chéo. CMR

a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(AD^2 + BC^2 - AC^2 - DB^2)$

b)  $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4PQ^2$

**Bài 6:** Cho hbk ABCD, M tùy ý. CMR

a)  $MA^2 + MC^2 - MB^2 = MD^2 + 2DA^2 - DB^2$

b) M di động trên đường thẳng d, xác định vị trí của M để  $MA^2 + MC^2 - MB^2$  đạt GTNN

**Bài 7:** Cho  $\triangle ABC$ , M tùy ý.

a) CMR  $\overrightarrow{m} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$  không phụ thuộc vào vị trí của M.

b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ . CMR

$$MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{m}$$

c) Tìm quỹ tích các điểm M thỏa mãn  $MA^2 + MB^2 = 2MC^2$

d) M di động trên đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ , tìm vị trí của M để  $MA^2 + MB^2 - 2MC^2$  đạt GTNN, GTLN.

**Bài 8:** Cho  $\triangle ABC$ , I là trung điểm của trung tuyến AM. CMR

$$2AM^2 + MB^2 + MC^2 = 4MI^2 + 2IA^2 + IB^2 + IC^2$$

**Bài 9:** Cho  $\triangle ABC$  đều cạnh a, M thuộc đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .

Tìm GTLN, GTNN của  $MA^2 - MB^2 - MC^2$

**Bài 10:** Cho  $\triangle ABC$ , trung tuyến AM, đường cao AH. CMR

a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AM^2 - \frac{BC^2}{4} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$ ;      b)  $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$   
c)  $AB^2 - AC^2 = 2AB \cdot MH$       d)  $S_{\triangle ABC} = \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})}$

**Dạng 3: Chứng minh hai vector vuông góc- Thiết lập điều kiện vuông góc**

**Bài 1:** CMR trong tam giác ba đường cao đồng quy.

**Bài 2:** Cho  $\triangle ABC$  cân tại A, O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi D là trung điểm của AB và E là trọng tâm  $\triangle ACD$ . CMR  $OE \perp CD$ .

**Bài 3:** Cho hình thang vuông ABCD, đường cao AD = h, cạnh đáy AB = a, CD = b. Tìm hệ thức giữa a, b, h sao cho:

a)  $AC \perp BD$       b)  $BD \perp AM$ , với AM là trung tuyến của  $\triangle ABC$

**Bài 4:** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A có AB = c, AC = b. Tìm điểm D trên AC sao cho  $BD \perp AM$ , với AM là trung tuyến của

**Bài 5:** Cho hình thang vuông ABCD, đường cao AB = h, cạnh đáy AD = a, BC = b. Tìm hệ thức giữa a, b, h sao cho:

a)  $\widehat{CID} = 90^\circ$ , với I là trung điểm của AB.      b)  $BD \perp CI$       c)  $DI \perp AC$   
d) Trung tuyến BM của  $\triangle ABC$  vuông góc với trung tuyến CN của  $\triangle BCD$

**Bài 6:** Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi BH và CK lần lượt là đường cao của  $\triangle ABC$ . CMR  $OA \perp HK$

**Bài 7:** Cho 2 vector  $\vec{a}, \vec{b}$  với  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ . Tìm góc giữa chúng biết rằng

$$\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b} \perp \vec{q} = 5\vec{a} - 4\vec{b}.$$

**Dạng 4: Tập hợp điểm thoả mãn đẳng thức về TVH hay tích độ dài.**

**Bài 1:** Cho  $\triangle ABC$ , tìm tập hợp những điểm M thoả mãn:

a)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ , k là số cho trước.

b)  $MA^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$       c)  $MB^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = a^2$  với  $BC = a$ .

**Bài 2:** Cho  $\triangle ABC$ , tìm tập hợp những điểm M thỏa mãn:

a)  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = k$ , k là số cho trước.      b)  $MA^2 - MB^2 + CA^2 - CB^2 = 0$

c)  $MC^2 - MB^2 + BC^2 = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$       d)  $3MA^2 = 2MB^2 + MC^2$

**Bài 3:** Cho đoạn AB. Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn:

a)  $MA^2 - 2MB^2 = k$ , k cho trước      b)  $3MA^2 + MB^2 = AB^2$       c)  $2MA^2 = MA \cdot MB$

**Bài 4:** Cho  $\triangle ABC$ , tìm tập hợp những điểm M thỏa mãn:

a)  $(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})(2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$       b)  $2MA^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$

c)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MC}$       d)  $MA^2 + MB^2 + MC^2 = AB^2 + AC^2$

**Bài 5:** Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a, tìm tập hợp những điểm M thỏa mãn:

a)  $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = a^2$       b)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MC} = 3a^2$

c)  $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD}) = 0$       d)  $MA^2 - MB^2 + MC^2 = a^2$