HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG VÀ ỨNG DỤNG

SYSTEM OF SYMMETRIC EQUATIONS AND ITS APPLICATION

SVTH: Đinh Thị Bích Ngân

Lớp 07ST, Khoa Toán, Trường Đại học Sư Phạm

GVHD: ThS. Phan Thị Quản

Khoa Toán, Trường Đại học Sư Phạm

TÓM TẮT

Hệ phương trình đối xứng là một dạng toán quan trọng trong chương trình toán trung học phổ thông. Đề tài đã hệ thống hoá được phương pháp giải hệ phương trình đối xứng chứa tham số và không chứa tham số đồng thời đưa ra một số dạng phương trình giải bằng cách biến đổi về hệ phương trình đối xứng.

ABSTRACT

System of symmetric equations is an important problem in Maths program at High school. This subject systematizes the solving method to system of symmetric equations containing parameters or no parameters and provides some forms of equations solved by changing to the system of symmetric equations.

1. Mở đầu

Hệ phương trình là phần kiến thức bắt buộc trong chương trình phổ thông, là một dạng toán không thể thiếu trong các đề thi môn Toán. Hệ phương trình đối xứng là một dạng đặc biệt của hệ phương trình. Đã có rất nhiều nghiên cứu về hệ phương trình đối xứng song các nghiên cứu vẫn còn thiếu tính hệ thống và có phần chưa đầy đủ. Mặc khác các nghiên cứu cũng chưa đưa ra được hướng giải quyết cụ thể cho bài toán về hệ phương trình đối xứng có tham số. Đề tài "*Hệ phương trình đối xứng và ứng dụng*" đã khắc phục được những yếu điểm nói trên, hệ thống hoá sâu sắc các phần kiến thức liên quan đến hệ phương trình đối xứng và ứng dụng của nó. Điều đó được thể hiện qua các ví dụ được trình bày rõ ràng, logic, mạch lạc trong nội dung của đề tài.

2. Hệ phương trình đối xứng và phương pháp giải hệ phương trình đối xứng

2.1. Hệ phương trình đối xứng loại I, hai phương trình hai ẩn

2.1.1. Định nghĩa: Hệ phương trình đối xứng loại I đối với ẩn x và y là hệ gồm các phương trình không thay đổi khi ta thay x bởi y, y bởi x.

2.1.2. Phương pháp giải

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0, \end{cases} \text{(I) với } \begin{cases} f(x,y)=f(y,x), \\ g(x,y)=g(y,x). \end{cases}$$

Để giải (I) ta tiến hành các bước sau:

+ Bước 1: Đặt $\begin{cases} x+y=S, \\ xy=P, \end{cases}$ (S^2- 4P$\geq$0), hệ đã cho tương đương với hệ $\begin{cases} F(S,P)=0, \\ G(S,P)=0, \\ S^2-4P\geq 0. \end{cases}$ (I')

+ Bước 2: Giải hệ (I'). Gọi nghiệm của hệ (I') là (S_0, P_0).

+ Bước 3: *x*, *y* là nghiệm của phương trình: $X^2 - S_0X + P_0 = 0$. Phương trình này luôn có nghiệm vì S_0, P_0 đã thoả mãn được điều kiện $S_0^2 - 4P_0 \geq 0$.

2.2. Hệ phương trình đối xứng loại II, hai phương trình hai ẩn

2.2.1. Định nghĩa Hệ phương trình đối xứng loại II đối với ẩn x, y là hệ nếu đổi vai trò của x, y thì phương trình này chuyển thành phương trình kia của hệ.

2.2.2. Phương pháp giải

$$\begin{cases} f(x,y)=0, & (1) \\ f(y,x)=0. & (2) \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

Để giải hệ phương trình (II) ta tiến hành các bước:

+ Bước 1: Trừ hai phương trình cho nhau đưa về hệ phương trình $\begin{cases} f(x,y)=0, \\ (x-y)g(x,y)=0. \end{cases}$

+ Bước 2: Hệ (II') tương đương với tuyển: $(II'')\begin{cases} x=y, \\ f(x,y)=0, \end{cases} \vee (II''')\begin{cases} g(x,y)=0, \\ f(x,y)=0, \end{cases}$

+ Bước 3: Giải từng hệ của tuyển rồi kết luận nghiệm của hệ (II).

2.3. Một số phương pháp khác để giải hệ phương trình đối xứng:

Các phương pháp khác để giải hệ phương trình đối xứng là: phương pháp đặt ẩn phụ, phương pháp đánh giá và phương pháp sử dụng tính đơn điệu của hàm số.

3. Giải hệ phương trình đối xứng có tham số

3.1. Hệ phương trình đối xứng loại I

3.1.1. Điều kiện có nghiệm

Xét hệ phương trình:

$\begin{cases} f_m(x,y)=0, \\ g_m(x,y)=0, \end{cases}$ (IV) với m là tham số và ta đã có được $\begin{cases} f_m(x,y)=f_m(y,x), \\ g_m(x,y)=g_m(y,x). \end{cases}$

Để tìm điều kiện có nghiệm của hệ (IV) ta tiến hành các bước sau:

+ Bước 1: Đặt điều kiện của bài toán (nếu có).

+ Bước 2: Đặt $S = x+y, P = xy$ với điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$.

+ Bước 3: Thay S, P vào hệ phương trình (IV). Giải hệ ẩn (*S, P*) theo *m* giả sử được nghiệm $(S_0(m), P_0(m))$. Giải bất phương trình $S_0^2(m) - 4P_0(m) \geq 0$ rồi kết hợp điều kiện đầu bài ta có được kết quả của bài toán.

3.1.2. Điều kiện để hệ có nghiệm duy nhất

Phương pháp

+ Bước 1: Điều kiện cần: Thay $x = y = x_0$ vào hệ ta được giá trị của tham số m. Đó chính là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

+ Bước 2: Điều kiện đủ: Với giá trị $m = m_0$ từ điều kiện cần, thay vào hệ phương trình. Giải hệ ta có được điều kiện đủ.

3.1.3. Giải và biện luận

Phương pháp:

+ Bước 1: Tìm điều kiện có nghiệm của hệ phương trình theo phương pháp đã nêu ở mục 3.1.1.

+ Bước 2: Từ điều kiện có nghiệm, dựa vào đặc điểm thuận lợi của hệ phương trình mà chia điều kiện đó ra thành từng khoảng, đoạn nhỏ hơn để giải và biện luận.

Chú ý: Bằng cách vẽ đồ thị tương ứng với hai phương trình của hệ sau đó dựa vào vị trí tương đối của hai đồ thị, ta có thể biện luận số nghiệm của hệ theo tham số.

3.2. Hệ phương trình đối xứng loại II

3.2.1. Điều kiện có nghiệm

Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} f_m(x,y) = 0, \\ f_m(y,x) = 0. \end{cases} \qquad \text{(VI)}$$

Để tìm điều kiện có nghiệm của hệ (VI) ta tiến hành các bước sau:

+ Bước 1: Đặt điều kiện của bài toán (nếu có).

+ Bước 2: Trừ từng vế và cộng từng vế hai phương trình của hệ ta có tuyển tương đương: $(VI')\begin{cases} x = y, \\ f(x,y) + f(y,x) = 0, \end{cases} \vee (VI'')\begin{cases} g(x,y) = 0, \\ f(x,y) + f(y,x) = 0. \end{cases}$

+ Bước 3: Tìm điều kiện có nghiệm của hệ (VI') và (VI'') với hệ (VI'') là hệ đối xứng loại I. Hệ phương trình (VI) có nghiệm khi và chỉ khi một trong hai hệ (VI'') hoặc (VI'') có nghiệm thoả yêu cầu.

3.2.2. Điều kiện để hệ có nghiệm duy nhất: Ở dạng toán này ta áp dụng tương tự hệ phương trình đối xứng loại I.

3.2.3. Giải và biện luận

Cho hệ phương trình $\begin{cases} f(x,y) = 0, & (1) \\ f(y,x) = 0. & (2) \end{cases}$ (VII)

Phương pháp:

+ Bước 1: Lấy (1) trừ cho (2) và (1) cộng (2) ta có tuyển tương đương:

$$(VII')\begin{cases} x = y, \\ f(x,y) + f(y,x) = 0, \end{cases} \vee (VII'')\begin{cases} g(x,y) = 0, \\ f(x,y) + f(y,x) = 0. \end{cases}$$

+ Bước 2: Giải và biện luận hệ (VII'). Giải và biện luận hệ (VII'') với (VII'') là hệ đối xứng loại I hoặc biện luận (VII'') bằng phép thế.

+ Bước 3: Kết hợp các kết quả.

4. Ứng dụng của hệ phương trình đối xứng

Bằng cách đặt ẩn phụ ta có thể đưa một số phương trình chứa căn thức hoặc một số phương trình bậc cao về hệ phương trình đối xứng để giải quyết nhanh chóng.

4.1. *Dạng* $\sqrt[n]{a+f(x)}+\sqrt[n]{b-f(x)}=c$

4.1.1. Phương pháp

+ Bước 1: Đặt $\begin{cases} u=\sqrt[n]{a+f(x)}, \\ v=\sqrt[n]{b-f(x)}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^n=a+f(x), \\ v^n=b-f(x). \end{cases}$

Chú ý: Nếu n là số chẵn thì ta phải tìm điều kiện chứa trong căn và điều kiện $u\geq 0, v\geq 0$.

+ Bước 2: Phương trình đã cho được đưa về hệ $\begin{cases} u+v=c, \\ u^n+v^n=a+b. \end{cases}$ (*), (*) có dạng hệ phương trình đối xứng loại I theo ẩn *u, v*. Giải hệ (I) để tìm *u, v*.

+ Bước 3: Từ *u* hoặc *v*, ta tìm được nghiệm của phương trình ban đầu.

4.1.2. Bài tập Giải phương trình $\sqrt[4]{7-x}+\sqrt[4]{x-3}=\sqrt{2}.$

Đáp số: $x=7$, $x=3$.

4.2. *Dạng* $\sqrt[n]{ax+b}+\sqrt[n]{cx+d}=\sqrt[n]{ex+f}$ *với* $ke=a+c, kf=b+d, k\in Q.$

4.2.1. Phương pháp

+ Bước 1: Đặt điều kiện nếu có.

+ Bước 2: Xét $x=-\dfrac{f}{e}$ có phải nghiệm hay không. Với $x\neq -\dfrac{f}{e}$, thực hiện phép chia hai vế của phương trình cho $\sqrt[n]{ex+f}$, phương trình trở thành: $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{ex+f}}+\sqrt[n]{\dfrac{cx+d}{ex+f}}=1$. Đặt $u=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{ex+f}}, v=\sqrt[n]{\dfrac{cx+d}{ex+f}} \Rightarrow u^n=\dfrac{ax+b}{ex+f}, v^n=\dfrac{cx+d}{ex+f}.$

Phương trình đã cho trở thành: $\begin{cases} u+v=1, \\ u^n+v^n=k. \end{cases}$ (**), đây cũng là dạng hệ phương trình đối xứng loại I theo *u,v*. Giải hệ (**) để tìm *u, v*. Kết hợp điều kiện để chọn nghiệm thích hợp.

+ Bước 3: Từ *u* hoặc *v*, ta tìm được nghiệm của phương trình ban đầu.

4.2.2. Bài tập Giải phương trình sau $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)}$

Đáp số: $x=1 \vee x=3$.

4.3. Dạng $x^n + b = a\sqrt[n]{ax-b}$

4.3.1. Phương pháp

+ Bước 1: Đặt điều kiện nếu có.

+ Bước 2: Đặt $u = \sqrt[n]{ax-b} \Rightarrow u^n = ax - b \Rightarrow u^n + b = ax$

Phương trình trở thành: $\begin{cases} x^n + b = au, \\ u^n + b = ax. \end{cases}$ (*), (*) là hệ phương trình đối xứng loại II theo *u, x*.

+ Bước 3: Giải hệ (I) để tìm được *x*.

4.3.2. Bài tập Giải phương trình $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$

Đáp số: $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \vee x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \vee x = 1$.

4.4. Dạng $\sqrt[n]{ax+b} = c(dx+e)^n + \alpha$ ***với*** $d = ac$ **và** $e = bc + \alpha$

4.4.1. Phương pháp

+ Bước 1: Đặt điều kiện nếu có.

+ Bước 2: Đặt $du + e = \sqrt[n]{ax+b} \Rightarrow (du+e)^n = ax + b \Rightarrow c(du+e)^n = dx + e - \alpha$

Phương trình trở thành: $\begin{cases} du + e = c(dx+e)^n + \alpha, \\ dx + e = c(du+e)^n + \alpha, \end{cases}$ (**), (**) là hệ đối xứng loại II theo *u, x*.

+ Bước 3: Giải hệ (**) để tìm được *x*.

4.4.2. Bài tập Giải phương trình $\sqrt[3]{x-9} = (x-3)^2 + 6$

Đáp số: $x = 1$.

4.5. Dạng $x = a + \sqrt{a + \sqrt{x}}$

4.5.1. Phương pháp

+ Bước 1: Điều kiện $x \geq 0$.

+ Bước 2: Đặt $u = a + \sqrt{x}, u \geq 0$, phương trình trở thành: $\begin{cases} x = a + \sqrt{u} \\ u = a + \sqrt{x} \end{cases}$ (***)

+ Bước 3: Giải hệ (***) để tìm được x.

4.5.2. Bài tập Giải phương trình $7 + \sqrt{7 + \sqrt{x}} = x$

Đáp số: $x = \dfrac{1+\sqrt{29}}{2}$.

4.6. Dạng $a - b(a - bx^2)^2 = x$

4.6.1. Phương pháp

+ Bước 1: Đặt $u = a - bx^2$, phương trình trở thành: $\begin{cases} a - bu^2 = x, \\ a - bx^2 = u. \end{cases}$ (****)

+ Bước 2: Giải hệ (****) để tìm được *x*.

4.6.2. Bài tập Giải phương trình $1-2(1-2x^2)^2 = x$

Đáp số: $x=-1, x=\dfrac{1}{2}, x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}, x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$.

5. Kết luận

Đề tài tập trung nghiên cứu các phương pháp giải hệ phương trình đối xứng và ứng dụng của nó và thu được các kết quả sau:

1. Tìm hiểu và hệ thống hóa các phương pháp giải hệ phương trình đối xứng loại I và loại II không chứa tham số. Đưa ra được một số phương pháp để giải quyết các bài toán về hệ phương trình đối xứng chứa tham số, cụ thể là phương pháp tìm điều kiện để hệ phương trình đối xứng có nghiệm, có nghiệm duy nhất và bài toán biện luận.

2. Đưa ra được các ứng dụng của hệ phương trình đối xứng thông qua việc đưa ra phương pháp giải các phương trình ở dạng tổng quát và các ví dụ minh hoạ.

Hy vọng rằng các kết quả của đề tài còn tiếp tục được mở rộng và hoàn thiện hơn nhằm đưa ra một hệ thống đầy đủ các kiến thức liên quan đến hệ phương trình đối xứng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Lê Hồng Đức, Lê Hữu Trí. Phương pháp giải toán Mũ- Lôgarit. NXB Hà Nội, Hà Nội, 2005.

[2] Hoàng Thanh Hà, Hoàng Kỳ. Đại số sơ cấp và thực hành giải toán. NXB Đại học Sư phạm, Hà Nội, 2005.

[3] Phan Huy Khải. Toán nâng cao cho học sinh THPT- Đại số, tập I. NXB Hà Nội, Hà Nội, 2002.

[4] Bùi Quang Trường. Những dạng toán điển hình trong các đề thi tuyển sinh Đại học và Cao đẳng, quyển 3. NXB Hà Nội, Hà Nội, 2006.