Bài tập tự luyện

Bài tập 1. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy.

a. Tìm điểm C thuộc đường thẳng $x-y+2=0$ sao cho ΔABC vuông tại C, biết $A(1;-2), B(1;-3)$.

b. Cho tam giác ABC có $A(3;2)$ và phương trình hai đường trung tuyến $BM: 3x+4y-3=0, CN: 3x-10y-17=0$. Tính tọa độ các điểm B, C.

c. Cho tam giác ABC có $A(-3;0)$ và phương trình hai đường phân giác trong $BD: x-y-1=0, CE: x+2y+17=0$. Tính tọa độ các điểm B, C.

d. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC vuông cân tại A. Xác định tọa độ 3 đỉnh của tam giác để đường thẳng AC đi qua điểm $N(7;7)$, $M(2;-3)$ thuộc AB và nằm ngoài AB, phương trình BC: $x+7y-31=0$.

e. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình bình hành $ABCD$ có $B(1;5)$, đường cao $AH: x+2y-2=0$, phân giác $\widehat{ACB}$ có phương trình $x-y-1=0$. Tìm tọa độ điểm A.

Bài tập 2. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, cho điểm $A(-1;3)$ và đường thẳng $(\Delta): x-2y+2=0$. Người ta dựng hình vuông $ABCD$ sao cho 2 điểm B và C
nằm trên đường thẳng (Δ) và các tọa độ của đỉnh C đều dương.

a. Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D;

b. Tìm chu vi và diện tích hình vuông $ABCD$.

Bài tập 3. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy,

a. Cho tam giác MNP có $N(2;-1)$, đường cao hạ từ M xuống NP có phương trình: $3x-4y+27=0$ và đường phân giác trong đỉnh P có phương trình: $x+2y-5=0$. Viết phương trình các cạnh chứa các cạnh tam giác.

b. Cho tam giác ABC có $C(5;-3)$ và phương trình đường cao $AA': x-y+2=0$, đường trung tuyến $BM: 2x+5y-13=0$. Tính tọa độ các điểm A, B.

c. Cho tam giác ABC có $B(1;-3)$ và phương trình đường cao $AD: 2x-y+1=0$, đường phân giác $CE: x+y-2=0$. Tính tọa độ các điểm A, C.

d. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $E(1;-1)$ là tâm của một hình vuông, một trong các cạnh của nó có phương trình $x-2y+12=0$. Viết phương trình các cạnh còn lại của hình vuông.

e. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có chu vi bằng $6\sqrt{2}$, đỉnh A thuộc trục Ox (A có hoành độ dương) và hai đỉnh B,C thuộc đường thẳng $d: x-y+1=0$. Viết phương trình đường thẳng BD.

Bài tập 4. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy,

a. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có trọng tâm $G\left(0;\frac{2}{3}\right)$. Viết phương trình chứa các cạnh tam giác để $I\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ là trung điểm cạnh BC.

b. Cho tam giác ABC có $M(2;0)$ là trung điểm của cạnh AB. Đường trung tuyến và đường cao qua đỉnh A lần lượt có phương trình là $7x-2y-3=0$ và $6x-y-4=0$. Viết phương trình đường thẳng AC.

c. cho điểm $C(2;-5)$ và đường thẳng $\Delta: 3x-4y+4=0$. Tìm trên Δ hai điểm A và B đối xứng nhau qua $I\left(2;\frac{5}{2}\right)$ sao cho diện tích tam giác ABC bằng15.

d. Trong mặt phẳng Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 12, tâm I là giao điểm của đường thẳng $(d_1): x-y-3=0, (d_2): x+y-6=0$. Trung điểm của một cạnh là giao điểm của (d_1) với trục Ox. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$.

e. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có phương trình cạnh $AB: x-2y-1=0$, đường chéo $BD: x-7y+14=0$ và đường chéo AC đi qua điểm $E(2;1)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.

Bài tập 5. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy,

a. Cho tam giác ABC có 3 cạnh theo thứ tự nằm trên 3 đường thẳng là : $(d_1): x+y-6=0$, $(d_2): x-4y+14=0$, $(d_3): 4x-y-19=0$. Hãy xét hình dạng của tam giác.

b. Cho điểm $A(2;2)$ và hai đường thẳng: $d_1: x+y-2=0$, $d_2: x+y-8=0$. Tìm tọa độ điểm B,C lần lượt thuộc d_1,d_2 sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

c. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có phương trình 2 cạnh AB, AC lần lượt là: $x+2y-2=0$ và $2x+y+1=0$, điểm $M(1;2)$ thuộc đoạn BC. Tìm tọa độ điểm D sao cho $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}$ có giá trị nhỏ nhất.
d. Trong mặt phẳng tọa độ $0xy$, cho đường tròn (C): $x^2+y^2+2x-2y-14=0$ có tâm I và đường thẳng (d): $x+y+m=0$. Tìm m để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B đồng thời diện tích tam giác IAB lớn nhất.
e. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có phương trình đường thẳng AB, BD lần lượt là: $x-2y+1=0$ và $x-7y+14=0$, đường thẳng AC đi qua $M(2;\ 1)$. Tìm toạ độ điểm N thuộc BD sao cho $NA+NC$ nhỏ nhất.

Bài tập 6. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc $0xy$,

a. Cho tam giác ABC có $A(4;-1)$ và phương trình hai đường trung tuyến BB_1: $8x-y-3=0$, $CC_1: 14x-13y-9=0$. Tính tọa độ các điểm B, C.

b. Cho hình chữ nhật $ABCD$, với toạ độ các đỉnh $A(1;1)$. Gọi $G\left(2;\frac{4}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác ABD. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình chữ nhật biết D nằm trên đường thẳng có phương trình: $x-y-2=0$.

c. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 22. Đường thẳng AB có phương trình $3x+4y+1=0$, đường thẳng BD có phương trình $x+y-2=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D?.

d. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $M(4;6)$ là trung điểm của AB .Giao điểm I của hai đường chéo nằm trên đường thẳng (d) có phương trình $3x-5y+6=0$, điểm $N(6;2)$ thuộc cạnh CD. Hãy viết phương trình cạnh CD biết tung độ điểm I lớn hơn 4 .

Bài tập 7. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc $0xy$,

a. Cho tam giác ABC có $A(4;-1)$, phương trình hai đường phân giác $BE: x-1=0, CF: x-y-1=0$. Tính tọa độ các điểm B, C.

b. Cho tam giác ABC vuông tại C, biết $A(3;0)$, đỉnh C thuộc trục tung, điểm B nằm trên đường thẳng $\Delta: 4x+3y-12=0$. Tìm tọa độ trọng tâm tam giác ABC, biết diện tích tam giác ABC bằng 6.

c. Cho hình bình hành $ABCD$ có $B(1;5)$ và đường cao AH có phương trình $x+2y-2=0$, với H thuộc BC, đường phân giác trong của góc $\widehat{ACB}$ có phương trình là $x-y-1=0$. Tìm tọa độ đỉnh A, C, D.

d. Cho tam giác ABC với hai điểm $A(2;-1)$, $B(1;-2)$ và trọng tâm G nằm trên đường thẳng $d: x+y-2=0$. Tìm tọa độ điểm C, biết diện tích tam giác ABC bằng $\frac{3}{2}$.

e. Cho hình bình hành $ABCD$ có $D(-6;-6)$. Đường trung trực của đoạn DC có phương trình (d): $2x+3y+17=0$ và đường phân giác góc BAC có phương trình (d'): $5x+y-3=0$. Xác định toạ độ các đỉnh còn lại của hình bình hành.

Bài tập 8. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc $0xy$,

a. Cho tam giác ABC có $C(-4;-5)$ và phương trình đường cao $AD: x+2y-2=0$, đường trung tuyến $BB_1: 8x-y-3=0$. Tìm tọa độ các điểm A, B.

b. Cho hình thang vuông $ABCD$, vuông tại A và D. Phương trình AD $x-y\sqrt{2}=0$. Trung điểm M của BC có tọa độ $M(1;0)$. Biết $BC=CD=2AB$. Tìm tọa độ của điểm A.

c. Cho ΔABC, biết tọa độ điểm $A(2;-3)$ và $B(3;-2)$, diện tích tam giác ΔABC là $\frac{3}{2}$ và trọng tâm G của tam giác thuộc đường thẳng $\Delta: 3x-y-8=0$. Tìm tọa độ điểm C.

d. Cho tam giác ABC vuông tại A, biết B và C đối xứng nhau qua gốc tọa độ. Đường phân giác trong của góc $\widehat{ABC}$ có phương trình là: $x+2y-5=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác biết đường thẳng AC đi qua điểm $K(6;2)$.

e. Cho tam giác ABC cân tại C có phương trình cạnh AB là : $x-2y=0$, điểm $I(4;2)$ là trung điểm của AB, điểm $M\left(4;\frac{9}{2}\right)$ thuộc cạnh BC, diện tích tam giác ABC bằng 10. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết tung độ điểm B lớn hơn hoặc bằng 3.

Bài tập 9. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc $0xy$,

a. Cho tam giác ABC có $B(1;5)$ và phương trình đường cao $AD: x+2y-2=0$, đường phân giác trong $CC_1: x-y-1=0$. Tính tọa độ các điểm A, C.

b. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, phương trình $BC: 2x - y - 7 = 0$, đường thẳng AC đi qua điểm $M(-1;1)$, điểm A nằm trên đường thẳng $\Delta: x - 4y + 6 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết rằng đỉnh A có hoành độ dương.

c. Cho 2 đường thẳng lần lượt có phương trình là $(d_1): 2x - 3y - 3 = 0$ và $(d_2): 5x + 2y - 17 = 0$. Viết phương trình đường thẳng đi qua giao điểm của (d_1), (d_2) lần lượt cắt các tia Ox, Oy tại A và B sao cho $\left(\frac{AB}{S_{\Delta OAB}}\right)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

d. Cho parabol (P): $y = x^2 + 2x - 3$. Xét hình bình hành $ABCD$ $A(-1;-4)$, $B(2;5)$ thuộc (P) và tâm I của hình bình hành thuộc cung AB của (P) sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất. Hãy xác định tọa độ hai điểm C, D.

e. Cho tam giác ABC cân tại A, có đỉnh B và C thuộc đường thẳng $d_{1:}\ x + y + 1 = 0$. Đường cao đi qua đỉnh B là $d_2: x - 2y - 2 = 0$, điểm $M(2;1)$ thuộc đường cao đi qua đỉnh C. Viết phương trình các cạnh bên của tam giác ABC

f. Cho tam giác ABC có A nằm trên Ox với $0 < x_A < \frac{5}{2}$. Hai đường cao xuất phát từ B và C lần lượt có phương trình: $d_1: x - y + 1 = 0$, $d_2: 2x + y - 4 = 0$. Tìm tọa độ A, B, C sao cho diện tích tam giác ABC là lớn nhất.

Bài tập 10. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc $0xy$,

a. Cho tam giác ABC có phương trình các đường cao $AD: 2x - y + 1 = 0$, $BE: x + y - 2 = 0$, C thuộc đường thẳng $d: x + y - 6 = 0$ và BC đi qua $M(0;3)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác.

b. Cho hình vuông $ABCD$ có phương trình đường thẳng $AB: 2x + y - 1 = 0$, và C, D lần lượt thuộc 2 đường thẳng $d_1: 3x - y - 4 = 0$, $d_2: x + y - 6 = 0$. Tính diện tích hình vuông

c. Cho hình bình hành $ABCD$ có $A(2;1)$, đường chéo BD có phương trình $x + 2y + 1 = 0$. Điểm M nằm trên đường thẳng AD sao cho $AM = AC$. Đường thẳng MC có phương trình $x + y - 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình bình hành $ABCD$.

d. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Biết phương trình cạnh BC là $(d): x+7y-31=0$, điểm $N(7;\ 7)$ thuộc đường thẳng AC, điểm $M(2;-3)$ thuộc AB và nằm ngoài đoạn AB. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Bài tập 11. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc $0xy$,

a. Cho tam giác ABC cân tại A có trọng tâm $G\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$, phương trình đường thẳng $BC: x-2y-4=0$ và phương trình đường thẳng $BG: 7x-4y-8=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A,B,C.

b. Cho hình thang $ABCD$ $(AB \parallel CD)$. Biết hai đỉnh $B(3;3)$ và $C(5;-3)$. Giao điểm I của hai đường chéo nằm trên đường thẳng $\Delta:\ 2x+y-3=0$. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình thang $ABCD$ để $CI=2BI$, tam giác ACB có diện tích bằng 12, điểm I có hoành độ dương và điểm A có hoành độ âm.

Bài tập 12. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc $0xy$,

a. Cho tam giác ABC có đỉnh A thuộc đường thẳng $d: x-4y-2=0$, cạnh BC song song với d, phương trình đường cao $BH: x+y+3=0$ và trung điểm cạnh AC là $M(1;1)$. Tìm tọa độ các đỉnh A,B,C.

b. Cho hình thoi $ABCD$ có phương trình hai cạnh AB và AD theo thứ tự là $x+2y-2=0$ và $2x+y+1=0$. Cạnh BD chứa điểm $M(1;2)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi

Bài tập 13. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc $0xy$,

a. Cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh $A(6;6)$, đường thẳng đi qua trung điểm của các cạnh AB và AC có phương trình $x+y-4=0$. Tìm tọa độ các đỉnh B và C, biết điểm $E(1;-3)$ nằm trên đường cao đi qua đỉnh C của tam giác đã cho.

b. Cho hai đường thẳng $d_1: x-y-2=0,\ \ d_2: 2x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua gốc tọa độ O cắt d_1, d_2 lần lượt tại A, B sao cho $OA.OB\ =\ 10$.

Bài tập 14. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc $0xy$, cho tam giác ABC, biết $C(4;3)$ và các đường phân giác trong, trung tuyến kẻ từ A lần lượt có phương trình $x+2y-5=0,\ 4x+13y-10=0$. Tìm tọa độ điểm A,B.

Bài tập 15. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh $A(-1;4)$ và các đỉnh B, C thuộc đường thẳng $\Delta: x-y-4=0$. Xác định toạ độ các điểm B và C, biết diện tích tam giác ABC bằng 18.

Bài tập 16. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, cho tam giác ABC với $A(2;-4), B(0;-2)$ và trọng tâm G thuộc đường thẳng $d: 3x-y+1=0$. Hãy tìm tọa độ của C, biết rằng diện tích tam giác ABC bằng 3.

Bài tập 17. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A, có đỉnh $C(-4;1)$, phân giác trong góc A có phương trình $x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng BC, biết diện tích tam giác ABC bằng 24 và đỉnh A có hoành độ dương.

Bài tập 18. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, cho tam giác ABC có $M(1;0), N(4;-3)$ lần lượt là trung điểm của AB, AC; $D(2;6)$ là chân đường cao hạ từ A lên BC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Bài tập 19. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, cho tam giác ABC có $M(-2;2)$ là trung điểm BC và phương trình cạnh $(AB): x-2y-2=0$, $(AC): 2x+5y+3=0$. Hãy xác định tọa độ đỉnh của tam giác.

Bài tập 20. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, cho tam giác ABC có trọng tâm $G(-2;-1)$ và phương trình các cạnh là $(AB): 4x+y+15=0$, $(AC): 2x+5y+3=0$. Tìm tọa độ đỉnh A, trung điểm M của BC, đỉnh B, C.

Bài tập 21. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, cho ΔABC có $B(3;5)$, đường kẻ từ A có phương trình : $2x-5y+3=0$ và trung tuyến kẻ từ C có phương trình : $x+y-5=0$. Tìm tọa độ đỉnh A, trung điểm $M \in AB$.

Bài tập 22. Viết phương trình các cạnh hình vuông $ABCD$, biết rằng $M(0;2) \in AB$, $N(5;-3) \in BC$, $P(-2;-2) \in CD$, $Q(2;-4) \in DA$.

Bài tập 23. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, cho 2 điểm $A(-1;1), B(2;2)$. Tìm điểm C trên đường thẳng $(d): y=3$, sao cho $S_{ABC}=2$ (đvdt). Khi đó tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Bài tập 24. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc $0xy$, cho hình bình hành $ABCD$ có $B(1;5)$, đường cao $AH: x+2y-2=0$, đường phân giác trong d của góc $\widehat{ACB}$ có phương trình $x-y-1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình bình hành.

Bài tập 25. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc $0xy$, cho tam giác ABC vuông cân tại A, các đỉnh A, B, C lần lượt nằm trên các đường thẳng d: $x+y-5=0$, $d_1: x+1=0$, $d_2: y+2=0$ và $BC=5\sqrt{2}$. Tìm tọa độ đỉnh A, B, C của tam giác.

Bài tập 26. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc $0xy$, cho ΔABC có $C(1;1)$ và $AB=\sqrt{5}$ và $AB: x+2y-3=0$, trọng tâm ΔABC thuộc đường thẳng $x+y-2=0$. Tìm tọa độ điểm A, B.

Bài tập 27. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc $0xy$, cho hình vuông $ABCD$ có $A(-2;6)$, đỉnh B thuộc đường thẳng $d: x-2y+6=0$. Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên 2 cạnh BC, CD sao cho $BM=CN$. Xác định tọa độ đỉnh C, biết rằng AM cắt BN tại $I\left(\frac{2}{5};\frac{14}{5}\right)$.

Bài tập 28. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc $0xy$, cho ΔABC có $A(2;7)$, đường thẳng AB cắt trục Oy tại E sao cho $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EB}$, đồng thời ΔAEC cân tại A và có trọng tâm $G\left(2;\frac{13}{3}\right)$. Viết phương trình chứa cạnh BC.

Bài tập 29. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc $0xy$, cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 12, tâm I là giao điểm của đường thẳng $d_1: x-y-3=0$ và $d_2: x+y-6=0$. Trung điểm của AB là giao điểm của d_1 với trục Ox.
Tìm toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật.

Bài tập 30. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc $0xy$, cho hình vuông $ABCD$ biết $M(2;1)$, $N(4;-2)$; $P(2;0)$; $Q(1;2)$ lần lượt thuộc cạnh AB, BC, CD, AD. Hãy lập phương trình các cạnh của hình vuông.

Bài tập 31. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, cho hình thoi ABCD có tâm I(2; 1) và AC = 2BD. Điểm $M\left(0;\frac{1}{3}\right)$ thuộc đường thẳng AB; điểm $N(0;7)$ thuộc đường thẳng CD. Tìm tọa độ đỉnh B biết B có hoành độ dương.

Bài tập 32. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, cho điểm $A(2;0)$ và 2 đường thẳng $d_1: x-y=0$, $d_2: x+2y+1=0$. Tìm các điểm $B\in d_1$, $C\in d_2$ để tam giác ABC vuông cân tại A.

Bài tập 33. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy cho hai đường thẳng $d_1: x-2y+1=0, d_2: 2x+3y=0$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$, biết A thuộc đường thẳng d_1, C thuộc đường thẳng d_2 và hai điểm B, D thuộc trục Ox.

Bài tập 34. Cho hình bình hành $ABCD$. Biết $I\left(\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right)$ là trung điểm của cạnh CD,

$D\left(3;\frac{3}{2}\right)$ và

đường phân giác góc $\widehat{BAC}$ có phương trình là $\Delta: x-y+1=0$. Xác định tọa độ đỉnh B.

Bài tập 35. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, cho ba điểm $I(1;1)$, $J(-2;2)$, $K(2;-2)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$ sao cho I là tâm hình vuông, J thuộc cạnh AB và K thuộc cạnh CD.

Bài tập 36. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, cho ba đường thẳng

$d_1: 4x+y-9=0$, $d_2: 2x-y+6=0$, $d_3: x-y+2=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi $ABCD$, biết hình thoi $ABCD$ có diện tích bằng 15, các đỉnh A, C thuộc d_3, B thuộc d_1 và D thuộc d_2.

Bài tập 37. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, cho $A(2;2), B(7;2)$ và đường thẳng $(\Delta): x+3y-3=0$. Hãy tìm trên (Δ) các điểm C và D sao cho :

a. ΔABC cân tại A;

b. $(AD+BD)$ ngắn nhất.

Bài tập 38. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(-1;-1)$, $B(0;2)$, $C(0;1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A sao cho tổng khoảng cách từ B và C tới Δ là lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Bài tập 1.a. $(d): x-y+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=t-2 \\ y=t \end{cases}$ $t\in R$; $C\in(d)$ nên $C(t-2;t)$

$\overrightarrow{AC}=(t-3;t+2), \overrightarrow{BC}=(t+1;t-3)$

ΔABC vuông tại C khi $AC\perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}=0 \Leftrightarrow (t-3)(2t+3)=0$

$\Leftrightarrow t_1=3 \Rightarrow C_1(1;3)$ hoặc $t_2=-\dfrac{3}{2} \Rightarrow C_2\left(-\dfrac{7}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$

b. Gọi G là trong tâm của tam giác, suy ra tọa độ của G là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x+4y-3=0 \\ 3x-10y-17=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{7}{3} \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow G\left(\dfrac{7}{3};-1\right).$$

Gọi E là trung điểm của BC, suy ra $\overrightarrow{EA}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{GA} \Rightarrow E\left(2;-\dfrac{5}{2}\right)$.

Giả sử $B(a;b)$, suy ra $C(4-a;-5-b)$. Từ đó ta có hệ:

$$\begin{cases} 3a+4b-3=0 \\ 3(4-a)-10(-5-b)-17=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+4b-3=0 \\ -3a+10b+45=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=-3 \end{cases}.$$

Vậy, $B(5;-3), C(-1;-2)$.

c. Gọi A_1 đối xứng với A qua BD, suy ra $A_1\in BC$ và $A_1(1;-4)$

A_2 đối xứng với A qua CE, suy ra $A_2\in BC$ và $A_2\left(-\dfrac{43}{5};-\dfrac{56}{5}\right)$.

Suy ra phương trình $BC: 3x-4y-19=0$.

Tọa độ B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-y-1=0 \\ 3x-4y-19=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-15 \\ y=-16 \end{cases} \Rightarrow B(-15;-16)$.

Tọa độ C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x+2y+17=0 \\ 3x-4y-19=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-7 \end{cases} \Rightarrow C(-3;-7)$.

Vậy, $B(-15;-16), C(-3;-7)$.

d. AB đi qua $M(2;-3)$ có phương trình: $a(x-2)+b(y+3)=0$

ABC vuông cân tại A $\Leftrightarrow 12a^2-7ab-12b^2=0$

Giả sử $AB: 4x+3y+1=0 \Rightarrow AC: 3x-4y+7=0 \Rightarrow A(-1;1),\ B(-4;5),\ C(3;4)$.

e. $BC: 2x-y+3=0$. Gọi A' là điểm đối xứng của B qua phân giác $\widehat{ACB}$, ta tìm được $A'(6;0)$. Tọa độ điểm A là giao điểm A'C và AH $\Rightarrow A(4;-1)$

Bài tập 2.a. Dựng đường thẳng (d) qua $A(-1;3)$ và

$(d)\perp(\Delta) \Rightarrow (d): 2(x+1)+1(y-3)=0$

hay $(d): 2x+y-1=0$

$(\Delta)\cap(d)=\{B(0;1)\} \Rightarrow AB=\sqrt{5}$

Gọi $C(x_C;y_C), x_C>0; y_C>0$. Ta có $\begin{cases} x_C-2y_C+2=0 \\ \sqrt{x_C^2+(y_C-1)^2}=\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow C(2;2)$

Hình ABCD là hình vuông nên : $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$; ta có :

$\begin{cases} -1=x_D-2 \\ 2=y_D-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D=1 \\ y_D=4 \end{cases} \Rightarrow D(1;4)$

b. Chu vi hình vuông : $P=4.AB=4\sqrt{5} \Rightarrow S=AB^2=5$

Bài tập 3. a. NP đi qua N và vuông góc với đường cao hạ từ M, nên có phương trình: $4x+3y-5=0$. $P(-1;3)$ là tọa độ giao điểm của NP và phân giác trong góc P. Giả sử PI là phân giác trong P thì $\widehat{MPI}=\widehat{IPN}$.

$PM: y-3=0,\ MN: 4x+7y-1=0$

Gợi ý cách khác:

$MH: 3x-4y+27=0$, phân giác $PI: x+2y-5=0$

Lấy N' đối xứng với N qua PI.

Viết NP qua N và vuông góc MH

Viết PM qua P có $\overrightarrow{u_{PM}}=\overrightarrow{PN'}$

b. Ta có phương trình $BC: x+y-2=0$

Suy ra tọa độ của B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x+y-2=0 \\ 2x+5y-13=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow B(-1;3)$.

Gọi $A(a;a+2)$, suy ra tọa độ của trung điểm AC là $M\left(\frac{a+5}{2};\frac{a-1}{2}\right)$

Mà $M \in BM$ nên $2\frac{a+5}{2}+5\frac{a-1}{2}-13=0 \Leftrightarrow a=3 \Rightarrow A(3;5)$.

Vậy, $A(3;5), B(-1;3)$.

c. Ta có phương trình $BC: x+2y+5=0$.

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+y-2=0 \\ x+2y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=-7 \end{cases} \Rightarrow C(9;-7)$.

Gọi B' là điểm đối xứng với B qua CE, suy ra $B'(5;1)$ và $B' \in AC$

Do đó, ta có phương trình $AC: 2x+y-11=0$.

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ 2x+y-11=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=6 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{5}{2};6\right)$.

Vậy, $A\left(\frac{5}{2};6\right), C(9;-7)$.

d. Gọi hình vuông đã cho là ABCD. (AB) là $x-2y+12=0$.

Gọi H là hình chiếu của E lên đường thẳng AB. Suy ra $H(-2;5)$

A, B thuộc đường tròn tâm H, bán kính $EH=\sqrt{45}$ có phương trình:

$$(x+2)^2+(y-5)^2=45$$

Toạ độ hai điểm A, B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-2y+12=0 \\ (x+2)^2+(y-5)^2=45 \end{cases}$.

Giải hệ tìm được $A(4;8), B(-8;2)$. Suy ra $C(-2;-10)$

$AD: 2x+y-16=0$, $BC: 2x+y+14=0$, $CD: x-2y-18=0$.

e. Chu vi bằng $6\sqrt{2} \Rightarrow AB=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. A thuộc Ox và $d(A,Ox)=\frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A(2;0)$

B là hình chiếu của A trên d nên có toạ độ : $\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

BD hợp với d góc 45^0 và có VTPT $\vec{n}=(a;b) \neq \vec{0}$ thoả :

$$\frac{|a.1-b.1|}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}}=\cos 45^0 \Rightarrow BD: 2x-1=0 \text{ hoặc } 2y-3=0$$

Bài tập 4.a Gọi $B(x_B;y_B)$, $C(x_C;y_C)$ là tọa độ cần tìm.

G là trọng tâm tam giác nên có: $\overrightarrow{GI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AI} \Rightarrow I(-1;3)$

I là trung điểm BC và tam giác ABC vuông cân tại A nên có:

$$\begin{cases} x_B+x_C=2x_I=1 \\ y_B+y_C=2y_I=-1 \\ AB=AC \\ \overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}=0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B(4;1),C(-3;2) \\ B(-3;2),C(4;1) \end{array}\right.$$

b. Tọa độ A thỏa mãn hệ: $\begin{cases} 7x-2y-3=0 \\ 6x-y-4=0 \end{cases} \Rightarrow A(1;2)$

Vì B đối xứng với A qua M nên suy ra $B(3;-2)$.

Đường thẳng BC đi qua B và vuông góc với đường thẳng: $6x-y-4=0$ nên suy ra phương trình $BC: x+6y+9=0$.

Tọa độ trung điểm N của BC thỏa mãn hệ: $\begin{cases} 7x-2y-3=0 \\ x+6y+9=0 \end{cases} \Rightarrow N\left(0;-\frac{3}{2}\right)$

Suy ra $\overrightarrow{AC}=2.\overrightarrow{MN}=(-4;-3)$.

Phương trình đường thẳng $AC: 3x-4y+5=0$.

c. Gọi $A\left(a;\frac{3a+4}{4}\right) \Rightarrow B\left(4-a;\frac{16-3a}{4}\right)$.

Khi đó diện tích tam giác ABC là: $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.d(C,\Delta)=3AB$

Theo giả thiết ta có: $AB=5 \Leftrightarrow (4-2a)^2+\left(\frac{6-3a}{2}\right)^2=25 \Leftrightarrow a=0$ hoặc $a=4$

Vậy hai điểm cần tìm là $A(0;1)$ và $B(4;4)$.

d. $I\left(\frac{9}{2};\frac{3}{2}\right)$. Giả sử M là trung điểm $AD \Rightarrow M(3;0)$. $AB=2IM=3\sqrt{2}$

$\Rightarrow AD=2\sqrt{2}$, $MA=MD=\sqrt{2}$. $(AD): x+y-3=0$.

Tọa độ A,D là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x+y-3=0 \\ \sqrt{(x-3)^2+y^2}=\sqrt{2} \end{cases}$

$\Rightarrow A(2;1), D(4;-1), C(7;2), B(5;4)$

e. Ta có: $B = AB \cap BD$ suy ra tọa độ B là nghiệm hệ:

$\begin{cases} x-2y-1=0 \\ x-7y+14=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow B=(7;\ 3)$

Giả sử $A(2a+1;\ a) \in AB,\ D(7d-14;\ d) \in BD$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(6-2a;\ 3-a),\ \overrightarrow{BD}=(7d-21;\ d-3),\ \overrightarrow{AD}=(7d-2a-15;\ d-a)$

Do $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0 \Leftrightarrow (3-a)(15d-5a-30)=0 \Leftrightarrow 3d-a-6=0$

$\Rightarrow a=3d-6 \Rightarrow \overrightarrow{AD}=(d-3;6-2d)$.

Lại có: $\overrightarrow{BC}=(x_C-7;\ y_C-3)$. Mà $ABCD$ là hình chữ nhật nên $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

$\begin{cases} d-3=x_C-7 \\ 6-2d=y_C-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C=d+4 \\ y_C=9-2d \end{cases} \Rightarrow C=(d+4;\ 9-2d)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{EA}=(6d-13;\ 3d-7),\ \overrightarrow{EC}=(d+2;\ 8-2d)$ với $E=(2;1)$

Mặt khác điểm $E(2;1) \in AC \Rightarrow \overrightarrow{EA},\ \overrightarrow{EC}$ cùng phương

$\Leftrightarrow (6d-13)(8-2d)=(d+2)(3d-7) \Leftrightarrow d^2-5d+6=0 \Rightarrow d=2 \Rightarrow a=0$

Vậy $A=(1;\ 0),\ B=(7;\ 3),\ C=(6;\ 5),\ D=(0;\ 0)$ là các đỉnh của hình chữ nhật cần tìm.

Bài tập 5.a. $\left.\begin{array}{l} \cos\varphi_1=\cos(d_1;d_2)=\dfrac{3}{\sqrt{34}} \\ \cos\varphi_2=\cos(d_1;d_3)=\dfrac{3}{\sqrt{34}} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi_1=\varphi_2$

Vậy, ΔABC cân có cạnh đáy là $x+y-6=0$.

b. Vì $B \in d_1 \Rightarrow B(b;2-b), C \in d_2 \Rightarrow C(c;c-8)$.

Ta có hệ: $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \\ AB=AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b-1)(c-4)=2 \\ (b-1)^2-(c-4)^2=3 \end{cases}$

Đặt $x=b-1; y=c-4$ ta có hệ: $\begin{cases} xy=2 \\ x^2-y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$

Vậy, $B(3;-1), C(5;3)$ hoặc $B(-1;3), C(3;5)$.

c. Gọi vectơ pháp tuyến AB, AC, BC lần lượt là: $\overrightarrow{n_1}(1;2), \overrightarrow{n_2}(2;1), \overrightarrow{n_3}(a;b)$

Phương trình BC có dạng: $a(x-1)+b(y-2)=0, a^2+b^2>0$

Tam giác ABC cân tại A nên: $\cos B = \cos C \Leftrightarrow \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_3}\right)\right| = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{n_3}\right)\right|$

$$\Leftrightarrow \frac{|a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{5}} = \frac{|2a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{5}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ a=b \end{array}\right.$$

Với $a=-b$, chọn $b=-1 \Rightarrow a=1 \Rightarrow$ BC: $x-y+1=0 \Rightarrow B(0;1), C\left(\frac{-2}{3};\frac{1}{3}\right)$. Không thỏa mãn M thuộc đoạn BC.

Với $a=b$, chọn $a=b=1 \Rightarrow$ BC: $x+y-3=0 \Rightarrow B(4;-1), C(-4;7)$. Thỏa mãn M thuộc đoạn BC.

Gọi trung điểm của BC là $K(0;3)$.

Ta có: $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC} = \left(\overrightarrow{DK}+\overrightarrow{KB}\right).\left(\overrightarrow{DK}+\overrightarrow{KC}\right) = DK^2 - \frac{BC^2}{4} \ge -\frac{BC^2}{4}$

Dấu bằng xảy ra khi $D \equiv K$. Vậy $D(0;3)$

d. Ta có $x^2+y^2+2x-2y-14=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-1)^2=16$

Do vậy đường tròn (C) có tâm $I(-1;1)$ và bán kính $R=4$.

Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B $\Leftrightarrow d(I,d)<4$

$$\Leftrightarrow \frac{|-1.1+1.1+m|}{\sqrt{1^2+1^2}} < 4 \Leftrightarrow |m| < 4\sqrt{2} \Leftrightarrow -4\sqrt{2} < m < 4\sqrt{2}\ (*)$$

Với điều kiện $(*)$, đường thẳng d cắt (C) tại A, B phân biệt.

Diện tích tam giác IAB : $S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2}IA.IB.\sin\widehat{AIB} = \frac{1}{2}R^2\sin\widehat{AIB} = 8\sin\widehat{AIB} \le 8.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sin\widehat{AIB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{AIB} = 90^0$.

Suy ra tam giác IAB vuông cân tại I.

Do vậy $d(I,d) = \frac{R}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|m|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=-4 \end{array}\right.$ (thỏa $(*)$)

Vậy, diện tích tam giác IAB lớn nhất bằng 8 khi $m=-4$ hoặc $m=4$.

e. ABCD là hình chữ nhật nên góc giữa AC và AB bằng góc giữa AB và BD,

Gọi vectơ pháp tuyến AB, BD, AC là $\overrightarrow{n_{AB}}(1;-2)$, $\overrightarrow{n_{BD}}(1;-7)$, $\overrightarrow{n_{AC}}(a;b)$ (*với* $a^2+b^2>0$). Khi đó ta có: $\left|\cos\left(\overrightarrow{n_{AB}},\overrightarrow{n_{BD}}\right)\right| = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_{AC}},\overrightarrow{n_{AB}}\right)\right|$

$\Leftrightarrow \left|a-2b\right| = \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow 7a^2+8ab+b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ a=-\frac{b}{7}\end{array}\right.$

Với $a=-b$, chọn $a=1 \Rightarrow b=-1 \Rightarrow AC: x-y-1=0$

Với $a=-\frac{b}{7}$, chọn $a=1 \Rightarrow b=-7 \Rightarrow AC: x-7y+5=0$ (không thỏa vì AC không cắt BD)

Gọi I là tâm hình chữ nhật thì $I = AC \cap BD$ nên toạ độ I là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} x-y-1=0 \\ x-7y+14=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{2} \\ y=\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right)$

Hơn nữa A, C khác phía so với BD nên: $NA+NC \ge AC$

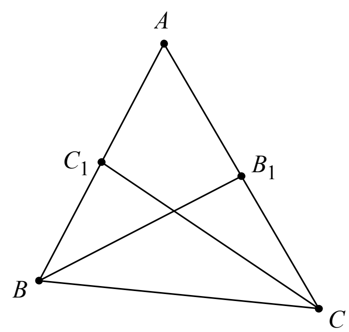
Đẳng thức xảy ra khi $N = AC \cap BD \Rightarrow N \equiv I$. Vậy $N\left(\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right)$.

Bài tập 6. a $B \in BB_1 \Rightarrow B(b;8b-3)$, C_1 là trung điểm của AB nên có $C_1\left(\frac{b+4}{2};4b-2\right)$

Mặt khác: $C_1 \in CC_1$ nên suy ra

$7(b+4)-13(4b-2)-9=0$

$\Leftrightarrow b=-1 \Rightarrow B(-1;-11)$



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, suy ra tọa độ của G là nghiệm của hệ :

$\begin{cases} 8x-y-3=0 \\ 14x-13y-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$

Suy ra $\begin{cases} x_C = 3x_G - x_A - x_B = -2 \\ y_C = 3y_G - y_A - y_B = 11 \end{cases} \Rightarrow C(-2;11)$.

b. Cách 1: Gọi I là giao điểm 2 đường chéo hình chữ nhật ABCD. Vì G là trọng tâm tam giác ABD nên A,G,I thẳng hàng. Theo tính chất trọng tâm tam giác ta dễ dàng tìm ra tọa độ điểm $I\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$. Vì I là trung điểm AC nên biết tọa độ A, I ta sẽ tìm ra tọa độ $C(4;2)$.

Vì D thuôc đường thẳng $x-y-2=0$ mà C thỏa mãn phương trình này . Do đó $DC:\ x-y-2=0$.

Biết phương trình DC sẽ viết được phương trình AB mà ABCD là hình chữ nhật nên biết pháp tuyến AB ta sẽ biết pháp tuyến AD từ đó viết được phương trình AD. Tọa độ D là giao điểm của AD và DC. Ta tìm được D. Vì I là trung điểm BD nên ta tìm được nốt B

Cách 2: Gọi I là trung điểm của BD . Theo tính chất trọng tâm ta có :
$$\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GI}\Leftrightarrow\begin{cases}x_G-x_A=2(x_I-x_G)\\ y_G-y_A=2(y_I-y_G)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_I=\frac{3}{2}\\ y_I=\frac{5}{2}\end{cases}$$

Do ABCD là hình chữ nhật nên ta có I là trung điểm của AC. Từ đó :
$$\begin{cases}x_C=2x_M-x_A=4\\ x_C=2y_M-y_A=2\end{cases}\Rightarrow C(4;2)$$

$D\in d: x-y-2=0\Rightarrow D(x;x-2)$.

$AD\perp DC\Rightarrow \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}=0$

c. ◎ $AB\cap BD=\{B(9;-7)\}$

◎ Gọi I là giao điểm AC và BD, suy ra $I(a;2-a)$, $D(-9+2a;11-2a)$

Vì $BC\perp AB\Rightarrow BC: 4x-3y+m=0$. BC qua điểm B nên ta tìm được m.

◎ Theo giả thiết diện tích hình chữ nhật là 22 nên ta có: $AB\cdot BC=22.$ Hơn nữa $BC\perp AB\Rightarrow\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}=0$ dễ dàng tìm ra tọa độ C, D.

d. Gọi $P(x_P;y_P)$ đối xứng với $M(4;6)$ qua I nên $\begin{cases}4+x_P=2x_I\\ 6+y_P=2y_I\end{cases}$

I thuộc (d) nên $\frac{3(4+x_P)}{2}-\frac{5(6+y_P)}{2}+6=0\Leftrightarrow 3x_P-5y_P-6=0\quad(1)$

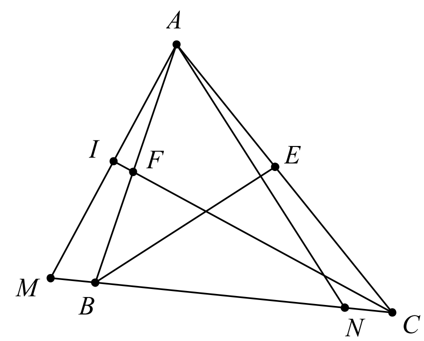
Lại có $PM\perp PN\Leftrightarrow\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{PN}=0\Leftrightarrow(x_P-4)(x_P-6)+(y_P-6)(y_P-2)=0\qquad(2)$

Từ (1) và (2), suy ra: $34{y_P}^2-162y_P+180=0\Leftrightarrow y_P=3$ hoặc $y_P=\frac{30}{17}$

Bài tập 7.a Gọi M là điểm đối xứng với A qua CF, suy ra $M\in BC$. Vì $AM\perp CF$ nên $AM: x+y-3=0$.

Do đó $AM \cap CF$ tại $I(2;1)$, M đối xứng với A qua I $\Rightarrow M(0;3)$.

Tương tự, gọi N là điểm đối xứng với A qua BE, suy ra $N \in BC$ và $N(-2;-1)$.



Suy ra $\overrightarrow{MN} = (2;4) \Rightarrow$ phương trình $BC: 2x - y + 3 = 0$.

$B = BE \cap BC \Rightarrow B: \begin{cases} x - 1 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow B(1;5)$

$C = CF \cap BC \Rightarrow C: \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -5 \end{cases} \Rightarrow C(-4;-5)$.

b. Giả sử rằng: $B(3b;-4b+4), C(0;c)$.

Ta có: $\overrightarrow{AC} = (-3;c), \overrightarrow{BC} = (-3b;4b+c-4)$

Giả thiết tam giác ABC vuông tại C ta có: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 9b + 4bc + c^2 - 4c = 0$ (1)

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.d(C;AB)$, trong đó: $AB = 5|b-1|$, $d(C;AB) = \frac{|3c-12|}{5}$

Theo bài toán, ta có: $\frac{1}{2}.5|b-1|\frac{|3c-12|}{5} = 6 \Rightarrow |(b-1)(c-4)| = 4$ (2)

c. BC đi qua $B(1;5)$ và vuông góc AH nên $BC: -2x + y - 3 = 0$

Toạ độ C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} -2x + y - 3 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(-4;-5)$

Gọi A' là điểm đối xứng B qua đường phân giác $(d): x - y - 1 = 0$, $BA \cap (d) = K$. Đường thẳng KB đi qua B và vuông góc (d) nên KB có phương trình: $x + y - 6 = 0$

Toạ độ điểm K là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow K\left(\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right) \Rightarrow A'(6;0)$

Phương trình $AC: x - 2y - 6 = 0$, $A = CA' \cap AH \Rightarrow A(4;-1)$

Trung điểm $I(0;-3)$ của AC, đồng thời I là trung điêm BD nên $D(-1;-11)$.

d. . $AB: x - y - 3 = 0$. Giả sử $G(m;2-m) \in d \Rightarrow C(3m-3;9-3m)$.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}.AB.d(C;AB) = \frac{3}{2} \Rightarrow d(C;AB) = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{|6m-15|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = 3. \end{array}\right.$$

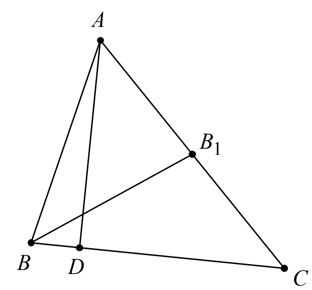
e. Phương trình DC qua D và vuông góc (d) là: $3x - 2y + 6 = 0$.

Giao điểm của DC và (d) là: $M(-4;-3)$ và cũng là trung điểm DC. Suy ra tọa độ $C(-2;0)$.

Gọi C' là điểm đối xứng của C qua d' thì $C' \in AB$, phương trình CC': $x - 5y + 2 = 0$. Giao điểm CC' và d' là $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.Suy ra tọa độ $C'(3;1)$.

Phương trình AB qua C' vuông góc (d) là: $3x - 2y - 7 = 0$.

Bài tập 8.a Vì $BC \perp AD$ nên phương trình $BC: 2x - y + 3 = 0$.



$$B = BC \cap BB_1 \Rightarrow B: \begin{cases} 8x - y - 3 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow B(1;5)$$

Do $A \in AD$, suy ra $A(2-2a;a)$.

Do đó $B_1\left(-a-1;\frac{a-5}{2}\right)$.

Mà $B \in BB_1$ nên ta có: $8(-a-1) - \frac{a-5}{2} - 3 = 0 \Leftrightarrow a = -1 \Rightarrow A(4;-1)$.

b. Gọi H là hình chiếu của M lên AD ta có $H\left(\frac{2}{3};\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$. Đặt $AB = x$

$\Rightarrow BC = CD = 2x \Rightarrow MH = \frac{3x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Vậy, $AD = \frac{2}{3}$.

Gọi $A\left(\sqrt{2}a;a\right)$ và H là trung điểm của AD suy ra $D\left(;\right)$ và $AD=\frac{2}{3}$ suy ra $t=\frac{\sqrt{2}}{3}\ \Rightarrow A\left(\frac{2}{3};\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

c. Gọi M là trung điểm $AB\Rightarrow M\left(\frac{5}{2};-\frac{5}{2}\right)\Rightarrow AB: x-y-5=0$

Vì G là trọng tâm $\Delta ABC\Rightarrow S_{\Delta ABG}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}$. Giả sử $G\left(x_0;y_0\right)$, ta có: $d\left(G;AB\right)=\frac{\left|x_0-y_0-5\right|}{\sqrt{2}}=\frac{2S_{\Delta ABG}}{AB}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left|x_0-y_0-5\right|=1\left(1\right)$

Vì $G\in\Delta: 3x-y-8=0\Rightarrow 3x_0-y_0-8=0\ \left(2\right)$

Từ $\left(1\right)$ v à $\left(2\right)$ suy ra $G\left(1;-5\right)\Rightarrow C\left(-2;-10\right)$ hoặc $G\left(2;-2\right)\Rightarrow C\left(1;-1\right)$

d. Gọi tọa độ điểm $B\left(-2b-5;b\right)\Rightarrow C\left(2b+5;-b\right)$.

Điểm $O\in BC$. Lấy đối xứng O qua phân giác của góc B ta được điểm $M\left(2;4\right)\in AB\ \Rightarrow\overrightarrow{BM}=\left(7+2b;4-b\right)\ \overrightarrow{CK}=\left(1-2b;2+b\right)$

Vì tam giác ΔABC vuông tại A nên có: $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CK}=0\Rightarrow b=-3$ hoặc $b=1$.

e. Gọi tọa độ điểm $B\left(2y_B;y_B\right)\Rightarrow A\left(8-2y_B;4-y_B\right)$

Phương trình đường thẳng $CI: 2x+y-10=0$

Gọi tọa độ điểm $C\left(x_C;10-2x_C\right)\Rightarrow\left|\overrightarrow{CI}\right|=\sqrt{5}\left|4-x_C\right|$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{20}\left|y_B-2\right|$

Diện tích tam giác ABC là: $S_{ABC}=\frac{1}{2}CI.AB=10\Leftrightarrow\left|4y_B+2x_C-x_Cy_B-8\right|=2$

$\Leftrightarrow x_Cy_B-4y_B-2x_C=-6\ \left(1\right)$ hoặc $x_Cy_B-4y_B-2x_C=-10\ \left(2\right)$

Vì $M\in BC\Rightarrow\overrightarrow{CM}=k\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\begin{cases}4-x_C=k\left(2y_B-4\right)\\ -\frac{11}{2}+2x_C=k\left(y_B-\frac{9}{2}\right)\end{cases}$ vì $y_B\geq 3$

$\Rightarrow 2x_Cy_B-6y_B-5x_C+16=0\ \left(3\right)$

Từ $\left(1\right)$ và $\left(3\right)$ ta có hệ: $\begin{cases}x_Cy_B-4y_B-2x_C=-6\\ 2x_Cy_B-6y_B-5x_C+16=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_B=-1-\sqrt{2}\\ x_C=-1+\sqrt{2}\end{cases}$

Từ $\left(2\right)$ và $\left(3\right)$ ta có hệ: $\begin{cases}x_Cy_B-4y_B-2x_C=-10\\ 2x_Cy_B-6y_B-5x_C+16=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_B=3\\ x_C=2\end{cases}$

Vậy, tọa độ các đỉnh của tam giác ABC là: $A(2;1)$, $B(6;3)$, $C(2;6)$

Bài tập 9. a. Ta có phương trình $BC: 2x - y + 3 = 0$.

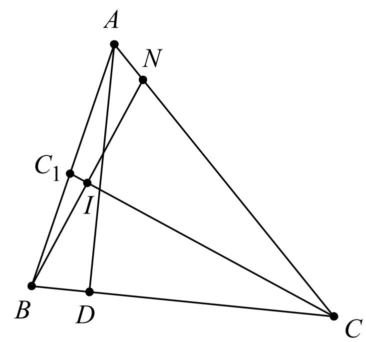
Vì $C = CC_1 \cap BC \Rightarrow C: \begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -5 \end{cases} \Rightarrow C(-4;-5)$.

Gọi N là điểm đối xứng với B qua CC_1, ta có $N \in AC$ và $N(6;0)$

$\Rightarrow \overrightarrow{NC} = (10;5)$, phương trình $AC: x - 2y - 6 = 0$.

Tọa độ của A là nghiệm của hệ

$\begin{cases} x - 2y - 6 = 0 \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow A(4;-1)$.



b. Gọi điểm $A \in \Delta \Rightarrow A(4y_0 - 6; y_0) \Rightarrow \vec{n}_{AC} = (y_0 - 1; 5 - 4y_0)$

Tam giác ABC vuông cân tại A, nên có: $\cos\widehat{ACB} = \dfrac{6y_0 - 7}{\sqrt{5(17y_0^2 - 42y_0 + 26)}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow 13y_0^2 - 42y_0 + 32 = 0 \Leftrightarrow y_0 = 2 \Rightarrow x_0 = 2$ hoặc $y_0 = \dfrac{16}{13} \Rightarrow x_0 = -\dfrac{14}{13}$ (loại).

Vậy, $A(2;2)$, $B(3;-1)$, $C(5;3)$ là tọa độ cần tìm.

c. Giao điểm của (d_1) và (d_2) là $M(3;1)$.

Cách 1: $S_{\Delta OAB} = \dfrac{1}{2}AB.OH$ với H là chân đường cao hạ từ O lên AB

$\left(\dfrac{AB}{S_{\Delta OAB}}\right)^2 = \dfrac{4}{OH^2}$. Vì $OH \le OM \Rightarrow OH\max = OM$ thì $\dfrac{4}{OH^2}$ nhỏ nhất.

Khi đó AB nhận OM làm véc tơ pháp tuyến. Ta viết được phương trình AB

Cách 2:

Phương trình đường thẳng d có dạng: $a(x-3) + b(y-1) = 0$,$(a, b > 0)$

Theo bài toán, ta tìm được: $A\left(\dfrac{3a+b}{a};0\right)$, $B\left(0;\dfrac{3a+b}{b}\right)$

$\Rightarrow AB = \sqrt{\left(3+\frac{b}{a}\right)^2 + \left(1+3\frac{a}{b}\right)^2}$

$\left(\frac{AB}{S_{\Delta OAB}}\right)^2 = \frac{4}{\left(1+3\frac{a}{b}\right)^2} + \frac{4}{\left(3+\frac{b}{a}\right)^2}$. Đặt $t = \frac{a}{b},\ t > 0$

Xét hàm số: $f(t) = 4.\frac{t^2+1}{(3t+1)^2}$ với $t > 0$

Giá trị nhỏ nhất của $f(t)$ là $\frac{2}{5}$ đạt được khi $t = 3$ hay $a = 3b$

Phương trình đường thẳng cần tìm là: $3x + y - 10 = 0$

d. I thuộc cung AB của (P) sao cho diện tích IAB lớn nhất $\Leftrightarrow$ I xa AB nhất, tức I là tiếp điểm của tiếp tuyến $(d) \parallel AB$ của (P).

Phương trình đường thẳng $AB: y = 3x - 1 \Rightarrow (d): y = 3x + c$

(d) tiếp xúc (P) tại điểm I $\Rightarrow I\left(\frac{1}{2};-\frac{7}{4}\right) \Rightarrow C\left(-1;-\frac{17}{2}\right),\ D\left(2;\frac{1}{2}\right)$

e. $B = BC \cap d_1 \Rightarrow B(0;-1) \Rightarrow \overrightarrow{BM} = (2;2)$. Do đó $\overrightarrow{BM}$ là một véc tơ pháp tuyến của $BC \Rightarrow MB \perp BC$

Kẻ $MN \parallel BC$ cắt d_2 tại N ,vì tam giác ABC cân tại A nên tứ giác BCNM là hình chữ nhật.

Do $\begin{cases} MN \parallel BC \\ \text{Qua } M(2;1) \end{cases} \Rightarrow MN: x + y - 3 = 0,\ N = MN \cap d_2 \Rightarrow N\left(\frac{8}{3};\frac{1}{3}\right)$

Do $\begin{cases} NC \perp BC \\ \text{Qua } N\left(\frac{8}{3};\frac{1}{3}\right) \end{cases} NC: x - y - \frac{7}{3} = 0,\ C = NC \cap d_1 \Rightarrow C\left(\frac{2}{3};-\frac{5}{3}\right)$

Hơn nữa: $\overrightarrow{CM}\left(\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right) \Rightarrow \vec{n}(1;2)$ là một véc tơ pháp tuyến của AB nên phương trình $AB: x + 2y + 2 = 0$ và $\overrightarrow{BN}\left(\frac{8}{3};\frac{4}{3}\right) \Rightarrow \vec{u}(2;1) \Rightarrow AC: 6x + 3y + 1 = 0$

f. $A(a;0), B(b;b+1), C(4-2c;c)$.

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n}_{d_2}=0\\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{n}_{d_1}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\dfrac{2a-1}{3}\\ c=\dfrac{4-a}{3}\end{cases}\Rightarrow B\left(\dfrac{2a-1}{3};\dfrac{2a+2}{3}\right),\ C\left(\dfrac{2a+4}{3};\dfrac{4-a}{3}\right)$

Bài tập 10. a. Gọi H là trực tâm tam giác ABC, suy ra tọa độ của H là nghiệm của hệ

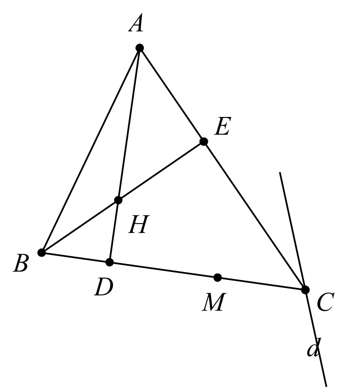
$$\begin{cases}2x-y+1=0\\ x+y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}\\ y=\dfrac{5}{3}\end{cases}\Rightarrow H\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3}\right).$$

Vì $C\in d\Rightarrow C(a;6-a)$. Do $AC\perp BE$ nên phương trình AC có dạng:

$x-y+6-2a=0$

Tương tự, phương trình

$BC: x+2y+a-12=0=0$.



Suy ra $B:\begin{cases}x+2y+a-12=0\\ x+y-2=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=a-8\\ y=10-a\end{cases}\Rightarrow B\left(a-8;10-a\right)$

$A:\begin{cases}2x-y+1=0\\ x-y+6-2a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5-2a\\ y=11-4a\end{cases}\Rightarrow A\left(5-2a;11-4a\right)$

Suy ra $\overrightarrow{MC}=\left(a;3-a\right),\overrightarrow{MB}=\left(a-8;7-a\right)$.

Vì B,C,M thẳng hàng nên $\dfrac{a-8}{a}=\dfrac{a-7}{a-3}\Leftrightarrow a=6$.

Vậy , $A\left(-7;-13\right),B\left(-2;4\right),C\left(6;0\right)$.

Gợi ý cách khác:

Viết BC qua M và vuông góc với AD

Viết CA qua C và vuông góc với BE

b. C,D lần lượt thuộc 2 đường thẳng $d_1: 3x - y - 4 = 0$, $d_2: x + y - 6 = 0$

$\Rightarrow C(a; 3a-4)$, $D(b; 6-b)$ $\Rightarrow \overrightarrow{CD} = (b-a; 10-b-3a)$

Gọi $\vec{n} = (2;1)$ là một vectơ pháp tuyến của AB.

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $\begin{cases} \overrightarrow{CD} \perp \vec{n} \\ d(C; AB) = CD \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(b-a) + 1.(10-b-3a) = 0 \\ \dfrac{|2b+6-b-1|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \sqrt{(b-a)^2 + (10-b-3a)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5a - 10 \\ |a-1| = |4a-10| \end{cases}$$

c. Viết phương trình đường thẳng qua A song song với CM

Tìm các giao điểm E,F của AE, CM với BD suy ra I là trung điểm của EF. Tính được điểm C

Tìm được trung điểm H của CM chính là hình chiếu vuông góc của A lên CM suy ra tọa độ điểm M.

Viết phương trình AD đi qua A,M. Tìm được điểm D suy ra B.

d. Đường thẳng AB đi qua M nên có phương trình $a(x-2) + b(y+3) = 0$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$. $\widehat{(AB;BC)} = 45^0$ nên $\cos 45^0 = \dfrac{|a+7b|}{\sqrt{50}\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a = 4b \\ 4a = -3b \end{array}\right.$.

Nếu $3a = 4b$, chọn $a = 4$, $b = 3$ được $(AB): 4x + 3y + 1 = 0$. $(AC): 3x - 4y + 7 = 0$.

Từ đó $A(-1;1)$ và $B(-4;5)$. Kiểm tra $\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MA}$ nên M nằm ngoài đoạn AB

Nếu $4a = -3b$, chọn $a = 3$, $b = -4$ được $(AB): 3x - 4y - 18 = 0$,

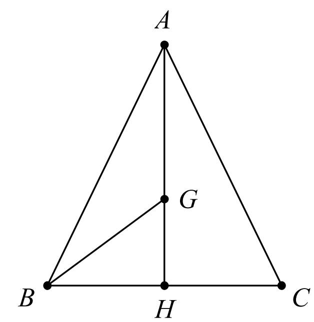
$(AC): 4x + 3y - 49 = 0$ $\Rightarrow A(10; 3)$, $B(10;3)$ (không thỏa)

Bài tập 11. a. Tọa độ đỉnh B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 2y - 4 = 0 \\ 7x - 4y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(0;-2)$

Vì ΔABC cân tại A nên AG là đường cao của ΔABC, suy ra phương trình AG có dạng: $2\left(x-\frac{4}{3}\right)+1\left(y-\frac{1}{3}\right)=0$

$\Leftrightarrow 2x+y-3=0$

Gọi $H = AG \cap BC$ thì tọa độ điểm H là nghiệm của hệ : $\begin{cases} 2x+y-3=0 \\ x-2y-4=0 \end{cases} \Rightarrow H(2;-1)$



Vì H là trung điểm của $BC \Rightarrow \begin{cases} x_C = 2x_H - x_B \\ y_C = 2y_H - y_B \end{cases} \Rightarrow C(4;0)$.

Ta có $x_G = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C), y_G = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C) \Rightarrow A(0;3)$.

Vậy, $A(0;3), B(0;-2), C(4;0)$.

b. $I \in (\Delta) \Rightarrow I(t;3-2t), t>0$

$IC = 2IB \Leftrightarrow 15t^2 + 10t - 25 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{5}{3}$ (không thỏa $t>0$) hoặc $t=1 \Rightarrow I(1;1)$.

Phương trình đường thẳng IC: $x+y-2=0$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC.d(B;AC) \Rightarrow AC = 6\sqrt{2}$.

Vì $A \in IC \Rightarrow A(a;2-a)$ nên có: $(a-5)^2 = 36 \Leftrightarrow a = 11$ hoặc $a=-1 \Rightarrow A(-1;3)$

Phương trình đường thẳng CD: $y+3=0$

Tọa độ D là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-y=0 \\ y+3=0 \end{cases} \Rightarrow D(-3;-3)$

Bài tập 12. a. Cạnh AC nằm trên đường thẳng đi qua M và vuông góc với BH

Phương trình cạnh $AC: x-y=0$.

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-4y-2=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=-\frac{2}{3}$

$\Rightarrow A\left(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$.Suy ra tọa độ điểm $C\left(\frac{8}{3};\frac{8}{3}\right)$.

Cạnh BC đi qua C và song song với đường thẳng d nên có phương trình $BC: x-4y+8=0$

Tọa độ đỉnh B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x+y+3=0 \\ x-4y+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow B(-4;1)$.

b. Tọa độ đỉnh A là giao điểm của AB và AD nên $A(x;y)$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x+2y-2=0 \\ 2x+y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{4}{3} \\ y=\dfrac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow A\left(-\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right).$$

Phương trình đường phân giác góc A là

$$\frac{x+2y-2}{\sqrt{5}} = \pm\frac{2x+y+1}{\sqrt{5}} \text{ hay } \left[\begin{array}{l} (d_1): x-y+3=0 \\ (d_1): 3x+3y-1=0 \end{array}\right..$$

• Trường hợp $(d_1): x-y+3=0$.

Đường thẳng (BD) đi qua M và vuông góc với (d_1) nên $(BD): x+y-3=0$.

Suy ra $B=AB\cap BD \Rightarrow B(4;-1)$, $D=AD\cap BD \Rightarrow D(-4;7)$.

Gọi $I=BD\cap(d_1) \Rightarrow I(0;3)$. Vì C đối xứng với A qua I nên $C\left(\frac{4}{3};\frac{13}{3}\right)$.

• Trường hợp $(d_2): 3x+3y-1=0$. Bạn đọc làm tương tự.

Bài tập 13. a. Gọi $d: x+y-4=0$.

Vì $BC \parallel d$ nên phương trình BC có dạng: $x+y+m=0$

Lấy $I(1;3)\in d$, ta có: $d(I,BC)=d(A,d)=4\sqrt{2} \Rightarrow |m+4|=8 \Rightarrow m=-12, m=4$

Vì A và I ở cùng phía so với BC nên ta có $m=4 \Rightarrow BC: x+y+4=0$.

Đường cao hạ từ đỉnh A có phương trình : $x-y=0$.

Tọa độ trung điểm P của BC: $\begin{cases} x-y=0 \\ x+y+4=0 \end{cases} \Rightarrow P(-2;-2)$

Do $B\in BC \Rightarrow B(b;-4-b)$ và P là trung điểm BC suy ra $C(-4-b;b)$

Mặt khác $AB\perp CE$ nên ta có $(b-6)(b+4)+(b+10)(b+3)=0$

$\Leftrightarrow b=0, b=-6$

Vậy có hai bộ điểm thỏa yêu cầu bài toán:

$$B(0;-4),\ C(-4;0) \text{ hoặc } B(-6;2),\ C(2;-6).$$

b. Do Δ qua O, nên có phương trình dạng : $x = 0$ hoặc $y = kx$

Nếu phương trình $\Delta: x = 0$, khi đó $A = \Delta \cap d_1 : x - y - 2 = 0 \Rightarrow A(0;-2)$

$\Delta \cap d_2 : 2x + y - 5 = 0 \Rightarrow B(0;5) \Rightarrow OA.OB = 10$ (thỏa mãn)

Nếu phương trình $\Delta: y = kx$

Do $A = \Delta \cap d_1$ nên tọa độ của A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ y = kx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{1-k} \\ y = \dfrac{2k}{1-k} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{2}{1-k};\frac{2k}{1-k}\right)$$

Do $B = \Delta \cap d_2$ nên tọa độ của B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ y = kx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{2+k} \\ y = \dfrac{5k}{2+k} \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{5}{2+k};\frac{5k}{2+k}\right)$$

Khi đó : $OA.OB = 10 \Leftrightarrow OA^2.OB^2 = 100 \Leftrightarrow \dfrac{4+4k^2}{(1-k)^2}.\dfrac{25+25k^2}{(2+k)^2} = 100$

$$\Leftrightarrow (k^2+1)^2 = (k^2+k-2)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k^2+1 = k^2+k-2 \\ k^2+1 = -k^2-k+2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 3 \\ k = -1, k = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Phương trình của đường thẳng Δ là $y = 3x$, $y = -x$, $y = \dfrac{1}{2}x$

Bài tập 14. Gọi C' là điểm đối xứng của C qua đường phân giác AD.

Khi đó $C' \in AB$.

Gọi $H = AD \cap CC' \Rightarrow H(5-2t;t) \Rightarrow \overrightarrow{CH} = (1-2t;t-3)$

Mặt khác AD có $\vec{u} = (-2;1)$ là VTCP và do $\overrightarrow{CH} \perp \vec{u}$ nên ta có:

$$\overrightarrow{CH}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow -2(1-2t) + 1(t-3) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(3;1).$$

Do H là trung điểm của CC', nên $C'(2;-1)$.

Vì $A = AD \cap AM$ (M là trung điểm của BC) nên tọa độ của A là nghiệm của hệ phương trình : $\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 4x + 13y - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow A(9;-2)$.

Khi đó đường thẳng AB có phương trình $x + 7y + 5 = 0$ nên $B(-7t - 5; t)$.

Vì $M \in AM \Rightarrow M\left(\dfrac{-13s + 10}{4}; s\right)$.

Lại vì M là trung điểm của BC nên $\begin{cases} -13s + 10 = -14t - 2 \\ 2s = 3 + t \end{cases} \Rightarrow B(-12;1)$.

Bài tập 15. Gọi M là trung điểm cạnh BC, do tam giác ABC cân tại A nên $AM \perp BC$.

Suy ra phương trình của $AM: x + y - 3 = 0$.

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow M\left(\dfrac{7}{2}; -\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow AM = \dfrac{9}{\sqrt{2}}$.

Ta có: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AM.BC = AM.BM = 18 \Rightarrow BM = \dfrac{18}{AM} = 2\sqrt{2}$

Mặt khác: $B \in \Delta$, suy ra $B(b; b-4)$ nên:

$$BM^2 = 8 \Leftrightarrow \left(b - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{7}{2}\right)^2 = 8 \Leftrightarrow \left(b - \frac{7}{2}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow b = \frac{11}{2}, b = \frac{3}{2}.$$

- Với $b = \dfrac{11}{2} \Rightarrow B\left(\dfrac{11}{2}; \dfrac{3}{2}\right), C\left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{5}{2}\right)$.
- Với $b = \dfrac{11}{2} \Rightarrow B\left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{5}{2}\right), C\left(\dfrac{11}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$.

Bài tập 16. Trung điểm I của AB là $I(1;-3)$, vì G là trọng tâm tam giác ABC nên suy ra : $S_{AGB} = \dfrac{1}{3}S_{ABC} = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2}d(G, AB).AB = 1 \Rightarrow d(G, AB) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Vì $G \in d$ nên suy ra $G(a;3a+1)$.

Phương trình đường thẳng $AB: x+y+2=0$ nên $d(G,AB)=\dfrac{|4a+3|}{\sqrt{2}}$

Do đó $d(G,AB)=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \dfrac{|4a+3|}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow a=-1, a=-\dfrac{1}{2}$

- $a=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow G\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$, mà $\begin{cases} x_A+x_B+x_C=3x_G \\ y_A+y_B+y_C=3y_G \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C=-\dfrac{7}{2} \\ y_C=\dfrac{9}{2} \end{cases}$.

Do đó $C\left(-\dfrac{7}{2};\dfrac{9}{2}\right)$

- Tương tự với $a=-1$ ta tìm được $C(-5;0)$.

Gợi ý cách khác:

Gọi $M(1;-3)$ là trung điểm AB, $G \in d \Rightarrow G(t;1+3t)$

G là trọng tâm tam giác ABC nên $\begin{cases} \overrightarrow{CM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CG} \\ \overrightarrow{AN}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AG} \end{cases}$

Hơn nữa N là trung điểm BC và $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB.d(C,AB)$

Bài tập 17. Gọi D là điểm đối xứng với C qua đường thẳng $d: x+y-5=0$, ta tìm được $D(4;9)$.

Vì A thuộc đường tròn đường kính CD nên A là giao điểm của đường thẳng d và đường tròn đường kính CD, suy ra tọa độ của A là nghiệm của hệ:

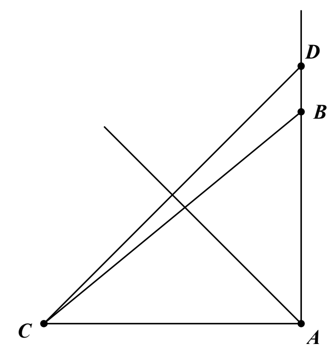
$\begin{cases} x+y-5=0 \\ x^2+(y-5)^2=32 \end{cases} \Rightarrow A(4;1)$ vì $x_A>0$

Suy ra $AC = 8 \Rightarrow AB = \dfrac{2S_{\Delta ABC}}{AC} = 6$.

Vì B thuộc đường thẳng $AD: x - 4 = 0$ nên $B(4;y)$.

Từ $AB = 6 \Rightarrow (y-1)^2 = 36 \Rightarrow y = -5, y = 7$

Vì $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$ cùng hướng nên ta có $B(4;7) \Rightarrow BC: 3x - 4y + 16 = 0$.



Bài tập 18. Gọi $A(a;b)$, suy ra $\overrightarrow{DA} = (a-2;b-6)$, $\overrightarrow{MN} = (3;-3)$.

Vì $AD \perp MN \Rightarrow \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{MN} = 0 \Leftrightarrow a - 2 - b + 6 = 0 \Leftrightarrow a - b = -4 \ (1)$.

Lấy đối xứng điểm A qua M, N ta có: $B(2-a;-b)$, $C(8-a;-6-b)$

Suy ra $\overrightarrow{BD} = (a;6+b)$, $\overrightarrow{CD} = (a-6;b+12)$

Vì B, C, D thẳng hàng nên ta có: $\dfrac{a-6}{a} = \dfrac{b+12}{b+6} \Leftrightarrow a + b = -6 \ (2)$.

Từ (1) và (2) ta suy ra $a = -5, b = -1$.

Vậy, $A(-5;-1), B(7;1), C(13;-5)$.

Gợi ý cách khác:

$MN: x + y - 1 = 0$

Viết AD qua D và vuông góc MN nên có $x - y + 4 = 0$

AD cắt MN tại $H\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right)$. Sau đó sử dụng tính chất trung điểm .

Bài tập 19. $(AB) \cap (AC) = A\left(\dfrac{4}{9};-\dfrac{4}{9}\right)$. $(\Delta): \begin{cases} \text{qua } M \\ (\Delta) \parallel (AC) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): 2x + 5y - 6 = 0$

$\Rightarrow (\Delta) \cap (AB) = N\left(\dfrac{22}{9};\dfrac{2}{9}\right)$. Vì N trung điểm (AB) nên $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AN}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-\frac{4}{9}\right)=2\left(\frac{22}{9}-\frac{4}{9}\right) \\ \left(y+\frac{7}{9}\right)=2\left(\frac{2}{9}+\frac{7}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow B\left(\frac{40}{9};\frac{11}{9}\right).$$ Vì M trung điểm (BC) nên $C\left(-\frac{76}{9};\frac{25}{9}\right)$

Bài tập 20. $(AB)\cap(AC)=A(-4;1)$: $\overline{GM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AG}\Rightarrow M(-1;-2)$

M trung điểm BC và $\begin{cases} B\in AB \\ C\in AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B+x_C=2x_M=-2 \\ y_B+y_C=2y_M=-4 \\ 4x_B+y_B+15=0 \\ 2x_C+5y_C+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B(-3;-3) \\ C(1;-1) \end{cases}$

Bài tập 21. Gọi $A(x_0;y_0),M(x_M;y_M)$ là trung điểm (AB)

$x_M=\frac{x_0+3}{2},y_M=\frac{y_0+5}{2}$ và M thuộc trung tuyến : $x_M+y_M-5=0$

$\Leftrightarrow x_0+y_0-2=0$, A thuộc đường cao : $2x_0-5y_0+3=0$

Ta có $\begin{cases} x_0+y_0-2=0 \\ 2x_0-5y_0+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(1;1) \\ M(2;3) \end{cases}$

Bài tập 22. $(AB): ax+b(y-2)=0,\ (AD): b(x-2)-a(y-4)=0$

$d[P,AB]=d[N,AD]\Rightarrow 3a+b=0$ hoặc $a+7b=0$

Bài tập 23. $C(x_0;3)\in y=3\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(3;3),\overrightarrow{AC}=(x_0+1;2)$

$S=2\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\right|=2\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|3.2-1(x_0+1)\right|=2\Rightarrow x_0=9$ hoặc $x_0=1$

$\Rightarrow C_1(1;3)$ hoặc $C_2(9;3)$

* $C(1;3)\Rightarrow \overrightarrow{AC}=(2;2),\overrightarrow{BC}=(-1;1)\Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}=0\Rightarrow \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại $C\Rightarrow R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

* $C(9;3)\Rightarrow \overrightarrow{AC}=(10;2),\overrightarrow{BC}=(7;1),\overrightarrow{AB}=(3;1)$

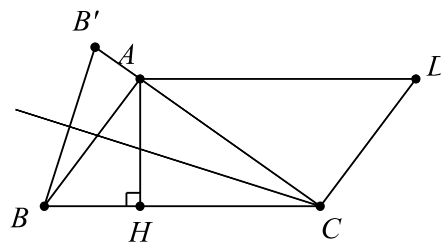
$\cos A=\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{8}{\sqrt{65}}\Rightarrow \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{1}{\sqrt{65}}$

Theo định lý hàm số sin : $R=\frac{BC}{2\sin A}=\frac{5}{2}\sqrt{130}$

Bài tập 24. Phương trình $BC: 2x - y + 3 = 0$,

tọa độ của điểm C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -5 \end{cases}$

$\Rightarrow C(-4;-5)$.



Gọi B' đối xứng với B qua d, ta tìm được $B'(6;0)$ và $B' \in AC$.

Suy ra phương trình $AC: x - 2y - 6 = 0$.

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - 2y - 6 = 0 \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow A(4;-1)$.

Vì $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow D(-1;-11)$.

Bài tập 25. Vì $d_1 \perp d_2$ và ΔABC vuông cân tại A nên A cách đều d_1, d_2, do đó A là giao điểm của d và phân giác hợp bởi d_1, d_2.

Phương trình phân giác hợp bởi d_1, d_2 là $x - 1 = \pm(y - 2) \Rightarrow (t_1): x - y - 1 = 0$ hoặc $(t_2): x + y + 3 = 0$ không thỏa vì $(t_2) \parallel (d)$.

Tọa độ điểm A là nghiệm hệ: $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(3;2)$

Gọi $B(-1;b) \in d_1$, $C(c;-2) \in d_2$

Theo bài toán ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ BC^2 = 50 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B(-1;5), C(0;-2) \\ B(-1;-1), C(6;-2) \end{array}\right.$

Bài tập 26. Gọi $A(3 - 2a; a)$, $B(3 - 2b; b)$ là tọa độ cần tìm. G là trọng tâm ΔABC và

thuộc đường thẳng $x + y - 2 = 0$ nên suy ra $a + b - 2 = 0$. Hơn nữa $AB = \sqrt{5}$ suy ra $(a - b)^2 = 1$. Từ đây, tìm được $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{1}{2}$

Bài tập 27. $B \in d: x - 2y + 6 = 0 \Rightarrow B(2y - 6; y)$

Ta thấy ΔAMB và ΔBNC vuông bằng nhau $\Rightarrow AI \perp BI \Rightarrow \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = 0$
$\Rightarrow y = 4$

$\Rightarrow B(2;4)$. $BC: 2x - y = 0 \Rightarrow C(c;2c)$, $AB = 2\sqrt{5}$, $BC = \sqrt{(c-2)^2 + (2c-4)^2}$

Theo bài toán, $AB = BC \Rightarrow |c-2| = 2 \Rightarrow C(0;0), C(4;8)$

Vì I nằm trong hình vuông nên I, C cùng phía với đường thẳng $AB \Rightarrow C(0;0)$.

Bài tập 28. Gọi I là trung điểm của EC. Vì G là trọng tâm ΔAEC nên $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} \Rightarrow I(2;3)$.Hơn nữa $E \in Oy$ nên $E(o;e)$

Vì ΔAEC cân tại A nên $AI \perp EC \Rightarrow \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{EC} = 0 \Rightarrow e = 3 \Rightarrow E(0;3)$, $C(4;3)$.

Mặt khác, $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EB} \Rightarrow B(-1;1)$

Bài tập 29. Ta có $d_1 \cap d_2 = I: \begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ x + y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{9}{2};\frac{3}{2}\right)$

Gọi M là giao của đường thẳng d_1 với Ox, suy ra $M(3;0)$.

Vì $AB \perp MI$ nên suy ra phương trình $AB: x + y - 3 = 0$

$AD = 2MI = 3\sqrt{2} \Rightarrow AB = \frac{S_{ABCD}}{AD} = 2\sqrt{2} \Rightarrow AM = 2$

Mà $A \in AB \Rightarrow A(a;3-a) \Rightarrow AM^2 = 2 \Leftrightarrow (a-3)^2 = 1 \Leftrightarrow a = 2, a = 4$, ta chọn $A(2;1), B(4;-1)$.

Do I là tâm của hình chữ nhật nên $C(7;2)$, $D(5;4)$.

Vậy, tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật là: $A(2;1), B(4;-1)$, $C(7;2)$, $D(5;4)$.

Bài tập 30. Trước hết ta chứng minh tính chất sau đây:

" Cho hình vuông $ABCD$, các điểm M,N,P,Q lần lượt nằm trên các đường thẳng AB, BC, CD, DA. Khi đó $MP = NQ \Leftrightarrow MP \perp NQ$ ".

Chứng minh: Vẽ $ME \perp CD,\ E \in CD,$

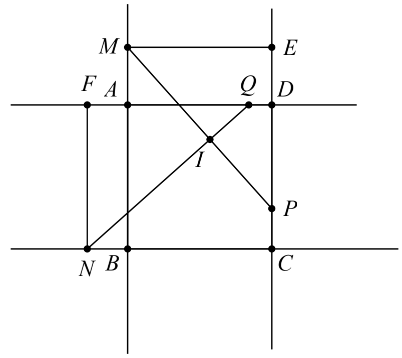
$NF \perp AD,\ F \in AD$

Hai tam giác vuông MEP và NFQ có

$NF = ME$.

Do đó $MP = NQ \Leftrightarrow \Delta MEP = \Delta NFQ$

$\Leftrightarrow \widehat{EPM} = \widehat{FQN} \Leftrightarrow \widehat{QIM} = 90^0 \Leftrightarrow MP \perp NQ$



Trở lại bài toán:

Ta có: $\overrightarrow{MP} = (0;-1) \Rightarrow MP = 1$. Gọi d là đường thẳng đi qua N và vuông góc với MP.

Suy ra phương trình $d:\ x - 4 = 0$.

Gọi E là giao điểm của d với đường thẳng AD, áp dụng tính chất trên ta suy ra $NE = MP$

Mà $E(4;m)$ nên $NE = MP \Leftrightarrow (m-2)^2 = 1 \Leftrightarrow m = 3, m = 1$.

- Với $m = 3 \Rightarrow E(4;3) \Rightarrow \overrightarrow{QE} = (3;1)$, suy ra phương trình $AD: x - 3y + 5 = 0$

Phương trình $AB: 3x + y - 7 = 0,\ BC: x - 3y - 10 = 0,\ CD: 3x + y - 6 = 0$.

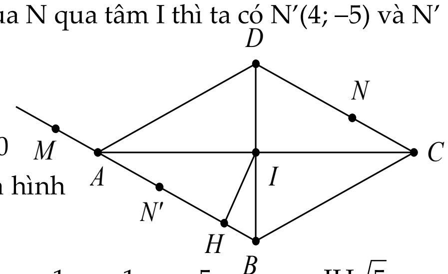
- Với $m = 1 \Rightarrow E(4;1) \Rightarrow \overrightarrow{QE} = (3;-1)$, suy ra phương trình $AD: x + 3y - 7 = 0$

Phương trình $AB: 3x - y - 5 = 0,\ BC: x + 3y + 2 = 0,\ CD: 3x - y - 6 = 0$.

Bài tập 31. Gọi N′ là điểm đối xứng của N qua tâm I thì ta có N′(4; –5) và N′ thuộc cạnh AB .Suy ra $\overrightarrow{MN'} = \left(4; -\frac{16}{3}\right)$

nên phương trình AB: 4x + 3y – 1 = 0

Vì AC = 2BD nên AI = 2BI. Gọi H là hình chiếu của I lên AB, ta có:



$IH = d(I, AB) = \frac{|8 + 3 - 1|}{5} = 2$ và $\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IA^2} + \frac{1}{IB^2} = \frac{5}{4IB^2} \Rightarrow IB = \frac{IH\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$

Mặt khác $B \in AB \Rightarrow B\left(b; \frac{1-4b}{3}\right), b > 0 \Rightarrow IB^2 = (b-2)^2 + \left(\frac{4b+2}{3}\right)^2 = 5$

$\Leftrightarrow b = 1$. Vậy $B(1;-1)$ cạnh $BC: 2x - 5y + 7 = 0$.

Bài tập 32. $B \in d_1, C \in d_2 \Rightarrow B(b;b),\ C(-1-2c;c)$

$AB \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -bc - 3b + 4c + 6 = 0 \Leftrightarrow b = \dfrac{4c+6}{c+3}$ (1)

$AB = AC \Leftrightarrow 2(b-1)^2 = 5c^2 + 12c + 7$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2\left(\dfrac{4c+6}{3+c} - 1\right)^2 = 5c^2 + 12c + 7$

$\Leftrightarrow 5c^4 + 42c^3 + 106c^2 + 114c + 45 = 0 \Leftrightarrow (c+1)(c+5)\left(5c^2 + 12c + 9\right) = 0$

$c = -1 \Rightarrow B(1;1),\ C(1;-1)$ hoặc $c = -5 \Rightarrow B(7;7),\ C(9;-5)$.

Bài tập 33. Vì $A \in d_1, C \in d_2$ nên $A(2a-1;a), C(3c;-2c)$, suy ra $I\left(\dfrac{2a+3c-1}{2};\dfrac{a-2c}{2}\right)$ là trung điểm AC

Do $ABCD$ là hình vuông nên I là trung điểm của BD, hay $I \in Ox$.

Do đó $a = 2c$.

Mặt khác $AC \perp BD \equiv Ox$ nên suy ra $2a - 1 = 3c \Leftrightarrow c = 1$.

Từ đó, ta tìm được $A(3;2),\ C(3;-2),\ I(3;0)$.

Vì $B \in Ox \Rightarrow B(b;0)$, mà $IB = IA = 2 \Rightarrow |b-3| = 2 \Leftrightarrow b = 5, b = 1$.

Vậy tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$ là:

$A(3;2),\ B(1;0),\ C(3;-2),\ D(5;0)$ hoặc $A(3;2),\ B(5;0),\ C(3;-2),\ D(1;0)$.

Bài tập 34. ***Cách 1***: Điểm I là trung điểm của CD nên $\begin{cases} x_C = 2x_I - x_D = 4 \\ y_C = 2x_I - y_D = \dfrac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow C\left(4;\dfrac{7}{2}\right)$

Vì $A \in \Delta$ nên tọa độ điểm A có dạng $A(a;a+1)$

Mặt khác $ABCD$ là hình bình hành tương đương với $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}$ không cùng phương

và $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - a = 4 - 3 \\ y_B - a - 1 = \dfrac{7}{2} - \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = a + 1 \\ y_B = a + 3 \end{cases} \Rightarrow B(a+1;a+3)$

$\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}$ không cùng phương khi và chỉ khi $\dfrac{a-3}{1} \neq \dfrac{a+1-\dfrac{3}{2}}{2} \Leftrightarrow a \neq \dfrac{11}{2}$

Đường thẳng Δ là phân giác góc $\widehat{BAC}$ nhận vectơ $\vec{u}=(1;1)$ làm vec tơ chỉ phương nên $\cos\left(\overrightarrow{AB};\vec{u}\right)=\cos\left(\overrightarrow{AC};\vec{u}\right)\Leftrightarrow \dfrac{\overrightarrow{AB}.\vec{u}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\vec{u}\right|}=\dfrac{\overrightarrow{AC}.\vec{u}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\vec{u}\right|}$ $(*)$

Có $\overrightarrow{AB}(1;2)$, $\overrightarrow{AC}\left(4-a;\dfrac{5}{2}-a\right)$ nên $(*)$ $\Leftrightarrow \dfrac{3}{\sqrt{5}}=\dfrac{\dfrac{13}{2}-2a}{\sqrt{(4-a)^2+\left(\dfrac{5}{2}-a\right)^2}}$

$\Leftrightarrow 2a^2-13a+11=0\Leftrightarrow a=1$ hoặc $a=\dfrac{11}{2}$ (loại)

Vậy, tọa độ điểm $B(2;4)$

Cách 2: Ta có $C\left(4;\dfrac{7}{2}\right)$.

Đường thẳng d đi qua C vuông góc với Δ nhận $\vec{u}(1;1)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $1.(x-4)+1.\left(y-\dfrac{7}{2}\right)=0$ hay $2x+2y-15=0$

Tọa độ giao điểm H của Δ và d là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-y+1=0\\ 2x+2y-15=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=\dfrac{13}{4}\\ y=\dfrac{17}{4}\end{cases}\Rightarrow H\left(\dfrac{13}{4};\dfrac{17}{4}\right)$$

Gọi C' là điểm đối xứng với C qua Δ thì khi đó C' thuộc đường thẳng chứa cạnh AB và H là trung điểm của CC' do đó $\begin{cases} x_{C'}=2x_H-x_C\\ y_{C'}=2y_H-y_C\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_{C'}=\dfrac{5}{2}\\ y_{C'}=5\end{cases}\Rightarrow C'\left(\dfrac{5}{2};5\right)$

Suy ra đường thẳng chứa cạnh AB đi qua C' và nhận $\overrightarrow{DC}(1;2)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình là $\begin{cases} x=\dfrac{5}{2}+t\\ y=5+2t\end{cases}$

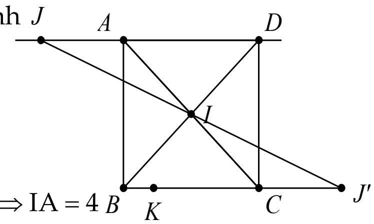
Thay x, y từ phương trình đường thẳng chứa cạnh AB vào phương trình đường thẳng Δ ta được $\dfrac{5}{2}+t-5-2t+1=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{3}{2}$ suy ra $A(1;2)$

$ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases} x_B-1=1\\ y_B-2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_B=2\\ y_B=4\end{cases}$

Vậy, tọa độ điểm $B(2;4)$

Bài tập 35. Gọi J′ đối xứng với J qua I, ta có J′(4; 0) và J′ $\in$ CD.

Ta có: $\overrightarrow{KJ'} = (2;2)$, suy ra phương trình $CD: x - y - 4 = 0$.



Vì $AB//CD$ nên phương trình:
$AB: x - y + 4 = 0$

Do $d(I, AB) = 2\sqrt{2}$ nên suy ra $AB = 4\sqrt{2} \Rightarrow IA = 4$

$A \in AB \Rightarrow A(a; 4+a)$, do đó $IA = 4 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (a+3)^2 = 16$

$\Leftrightarrow a^2 + 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = 1, a = -3$

- $a = 1$, ta có $A(1;3)$, $B(-3;1)$, $C(1;-1)$, $D(5;1)$
- $a = -3$, ta có $A(-3;1)$, $B(1;3)$, $C(5;1)$, $D(1;-1)$.

Bài tập 36. Vì $BD \perp AC$ nên phương trình $BD: y = -x + m$

$B = BD \cap d_1$, suy ra $B\begin{cases} y = -x + m \\ 4x + y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow B\left(\dfrac{9-m}{3}; \dfrac{4m-9}{3}\right)$

Tương tự $D = BD \cap d_2 \Rightarrow D\left(\dfrac{m-6}{3}; \dfrac{2m+6}{3}\right)$.

Suy ra tọa độ trung điểm của BD là $I\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{2m-1}{2}\right)$.

Vì $I \in AC \Rightarrow \dfrac{1}{2} - \dfrac{2m-1}{2} + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 3$. Suy ra $B(2;1), D(-1;4), I\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{5}{2}\right)$

Ta có: $S_{\Delta BAD} = \dfrac{1}{2} S_{ABCD} = \dfrac{15}{2} \Rightarrow AI = \dfrac{15}{BD} = \dfrac{5}{\sqrt{2}} \Rightarrow AI^2 = \dfrac{25}{2}$

Mà $A \in d_3 \Rightarrow A(a; a+2) \Rightarrow AI^2 = 2\left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2$ nên ta có: $\left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{4} \Leftrightarrow a = 3, a = -2$

Vậy tọa độ các đỉnh của hình thoi là:

$A(3;5), B(2;1), C(-2;0), D(-1;4)$ hoặc $A(-2;0), B(2;1), C(3;5), D(-1;4)$.

Bài tập 37. $(\Delta): x+3y-3=0 \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x=3t \\ y=1-t \end{cases}$

a. Vì $C \in (\Delta)$ nên $C(3t;1-t)$

ΔABC cân tại $A \Leftrightarrow AB = AC$ và $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương

$\Leftrightarrow 5 = \sqrt{(3t-2)^2 + (1-t-2)^2}$ và $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=2 \end{array}\right.$

Và $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương $\Leftrightarrow t=2$ và $\overrightarrow{AB}=(5;0)$ không cùng phương

$\overrightarrow{AC}=(4;-3) \Rightarrow C(6;-1)$

b. Gọi $D \in (\Delta) \Rightarrow D(3t;1-t) \Rightarrow AD + BD = \sqrt{10t^2 - 10t + 5} + \sqrt{10t^2 - 40t + 50}$

Xét $\vec{a} = \left(t\sqrt{10} - \frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ và $\vec{b} = \left(2\sqrt{10} - t\sqrt{10}; \sqrt{10}\right)$

Ta có $AB + BD = |\vec{a}| + |\vec{b}| \ge |\vec{a} + \vec{b}| = 3\sqrt{3}$

Vậy $(AB+BD)_{min} = 3\sqrt{5}$. Khi $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \Leftrightarrow \dfrac{t-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2-t}{1} \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow D(3;0)$

Bài tập 38. Giả sử Δ đi qua điểm A và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a;b) \ne \vec{0}$, nên có phương trình: $a(x+1) + b(y+1) = 0$

$d(B,\Delta) = \dfrac{|a+3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $d(C,\Delta) = \dfrac{|a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Gọi $d = d(B,\Delta) + d(C,\Delta) = \dfrac{|a+3b|}{\sqrt{a^2+b^2}} + \dfrac{|a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(|a+3b| + |a+2b|\right)$

$d \le \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(2|a| + 5|b|\right) \le \dfrac{1}{a^2+b^2}\left(2^2+5^2\right)\left(a^2+b^2\right) = 29$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} ab > 0 \\ \dfrac{|a|}{|b|} = \dfrac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow a=2, b=5 \Rightarrow \Delta:\ 2x+5y+7=0$