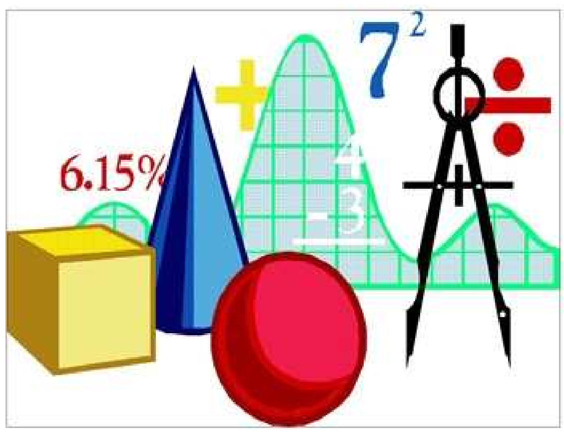
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TÂY NINH

TRƯỜNG THPT NGUYỄN VĂN TRỖI

PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN LỚP 10

Theo chuẩn kiến thức kĩ năng-Ban cơ bản



TÂY NINH THÁNG 3 NĂM 2011

Lời nói đầu

Trong chương trình môn Toán lớp 10, khi giảng dạy chúng tôi nhận thấy rằng học sinh chưa tiếp cận tốt vấn đề, nhất là kĩ năng giải toán. Điều đó dẫn đến học sinh chưa có hứng thú trong học toán, đặc biệt nó sẽ ảnh hưởng rất lớn cho những năm học tiếp theo. Nhằm giúp các em lấy lại căn bản và nâng cao chất lượng học tập môn Toán theo chương trình cải cách của Bộ giáo dục và đào tạo, chúng tôi biên soạn bộ tài liệu : **" Phân loại và phương pháp giải toán lớp 10 "**.

Bộ tài liệu gồm hai phần : Hình học và Đại số. Nội dung tài liệu bám sát theo cấu trúc của sách giáo khoa Toán 10 (chương trình chuẩn) và dựa trên chương trình Chuẩn kiến thức, kĩ năng của Bộ giáo dục và đào tạo vừa ban hành.

Mỗi bài học trong bộ tài liệu này được trình bày như sau :

A. Kiến thức cần nhớ.

B. Phương pháp giải toán.

C. Bài tập đề nghị.

Phần kiến thức cần nhớ chúng tôi tóm tắt lại nội dung chính của bài học trên nền Chuẩn kiến thức, kĩ năng. Phần phương pháp giải toán gồm nhiều vấn đề, trong mỗi vấn đề có nêu phương pháp giải quyết và một số bài tập cơ bản có hướng dẫn giải chi tiết. Phần bài tập đề nghị giúp các em tự ôn lại kiến thức trong mỗi bài học.

Chúng tôi hy vọng bộ tài liệu này sẽ giúp các em vững bước và tự tin hơn trên con đường học vấn của mình. Chúc các em học tập tiến bộ và thành công !.

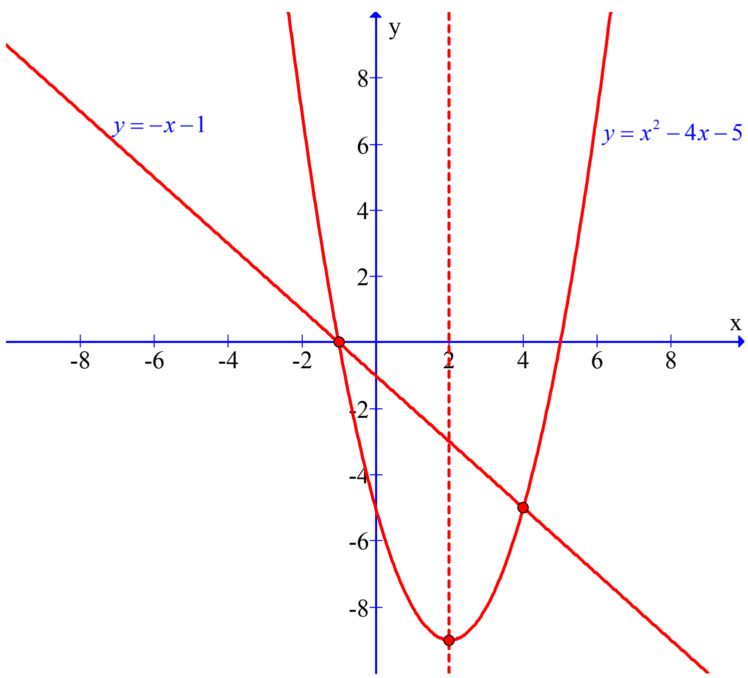
Mặc dù rất cố gắng trong quá trình biên soạn nhưng khó tránh khỏi sai sót. Rất mong nhận được ý kiến đóng góp của các thầy cô và các em học sinh để tài liệu được bổ sung, điều chỉnh ngày một hoàn thiện hơn.

Tây Ninh, tháng 3 năm 2011

Tổ Toán, trường THPT Nguyễn Văn Trỗi

PHẦN 1

ĐẠI SỐ



§1. MỆNH ĐỀ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. MỆNH ĐỀ-MỆNH ĐỀ CHỨA BIẾN

1.1. Mệnh đề

Mỗi mệnh đề (lôgíc) phải đúng hoặc sai. Mỗi mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai.

Kí hiệu mệnh đề bởi các chữ cái in hoa : $P, Q, A, B\ldots$

1.2. Mệnh đề chứa biến: " n chia hết cho 4" là mệnh đề chứa biến.

Chú ý : Với mỗi giá trị của biến x thuộc tập hợp nào đó, mệnh đề chứa biến $P(x)$ trở thành một mệnh đề.

2. PHỦ ĐỊNH CỦA MỘT MỆNH ĐỀ

Cho mệnh đề P. Mệnh đề phủ định của mệnh đề P là mệnh đề $\overline{P}$,

ta có: $\overline{P}$ đúng khi P sai và $\overline{P}$ sai khi P đúng.

3. MỆNH ĐỀ KÉO THEO

Mệnh đề "Nếu P thì Q" được gọi là mệnh đề kéo theo. Kí hiệu: $P \Rightarrow Q$.

Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng và Q sai

(trong các trường hợp khác $P \Rightarrow Q$ đều đúng)

Các định lí toán học là những mệnh đúng và có dạng $P \Rightarrow Q$. Khi đó ta nói:

P là giả thiết, Q là kết luận của định lí, hoặc

P là ***điều kiện đủ*** để có Q, hoặc

Q là ***điều kiện cần*** để có P.

4. MỆNH ĐỀ ĐẢO-HAI MỆNH ĐỀ TƯƠNG ĐƯƠNG

Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

Nếu cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng thì ta nói P và Q tương đương.

Kí hiệu: $P \Leftrightarrow Q$. Đọc là: P tương đương Q, hoặc

P là điều kiện cần và đủ để có Q, hoặc

P khi và chỉ khi Q.

5. KÍ HIỆU $\forall$ VÀ $\exists$

Kí hiệu $\forall$ đọc là với mọi. Kí hiệu $\exists$ đọc là tồn tại ít nhất một (hay có ít nhất một).

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Cách xác định mệnh đề

Phương pháp : Cần nắm vững khái niệm mệnh đề ,mệnh đề chứa biến từ đó rút ra kết luận.

Bài tập 1. Xét xem các câu sau , câu nào là mệnh đề, câu nào là mệnh đề chứa biến và câu nào không là mệnh đề ?

a/ $2x-3>7$ b/ $5-9=3$ c/ $\forall x, x^2=25$ d/ Hôm nay trời mưa quá!.

Giải

a/ Là mệnh đề chứa biến.Với mỗi giá trị của x ta được một mệnh đề.

b/ Là mệnh đề.Đó là mệnh đề sai.

c/ Là mệnh đề chứa biến.Với mỗi giá trị của x ta được một mệnh đề.

d/ Không là mệnh đề.Vì không khẳng định được tính đúng hoặc sai.

Bài tập 2. Với mỗi câu sau , hãy tìm giá trị thực của x để được mệnh đề đúng, mệnh đề sai ?

a/ $5x^2-14x+9=0$ b/ $5x-1>x+11$ c/ $|x+3|=5$ d/ $x^2+4=0$.

Giải

a/ Giải phương trình : $5x^2 - 14x + 9 = 0$ .Ta được nghiệm $x = 1$ v $x = 9/5$.

- Với $x = 1$ v $x = 9/5$ thì được mệnh đề đúng.
- Với $x \neq 1$ và $x \neq 9/5$ thì được mệnh đề sai.

b/Giải bất phương trình .Ta được $x > 3$

- Với $x > 3$ thì được mệnh đề đúng.
- Với $x \leq 3$ thì được mệnh đề sai.

c/ Giải phương trình $\left|x+3\right| = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+3=5 \\ x+3=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-8 \end{array}\right.$

- Với $x=2$ hoặc $x = -8$ thì được mệnh đề đúng.
- Với $x \neq 2$ và $x \neq -8$ thì được mệnh đề sai.

d/ Phương trình $x^2 + 4 = 0$ vô nghiệm. Vậy với mọi giá trị của x đều được mệnh đề sai.
Không có mệnh đề đúng.

Vấn đề 2. Phát biểu thành lời của một mệnh đề. Dùng kí hiệu $\forall, \exists$ viết mệnh đề phủ định của nó.

Phương pháp:

1. "$\forall x \in P; x$ có tính chất T" có mệnh đề phủ định là "$\exists x \in P; x$ không có tính chất P".

2. "$\exists x \in P; x$ có tính chất T" có mệnh đề phủ định là "$\forall x \in P; x$ không có tính chất P".

Bài tập. Phát biểu thành lời của một mệnh đề. Viết mệnh đề phủ định của nó.

a/ $\forall x \in R: x^2 = -5$ b/ $\forall x \in R: x^2 + 4x \geq 0$ c/ $\exists x \in Z: x^2 = 3$ d/ $\exists x \in \mathbb{Z}: x^2 \vdots 5$

Giải

a/ " Với mọi số thực đều có bình phương bằng -5"

Mệnh đề phủ định là: $\exists x \in R: x^2 \neq -5$

b/ "Với mọi số thực x ta có x^2+4x đều lớn hơn hoặc bằng 0"

Mệnh đề phủ định là: $\exists x \in R: x^2 + 4x < 0$

c/ "Tồn tại một số nguyên mà có bình phương bằng 3"

Mệnh đề phủ định là: $\forall x \in Z: x^2 \neq 3$

d/ "Tồn tại một số nguyên mà có bình phương chia hết cho 5"

Mệnh đề phủ định là: $\forall x \in Z: x^2$ không chia hết cho 5.

Vấn đề 3. Lập mệnh đề đảo của định lý – định lý đảo

Phương pháp :

Dùng kiến thức, các định nghĩa , định lý đã học để nhận xét đánh giá rồi kết luận.

Bài tập. Trong các trường hợp sau đây, hãy phát biểu mệnh đề đảo của định lý và xét xem nó có phải là định lý đảo của định lý ấy hay không?

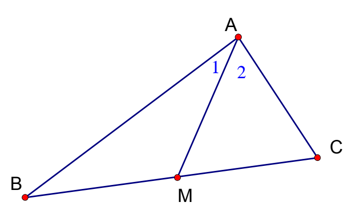
a/Trong tam giác vuông thì đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nữa cạnh ấy.

b/Một số tự nhiên tận cùng bằng 0 thì chia hết cho 5.

Giải

a/ Mệnh đề đảo : "Một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nữa cạnh ấy thì tam giác đó bằng tam giác vuông"

Để biết mệnh đề trên có phải là định lý đảo hay không thì ta phải chứng minh mệnh đề.



Do AM = MB, AM = MC nên tam giác MAB, MAC cân tại M suy ra : góc B = A_1; góc C = A_2

Mà tổng các góc B, A_1, A_2, C bằng 180^0 nên góc $A_1 + A_2 = 90^0$, suy ra tam giác ABC vuông tại A.

Vậy mệnh đề trên là định lý đảo.

b/Mệnh đề đảo là : "Một số tự nhiên chia hết cho 5 thì tận cùng bằng 0"

Mệnh đề này sai vì 15 chia hết cho 5 mà tận cùng không bằng 0.

Vậy mệnh đề không là định lý đảo.

Chú ý **:** *Không phải định lý nào cũng có định lý đảo của nó.*

Vấn đề 4. Điều kiện cần, điều kiện đủ, điều kiện cần và đủ

Phương pháp :

1/Dạng: $P \Rightarrow Q$. Khi đó :

P là ***điều kiện đủ*** để có Q, hoặc

Q là ***điều kiện cần*** để có P.

2/ Dạng: $P \Leftrightarrow Q$: P là điều kiện cần và đủ để có Q, hoặc P khi và chỉ khi Q.

Bài tập 1. Phát biểu các định lý sau ,sử dụng khái niệm "Điều kiên cần", "Điều kiện đủ":

a/ Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có ít nhất một cạnh bằng nhau.

b/Nếu một số tự nhiên chia hết cho 6 thì nó chia hết cho 3.

c/ Nếu a=b thì $a^2=b^2$.

Giải

a/+ Để hai tam giác bằng nhau, điều kiện cần là chúng có ít nhất một cạnh bằng nhau.

+ Để hai tam giác có ít nhất một cạnh bằng nhau, điều kiện đủ là hai tam giác bằng nhau.

b/+ Để một số tự nhiên chia hết cho 6, điều kiện cần là nó chia hết cho 3.

+ Để một số tự nhiên chia hết cho 3, điều kiện đủ là nó chia hết cho 6.

c/ + Để a=b ,điều kiện cần là $a^2=b^2$.

+ Để $a^2=b^2$, điều kiện đủ là a=b

Bài tập 2. Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$. Với hai mệnh đề :

P: " Tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ bằng nhau".

Q: " Tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ có diện tích bằng nhau"

a) Xét tính đúng sai của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

b) Xét tính đúng sai của mệnh đề $Q \Rightarrow P$.

c) Xét tính đúng sai của mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$.

Giải

a/ Ta có mệnh đề $P \Rightarrow Q$: "Nếu tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ bằng nhau thì tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ có diện tích bằng nhau" , mệnh đề này hiển nhiên đúng.

b/Ta có mệnh đề $Q \Rightarrow P$: "Nếu tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ có diện tích bằng nhau thì tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ bằng nhau" là mệnh đề sai.

c/ Do $P \Rightarrow Q$ đúng nhưng $Q \Rightarrow P$ sai nên $P \Leftrightarrow Q$ là mệnh đề sai.

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Trong các câu sau đây thì câu nào là mệnh đề? Nếu là mệnh đề thì nó đúng hay sai?

a) “10 là số nguyên tố”

b) "123 là một số chia hết cho 3".

c) " Ngày mai trời sẽ nắng"

d) " Hãy đi ra ngoài!"

Bài 2. Nêu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau và cho biết tính đúng sai của mỗi mệnh đề phủ định đó ?

a) "Số 11 là số nguyên tố"

b) Số 111 chia hết cho 3"

Bài 3. Xét hai mệnh đề: P: "π là số vô tỉ" và Q: "π không phải là số nguyên"

a) Hãy phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

b) Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề trên.

c) Xem xét tính đúng, sai của các mệnh đề trên.

Bài 4. Xét hai mệnh đề:

P: " 24 là số chia hết cho 2 và 3".

Q: " 24 là số chia hết cho 6".

a) Xét tính đúng sai của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

b) Xét tính đúng sai của mệnh đề $Q \Rightarrow P$.

c) Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng hay sai ?

§2. TẬP HỢP

A.KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. KHÁI NIỆM TẬP HỢP

1.1. Tập hợp và phần tử

Tập hợp là khái niệm cơ bản của toán học. Thông thường mỗi tập hợp gồm các phần tử cùng có chung một hay một vài tính chất. Tập hợp thường được kí hiệu bởi các chữ cái in hoa: $A, B, C, \ldots$ phần tử của tập hợp được kí hiệu là các chữ cái thường: $a, b, c \ldots$

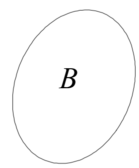
a là phần tử của tập hợp A, viết là $a \in A$. b không là phần tử của tập hợp B, viết là $b \notin B$.

1.2. Cách xác định tập hợp

Có 2 cách: a) Liệt kê các phần tử của nó.

b) Chỉ rõ tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp đó.

Người ta thường minh họa tập hợp bằng một hình phẳng được bao quanh bởi một đường kín được gọi là biểu đồ Ven.



1.3. Tập hợp rỗng

Tập hợp rỗng là tập hợp không chứa phần tử nào. Kí hiệu: $\varnothing$.

2. TẬP HỢP CON

Nếu mọi phần tử của tập hợp A đều là phần tử của tập hợp B thì ta nói A là tập hợp con của B.

Kí hiệu: $A \subset B$ (đọc là A chứa trong B) hay $B \supset A$ (đọc là B chứa A).

Tính chất: a) $A \subset A$ với mọi tập hợp A.

b) $A \subset B$ và $B \subset C$ thì $A \subset C$

c) $\varnothing \subset A$ với mọi tập hợp A.

3. HAI TẬP HỢP BẰNG NHAU

Khi $A \subset B$ và $B \subset A$ ta nói tập hợp A bằng tập hợp B và viết là $A = B$.

B.PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Viết tập hợp dưới dạng liệt kê phần tử.

Phương pháp: Kỹ năng giải phương trình, bất phương trình,...tính toán, suy luận.

Bài tập 1. Viết các tập hợp sau dưới dạng liệt kê phần tử

a/ $A=\{x\in N/\ x<5\}$

b/ $B=\{x\in Z/-2<x\leq 4\}$

c/ $C=\{x/\ x=3k; k\in Z$ và $-1<k<6\}$

d/ $D=\left\{x/\ x=\dfrac{1}{2^k}\right.$ với $k\in N$ và $\left.x\geq\dfrac{1}{8}\right\}$

e/ $E=\{x\in R/(x-2)(3x^2-5x+2)=0\}$

f/ $F=\{x\in N/$ x là số chính phương bé hơn 100$\}$.

Giải

a/ $A=\{0;1;2;3;4\}$

b/ $B=\{-1;0;1;2;3;4\}$

c/ $C=\{0;3;6;9;12;15\}$

d/ $D=\left\{\dfrac{1}{8};\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2};1\right\}$

e/ $E=\left\{\dfrac{2}{3};1;2\right\}$

f/ $F=\{0;1;4;9;16;25;36;49;64;81\}$.

Bài tập 2. Tập hợp nào sau đây là tập rỗng.

a/ $A=\{x\in R/\ x^2+4=5\}$ b/ $B=\{n\in N/\ 3n+9=6\}$.

Giải

a/Giải phương trình $x^2+4=5$ được nghiệm x= -1 ; 1 nên A={-1 ;1}.

b/ $n\in B\Leftrightarrow\begin{cases}n\in N\\3n+9=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n\in N\\n=-1\end{cases}$ vậy $B=\varnothing$

Vấn đề 2. Xác định tập con của tập hợp.

Phương pháp: Dùng định nghĩa về tập hợp con, tính toán, suy luận.

Bài tập 1.

a/ Viết tập hợp con gồm hai phần tử của A={1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6}.

b/ Viết tập hợp con gồm ba phần tử và luôn có số 0 của B={0 ;1 ;2 ;3 ;4 }.

Giải

a/ Tập con gồm hai phần tử của A là :

{1 ;2},{1 ;3},{1 ;4},{1 ;5},{1 ;6},{2 ;3},{2 ;4},{2 ;5},{2 ;6},{3 ;4},{3 ;5},{3 ;6},{4 ;5},{4 ;6 },{5 ;6}.

b/ Tập con gồm ba phần tử luôn chứa số 0 của B là :

{0 ;1 ;2},{0 ;1 ;3},{0 ;1 ;4},{0 ;2 ;3},{0 ;2 ;4},{0 ;3 ;4}.

Bài tập 2. Tìm tất cả tập hợp X thỏa mãn $\{1;2;3\} \subset X \subset \{1;2;3;4;5;6\}$

Giải

Các tập hợp thỏa mãn đề toán là :

- X={1 ;2 ;3}
- Ghép thêm vào X một phần tử còn lại của {4 ;5 ;6} ta được
  {1 ;2 ;3 ;4},{1 ;2 ;3 ;5},{1 ;2 ;3 ;6}
- Ghép thêm vào X hai phần tử còn lại của {4 ;5 ;6} ta được
  {1 ;2 ;3 ;4 ;5},{1 ;2 ;3 ;4 ;6},{1 ;2 ;3 ;5 ;6}
- Ghép thêm vào X ba phần tử còn lại của {4 ;5 ;6} ta được
  {1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6}

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Viết tập hợp sau theo cách liệt kê các phần tử :

a) $A = \left\{ x \in R \middle| (x^2 - 2x + 1)(x - 3) = 0 \right\}$.

b) $B = \left\{ x \in N \middle| x \le 30; x \text{ là bội của 3 hoặc của 5} \right\}$.

c) $C = \left\{ m \in Z / 2 \le m \le 15, m \text{ và 15 không có ước chung khác 1} \right\}$.

d) $D = \left\{ x /\ x = 2k^2 + 3 \text{ với k} \in \text{N và } x \le 30 \right\}$.

e) $E = \left\{ x \in N /\ x(3x - 2)(3x^2 - 5x + 2) = 0 \right\}$.

Bài 2.Tìm tất cả các tập con của X={a ;b ;c ;d ;e ;f}.

Bài 3. Tìm tất cả tập hợp X thỏa mãn $\{1;2;a;b\} \subset X \subset \{1;2;a;b;c;d;e\}$.

§3. CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP

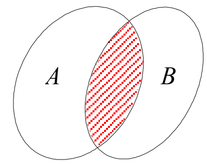
A.KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. GIAO CỦA HAI TẬP HỢP

Tập hợp C gồm các phần tử vừa thuộc A vừa thuộc B được gọi là giao của A và B.

Kí hiệu: $A \cap B$.

Ta có: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ và } x \in B\}$.



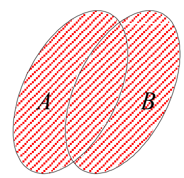
$A \cap B$

2. HỢP CỦA HAI TẬP HỢP

Tập hợp C gồm các phần tử thuộc A hoặc thuộc B được gọi là hợp của A và B.

Kí hiệu: $A \cup B$.

Ta có: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$.

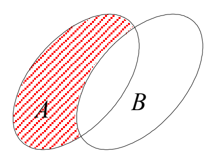


$A \cup B$

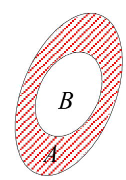
3. HIỆU VÀ PHẦN BÙ CỦA HAI TẬP HỢP

Tập hợp C gồm các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B được gọi là hiệu của A và B.

Kí hiệu: $C = A \setminus B$. Ta có: $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ và } x \notin B\}$



$A \setminus B$



$C_A B$

***Chú ý:** Khi $B \subset A$ thì $A \setminus B$ là phần bù của B trong A.

Kí hiệu là: $C_A B$.

B.PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề. Xác định tập hợp.

Phương pháp: Dùng định nghĩa giao của hai tập hợp, hợp của hai tập hợp, hiệu, bù của hai tập hợp.

Bài tập 1. Cho hai tập hợp A={0 ;1 ;2 ;5 ;7 ;8 ;9} B={1 ;2 ;6 ;8 ;10}.

Tìm $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Giải

Ta có :

$$A\cup B = \{0;1;2;5;6;7;8;9;10\}$$
$$A\cap B = \{1;2;8\}$$
$$A\setminus B = \{0;5;7;9\}$$
$$B\setminus A = \{6;10\}$$

Bài tập 2. Cho A là tập hợp bất kỳ. Hãy xác định các tập hợp sau :

a/ $A\cup A$	b/ $A\cap A$	c/ $A\setminus A$
d/ $A\cup\varnothing$	e/ $A\cap\varnothing$	f/ $A\setminus\varnothing$
g/ $\varnothing\setminus A$	h/ $C_A A$	k/ $C_A\varnothing$.

Giải

a/ $A\cup A = A$	b/ $A\cap A$	c/ $A\setminus A=\varnothing$
d/ $A\cup\varnothing = A$	e/ $A\cap\varnothing=\varnothing$	f/ $A\setminus\varnothing = A$
g/ $\varnothing\setminus A=\varnothing$	h/ $C_A A=\varnothing$	k/ $C_A\varnothing = A$.

Bài tập 3. Cho tập hợp A. Có thể nói gì về tập B nếu :

$a/\ A\cap B = A$ $\quad b/\ A\cap B = B$ $\quad c/\ A\cup B = A$

$d/\ A\cup B = B$ $\quad e/\ A\setminus B=\varnothing$ $\quad g/\ A\setminus B = A.$

Giải

$a/\ B\subset A$ $\quad b/\ A\subset B$ $\quad c/\ B\subset A$

$d/\ A\subset B$ $\quad e/\ A\subset B$ $\quad g/\ A\cap B=\varnothing$

Bài tập 4. Mỗi học sinh lớp 10C1 đều chơi bóng đá hoặc bóng chuyền. Biết rằng có 30 bạn chơi bóng đá, 20 bạn chơi bóng chuyền và 10 bạn chơi cả hai môn thể thao này. Hỏi lớp 10C1 có bao nhiêu học sinh ?

Giải

Gọi A là tập hợp số học sinh lớp 10C1 chơi bóng đá.

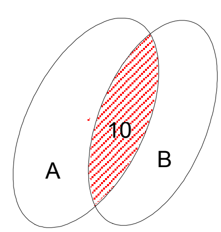
Gọi B là tập hợp số học sinh lớp 10C1 chơi bóng chuyền.

Vì mỗi bạn đều chơi bóng đá hoặc bóng chuyền,

nên $A\cup B$ là tập các học sinh của lớp.

Số phần tử của $A\cup B$ là 30 + 20 – 10 = 40

Vậy lớp 10C1 có tất cả 40 học sinh.



C.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Dùng biểu đồ Ven biểu diễn giao, hợp, hiệu của hai tập hợp A và B bất kì.

Bài 2. Cho $A=\{1;2;4;6;7;9\}$ và $B=\{2;3;4;5;7;8\}$. C={2 ;5 ;4 ;5 ;8 ;9 ;10}

Tìm $(A\cup B)\cap C; (A\cap B)\cup C; (A\setminus B)\cap C; B\setminus(A\cap C)$.

Bài 3. Liệt kê các phần tử của tập hợp A các ươc số tự nhiên của 18 và của tập hợp B các ước số tự nhiên của 30. Xác định :

$a/\ A\cap B$ $b/\ A\cup B$ $c/\ A\setminus B$ $d/\ B\setminus A$.

§4. CÁC TẬP HỢP SỐ

A.KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. CÁC TẬP HỢP SỐ ĐÃ HỌC

1) Tập hợp số tự nhiên : $\mathbb{N} = \{0;1;2;3...\}$

2) Tập hợp số nguyên : $\mathbb{Z} = \{...-3;-2;-1;0;1;2;3...\}$

3) Tập hợp số hữu tỉ : $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \middle| m \in Z, n \in N^*\right\}$

4) Tập hợp các số thực : $\mathbb{R}$

2 .CÁC TẬP CON THƯỜNG DÙNG CỦA R.

Khoảng : $(a;b) = \{x \in R | a < x < b\}$

$(a;+\infty) = \{x \in R | a < x\}$

$(-\infty;b) = \{x \in R | x < b\}$

Đoạn : $[a;b] = \{x \in R | a \le x \le b\}$

Nữa khoảng : $[a;b) = \{x \in R | a \le x < b\}$

$(a;b] = \{x \in R | a < x \le b\}$

$[a;+\infty) = \{x \in R | a \le x\}$

$(-\infty;b] = \{x \in R | x \le b\}$

B.PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề .Thực hiện các phép toán về tập hợp. Xác định tập hợp.

Phương pháp: Kỹ năng biểu diễn tập hợp số thực trên trục số.

Bài tập 1. Cho các tập hợp A=[-3 ;1] ; B=[-2 ;2] ; C=[-2;+∞) .

a/ Trong các tập trên , tập nào là tập hợp con của tập hợp nào ?

Tìm phần bù của chúng.

b/ Tìm : $A \cap B$; $A \cup B$; $A \cup C$; $A \setminus B$ $B \setminus C$

Giải

a/ Tập B là tập con của tập hợp C. Phần bù của B trong C là $C_C B=(2;+\infty)$.

b/ $A\cap B=[-2;1]$; $A\cup B=[-3;2]$; $A\cup C=[-3;+\infty)$; $A\setminus B=[-3;-2)$ $B\setminus C=\varnothing$

Bài tập 2. Cho các tập hợp :

$A=\{x\in R/-5\le x\le 4\}$;

$B=\{x\in R/\ 7\le x<14\}$;

$C=\{x\in R/\ x>2\}$;

$D=\{x\in R/\ x\le 4\}$.

a/ Dùng ký hiệu đoạn, khoảng ,nửa khoảng để viết lại các tập hợp trên.

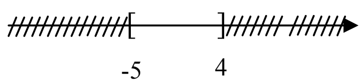
b/ Biểu diễn các tập hợp A, B, C, D trên trục số.

c/ Xác định $A\cap B$, $A\cup B$, $A\cup C$, $A\setminus B$, $B\setminus C$, $A\cap D$.

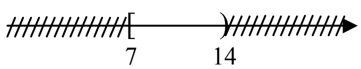
Giải

a/ A=[-5 ;4], B=[7 ;14), $C=(2;+\infty)$, $D=(-\infty;4]$.

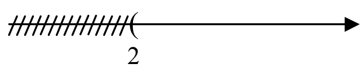
b/• A=[-5 ;4] :



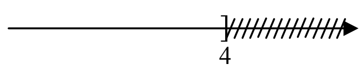
• B=[7 ;14) :



• $C=(2;+\infty)$:



• $D=(-\infty;4]$:



c/ $A\cap B=\varnothing, A\cup B=[-5;4]\cup[7;14], A\cup C=\left[-5;+\infty\right)$

A\B $=[-5;4]$ $B\setminus C=(2;7)\cup(14;+\infty)$ $A\cap D=[-5;4]$.

Bài tập 3. Cho a, b, c, d là các số thực với a < b < c < d. Xác định các tập hợp sau :

$a/\ (a;b)\cap(c;d)$ $b/\ (a;c]\cap[b;d)$

$c/\ (a;d)\setminus(b;c)$ $d/\ (b;d)\setminus(a;c)$.

Giải

$a/\ (a;b)\cap(c;d)=\varnothing$ $b/\ (a;c]\cap[b;d)=[b;c]$

$c/\ (a;d)\setminus(b;c)=(a;b]\cup[c;d)$ $d/\ (b;d)\setminus(a;c)=[c;d)$.

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Cho các tập hợp: $A=[-3;1]$; $B=[-2;2]$; $C=[-2;+\infty)$.

a) Trong các tập hợp trên tập hợp nào là tập con của tập nào? Tìm phần bù của chúng?

b) Tìm $A\cap B$; $A\cup B$; $A\cup C$; $A\setminus B$; $B\setminus C$.

Bài 2. Cho các tập hợp :

$A=\{x\in R/\,2x+3>0\}$

$B=\{x\in R/\,8-2x<0\}$

$C=\{x\in R/\,x+2\geq 0\}$.

a/ Dùng ký hiệu đoạn,khoảng ,nữa khoảng để viết lại các tập hợp trên.

b/ Biểu diễn các tập hợp A,B,C,D trên trục số.

c/ Xác định : $A\cap B$; $A\cup B$; $A\cup C$; $A\setminus B$ $B\setminus C$

Bài 3. Sắp xếp các tập hợp số sau đây $\mathbb{N}^*$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{N}$; $\mathbb{R}$; $\mathbb{Q}$ theo thứ tự tập hợp trước là tập con của tập hợp sau.

§5. SỐ GẦN ĐÚNG - SAI SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Cho a là số gần đúng của số đúng $\overline{a}$.

1. $\Delta_a = |\overline{a} - a|$ được gọi là sai số tuyệt đối của số đúng a.

2. Nếu $\Delta_a \le d$ thì d được gọi là độ chính xác của số gần đúng a và quy ước viết gọn là $\overline{a} = a \pm d$.

3. Cách quy tròn số gần đúng căn cứ vào độ chính xác cho trước :

Cho số gần đúng a với dộ chính xác d (tức là $\overline{a} = a \pm d$). Khi được yêu cầu quy tròn số a mà không nói rõ là quy tròn đến hàng nào thì ta quy tròn a đến hàng cao nhất mà d nhỏ hơn một đơn vị của hàng đó.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Tìm sai số tuyệt đối của một số gần đúng.

Phương pháp :

Cho a là số gần đúng của số đúng $\overline{a}$.

$\Delta_a = |\overline{a} - a|$ được gọi là sai số tuyệt đối của số đúng a.

Bài tập 1. Cho ba giá trị gần đúng của 8/17 là 0,4 ; 0,47; 0,471. Hãy tính sai số tuyệt đối của các số này.

Giải

Ta có**:** $\left|\dfrac{8}{17} - 0.4\right| = \dfrac{1.2}{17} < 0.08$; $\left|\dfrac{8}{17} - 0.47\right| = \dfrac{0.01}{17} < 0.001$; $\left|\dfrac{8}{17} - 0.471\right| = \dfrac{0.007}{17} < 0.0005$

Vậy : Sai số tuyệt đối của số gần đúng 0.4 là 0.08.

Sai số tuyệt đối của số gần đúng 0.47 là 0.001

Sai số tuyệt đối của số gần đúng 0.471 là 0.0005.

Bài tập 2. Cho ba giá trị gần đúng của 23/7 là 3,28 và 3,286 . Hãy tính sai số tuyệt đối của các số này.

Giải

Ta có **:** $\left|\dfrac{23}{7} - 3.28\right| < 0,006$; $\left|\dfrac{23}{7} - 3.286\right| < 0,0003$.

Vậy : Sai số tuyệt đối của số gần đúng 3.28 là 0.006.

Sai số tuyệt đối của số gần đúng 3.286 là 0.0003.

Vấn đề 2 . Cách viết chuẩn số gần đúng.

Phương pháp :

❖ Nếu $\Delta_a \le d$ thì d được gọi là độ chính xác của số gần đúng a và quy ước viết gọn là $\overline{a} = a \pm d$.

❖ Nếu độ chính xác của số gần đúng a đến hàng nào thì ta quy tròn a đến hàng kề trước nó.

Bài tập 1. Cho số $\overline{a} = 27975421 \pm 150$. Hãy viết số quy tròn của số 27 975 421.

Giải

Vì độ chính xác đến hàng trăm nên ta qui tròn số 27 975 421 đến hàng nghìn.

Vây số quy tròn là : 27 975 000.

Bài tập 2. Biết số gần đúng a=257,4593 có sai số tuyệt đối không vượt quá 0,01.

Viết số quy tròn của a.

Giải

Vì sai số tuyệt đối không vượt quá $\frac{1}{100}$ nên số quy tròn của a là 257,5.

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Cho biết $\sqrt{3} = 1.7320508\ldots$.Viết số gần đúng $\sqrt{3}$ theo quy tắc làm tròn đến hai,ba,bốn chữ số thập phân có ước lượng sai số tuyệt đối trong mỗi trường hợp.

Bài 2. Dùng máy tính cầm tay tìm giá trị gần đúng a của $\sqrt[3]{13}$ (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn). Ước lượng sai số tuyệt đối của a.

Bài 3. Độ cao của một ngọn núi là $h = 1856,7m \pm 0,1m$.Hãy viết số quy tròn của số 1856,7.

Bài 4. Thực hiện các phép tính trên máy tính cầm tay.

a/ $\sqrt{15}.(0.13)^3$ làm tròn kết quả đến 4 chữ số thập phân.

b/ $\sqrt[3]{5} : \sqrt{7}$ làm tròn kết quả đến 6 chữ số thập phân.

Bài 5. Cho số $a = 13,6481$

a) Viết số quy tròn của a đến số hàng phần trăm.

b) Viết số quy tròn của a đến số hàng phần chục.

§1. HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Một hàm số có thể cho bằng: Bảng, Biểu đồ, Công thức, Đồ thị.

Khi cho hàm số bằng công thức mà không nói rõ tập xác định của nó thì ta qui ước tập xác định D của hàm số y = f(x) là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức f(x) có nghĩa.

2. Hàm số y = f(x) gọi là đồng biến (hay tăng) trên khoảng $(a;b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a;b): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

3. Hàm số y = f(x) gọi là nghịch biến (hay giảm) trên khoảng $(a;b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a;b): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

4. Xét chiều biến thiên của một hàm số là tìm các khoảng dồng biến và các khoảng nghịch biến của nó. Kết quả được tổng kết trong một bảng gọi là bảng biến thiên.

5. Hàm số y = f(x) với tập xác định D gọi là hàm số chẵn nếu

$$\forall x \in D \text{ thì } -x \in D \text{ và } f(-x) = f(x)$$

Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.

6. Hàm số y = f(x) với tập xác định D gọi là hàm số lẻ nếu

$$\forall x \in D \text{ thì } -x \in D \text{ và } f(-x) = -f(x)$$

Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Tìm tập xác định của hàm số

Phương pháp :

Tìm tập xác định của hàm số y = f(x) là tìm tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức f(x) có nghĩa.

Bài tập. Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y = \dfrac{2x-1}{3x+2}$ b) $y = \dfrac{1-2x}{2x^2-5x+2}$

c) $y = \sqrt{4x-2} + \sqrt{5-x}$ d) $y = \dfrac{x}{x-1} + \sqrt{2x+4}$

Giải

a) Hàm số xác định khi $3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\dfrac{2}{3}$

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$

b) Hàm số xác định khi $2x^2 - 5x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{2; \dfrac{1}{2}\right\}$

c) Hàm số xác định khi $\begin{cases} 4x - 2 \geq 0 \\ 5 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ x \leq 5 \end{cases}$

Vậy tập xác định $D = \left[\dfrac{1}{2}; 5\right]$

d) Hàm số xác định khi $\begin{cases} x - 1 \neq 0 \\ 2x + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x > -2 \end{cases}$

Vậy tập xác định $D = (-2; +\infty) \setminus \{1\}$

Vấn đề 2. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số.

Phương pháp : Hàm số y = f(x) :

+ Chẵn trên D nếu $\begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

+ Lẻ trên D nếu $\begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

Bài tập. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$ b) $f(x) = -2x^3 + x$

c) $f(x) = |x + 2| - |x - 2|$ d) $f(x) = (x - 1)^2$

Giải

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$

Tập xác định : $D = \mathbb{R}$

$\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

$$f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 1 = x^4 - 3x^2 + 1 = f(x)$$

Vậy hàm số là hàm số chẵn.

b) $f(x) = -2x^3 + x$

Tập xác định : $D = \mathbb{R}$

$\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

$$f(-x) = -2(-x)^3 + (-x) = 2x^3 - x = -\left(-2x^3 + x\right) = -f(x)$$

Vậy hàm số là hàm số lẻ.

c) $f(x) = |x+2| - |x-2|$

Tập xác định : $D = \mathbb{R}$

$\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

$$f(-x) = |-x+2| - |-x-2| = \left|-\left(x-2\right)\right| - \left|-\left(x+2\right)\right| = |x-2| - |x+2| = -\left(|x+2| - |x-2|\right) = -f(x)$$

Vậy hàm số là hàm số lẻ.

d) $f(x) = \left(x-1\right)^2$

Tập xác định : $D = \mathbb{R}$

Lấy $x = 1 \in D$

$f(-1) = \left(-1-1\right)^2 = 4$

$f(1) = \left(1-1\right)^2 = 0$

$\Rightarrow f(-1) \neq \pm f(1)$

Vậy hàm số không chẵn không lẻ.

Vấn đề 3. Tìm điều kiện để một điểm thuộc đồ thị hàm số

Phương pháp : Điểm $M\left(x_0; y_0\right)$ thuộc đồ thị hàm số y = f(x) khi và chỉ khi $y_0 = f(x_0)$

Bài tập. Những điểm sau đây, điểm nào thuộc đồ thị hàm số $y = \sqrt{x+1}$?

$$A\left(-1;0\right), B\left(4;2\right), C\left(0;0\right), D\left(-5;-2\right)$$

Giải

+ Điểm $A(-1;0)$ thuộc đồ thị hàm số $y = \sqrt{x+1}$ vì $0 = \sqrt{-1+1}$

+ Điểm $B(4;2)$ không thuộc đồ thị hàm số $y = \sqrt{x+1}$ vì $2 \neq \sqrt{4+1}$

+ Điểm $C(0;0)$ không thuộc đồ thị hàm số $y = \sqrt{x+1}$ vì $0 \neq \sqrt{0+1}$

+ Điểm $D\left(-5;-2\right)$ không thuộc đồ thị hàm số $y = \sqrt{x+1}$ vì $x_0 = -5$ không thuộc tập xác định của hàm số.

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{-3x}{x+2}$

b) $y = \sqrt{x+2} + \sqrt{7-x}$

c) $y = \dfrac{x+2}{x^2 - 4x + 3}$

d) $y = \sqrt{x+2} + \dfrac{1}{x^2 - 4}$

e) $y = \sqrt{x+3} + \dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$

f) $y = \dfrac{x+1}{(x-3)\sqrt{2x-1}}$

Bài tập 2. Xác định tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

a) $y = 4x^3 + 3x$

b) $y = x^4 - 3x^2 - 1$

c) $y = |2x-1| + |2x+1|$

d) $y = (1-2x)^2$

e) $y = 2x^2 + |x| + 2$

f) $y = -\dfrac{1}{x^2+3}$

§2. HÀM SỐ y = ax + b

A.KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hàm số bậc nhất y = ax + b, $(a \neq 0)$

   Tập xác định D = $\mathbb{R}$;

   Bảng biến thiên

a > 0 :

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

a < 0 :

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Đô thị là một đường thăng không song song và không trùng với các trục tọa độ.

Để vẽ đường thẳng y = ax + b ta chỉ cần xác điịnh hai điểm khác nhau của nó.

2. Hàm số hằng y = b

   Tập xác định D = $\mathbb{R}$;

   Hàm số hằng là hàm số chẵn;

   Đồ thị là một đường thẳng song song hoặc trùng với trục hoành và cắt trục tung tại điểm có tọa độ (0;b).

3. Hàm số y = $|x|$

   Tập xác định D = $\mathbb{R}$;

   Hàm số hằng là hàm số chẵn;

   Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Vẽ đồ thị hàm số bậc nhất y = ax + b $(a \neq 0)$

Phương pháp : Xác định hai điểm khác nhau trên đồ thị.

Bài tập 1. Vẽ đồ thị của các hàm số

a) $y = 3x + 4$ b) $y = 3 - \frac{1}{2}x$ c) $y = 4$.

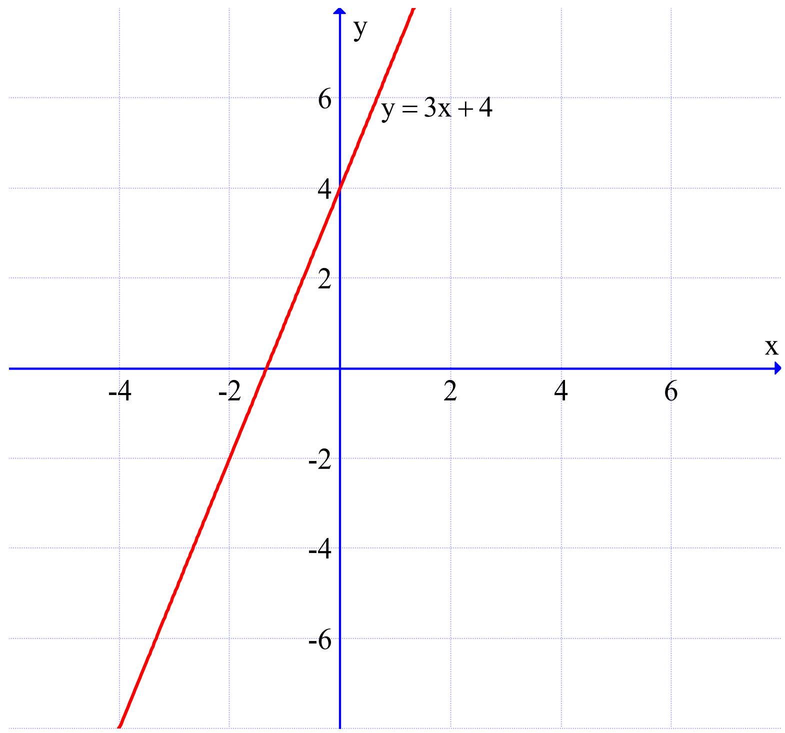
Giải

a) $y = 3x + 4$

$x = 0 \Rightarrow y = 4$

$x = -1 \Rightarrow y = 1$

Đồ thị:

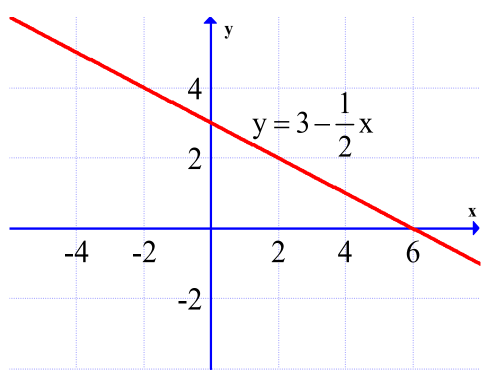


b) $y = 3 - \frac{1}{2}x$

$x = 0 \Rightarrow y = 3$

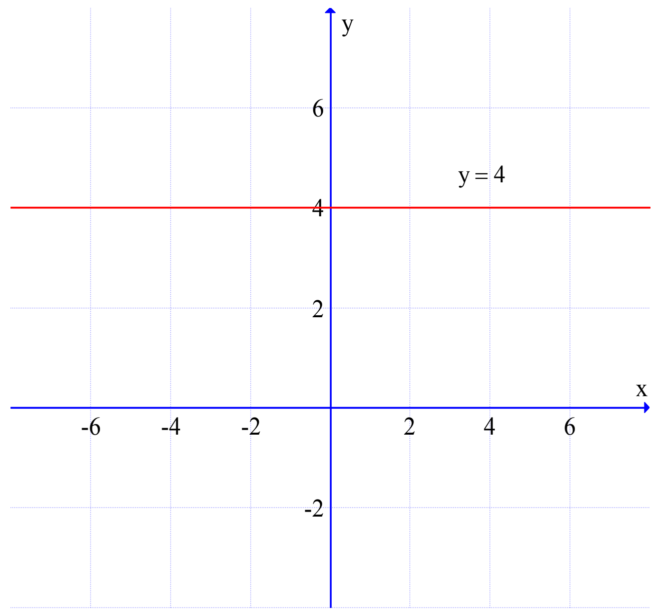
$x = 2 \Rightarrow y = 2$

Đồ thị :



c) $y = 4$

Đồ thị:



Vấn đề 2 . Viết phương trình của đường thẳng y = ax + b

Phương pháp :

- Đường thẳng đi qua hai điểm

  Thay tọa độ hai điểm đó vào phương trình y = ax + b giải hệ phương trình tìm a, b và thay vào phương trình y = ax + b .

- Đường thẳng qua một điểm và song song với đường thẳng y = a'x + b'

  Tương tự qua hai điểm ta lập được một phương trình.

  Do đường thẳng y = ax + b song song với đường thẳng y = a'x + b' nên ta có $a = a'$, $b \neq b'$

- Đường thẳng qua một điểm và vuông góc với đường thẳng y = a'x + b'

  Tương tự qua hai điểm ta lập được một phương trình.

  Do đường thẳng y = ax + b vuông góc với đường thẳng y = a'x + b' nên ta có a.a' = -1.

Bài tập 2. Viết phương trình đường thẳng (d): y = ax + b biết:

a) Đường thẳng (d) qua hai điểm $A(2;3)$ và $B(-1;-3)$

b) Đường thẳng (d) qua $M(1;-1)$ và song song đường thẳng d': $y = -3x - 4$

c) Đường thẳng (d) qua $N(2;1)$ và vuông góc đường thẳng d': $y = \frac{1}{2}x + 3$

Giải

a) Do đường thẳng (d) qua hai điểm $A(2;3)$ và $B(-1;-3)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3 = a.2 + b \\ -3 = a.(-1) + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 3 \\ -a + b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

Vậy d: $y = 2x - 1$

b) Do đường thẳng (d) qua $M(1;-1)$ nên ta có phương trình: $-1 = a.1 + b \Leftrightarrow a + b = -1$ (1)

Do đường thẳng (d) song song đường thẳng d': $y = -3x - 4$ nên ta có $a = -3$.

Thay vào (1) ta được b = 2.

Vậy d : $y = -3x + 2$

c) Do đường thẳng (d) qua $N(2;1)$ nên ta có phương trình: $1 = a.2 + b \Leftrightarrow 2a + b = 1$ (1)

Do đường thẳng (d) vuông góc đường thẳng d': $y = \frac{1}{2}x + 3$ nên ta có $a.\frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow a = -2$.

Thay vào (1) ta được b = 5.

Vậy d: $y = -2x + 5$

Vấn đề 3. Vẽ đồ thị hàm số cho bằng nhiều biểu thức

Phương pháp : Ta vẽ đồ thị trên từng khoảng, đoạn hay nửa khoảng được chia.

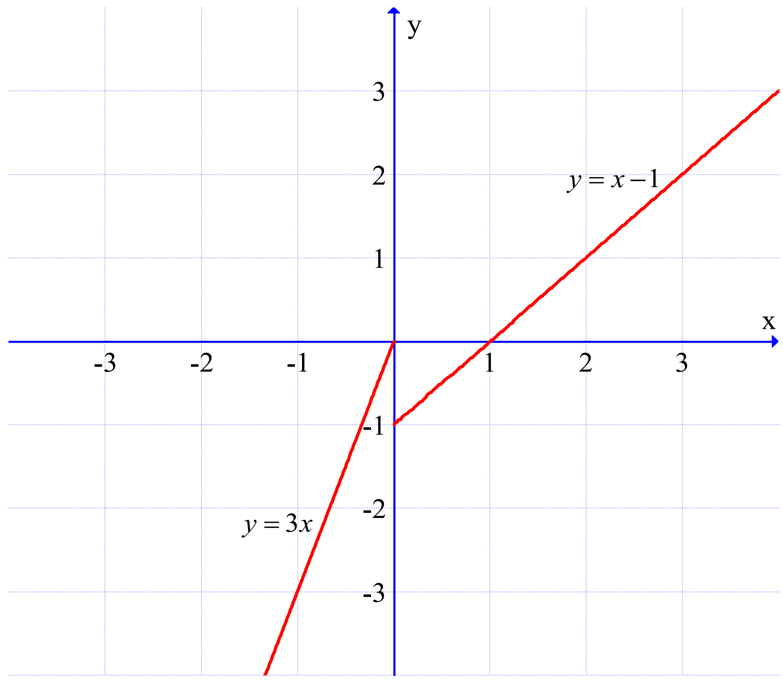
Bài tập 3. Vẽ đồ thị hàm số

a) $y = \begin{cases} 3x, \text{ với } x \geq 0 \\ x - 1, \text{ với } x < 0 \end{cases}$ b) $y = |x - 2| + 1$

Giải

a) $y = \begin{cases} 3x, \text{ với } x \geq 0 \\ x - 1, \text{ với } x < 0 \end{cases}$

Đồ thị :



Xét trên $[0;+\infty)$:

$x = 0 \Rightarrow y = 0$
$x = 1 \Rightarrow y = 3$

Xét trên $(-\infty;0)$:

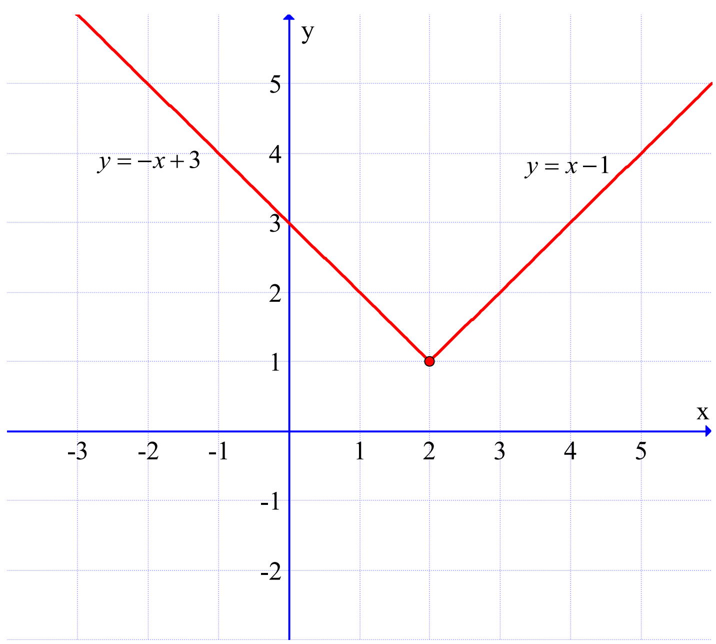
$x = -1 \Rightarrow y = -2$
$x = -2 \Rightarrow y = -3$

b) $y = |x - 2| + 1$

$= \begin{cases} x - 2 + 1, \text{ với } x - 2 \geq 0 \\ -x + 2 + 1, \text{ với } x - 2 < 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} x - 1, \text{ với } x \geq 2 \\ -x + 3, \text{ với } x < 2 \end{cases}$

Đồ thị :



Xét trên $[2;+\infty)$:

$x = 2 \Rightarrow y = 1$
$x = 3 \Rightarrow y = 2$

Xét trên $(-\infty;2)$:

$x = 1 \Rightarrow y = 2$
$x = 0 \Rightarrow y = 3$

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ.

Bài tập 1. Vẽ đồ thị hàm số:

a) $y = x + 2$ b) $y = \frac{x}{2} + 1$

c) $y = -2x + 1$ d) $y = -\sqrt{3}$

Bài tập 2. Xác định a, b để đồ thị hàm số y = ax + b

a) Đi qua hai điểm $A(0;1)$ và $B(2;-3)$

b) Đi qua $C(4;-3)$ và song song đường thẳng $y = -\frac{2}{3}x + 1$

c) Đi qua E(4;2) và vuông góc đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x + 5$

Bài tập 3. Vẽ đồ thị hàm số sau:

a) $y = \begin{cases} -x + 2, & \text{với } x \geq 1 \\ 2x + 2, & \text{với } x < 1 \end{cases}$ b) $y = |-2x + 3| - 1$

§3. HÀM SỐ BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

2. Đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ là một đường parabol có đỉnh là điểm

$I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$, có trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$.

Parabol này quay bề lõm lên trên nếu a > 0, xuống dưới nếu a < 0.

3. Để vẽ đường parabol $y = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ ta thực hiện các bước sau:

Xác định tọa độ đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$;

Vẽ trục đối xứng d là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$

Xác định giao điểm của parabol với các trục tọa độ (nếu có). Xác định thêm một số điểm thuộc đồ thị. Chẳng hạn, điểm đối xứng với giao điểm của đồ thị với trục tung qua trục đối xứng của parabol.

Dựa vào kết quả trên, vẽ parabol.

4. Bảng biến thiên :

$a > 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$

$a < 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$

Vấn đề 1. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$

Phương pháp:

+ Tìm tập xác định: $D = \mathbb{R}$

+ Xác định tọa độ đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

+ Xác định trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$

+ Xác định giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (nếu có)

+ Tìm điểm đối xứng với giao điểm của đồ thị với trục tung qua trục đối xứng của parabol.

+ Từ các dữ liệu tìm được, lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.

Bài tập 1. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số :

a) $y = 3x^2 - 4x + 1$ b) $y = -3x^2 + 2x - 1$ c) $y = 4x^2 - 4x + 1$.

Giải

a) $y = 3x^2 - 4x + 1$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Tọa độ đỉnh: $I\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$

Trục đối xứng: $x = \frac{2}{3}$

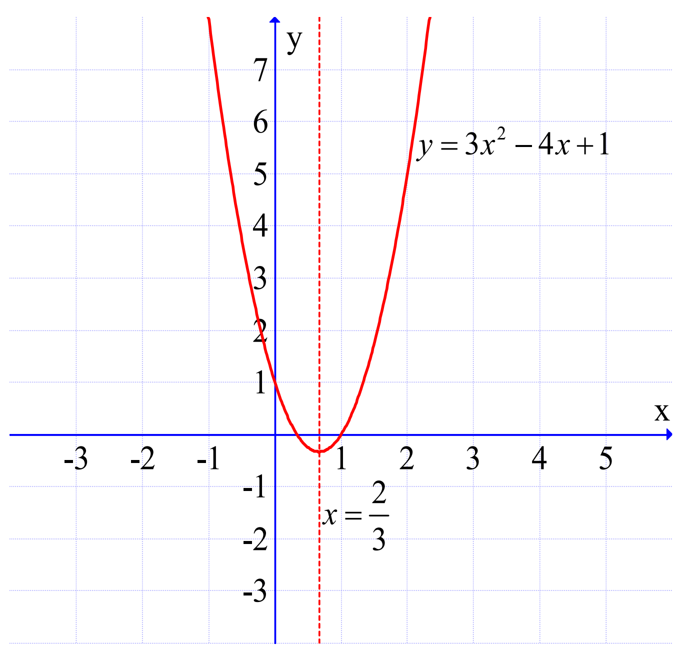
Giao điểm của đồ thị với trục Oy là A(0;1).

Giao điểm của đồ thị với trục Ox

là B(1;0), $C\left(\frac{1}{3}; 0\right)$.

$\Rightarrow A'\left(\frac{4}{3}; 1\right)$ đối xứng A qua trục đối xứng

Đồ thị:



Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

b) $y = -3x^2 + 2x - 1$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Tọa độ đỉnh: $I\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$

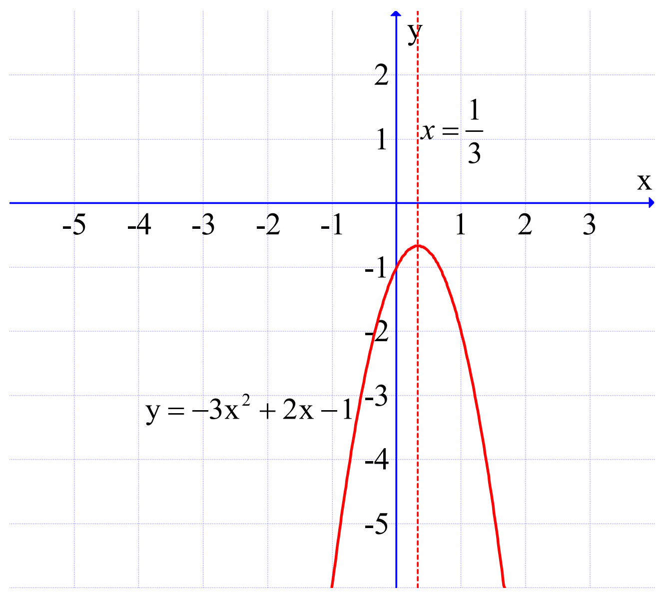
Trục đối xứng: $x = \frac{1}{3}$

Giao điểm của đồ thị với trục Oy là A(0;1).

Giao điểm của đồ thị với trục Ox là không có.

$\Rightarrow A'\left(\frac{2}{3}; -1\right)$ đối xứng A qua trục đối xứng.

Đồ thị:



Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{2}{3}$	$\searrow$	$-\infty$

c) $y = 4x^2 - 4x + 1$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Tọa độ đỉnh: $I\left(\frac{1}{2};0\right)$

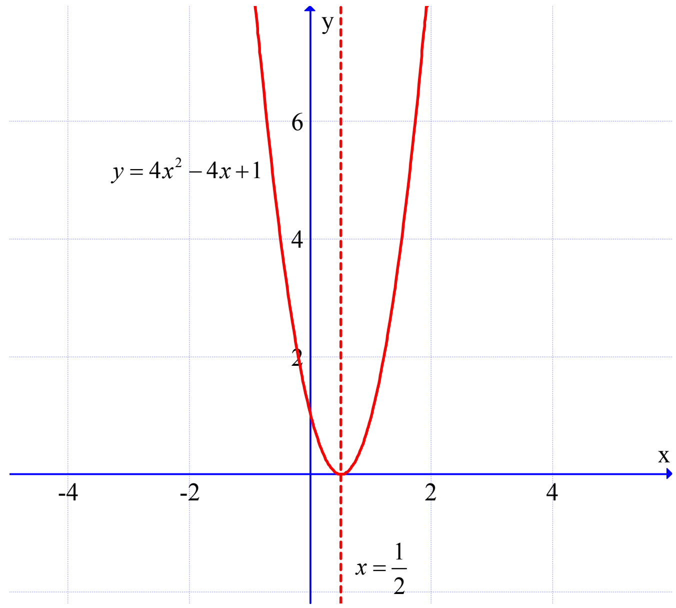
Trục đối xứng: $x = \frac{1}{2}$

Giao điểm của đồ thị với trục Oy là A(0;1).

Giao điểm của đồ thị với trục Ox là $B\left(\frac{1}{2};0\right)$

$\Rightarrow$ A'$(1;1)$ đối xứng A qua trục đối xứng.

Đồ thị:



Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
y	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

Vấn đề 2. Xác định hàm số bậc hai.

Phương pháp :

• Biết đồ thị qua một điểm.Thay tọa độ điểm vào phương trình hàm số ta được một phương trình.

• Biết đồ thị có trục đối xứng $x = x_0$. Suy ra $-\dfrac{b}{2a} = x_0$.

• Biết đỉnh $I(x_0; y_0)$.Suy ra $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = x_0 \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = y_0 \end{cases}$

• Biết hoành độ đỉnh là x_0. Suy ra $-\dfrac{b}{2a} = x_0$

• Biết tung độ đỉnh là y_0. Suy ra $-\dfrac{\Delta}{4a} = y_0$

❖ Từ các giả thiết đề bài cho, ta thành lập hệ phương trình.

Bài tập 2. Xác định hàm số bậc hai $y = 2x^2 + bx + c$, biết rằng đồ thị của nó:

a) Có trục đối xứng là đường thẳng x = 1 và cắt trục tung tại điểm (0;4).

b) Có đỉnh là $I(-1;-2)$.

c) Đi qua hai điểm $A(0;-1), B(4;0)$.

d) Có hoành độ đỉnh là 2 và đi qua điểm $M(1;-2)$.

Giải

a) Do đồ thị có trục đối xứng là đường thẳng x = 1 nên ta có: $-\dfrac{b}{2a} = -1 \Leftrightarrow b = -2a = -4$

Do đồ thị cắt trục tung tai điểm (0;4) nên ta có: $4 = 2.0 + b.0 + c \Leftrightarrow c = 4$

Vậy hàm số cần tìm là : $y = 2x^2 - 4x + 4$

b) Do đồ thị có đỉnh là $I(-1;-2)$ nên ta có: $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = -1 \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ \dfrac{4ac - b^2}{4a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ c = 0 \end{cases}$

Vậy hàm số cần tìm là : $y = 2x^2 + 4x$.

c) Do đồ thị đi qua hai điểm $A(0;-1), B(4;0)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -1 = 2.0 + b.0 + c \\ 0 = 2.16 + 4.b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ 32 + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ b = -\dfrac{31}{4} \end{cases}$$

Vậy hàm số cần tìm là : $y = 2x^2 - \dfrac{31}{4}x - 1$.

d) Do đồ thị có hoành độ đỉnh là 2 nên ta có $-\dfrac{b}{2a} = 2 \Leftrightarrow b = -8$

Do đồ thị đi qua điểm $M(1;-2)$ nên ta có: $-2 = 2.1 + b.1 + c \Leftrightarrow -2 = 2 - 8 + c \Leftrightarrow c = 4$

Vậy hàm số cần tìm là : $y = 2x^2 - 8x + 4$.

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số:

a) $y = 2x^2 + 4x - 6$

b) $y = -3x^2 - 6x + 4$

c) $y = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 1$

d) $y = -2x^2 - 2$

Bài tập 2. Xác định hàm số bậc hai $y = ax^2 - 4x + c$, biết rằng đồ thị của nó

a) Đi qua hai điểm $A(1;-2)$ và $B(2;3)$.

b) Có đỉnh là $I(-2;-1)$.

c) Có hoành độ đỉnh là -3 và đi qua điểm $P(-2;1)$.

d) Có trục đối xứng là đường thẳng x = 2 và cắt trục hoành tại điểm M(3;0).

Bài tập 3. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + 1$ biết parabol đó:

a) Qua $A(1;2)$ và $B(2;3)$.

b) Có đỉnh là $I(1;0)$.

c) Qua M(1;6) và có trục đối xứng có phương trình là $x = -2$.

d) Qua N(1;4) và có tung độ đỉnh là 0.

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. KHÁI NIỆM PHƯƠNG TRÌNH

1. Phương trình một ẩn:

Phương trình ẩn x là một mệnh đề chứa biến dạng $f(x)=g(x)$, trong đó $f(x)$ và $g(x)$ là các biểu thức của x.

2. Điều kiện xác định của phương trình

Điều kiện xác định của phương trình (gọi tắt là điều kiện của phương trình) là những điều kiện của ẩn x để các biểu thức của phương trình điều có nghĩa.

3. Nghiệm của phương trình-giải phương trình

Nếu $f(x_0)=g(x_0)$ thì x_0 được gọi là nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$

Giải phương trình là tìm tập hợp tất cả các nghiệm của nó (nghĩa là tìm tập nghiệm).

4. Phương trình nhiều ẩn

Ngoài các phương trình một ẩn còn có các *phương trình nhiều ẩn*. Nghiệm của phương hai ẩn x, y là cặp số thực $(x_0; y_0)$ thỏa mãn phương trình đó, còn nghiệm của một phương trình ba ẩn x, y, z là một bộ ba số thực $(x_0; y_0; z_0)$ thỏa mãn phương đó.

II. PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG VÀ PHƯƠNG TRÌNH HỆ QUẢ

1. Phương trình tương đương:

Hai phương trình $f(x)=g(x)\,(1)$ và $f_1(x)=g_1(x)\,(2)$ được gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm (có thể là tập rỗng). Kí hiệu: $(1)\Leftrightarrow(2)$.

2. Phép biến đổi tương đương:

Nếu thực hiện các biến đổi sau đây trên một phương trình mà không làm thay đổi điều kiện xác định của nó thì ta được một phương trình tương đương.

a) Cộng hay trừ hai vế của phương trình với một số khác 0 hoặc với cùng một biểu thức luôn có giá trị khác không.

b) Nhân hoặc chia hai vế của phương trình với một số khác 0 hoặc với cùng biểu thức luôn có giá trị khác 0.

3. Phương trình hệ quả

Nếu mỗi nghiệm của phương trình (1) cũng là nghiệm của phương trình (2) thì ta nói phương trình (2) là phương trình hệ quả của phương trình (1). Kí hiệu: $(1)\Rightarrow(2)$.

Chẳng hạn, với số nguyên dương n tùy ý ta có: $f(x)=g(x)\Rightarrow\left[f(x)\right]^n=\left[g(x)\right]^n$

Phương trình hệ quả có thể có *nghiệm ngoại lai*, nghiệm đó không phải là nghiệm của phương trình ban đầu. Để loại nghiệm ngoại lai ta phải thử lại nghiệm tìm được vào phương trình ban đầu.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Tìm điều kiện của ẩn để phương trình có nghĩa

Phương pháp : Tìm điều kiện của ẩn x để các biểu thức của phương trình điều có nghĩa.

Bài tập 1. Tìm điều kiện của các phương trình sau:

a) $\dfrac{3x}{x^2-1}=\sqrt{4-x}$ b) $\dfrac{x+2}{\sqrt{x-3}}=\sqrt{2-x}$

Giải

a) Điều kiện của phương trình là: $\begin{cases} x^2-1\neq 0 \\ 4-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq \pm 1 \\ x\leq 4 \end{cases}$.

b) ❖ Điều kiện của phương trình là: $\begin{cases} x-3>0 \\ 2-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x\leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing$.

❖ Vậy không có giá trị nào của x thỏa mãn điều kiện của phương trình.

Chú ý: Khi không có giá trị nào của x thỏa mãn điều kiện của phương trình thì phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài tập 2. Chứng tỏ các phương trình sau vô nghiệm

a) $\dfrac{2x-1}{\sqrt{-x+3}}=\sqrt{x-4}$; b) $\sqrt{x-5}+x=3+\sqrt{5-x}$.

Giải

a) ❖ Điều kiện của phương trình là: $\begin{cases} -x+3>0 \\ x-4\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ x\geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing$. Do đó: không có giá trị nào của x thỏa mãn điều kiện của phương trình.

❖ Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

b) ❖ Điều kiện của phương trình là: $\begin{cases} x-5\geq 0 \\ 5-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 5 \\ x\leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x=5$. Giá trị này không thỏa mãn phương trình.

❖ Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Vấn đề 2. Biến đổi tương đương, biến đổi hệ quả phương trình; Xác định quan hệ tương đương, hệ quả của các phương trình.

Phương pháp :

1) Nếu thực hiện các biến đổi sau đây trên một phương trình mà không làm thay đổi điều kiện xác định của nó thì ta được một phương trình tương đương.

a) Cộng hay trừ hai vế của phương trình với một số khác 0 hoặc với cùng một biểu thức luôn có giá trị khác 0.

b) Nhân hoặc chia hai vế của phương trình với một số khác 0 hoặc với cùng biểu thức luôn có giá trị khác 0.

2) Nếu mỗi nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)\,(1)$ cũng là nghiệm của phương trình $f_1(x)=g_1(x)\,(2)$ thì ta nói phương trình (2) là phương trình hệ quả của phương trình (1). Kí hiệu: $(1)\Rightarrow(2)$.

Phương trình hệ quả có thể có *nghiệm ngoại lai*, nghiệm đó không phải là nghiệm của phương trình ban đầu. Để loại nghiệm ngoại lai ta phải thử lại nghiệm tìm được vào phương trình ban đầu.

Để phép bình phương trở thành phép biến đổi tương đương ta phải thêm điều kiện hai vế cùng dấu và thỏa mãn điều kiện của phương trình.

Bài tập 1. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x+2}+x=4+\sqrt{x+2}$; b) $\sqrt{x-4}-x=2+\sqrt{x-4}$

Giải

a) Điều kiện của phương trình là: $x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -2$. Ta có:

$$\sqrt{x+2}+x=4+\sqrt{x+2}$$
$$\Leftrightarrow x=4+\sqrt{x+2}-\sqrt{x+2}$$
$$\Rightarrow x=4$$

Giá trị $x=4$ thỏa mãn điều kiện $x\geq -2$ và là nghiệm đúng của phương trình.
Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x=4$.

b) Điều kiện của phương trình là: $x-4\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 4$. Ta có:

$$\sqrt{x-4}-x=2+\sqrt{x-4}$$
$$\Leftrightarrow -x=2+\sqrt{x-4}-\sqrt{x-4}$$
$$\Rightarrow x=-2$$

Giá trị $x=-2$ không thỏa mãn điều kiện $x\geq 4$.
Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài tập 2. Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{2x+1}{\sqrt{x-3}}=\dfrac{x+2}{\sqrt{x-3}}$; b) $\dfrac{2x^2}{\sqrt{x+1}}=\dfrac{8}{\sqrt{x+1}}$

Giải

a) Điều kiện của phương trình là $x>3$.
Với điều kiện đó, ta có

$$\frac{2x+1}{\sqrt{x-3}}=\frac{x+2}{\sqrt{x-3}} \Leftrightarrow \frac{2x+1}{\sqrt{x-3}}.\sqrt{x-3}=\frac{x+2}{\sqrt{x-3}}.\sqrt{x-3}$$
$$\Rightarrow 2x+1=x+2$$
$$\Rightarrow x=1$$

Giá trị $x=2$ không thỏa mãn điều kiện $x>3$ nên bị loại.
Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Điều kiện của phương trình là $x>-1$.
Với điều kiện đó, ta có

$$\frac{2x^2}{\sqrt{x+1}}=\frac{8}{\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow \frac{2x^2}{\sqrt{x+1}}.\sqrt{x+1}=\frac{8}{\sqrt{x+1}}.\sqrt{x+1}$$
$$\Rightarrow 2x^2=8$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Giá trị $x=-2$ không thỏa mãn điều kiện $x>-1$ nên bị loại. Giá trị $x=2$ thỏa mãn điều kiện $x>-1$ và nghiệm đúng phương trình.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=2$.

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Nêu điều kiện xác định của các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2+3x}=x+1$;

b) $\sqrt{x-1}+1=\sqrt{1-x}+x$;

c) $\dfrac{x-1}{x+1}=2\sqrt{x+2}$.

Bài 2. Giải các phương trình

a) $\dfrac{x+1}{x-1}+2=\dfrac{2x-1}{x-1}$;

b) $x+2-\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}=2$;

c) $\sqrt{x-2}\left(x^2-3x-4\right)=0$;

d) $\sqrt{x-1}=\sqrt{8-x}$;

e) $\sqrt{x^2-4}+x+3=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{5x}{2}$:

Bài 3. Trong các cặp phương trình sau, hãy chỉ ra các cặp phương trình tương đương:

a) $x^2-3x=4$ và $x^2-3x-4=0$;

b) $6x-12=0$ và $x=2$;

c) $x(x^2+2)=3(x^2+2)$ và $x=3$;

d) $x-1=3$ và $(x-1)^2=0$;

e) $\left|x-2\right|=4$ và $(x+2)^2=16$.

§2. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Giải và biện luận phương trình $ax+b=0$ **(1)**

Hệ số		$ax+b=0$ (1)
$a\neq 0$		Phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x=-\dfrac{b}{a}$
$a=0$	$b\neq 0$	Phương trình (1) vô nghiệm
	$b=0$	Phương trình (1) nghiệm đúng với $\forall x\in\mathbb{R}$

Khi $a\neq 0$ phương trình (1) được gọi là *phương trình bậc nhất* một ẩn.

2. Giải và biện luận phương trình $ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$ **(2)**

Biệt thức $\Delta=b^2-4ac$	Kết luận
$\Delta>0$	Phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta=0$	Phương trình (2) có nghiệm kép $x=-\dfrac{b}{2a}$
$\Delta<0$	Phương trình (2) vô nghiệm

3. Định lí Vi-et

Nếu phương trình (2) có hai nghiệm x_1,x_2 thì $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$, $x_1.x_2=\dfrac{c}{a}$.

Ngược lại, nếu hai số u và v có tổng $u+v=S$ và tích $u.v=P$ thì u và v là các nghiệm của phương trình $x^2-Sx+P=0$ (điều kiện: $S^2-4P\geq 0$).

4. Phương trình trùng phương

Có dạng $ax^4+bx^2+c=0$ $(a\neq 0)$.

Cách giải: đặt $t=x^2$ ($t\geq 0$) và đưa về phương trình bậc hai $at^2+bt+c=0$.

5. Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

Có thể khử dấu giá trị tuyệt đối trong *phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối* nhờ sử dụng định nghĩa:

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a \text{ nếu } a\geq 0\\ -a \text{ nếu } a<0\end{cases}$$

Đặc biệt, ta có:

* $|f(x)|=|g(x)|\Leftrightarrow |f(x)|^2=|g(x)|^2$ hoặc $|f(x)|=|g(x)|\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x)\\ f(x)=-g(x)\end{array}\right.$.

* $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0\ (\text{hay } g(x)>0)\\ f(x)=g(x)\end{cases}$;	* $\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)>0\\ f(x)=g^2(x)\end{cases}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Giải và biện luận phương trình $ax+b=0$.

Phương pháp :

* $a\neq 0$: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=-\dfrac{b}{a}$.

* $a=0$: Phương trình trở thành $ax=-b$

+ $b\neq 0$: Phương trình vô nghiệm

+ $b=0$: Phương trình có vô số nghiệm $x\in\mathbb{R}$

Bài tập. Giải và biện luận phương trình $(m-1)(m-3)x+3-m=0$ (1)

Giải

$(m-1)(m-3)x+3-m=0\Leftrightarrow(m-1)(m-3)x=m-3$ $(1')$

* $(m-1)(m-3)\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}m-1\neq 0\\ m-3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 1\\ m\neq 3\end{cases}$: phương trình $(1')$ có nghiệm duy nhất:

$$x=\frac{m-3}{(m-1)(m-3)}=\frac{1}{m-1}$$

* $(m-1)(m-3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=3\end{array}\right.$

+ Với $m=1$: Phương trình $(1')$ trở thành $0x=-2$ (phương trình vô nghiệm)

+ Với $m=3$: Phương trình $(1')$ trở thành $0x=0$ (phương trình có vô số nghiệm $x\in\mathbb{R}$).

Vậy * Với $m\neq 1$ và $m\neq 3$: Phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{m-1}$.

* Với $m=1$: Phương trình (1) vô ngiệm.

* Với $m=3$: Phương trình (1) có vô số nghiệm $x\in\mathbb{R}$.

Vấn đề 2. Giải phương trình có ẩn ở mẫu số đơn giản

Phương pháp :

Bước 1: Đặt điều kiện của phương trình (Chú ý điều kiện để mẫu số khác 0).

Bước 2: Quy đồng, khử mẫu và tìm nghiệm của phương trình.

Bước 3: Kiểm tra nghiệm tìm được với điều kiện. Nếu nghiệm đó thỏa mãn điều kiện thì nó là nghiệm của phương trình, ngược lại nó không phải là nghiệm.

Bài tập. Giải phương trình sau: $2x+3+\dfrac{4}{x-1}=\dfrac{x^2+3}{x-1}$

Giải

a) Điều kiện của phương trình: $x\neq 1$. Với điều kiện đó, ta có:

$$2x+3+\frac{4}{x-1}=\frac{x^2+3}{x-1}\Leftrightarrow(2x+3)(x-1)+4=x^2+3$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \text{ (loại)} \\ x=-2 \text{ (nhận)} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=-2$.

Vấn đề 3. Giải phương trình trùng phương $ax^4+bx^2+c=0\ (a\neq 0)$.

Phương pháp :

Đặt $t=x^2$ ($t\geq 0$) và đưa về phương trình bậc hai $at^2+bt+c=0$.

Bài tập. Giải phương trình $x^4-5x^2+4=0$

Giải

Đặt $t=x^2$, $t>0$. Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$t^2-5t+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \text{ (nhận)} \\ t=4 \text{ (nhận)} \end{array}\right.$$

Với $t=1$, ta được: $x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Với $t=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm: $x=\pm 1;\ x=\pm 2$.

Vấn đề 4. Giải phương trình dạng: $|A|=|B|;\ |A|=B;\ \sqrt{A}=\sqrt{B};\ \sqrt{A}=B$**.**

Phương pháp : Sử dụng các công thức

$$|A|=|B| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=B \\ A=-B \end{array}\right.; \qquad |A|=B \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} B\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} A=B \\ A=-B \end{array}\right. \end{array}\right.;$$

$$\sqrt{A}=\sqrt{B} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A\geq 0 \text{ (hay } B\geq 0) \\ A=B \end{array}\right.; \quad \sqrt{A}=B \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} B\geq 0 \\ A=B^2 \end{array}\right..$$

Bài tập. Giải các phương trình sau:

a) $|x-3|=2x+1$;

b) $|2x-1|=|-5x-2|$;

c) $\sqrt{2x-3}=x-3$;

c) $\sqrt{x^2+x-2}=\sqrt{-x+1}$.

Giải

a) $|x-3| = 2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x-3 = 2x+1 \\ x-3 = -2x-1 \end{array}\right. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} -x = 4 \\ 3x = 2 \end{array}\right. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{array}\right. \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \dfrac{2}{3}$

b) $|2x-1| = |-5x-2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1 = -5x-2 \\ 2x-1 = 5x+2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x = -1 \\ -3x = 3 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{7} \\ x = -1 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình là:

$x = -\dfrac{1}{7};\ x = -1.$

c) $\sqrt{2x-3} = x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 2x-3 = (x-3)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 2x-3 = x^2-6x+9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2-8x+12 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \left[\begin{array}{l} x = 2\ \text{(loại)} \\ x = 6\ \text{(nhận)} \end{array}\right. \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = 6$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 6$

d) $\sqrt{x^2+x-2} = \sqrt{-x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+1 \geq 0 \\ x^2+x-2 = -x+1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2+2x-3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1\ \text{(nhận)} \\ x = -3\ \text{(nhận)} \end{array}\right. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 1;\ x = -3$

Vấn đề 5. Vận dụng định lí Vi-et vào việc nhẩm nghiệm của phương trình bậc hai, tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng.

Phương pháp :

a) Cho phương trình: $ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$.

+ Nếu $a+b+c=0$ thì phương trình có một nghiệm $x_1=1$, nghiệm còn lại $x_2=\frac{c}{a}$.

+ Nếu $a-b+c=0$ thì phương trình có một nghiệm $x_1=-1$, nghiệm còn lại $x_2=-\frac{c}{a}$

b) Nếu hai số u và v có tổng $u+v=S$ và tích $u.v=P$ thì u và v là các nghiệm của phương trình $x^2-Sx+P=0$ (điều kiện: $S^2-4P\geq 0$).

Bài tập 1. Nhẩm nghiệm các phương trình sau:

a) $x^2-6x+5=0$; b) $3x^2-6x-9=0$.

Giải

a) Vì $1+(-6)+5=0$ nên phương trình có một nghiệm $x_1=1$, nghiệm kia $x_2=\frac{5}{1}=5$.

b) Vì $3-(-6)-9=0$ nên phương trình có một nghiệm $x_1=-1$, nghiệm kia $x_2=-\frac{-9}{3}=3$.

Bài tập 2. Tìm hai số có tổng bằng 18 và tích bằng 45.

Giải

Hai số cần tìm là nghiệm nghiệm của phương trình: $x^2-18x+45=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=15 \end{array}\right.$.

Vậy hai số cần tìm là: 3 và 15.

Vấn đề 6. Giải các bài toán thực tế đưa về giải phương trình bậc nhất, bậc hai bằng cách lập phương trình.

Phương pháp :

Bước 1: Đặt ẩn số và xác định điều kiện của ẩn.

Bước 2: Từ yêu cầu đề bài xây dựng phương trình. Tìm nghiệm của phương trình đó.

Bước 3: Kiểm tra nghiệm tìm được với điều kiện và kết luận.

Bài tập. Có hai rổ quýt chứa số quýt bằng nhau. Nếu lấy 30 quả ở rổ thứ nhất đưa sang rổ thứ hai thì số quả quýt ở rổ thứ hai bằng $\frac{1}{3}$ của bình phương số quả còn lại ở rổ thứ nhất. Hỏi số quả quýt ở mỗi rổ lúc ban đầu là bao nhiêu?

Giải

Gọi x là số quả quýt ở mỗi rổ lúc ban đầu. Điều kiện: x:nguyên dương và $x>30$.

Theo đề bài ta có phương trình: $x+30=\frac{1}{3}\left(x-30\right)^2$

$$x^2-63x+810=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=45\ (\text{loại}) \\ x=18\ (\text{nhận}) \end{array}\right.$$

Vậy số quả quýt ở mỗi rổ lúc ban đầu là 45 quả.

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Giải và biện luận phương trình sau: $m(x-2)=3x+1$

Bài 2. Tìm hai số có tổng bằng 15 và tích bằng -34.

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{2x}{x^2-1}-\dfrac{1}{x+1}=2$; b) $(x^2+2x)^2-(3x+2)^2=0$; c) $x^4-8x^2-9=0$

Bài 4. Giải các phương trình sau:

a/ $|2x+1|=|x-3|$ b/ $|x^2-2x|=|x^2-5x+6|$

c/ $|x+3|=2x+1$ d/ $|3x^2-x-2|=x-2$

Bài 5. Giải các phương trình sau:

a/ $\sqrt{3x^2-9x+1}=x-2$ b/ $x-\sqrt{2x-5}=4$

c/ $x-\sqrt{2x+7}=4$ d/ $x+\sqrt{x-1}=13$

Bài 6. Một người dùng 300000đ đầu tư cho sản xuất thủ công. Mỗi sản phẩm người đó được lãi 1500 đồng. Sau một tuần, tính cả vốn lẫn lãi người đó có 1050 nghìn đồng. Hỏi trong tuần đó, người ấy sản xuất được bao nhiêu sản phẩm?

Bài 7. Một công ty vận tải dự định điều động một số ô tô cùng loại để chuyển 22,4 tấn hàng. Nếu mỗi ô tô chở thêm 1 tạ so với dự định thì số ô tô giảm đi 4 chiếc. Hỏi số ô tô công ty dự định điều động để chở hết số hàng trên là bao nhiêu?

§3. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. Phương trình bậc nhất hai ẩn

Phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng $ax+by=c$, trong đó a,b,c là các số thực đã cho và a,b không đồng thời bằng 0; x,y là ẩn số.

2. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn x,y có dạng $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$, trong đó cả hai phương trình đều là phương trình bậc nhất hai ẩn.

* Có hai cách giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn quen thuộc

a) *Phương pháp thế:* Từ một phương trình nào đó của hệ, biểu thị một ẩn qua ẩn kia rồi thế vào phương trình còn lại để được phương trình bậc nhất một ẩn.

b) *Phương pháp cộng:* Biến đổi hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình là hai số đối nhau rồi cộng từng vế hai phương trình lại để được phương trình bậc nhất một ẩn.

II. HỆ BA PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT BA ẨN

1. Phương trình bậc nhất ba ẩn

Phương trình bậc nhất ba ẩn có dạng $ax+by+cz=d$, trong đó a,b,c,d là các số thực đã cho và a,b,c không đồng thời bằng 0; x,y,z là ẩn số.

2. Hệ ba phương trình bậc nhất hai ẩn

a) Dạng tam giác của hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn là:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ \qquad\; b_2y+c_2z=d_2 \\ \qquad\qquad\;\; c_3z=d_3 \end{cases} \text{(1) hoặc } \begin{cases} a_1x \qquad\qquad\;\; =d_1 \\ a_2x+b_2y \qquad =d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases} \text{(2)}$$

Cách giải:

Từ phương trình cuối của hệ (1) tính được z, thế giá trị z vừa tìm được vào phương trình thứ hai để tính được y rồi thế cả y,z tìm được vào phương trình đầu tính được x.

Từ phương trình đầu của hệ (2) tính được x, thế giá trị x vừa tìm được vào phương trình thứ hai để tính được y rồi thế cả x,y tìm được vào phương trình thứ ba tính được z.

b) Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn x,y,z có dạng $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$, trong đó cả ba phương trình đều là phương trình bậc nhất ba ẩn.

Cách giải: (theo phương pháp Gau-xơ): Khử dần ẩn số để đưa về hệ phương trình dạng tam giác.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Giải và biểu diễn tập nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn

Phương pháp :

\+ Cho phương trình $ax+by=c\,(a^2+b^2>0)$;

\+ Giả sử $b\neq 0$, cho $x=x_0$ ta có: $y_0=\dfrac{c-ax_0}{b}$;

+ Tập nghiệm của phương trình là $\left(x_0;\dfrac{c-ax_0}{b}\right)$.

Bài tập. Giải phương trình $2x+3y=5$

Giải

Ta có: $2x+3y=5 \Leftrightarrow y=\dfrac{5-2x}{3}$. Cho $x=x_0$ ta được: $y_0=\dfrac{5-2x_0}{3}$

Vậy nghiệm của phương trình là: $\left(x_0;\dfrac{5-2x_0}{3}\right)$

Vấn đề 2. Giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn, ba ẩn đơn giản

Phương pháp : Theo phương pháp Gau-xơ

Khử dần ẩn số để đưa về hệ phương trình dạng tam giác.

Bài tập. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x-6y=-9 \\ 4x+y=14; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+3y+2z=8 \\ 2x+2y+z=6 \\ 3x+y+z=6\,. \end{cases}$

Giải

a) $\begin{cases} x-6y=-9 \\ 4x+y=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-6y=-9 \\ 25y=50 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-6y=-9 \\ y=2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương là $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+3y+2z=8 \\ 2x+2y+z=6 \\ 3x+y+z=6\,. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y+2z=8 \\ -4y-3z=-10 \\ -8y-5z=-18 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3y+2z=8 \\ -4y-3z=-10 \\ z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương là $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$

Vấn đề 3. Giải một số bài toán có nội dung thực tế bằng cách đưa về việc lập và giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn, ba ẩn.

Phương pháp :

Bước 1: Đặt ẩn số và xác định điều kiện của ẩn.

Bước 2: Từ yêu cầu đề bài xây dựng hệ phương trình. Tìm nghiệm của hệ phương trình đó.

Bước 3: Kiểm tra nghiệm tìm được với điều kiện và kết luận.

Bài tập 1. Hai bạn Vân và Lan đến cửa hàng mua trái cây. Bạn Vân mua 10 quả quýt, 7 quả cam với giá tiền là 17 800 đồng. Bạn Lan mua 12 quả quýt, 6 quả cam với giá tiền là 18 000 đồng. Hỏi giá tiền mỗi quả quýt và cam là bao nhiêu?

Giải

Gọi x là giá tiền mỗi quả quýt.

y là giá tiền mỗi quả cam.

Điều kiện: $x, y > 0$.

Theo đề bài ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 10x + 7y = 17\,800 \\ 12x + 6y = 18\,000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 800 \\ y = 1400 \end{cases}$$

Vậy giá mỗi quả quýt là 800 đồng và giá mỗi quả cam là 1 400 đồng,

Bài tập 2. Một cửa hàng bán áo sơ mi, quần âu nam và váy nữ. Ngày thứ nhất bán được 12 áo, 21 quần và 18 váy, doanh thu là 5 349 000 đồng. Ngày thứ hai bán được 16 áo, 24 quần và 12 váy, doanh thu là 5 600 000 đồng. Ngày thứ ba bán được 24 áo, 15 quần và 12 váy, doanh thu là 5 349 000 đồng. Hỏi giá bán mỗi áo, mỗi quần, mỗi váy là bao nhiêu?

Giải

Gọi x là giá bán mỗi áo.

y là giá giá bán mỗi cái quần.

z là giá bán mỗi váy.

Điều kiện: $x, y, z > 0$.

Theo đề bài ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 12x + 21y + 18z = 5\,349\,000 \\ 16x + 24y + 12z = 5\,600\,000 \\ 24x + 15y + 12z = 5\,259\,000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 98\,000 \\ y = 125\,000 \\ z = 86\,000 \end{cases}$$

Vậy giá bán mỗi áo là 98 000 đồng, giá bán mỗi quần là 125 000 đồng và giá bán mỗi váy là 86 000 đồng

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Giải phương trình $3x + y = 7$.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 9x + 4y = -6 \end{cases}$.

Bài 3. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 3x + 4y - 5z = 8 \\ \quad 6y + z = 9 \\ \qquad z = 21 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y + 3z = 1 \\ 2x + y + 3x = -1 \end{cases}$

Bài 4. Một đoàn xe gồm 13 xe tắc xi tải chở 36 tấn xi măng cho một công trình xây dựng. Đoàn xe chỉ gồm có hai loại: xe chở 3 tấn và xe chở 2,5 tấn. Tính số xe mỗi loại.

Bài 5. Ba máy trong một giờ sản xuất được 95 sản phẩm. Số sản phẩm máy III làm trong 2 giờ nhiều hơn số sản phẩm máy I và máy II làm trong 1giờ là 10 sản phẩm. Số sản phẩm máy I làm trong 8 giờ đúng bằng số sản phẩm máy II làm trong 7 giờ. Hỏi trong một giờ, mỗi máy sản xuất được bao nhiêu sản phẩm.

§1. BẤT ĐẲNG THỨC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. KHÁI NIỆM BẤT ĐẲNG THỨC

Các mệnh đề dạng: "$a > b$","$a < b$","$a \geq b$","$a \leq b$" được gọi là những bất đẳng thức.

II. TÍNH CHẤT CỦA BẤT ĐẲNG THỨC

1. $a > b$ và $b > c \Rightarrow a > c$.

2. $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c.$

3. ▪Nếu $c > 0$ thì $a > b \Leftrightarrow ac > bc;$

   ▪Nếu $c < 0$ thì $a > b \Leftrightarrow ac < bc.$

4. $a > b$ và $c > d \Rightarrow a + c > b + d$.

5. $a > b \geq 0$ và $c > d \geq 0 \Rightarrow ac > bd$.

6. Với $ab > 0$ ta có : $a > b \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}.$

7. Với $a, b \geq 0, n \in \mathbb{N}^* : a > b \Leftrightarrow a^{2n} > b^{2n}.$

8. Với a, b và $n \in \mathbb{N}^* : a > b \Leftrightarrow a^{2n+1} > b^{2n+1}.$

9. $a > b \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}.$

10. $a > b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}.$

III. BẤT ĐẲNG THỨC CÔ-SI

1) Bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm

Cho $a \geq 0$ và $b \geq 0,$ ta có : $a + b \geq 2\sqrt{ab}.$ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b.$

2) Bất đẳng thức Cô-si cho ba số không âm

Cho $a \geq 0, b \geq 0$ và $c \geq 0,$ ta có : $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}.$ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c.$

IV. BẤT ĐẲNG THỨC CÓ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

1. $|x| \geq 0; |x| \geq x; |x| \geq -x$.

2. Với $a > 0$, ta có:

- $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$.
- $|x| \ge a \Leftrightarrow x \ge a$ hoặc $x \le -a$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Chứng minh bất đẳng thức bằng cách dùng tính chất của bất đẳng thức hoặc dùng phép biến đổi tương đương

Phương pháp :

❖Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với một bất đẳng thức đã biết.
❖Sử dụng một bất đẳng thức đã biết, biến đổi để dẫn đến bất đẳng thức cần chứng minh.
❖Một số bất đẳng thức thường dùng:
+ $A^2 \ge 0$ + $A^2 + B^2 \ge 0$ + $A.B \ge 0$ với A, B ≥ 0. + $A^2 + B^2 \ge 2AB$
❖Một số hằng đẳng thức thường dùng:
$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$; $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

Bài tập 1. Cho $a, b \in \mathbb{R}$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $a^2 + b^2 \ge 2ab$ b) $(a+b)^2 \ge 4ab$

c) $2(a^2 + b^2) \ge (a+b)^2$ d) $2(a^4 + b^4) \ge (a^2 + b^2)^2$

Giải

a) $a^2 + b^2 \ge 2ab(1) \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \ge 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0$ (luôn đúng)

Vậy bất đẳng thức (1) được chứng minh.

b) $(a+b)^2 \ge 4ab(2) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab \ge 4ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \ge 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0$ (luôn đúng)

Vậy bất đẳng thức (2) được chứng minh.

c) $2(a^2 + b^2) \ge (a+b)^2 (3) \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 \ge a^2 + b^2 + 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0$ (luôn đúng)

Vậy bất đẳng thức (3) được chứng minh.

d) $2(a^4 + b^4) \ge (a^2 + b^2)^2 (4) \Leftrightarrow 2a^4 + 2b^4 \ge a^4 + b^4 + 2a^2b^2 \Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 \ge 0$ (luôn đúng)

Vậy bất đẳng thức (4) được chứng minh.

Bài tập 2. Cho $a,b,c \in \mathbb{R}$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$ b) $a^2 + b^2 + 1 \ge ab + a + b$

c) $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \ge 2(a + b + c)$ d) $a^2 + b^2 + c^2 \ge 2(ab + bc - ca)$

Giải

a) $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca\left(1\right) \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \ge 2ab + 2bc + 2ca$

$\Leftrightarrow \left(a^2 + b^2 - 2ab\right) + \left(b^2 + c^2 - 2bc\right) + \left(c^2 + a^2 - 2ca\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow \left(a - b\right)^2 + \left(b - c\right)^2 + \left(c - a\right)^2 \ge 0$ (luôn đúng)

Vậy bất đẳng thức (1) được chứng minh.

b) $a^2 + b^2 + 1 \ge ab + a + b\left(2\right) \Leftrightarrow 2\left(a^2 + b^2 + 1\right) \ge 2\left(ab + a + b\right)$

$\Leftrightarrow \left(a^2 + b^2 - 2ab\right) + \left(b^2 + 1 - 2b\right) + \left(a^2 + 1 - 2a\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow \left(a - b\right)^2 + \left(b - 1\right)^2 + \left(a - 1\right)^2 \ge 0$ (luôn đúng)

Vậy bất đẳng thức (2) được chứng minh.

c) $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \ge 2(a + b + c)\left(3\right) \Leftrightarrow \left(a^2 + 1 - 2a\right) + \left(b^2 + 1 - 2b\right) + \left(c^2 + 1 - 2c\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow \left(a - 1\right)^2 + \left(b - 1\right)^2 + \left(c - 1\right)^2 \ge 0$ (luôn đúng)

Vậy bất đẳng thức (3) được chứng minh.

d) $a^2 + b^2 + c^2 \ge 2(ab + bc - ca)\left(4\right) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ca \ge 0$

$\Leftrightarrow \left(a - b + c\right)^2 \ge 0$ (luôn đúng)

Vậy bất đẳng thức (4) được chứng minh.

Bài tập 3. Cho *a, b, c, d* $\in R$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 \ge 2ab$ (1). Áp dụng chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \ge 4abcd$ b) $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \ge 8abc$

Giải

a) Ta có: $a^4+b^4\ge 2a^2b^2; c^4+d^4\ge 2c^2d^2 \Rightarrow a^4+b^4+c^4+d^4\ge 2\left(a^2b^2+c^2d^2\right)$.

Mặc khác: $a^2b^2+c^2d^2\ge 2abcd \Rightarrow a^4+b^4+c^4+d^4\ge 2.2abcd=4abcd$ (đpcm)

b) Ta có: $a^2+1\ge 2a; b^2+1\ge 2b; c^2+1\ge 2c$.

Nhân vế theo vế của 3 bất đẳng thức ta suy ra điều phải chứng minh.

Vấn đề 2. Chứng minh bất đẳng thức bằng cách dùng bất đẳng thức Cô-si

Phương pháp :

❖ Bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm

Cho $a\ge 0$ và $b\ge 0,$ ta có : $a+b\ge 2\sqrt{ab}.$ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b.$

❖Bất đẳng thức Cô-si cho ba số không âm

Cho $a\ge 0, b\ge 0$ và $c\ge 0,$ ta có : $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}.$ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c.$

Bài tập 1. Cho $a,b>0.$ Chứng minh:

a) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\ge 2.$ Đẳng thức xảy ra khi nào ?

b) $\left(a+b\right)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\ge 4.$ Đẳng thức xảy ra khi nào ?

c) $\left(a+b\right)\left(1+ab\right)\ge 4ab.$ Đẳng thức xảy ra khi nào ?

d) $\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}+\dfrac{ab}{c}\ge a+b+c$. Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Giải

a) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $\dfrac{a}{b},\dfrac{b}{a}$, ta có :

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\ge 2\sqrt{\dfrac{a}{b}.\dfrac{b}{a}} \Leftrightarrow \dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\ge 2$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{a}\Leftrightarrow a=b.$

b) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai cặp số dương a, b và $\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b}$ ta có :

❖ $a+b\ge 2\sqrt{ab} \quad (1)$

❖ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}}\ (2)$

Nhân (1), (2) vế theo vế ta được : $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 2\sqrt{ab}.2\sqrt{\frac{1}{ab}}$

$$\Leftrightarrow (a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4 \text{ (đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ \frac{1}{a}=\frac{1}{b} \end{cases} \Leftrightarrow a=b$

c) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số cặp số dương a, b và $1, ab$ ta có :

❖ $a+b\geq 2\sqrt{ab}\quad (1)$

❖ $1+ab\geq 2\sqrt{ab}\ (2)$

Nhân (1), (2) vế theo vế ta được :

$(a+b)(1+ab)\geq 2\sqrt{ab}.2\sqrt{ab}\Leftrightarrow (a+b)(1+ab)\geq 4ab$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ 1=ab \end{cases} \Leftrightarrow a=b=1$.

d) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có :

❖ $\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geq 2\sqrt{\frac{bc}{a}.\frac{ca}{b}}=2\sqrt{c^2}=2c\quad (1)$

❖ $\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\geq 2\sqrt{\frac{ca}{b}.\frac{ba}{c}}=2\sqrt{a^2}=2a\quad (2)$

❖ $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\geq 2\sqrt{\frac{ab}{c}.\frac{bc}{a}}=2\sqrt{b^2}=2b\ (3)$

Cộng (1), (2), (3) vế theo vế ta được :

$2\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)\geq 2(a+b+c)\Leftrightarrow \frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\geq a+b+c$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{bc}{a} = \dfrac{ca}{b} \\ \dfrac{ca}{b} = \dfrac{ab}{c} \\ \dfrac{ab}{c} = \dfrac{bc}{a} \end{cases} \Leftrightarrow a^2 = b^2 = c^2 \Leftrightarrow a = b = c$.

Bài tập 2. Cho Cho $a, b > 0$. Chứng minh: $(a+b)^2 + \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)^2 \geq 8.$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có :

$a + b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab$ (1)

$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \geq 2\sqrt{\dfrac{1}{ab}} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)^2 \geq \dfrac{4}{ab}$ (2)

Cộng (1), (2) vế theo vế ta được :

$(a+b)^2 + \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)^2 \geq 4ab + \dfrac{4}{ab}$ (3)

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số 4ab và $\dfrac{4}{ab}$, ta có :

$4ab + \dfrac{4}{ab} \geq 2\sqrt{4ab.\dfrac{4}{ab}} = 8$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow (a+b)^2 + \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)^2 \geq 8.$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = 1$.

Vấn đề 3. Tìm giá trị lớn nhất(GTLN) và giá trị nhỏ nhất(GTNN) của hàm số

Phương pháp :

❖ Số M được gọi là GTLN của f(x) trên D nếu:

$\forall x \in D: f(x) \leq M$ và $\exists x_0 \in D : f(x_0) = M$.

❖ Số m được gọi là GTNN của f(x) trên D nếu:

$\forall x \in D: f(x) \geq m$ và $\exists x_0 \in D: f(x_0) = m$

❖+ Nếu x, y > 0 có S = x + y không đổi thì P = xy lớn nhất ⇔ x = y.
+ Nếu x, y > 0 có P = x y không đổi thì S = x + y nhỏ nhất ⇔ x = y.

❖+ x, y > 0, ta có : $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$

+ x, y, z > 0, ta có : $xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$

Bài tập 1. Cho $x > 2$. Tìm GTNN của biểu thức $f(x) = x + \frac{3}{x-2}$.

Giải

❖ $f(x) = x + \frac{3}{x-2} = x - 2 + \frac{3}{x-2} + 2$

❖ Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $x-2, \frac{3}{x-2}$, ta có :

$$f(x) = x + \frac{3}{x-2} = x - 2 + \frac{3}{x-2} + 2 \geq 2\sqrt{(x-2)\frac{3}{x-2}} + 2 = 2\sqrt{3} + 2$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x - 2 = \frac{3}{x-2} \Leftrightarrow (x-2)^2 = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2+\sqrt{3} \\ x = 2-\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 2+\sqrt{3}$ (do x > 2)

Vậy $f(x) = x + \frac{3}{x-2}$ đạt GTNN bằng $2\sqrt{3}+2$ khi $x = 2+\sqrt{3}$.

Bài tập 2. Cho $x > 0$. Tìm GTNN của biểu thức $y = \frac{x^2+3x+9}{x}$.

Giải

❖ $y = \frac{x^2+3x+9}{x} = x + 3 + \frac{9}{x}$

❖ Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $x, \frac{9}{x}$, ta có :

$$y = \frac{x^2+3x+9}{x} = x + \frac{9}{x} + 3 \geq 2\sqrt{x.\frac{9}{x}} + 3 = 9.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{9}{x} \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 3$ (do x > 0)

Vậy $y = \frac{x^2 + 3x + 9}{x}$ đạt GTNN bằng 9 khi $x = 3$.

Bài tập 3. Cho y = x(6 – x) , với 0 ≤ x ≤ 6 . Tìm GTLN của y.

Giải

❖Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số không âm x và 6 – x (vì 0 ≤ x ≤ 6), ta có :

$y = x(6-x) \le \left(\frac{x+6-x}{2}\right)^2 = 9.$

Đẳng thức xảy ra ⇔ x = 6 – x ⇔ x = 3

Vậy y đạt GTLN bằng 9 khi x = 3.

Bài tập 4. Cho y = (6x + 3)(5 – 2x) , $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{5}{2}$. Tìm GTLN của y.

Giải

❖ y = 3(2x + 1)(5 – 2x).

❖Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số không âm 2x + 1 , 5 – 2x , $\left(-\frac{1}{2} \le x \le \frac{5}{2}\right)$, ta có :

y = 3(2x + 1)(5 – 2x) $\le 3\left(\frac{2x+1+5-2x}{2}\right)^2 = 27$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 2x + 1 = 5 - 2x \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy y đạt GTLN bằng 27 khi x = 1.

Bài tập 5. Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = \sqrt{x+3} + \sqrt{6-x}$.

Giải

❖ y xác định khi $\begin{cases} x + 3 \ge 0 \\ 6 - x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \le x \le 6$ nên TXĐ $D = [-3; 6]$

❖ Ta có $y^2 = 9 + 2\sqrt{(x+3)(6-x)}$

❖ Ta có : $y^2 \ge 9 \Rightarrow y \ge 3$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = -3$ hoặc $x = 6$.

Vậy y đạt GTNN bằng 3 khi $x = -3$ hoặc $x = 6$

❖ $y^2 = 9 + 2\sqrt{(x+3)(6-x)} \le 9 + (x+3) + (6-x) = 18 \Rightarrow y \le 3\sqrt{2}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x+3 = 6-x \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Vậy y đạt GTLN bằng $3\sqrt{2}$ khi $x = \dfrac{3}{2}$.

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Cho *a, b, c* $\in R$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $\dfrac{a^3+b^3}{2} \ge \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$; với *a, b* ≥ 0

b) $a^4 + b^4 \ge a^3b + ab^3$

c) $a^4 + 3 \ge 4a$

d) $a^3 + b^3 + c^3 \ge 3abc$, với *a, b, c* > 0.

Bài 2. Cho *a, b, c* ≥ 0. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $(a+b)(b+c)(c+a) \ge 8abc$

b) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \ge 9abc$

c) $(1+a)(1+b)(1+c) \ge \left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3$

d) $a^2(1+b^2) + b^2(1+c^2) + c^2(1+a^2) \ge 6abc$

Bài 3. Cho a, b, c là ba số dương. Chứng minh :

a) $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) \ge 9$

b) $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \ge \dfrac{3}{2}$.

Bài 4. Áp dụng BĐT Cô–si để tìm GTNN của các biểu thức sau:

a) $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{18}{x};\ x > 0$.

b) $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x-1};\ x > 1$.

c) $y = \dfrac{3x}{2} + \dfrac{1}{x+1};\ x > -1$.

d) $y = \dfrac{x}{3} + \dfrac{5}{2x-1};\ x > \dfrac{1}{2}$

Bài 5. Áp dụng BĐT Cô–si để tìm GTLN của các biểu thức sau:

a) $y = (x+3)(5-x);\ -3 \le x \le 5$

b) $y = x(9-x);\ 0 \le x \le 9$

c) $y = (x+3)(5-2x);\ -3 \le x \le \dfrac{5}{2}$

d) $y = (2x+5)(5-x);\ -\dfrac{5}{2} \le x \le 5$

Bài 6. Cho $y = \dfrac{x^3+1}{x^2}$, x > 0 . Định x để y đạt GTNN.

Bài 7. Tìm GTLN, GTNN của các hàm số

a) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$

b) $y = 2\sqrt{x-4} + \sqrt{8-x}$

c) $y = \sqrt{7-2x} + \sqrt{3x+4}$

d) $y = 3\sqrt{2x+1} + 2\sqrt{8-3x}$

§2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Khái niệm bất phương trình một ẩn

Bất phương trình ẩn x là mệnh đề chứa biến có dạng

$$f(x) < g(x) \text{ hoặc } f(x) \le g(x) \ (*)$$

trong đó f(x) và g(x) là những biểu thức của x. Người ta cũng gọi f(x) và g(x) tương ứng là vế trái và vế phải của bất phương trình (*). Số thực x_0 sao cho $f(x_0) < g(x_0)$ hoặc $f(x_0) \le g(x_0)$ là mệnh đề đúng được gọi là nghiệm của bất phương trình (*).

Giải bất phương trình là tìm tập nghiệm của nó.

Hệ bất phương trình ẩn x gồm một số bất phương trình ẩn x mà ta phải tìm nghiệm chung của chúng.

II. Điều kiện của bất phương trình

Điều kiện của một bất phương trình là điều kiện của ẩn số x để các vế của bất phương trình có nghĩa.

III. Hai bất phương trình tương đương

Hai bất phương trình (hệ bất phương trình) được gọi là tương đương đương với nhau khi chúng có cùng tập nghiệm.

IV. Các phép biến đổi bất phương trình

Kí hiệu D là tập các số thực thỏa mãn điều kiện xác định của bất phương trình $P(x) < Q(x)$.

1) Phép cộng : $P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x) + f(x) < Q(x) + f(x)$.

2) Phép nhân :

❖Nếu $\forall x \in D, f(x) > 0$ thì $P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x).f(x) < Q(x).f(x)$.

❖Nếu $\forall x \in D, f(x) < 0$ thì $P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x).f(x) > Q(x).f(x)$.

3) Phép bình phương :

Nếu $\forall x \in D, P(x) \ge 0$ và $Q(x) \ge 0$ thì $P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P^2(x) < Q^2(x)$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Tìm điều kiện xác định của một bất phương trình

Phương pháp :

Cần chú ý các điều kiện sau :

❖ $\sqrt{A}$ có nghĩa $\Leftrightarrow A \geq 0$;

❖ $\dfrac{A}{B}$ có nghĩa $\Leftrightarrow B \neq 0$;

❖ $\dfrac{A}{\sqrt{B}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow B > 0$.

Bài tập 1. Tìm điều kiện xác định của bất phương trình sau :

a) $\sqrt{2x-4} \geq \sqrt{3-x}+1$ b) $\dfrac{2x+1}{x-1} < \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 1$

Giải

a) Điều kiện : $\begin{cases} 2x-4 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3.$

b) Điều kiện : $\begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x > 0 \end{cases}.$

Bài tập 2. Tìm điều kiện xác định của bất phương trình sau :

a) $2x+\sqrt{x-6} \geq 1 - \dfrac{2}{x^2-15}$ b) $\dfrac{\sqrt{x-2}}{3x-3} > \dfrac{1}{\sqrt{2x-6}} - 1$

Giải

a) Điều kiện : $\begin{cases} x-6 \geq 0 \\ x^2-25 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ x \neq \pm 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 6.$

b) Điều kiện : $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 3x-3 \neq 0 \\ 2x-6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq 1 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$

Vấn đề 2. Xét sự tương đương hai bất phương trình

Phương pháp :

Ta so sánh hai tập nghiệm của hai bất phương trình và dựa vào định nghĩa để xét sự tương đương của chúng.

Bài tập 1. Hai bất phương trình sau có tương đương không ? Vì sao ?

a) $(x + 7)(2x + 1) > (x + 7)^2$ (1) và $2x + 1 > x + 7$ (2).

b) $\dfrac{3x-5}{x^2+1} > 7$ (3) và $3x - 5 > 7(x^2 + 1)$ (4).

Giải

a) Bất phương trình (1) và (2) là không tương đương vì x = -8 là một nghiệm của (1) nhưng x = -8 không là nghiệm của bất phương trình (2).

b) Hai bất phương trình (3) và (4) là tương đương vì từ bất phương trình (3) ta nhân hai vế với biểu thức $x^2 + 1 > 0$ ta được bất phương trình (4).

Bài tập 2. Hai bất phương trình sau có tương đương không ? Vì sao ?

a) $\sqrt{x-2} \le 0\,(5)$ và $x-2 \le 0\,(6)$.

b) $x^2 + x + 1 < 0\,(7)$ và $x^2 - x + 1 < 0\,(8)$.

Giải

a) $(5) \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow S_1=\{2\}$

$(6) \Leftrightarrow x \le 2 \Rightarrow S_2 = (-\infty;2] \ne S_1$. Vậy (5) và (6) không tương đương với nhau.

b) $(7) \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} < 0 \Rightarrow (7)$ vô nghiệm $\Rightarrow S_1 = \varnothing.$

$(8) \Leftrightarrow \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} < 0 \Rightarrow (8)$ vô nghiệm $\Rightarrow S_2 = \varnothing = S_1.$

Vậy (7) và (8) tương đương nhau.

Vấn đề 3. Giải bất phương trình, hệ bất phương trình

Phương pháp :

❖ Đặt điều kiện cho bất phương trình, hệ bất phương trình;

❖Biến đổi bất phương trình, hệ bất phương trình đã cho về bất phương trình, hệ bất phương trình đơn giản hơn;

❖Giải bất phương trình, hệ bất phương trình đó;

❖So sánh với điều kiện và kết luận tập nghiệm.

Lưu ý : Có thể dựa vào điều kiện của bất phương trình để nhận xét về sự vô nghiệm, vô số nghiệm của bất phương trình.

Bài tập 1. Giải các bất phương trình sau:

a) $\sqrt{x-1} \geq \sqrt{1-x}\ (1)$

b) $\dfrac{x-2}{\sqrt{x-4}} \leq \dfrac{4}{\sqrt{x-4}}\ (2)$

Giải

a) ĐK : $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.

Thay x = 1 vào (1) ta được $\sqrt{1-1} \geq \sqrt{1-1}$ (đúng) nên x = 1 là nghiệm của (1).

b) ĐK : x > 4.

$(2) \Rightarrow x-2 \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 6$. Kết hợp với điều kiện x > 4 ta được $4 < x \leq 6$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình (2) là $S = (4;6]$.

Bài tập 2. Giải các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} 8x-5 > \dfrac{15x-8}{2} \\ 2(2x-3) > 5x - \dfrac{3}{4} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{4x-5}{7} < x+3 \\ \dfrac{3x+8}{4} \geq 2x-5 \end{cases}$

Giải

a) $\begin{cases} 8x-5 > \dfrac{15x-8}{2} \\ 2(2x-3) > 5x - \dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x-10 > 15x-8 \\ 16x-24 > 20x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ 4x < -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < -\dfrac{21}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing$

Vậy hệ bất phương trình đã cho vô nghiệm ($S = \varnothing$).

b) $\begin{cases} \dfrac{4x-5}{7} < x+3 \\ \dfrac{3x+8}{4} \geq 2x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-5 < 7x+21 \\ 3x+8 \geq 8x-20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x > -26 \\ 5x \leq 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{26}{3} \\ x \leq \dfrac{28}{5} \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{26}{3} < x \leq \dfrac{28}{5}$.

Vậy hệ bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left(-\dfrac{26}{3}; \dfrac{28}{5}\right]$.

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Tìm điều kiện xác định của các bất phương trình sau :

a) $\sqrt{x} \le \sqrt{-x}$

b) $x+\sqrt{x-4} < 1+\sqrt{x-4}$

c) $\dfrac{x+3}{1-x^2} \ge 1+\dfrac{1}{(x-2)^2}$

d) $\sqrt{2-x}+x < 2+\sqrt{x}$

e) $\dfrac{\sqrt{x-3}}{x+1} \ge \sqrt{16-2x}$

f) $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{1}{(x-3)(x+4)} \le \dfrac{3}{\sqrt{6-x}}$.

Bài 2. Các cặp bất phương trình sau có tương đương không ? Vì sao ?

a) $\dfrac{3}{1-x} > \dfrac{7}{2x+3}$ và $3(2x+3) > 7(1-x)$

b) $x+\dfrac{3}{3-x} < 7+\dfrac{3}{3-x}$ và $x<7$

c) $x^2-2x+7 \le 0$ và $x^2+1<0$

d) $\sqrt{x-1} \ge x$ và $(x+1)\sqrt{x-1} \ge x(x+1)$

Bài 3. Chứng minh các bất phương trình sau vô nghiệm :

a) $\sqrt{x-6}+\sqrt{3-x} \ge -4$

b) $(x-3)\sqrt{-x-10} > (x^4+1)\sqrt{x^2-16}$

c) $\sqrt{x^2+1}+\dfrac{4}{\sqrt{x^2+1}} < 4$

d) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-x+1} < 2\sqrt[4]{x^3+1}$.

Bài 4. Giải các bất phương trình :

a) $\sqrt{x-1} < 3+\sqrt{x-1}$

b) $\dfrac{(10-x)\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-4}} > 4$

c) $(x+5)\sqrt{(x-3)(x^2-10x+25)} > 0$

d) $\sqrt{x+2} \le |x|$.

Bài 5. Giải các hệ bất phương trình sau :

a) $\begin{cases} \dfrac{2x-3}{4} < \dfrac{3x+1}{5} \\ 3x+\dfrac{5}{2} < 8-\dfrac{x}{3} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{4}-\dfrac{3(x-2)}{8}-1 > \dfrac{5-3x}{2} \\ 3-\dfrac{4x-1}{18} > \dfrac{x-1}{12}-\dfrac{4-5x}{9} \end{cases}$

Bài 6. Tìm các nghiệm nguyên của các hệ bất phương trình sau :

a) $\begin{cases} 6x+\dfrac{5}{7} > 4x+7 \\ \dfrac{8x+3}{2} < 2x+25 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 15x-2 > 2x+\dfrac{1}{3} \\ 2(x-4) < \dfrac{3x-14}{2} \end{cases}$.

§3. DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Nhị thức bậc nhất

Nhị thức bậc nhất đối với x là biểu thức có dạng $f\left(x\right)=ax+b$, trong đó a, b là hai số thực đã cho, với $a\neq 0$.

II. Dấu của nhị thức bậc nhất

Cho nhị thức bậc nhất $f\left(x\right)=ax+b\left(a\neq 0\right)$

- ❖ $f\left(x\right)$ cùng dấu với hệ số a $\Leftrightarrow x\in\left(-\dfrac{b}{a};+\infty\right)$.
- ❖ $f\left(x\right)$ trái dấu với hệ số a $\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\dfrac{b}{a}\right)$.

Bảng xét dấu:

x		$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
ax + b	$a>0$	-	0	+
	$a<0$	+	0	-

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Xét dấu biểu thức

Phương pháp :

❖ Biến đổi biểu thức *f(x)* về tích, thương các nhị thức

❖ Tìm các nghiệm của các nhị thức có trong biểu thức *f(x)*

❖ Lập bảng xét dấu các nhị thức và suy ra dấu của biểu thức *f(x)*.

Bài tập 1. Xét dấu các nhị thức :

a) $f\left(x\right)=3x-5$ b) $f\left(x\right)=-5x-6$ c) $f\left(x\right)=\left(m^2+1\right)x-2m$

Giải

a) ❖Ta có : $3x-5=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$.

❖Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
f(x)		-	0	+	

❖Vậy : $f\left(x\right)>0 \Leftrightarrow x\in\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$; $f\left(x\right)<0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\frac{5}{3}\right)$

b) Ta có : $-5x-6=0 \Leftrightarrow x=-\frac{6}{5}$.

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		$-\frac{6}{5}$		$+\infty$
f(x)		+	0	-	

Vậy : $f\left(x\right)>0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{6}{5}\right)$;

$f\left(x\right)<0 \Leftrightarrow x\in\left(-\frac{6}{5};+\infty\right)$.

c) Ta có : $\left(m^2+1\right)x-2m=0 \Leftrightarrow x=\frac{2m}{m^2+1}$

Hệ số $a=m^2+1>0, \forall m\in\mathbb{R}$.

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		$\frac{2m}{m^2+1}$		$+\infty$
f(x)		-	0	+	

Vậy : $f\left(x\right)<0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\frac{2m}{m^2+1}\right)$;

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(\dfrac{2m}{m^2+1};+\infty\right)$.

Bài tập 2. Xét dấu các biểu thức sau :

a) $f(x) = (-x-1)(3x+4)$ b) $f(x) = \left(1 - \dfrac{2}{3x-4}\right)(9-2x)$.

Giải

a) Ta có : $-x-1=0 \Leftrightarrow x=-1$; $3x+4=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-3}{4}$.

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		-1		$-\dfrac{3}{4}$		$+\infty$
- x -1		+	0	-	|	-	
3x + 4		-	|	-	0	+	
f(x)		-	0	+	0	-	

Vậy : $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-1;-\dfrac{3}{4}\right)$;

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-1) \cup \left(-\dfrac{3}{4};+\infty\right)$.

b) $f(x) = \left(1 - \dfrac{2}{3x-4}\right)(9-2x) = \dfrac{(3x-6)(9-2x)}{3x-4}$

Ta có : $3x-6=0 \Leftrightarrow x=2$;

$9-2x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{9}{2}$;

$3x-4=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{4}{3}$.

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		2		$\frac{9}{2}$		$+\infty$
$3x - 6$		-	|	-	0	+	|	+	
$9 - 2x$		+	|	+	|	+	0	-	
$3x - 4$		-	0	+	|	+	|	+	
$f(x)$		+	||	-	0	+	0	-	

Vậy : $f\left(x\right) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty;\frac{4}{3}\right) \cup \left(2;\frac{9}{2}\right)$;

$f\left(x\right) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{4}{3};2\right) \cup \left(\frac{9}{2};+\infty\right)$.

Vấn đề 2. Giải bất phương trình

Phương pháp :

❖ Chuyển hết các số hạng sang cùng một vế và đưa chúng về tích, thương các nhị thức, gọi vế đó là vế trái (VT) của bất phương trình.

❖ Lập bảng xét dấu vế trái của bất phương trình.

❖ Dựa vào bảng xét dấu kết luận tập nghiệm của bất phương trình.

Bài tập 1. Giải các bất phương trình sau :

a) $(x+1)(x-1)(3x-6) > 0$ (1)

b) $(2x-7)(4-5x) \le 0$ (2)

Giải

a) ❖ Ta có : $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$;

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$;

$3x-6=0 \Leftrightarrow x=2$.

❖ Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$x+1$		-	0	+	|	+	|	+	
$x-1$		-	|	-	0	+	|	+	
$3x-6$		-	|	-	|	-	0	+	
$VT(1)$		-	0	+	0	-	0	+	

❖ Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-1;1)\cup(2;+\infty)$.

b) Ta có : $2x-7=0 \Leftrightarrow x=\frac{7}{2}$;

$4-5x=0 \Leftrightarrow x=\frac{4}{5}$.

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		$\frac{4}{5}$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$4-5x$		+	0	-	|	-	
$2x-7$		-	|	-	0	+	
$VT(2)$		-	0	+	0	-	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-\infty;\frac{4}{5}\right]\cup\left[\frac{7}{2};+\infty\right)$.

Bài tập 2. Giải các bất phương trình sau :

a) $\frac{2x-5}{2-x}\ge -1$ b) $\frac{2}{1-x}\le\frac{3}{2x+1}$

Giải

a) $\frac{2x-5}{2-x}\ge -1 \Leftrightarrow \frac{2x-5}{2-x}+1\ge 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{2-x}\ge 0$ (3)

Ta có : $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$;

$2-x=0 \Leftrightarrow x=2$.

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x-3$		-	|	-	0	+	
$2-x$		+	0	-	0	-	
VT(3)		-	||	+	0	-	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(2;3]$.

b) $\dfrac{2}{1-x}\le\dfrac{3}{2x+1}\Leftrightarrow\dfrac{2}{1-x}-\dfrac{3}{2x+1}\le 0\Leftrightarrow\dfrac{7x-1}{(1-x)(2x+1)}\le 0$ (4)

Ta có : $7x-1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{7}$;

$1-x=0\Leftrightarrow x=1$;

$2x+1=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		$\dfrac{1}{7}$		1		$+\infty$
$7x-1$		-	|	-	0	+	|	+	
$1-x$		+	|	+	|	+	0	-	
$2x+1$		-	0	+	|	+	|	+	
VT(4)		+	||	-	0	+	||	-	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{7}\right]\cup(1;+\infty)$.

Vấn đề 3. Bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

Phương pháp :

1) Với a > 0, ta có :

❖ $|f(x)|\le a\Leftrightarrow -a\le f(x)\le a$

❖ $|f(x)|\ge a\Leftrightarrow f(x)\ge a$ hoặc $f(x)\le -a$.

2) Áp dụng công thức :

❖ $\left|f(x)\right| \le g(x) \Leftrightarrow -g(x) \le f(x) \le g(x)$

❖ $\left|f(x)\right| \ge g(x) \Leftrightarrow f(x) \ge g(x)$ hoặc $f(x) \le -g(x)$.

Bài tập 1. Giải các bất phương trình sau :

a) $|2x-8| \le 7$ b) $|3x-2| > 7$

Giải

a) $|2x-8| \le 7 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-8 \le 7 \\ 2x-8 \ge -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{15}{2} \\ x \ge \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{15}{2}$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S = \left[\dfrac{1}{2}; \dfrac{15}{2}\right]$.

b) $|3x-2| > 7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-2 > 7 \\ 3x-2 < -7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < -\dfrac{5}{3} \end{array}\right.$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S = \left(-\infty; -\dfrac{5}{3}\right) \cup (3; +\infty)$.

Bài tập 2. Giải các bất phương trình sau :

a) $|2x+1| \le x$ b) $|x-2| > x+1$

Giải

a) $|2x+1| \le x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \le x \\ 2x+1 \ge -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -1 \\ x \ge -\dfrac{1}{3} \end{cases}$ (vô lí)

Vậy bất phương trình vô nghiệm.

b) $|x-2| > x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2 > x+1 \\ x-2 < -x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 > 1 \\ 2x < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{2}$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S = \left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right)$.

Chú ý : Ta có thể giải các bất phương trình trên bằng cách sử dụng định nghĩa để khử dấu giá trị tuyệt đối , $|A| = \begin{cases} A, A \geq 0 \\ -A, A < 0 \end{cases}$.

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Xét dấu các biểu thức sau :

a) $f(x) = (-2x+1)(4x-3)(x-3)$ b) $f(x) = \dfrac{1}{2x-5} + \dfrac{4}{8-3x}$

Bài 2. Giải các bất phương trình sau:

a) $(2x+1)(x-1) > 0$ b) $(-2x-7)(4-5x) \geq 0$

c) $\dfrac{(2x-5)(x+2)}{-4x+3} > 0$ d) $\dfrac{2}{x-1} \leq \dfrac{5}{2x-1}$.

Bài 3. Giải các bất phương trình sau:

a) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} > \dfrac{1}{x-2}$ b) $\dfrac{4x-3}{x-2} \geq 7 - \dfrac{3x-4}{x+3}$ c) $\dfrac{x^3 - 2x^2 + 4x}{x^2 - x - 12} \leq 0$.

Bài 4. Giải các bất phương trình sau:

a) $|5x-12| < 3$ b) $|3x+15| \geq 3$

c) $|2x+1| \leq 4 - x$ d) $|2x-5| \leq \dfrac{x+1}{2}$.

§4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

1. Định nghĩa :

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng tổng quát là $ax+by<c$ hoặc $ax+by\le c$ hoặc $ax+by>c$ hoặc $ax+by\ge c$ (*), trong đó a, b, c là các số thực đã cho và a, b không đồng thời bằng 0 còn x, y là các ẩn số.

Trong mặt phẳng tọa độ 0xy, tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm của bất phương trình (*) được gọi là miền nghiệm của nó.

Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y gồm một số bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y mà ta phải tìm miền nghiệm chung của chúng.

2. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình $ax+by\le c$ (1), trong đó a, b là hai số không đồng thời bằng 0 :

Bước 1 : Trên mặt phẳng tọa độ 0xy, vẽ đường thẳng $\Delta: ax+by=c$.

Bước 2 : Lấy một điểm $M_0\left(x_0;y_0\right)\notin\Delta$ (ta thường lấy gốc tọa độ 0).

Bước 3 : Tính ax_0+by_0 và so sánh với c.

Bước 4 : Kết luận :

❖ Nếu $ax_0+by_0<c$ thì nửa mặt phẳng bờ là Δ ***chứa*** điểm M_0 là miền nghiệm của $ax+by\le c$

❖ Nếu $ax_0+by_0>c$ thì nửa mặt phẳng bờ là Δ ***không chứa*** điểm M_0 là miền nghiệm của $ax+by\le c$

Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn $\begin{cases} ax+by\le c \\ a'x+b'y<c' \end{cases}$.

❖ Vẽ các đường thẳng $\Delta: ax+by=c$ và $\Delta': a'x+b'y=c'$.

❖ Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình và tìm giao của chúng.

II. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=ax+by$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các biểu thức dạng $F=ax+by$, trong đó (x; y) nghiệm đúng một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn đã cho.

Vẽ miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho, đó thường là một miền đa giác. Tính giá trị của F ứng với (x;y) là tọa độ các đỉnh của miền đa giác này rồi so sánh các kết quả. Từ đó suy ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Xác định miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Phương pháp :

❖ Xem phần kiến thức cần nhớ

❖ Chú ý : Miền nghiệm của bất phương trình $ax+by<c$ là miền nghiệm của bất phương trình $ax+by\le c$ bỏ đi bờ $\Delta: ax+by=c$.

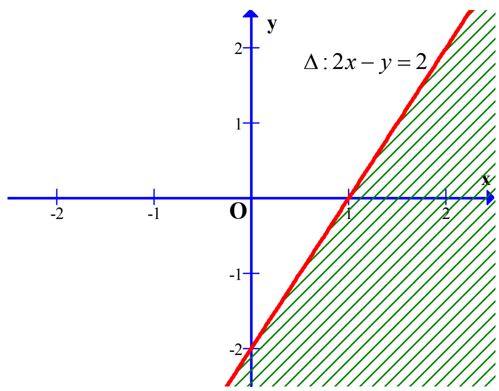
Bài tập 1. Xác định miền nghiệm của bất phương trình $2x-y\le 2$.

Giải

❖ Vẽ đường thẳng $\Delta: 2x-y=2$.

❖ Lấy điểm $O(0;0)\notin\Delta$. Ta có : $2.0-0<2$.

❖ Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng chứa gốc tọa độ 0 (kể cả bờ $\Delta: 2x-y=2$). Đó là ***miền không bị gạch chéo***.



Bài tập 2. Xác định miền nghiệm của bất phương trình $x+y>4-x$.

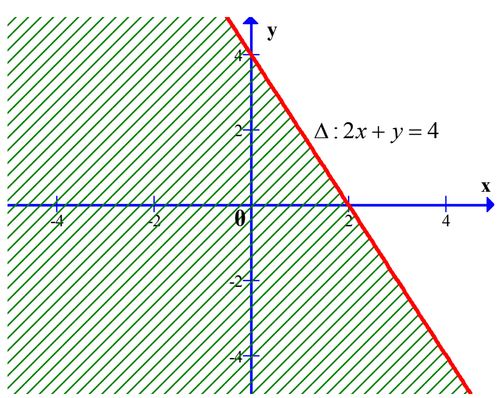
Giải

Ta có : $x+y>4-x \Leftrightarrow 2x+y>4$

❖ Vẽ đường thẳng $\Delta: 2x+y=4$.

❖ Lấy điểm $O(0;0)\notin\Delta$. Ta có : $2.0+0<4$.

❖ Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng không chứa gốc tọa độ 0 (không kể bờ $\Delta: 2x+y=4$). Đó là ***miền không bị gạch chéo***.



Vấn đề 2. Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Phương pháp :

❖ Xác định miền nghiệm của mỗi bất phương trình trong hệ và *gạch bỏ* phần còn lại.

❖ Sau khi đã xác định hết tất cả các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ thì miền còn lại *không bị gạch chính là miền nghiệm* của hệ.

Bài tập. Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x+y\le 3 \\ 3x-y\ge -3 \\ x-3y\le 3 \end{cases}$.

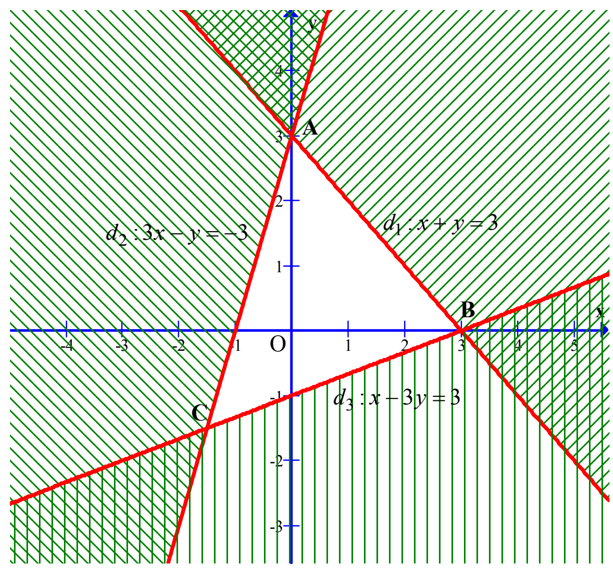
Giải

❖ Vẽ các đường thẳng :

$d_1: x+y=3$;

$d_2: 3x-y=-3$;

$d_3: x-3y=3$.



❖ Ta có :

$d_1\cap d_2 = A(0;3)$;

$d_1\cap d_3 = B(3;0)$;

$d_2\cap d_3 = C\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$.

❖ Vậy miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền không bị gạch chéo (kể cả bờ tức các cạnh của tam giác ABC).

Vấn đề 3. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=ax+by$, với (x;y) nghiệm đúng của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn cho trước

Phương pháp :

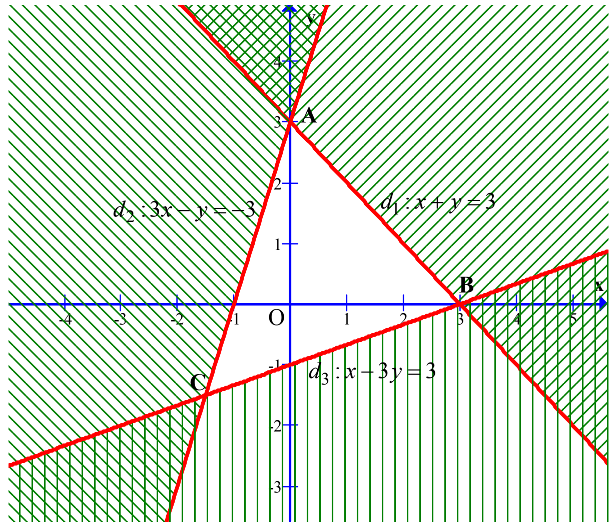
❖ Tìm miền nghiệm của hệ bất phương trình, thường là một đa giác.

❖ Tính giá trị của F ứng với (x;y) là tọa độ các đỉnh của đa giác.

❖ Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của F lần lượt là số lớn nhất và số nhỏ nhất trong các giá trị tìm được.

Bài tập. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $F = 25x - 40y + 5$ với (x;y) là nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + y \le 3 \\ 3x - y \ge -3 \\ x - 3y \le 3 \end{cases}$.

Giải



❖ Miền nghiệm của hệ là miền không bị gạch chéo (kể cả các cạnh của tam giác ABC)

❖ Tại $A(0;3)$, $F = 25.0 - 40.3 + 5 = -115$;

Tại $B(3;0), F = 25.3 - 40.0 + 5 = 80$;

Tại $C\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$

$$F = 25\left(-\frac{3}{2}\right) - 40\left(-\frac{3}{2}\right) + 5 = \frac{55}{2}.$$

❖ Vậy GTLN của F là 80 đạt được khi x = 3, y = 0.

GTNN của F là -115 đạt được khi x = 0, y = 3.

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Tìm miền nghiệm của các bất phương trình :

a) $2x + 5 \ge 2y - 8$ b) $x - 8y < 4x - 6$

Bài 2. Tìm miền nghiệm của các hệ bất phương trình :

a) $\begin{cases} 3 - y < 0 \\ 2x - 3y + 1 > 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y \le 2 \\ 3x + y \ge 9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 1 \le 0 \\ -3x + 5 < 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + y \le 6 \\ x + y \le 4 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

Bài 3.

a) Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình :

$$(H)\begin{cases} x + y + 2 \le 0 \\ x - y - 1 \le 0 \\ 2x - y + 1 \ge 0 \end{cases}$$

b) Tìm x, y thỏa (H) sao cho $F = 2x + 3y - 4$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

§5. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Dấu của tam thức bậc hai

Cho $f(x) = ax^2 + bx + c\,(a \neq 0), \Delta = b^2 - 4ac$.

❖ Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a, $\forall x \in \mathbb{R}$.

❖ Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

❖ Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 (quy ước $x_1 < x_2$). Khi đó $f(x)$ cùng dấu với hệ số a khi $x < x_1$ hoặc $x > x_2$, trái dấu với hệ số a khi $x_1 < x < x_2$.

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		cùng dấu với a	0	trái dấu với a	0	cùng dấu với a	

2. Một số điều kiện tương đương

Nếu $ax^2 + bx + c$ là một tam thức bậc hai ($a \neq 0$) thì :

1) $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac \geq 0$;

2) $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0$;

3) $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \end{cases}$

4) $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm âm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \\ -\frac{b}{a} < 0 \end{cases}$

5) $ax^2 + bx + c > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0. \end{cases}$

6) $ax^2 + bx + c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0. \end{cases}$

7) $ax^2 + bx + c < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0. \end{cases}$

8) $ax^2 + bx + c \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \le 0. \end{cases}$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Xét dấu biểu thức

Phương pháp :

Áp dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai.

❖ Biến đổi biểu thức *f(x)* về tích, thương các nhị thức, tam thức bậc hai.

❖ Tìm các nghiệm của các nhị thức, tam thức có trong biểu thức *f(x)*.

❖ Lập bảng xét dấu các nhị thức, tam thức và suy ra dấu của biểu thức *f(x)*.

Bài tập 1. Xét dấu các tam thức bậc hai :

a) $f(x) = x^2 + x + 1$ b) $f(x) = x^2 - 4x + 4$ c) $f(x) = 4x^2 + x - 5$.

Giải

a) Ta có : $\Delta = 1^2 - 4.1.1 = -3 < 0$ mà a = 1 > 0 $\Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Ta có : $\Delta = 4^2 - 4.1.4 = 0 \Rightarrow f(x)$ có nghiệm kép x = 2 mà a = 1 > 0
$\Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

c) Ta có : $4x^2 + x - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\frac{5}{4} \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{4}$		1		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	0	+	

Vậy : $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{5}{4}\right) \cup (1; +\infty)$; $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{5}{4}; 1\right)$.

Bài tập 2. Xét dấu các biểu thức sau :

a) $f(x)=(x^2-9x+14)(-x^2+5x-4)$ b) $f(x)=\dfrac{(x-7)(x^2+x-2)}{2x^2-x+3}$.

Giải

a) Ta có : $x^2-9x+14=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=7 \end{array}\right.$;

$-x^2+5x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$ 1 2 4 7 $+\infty$
$x^2-9x+14$	+ | + 0 - | - 0 +
$-x^2+5x-4$	- 0 + | + 0 - | -
$f(x)$	- 0 + 0 - 0 + 0 -

Vậy : $f(x)>0 \Leftrightarrow x\in(1;2)\cup(4;7)$;

$f(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;1)\cup(2;4)\cup(7;+\infty)$.

b) Ta có : $x-7=0 \Leftrightarrow x=7$;

$x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$;

$2x^2-x+3=0$ (vô nghiệm).

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$ -2 1 7 $+\infty$
$x-7$	- | - | - 0 +
x^2+x-2	+ 0 - 0 + | +
$2x^2-x+3$	+ | + | + | +
$f(x)$	- 0 + 0 - 0 +

Vậy : $f(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-2;1)\cup(7;+\infty)$;

$f\left(x\right)<0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-2\right)\cup\left(1;7\right)$.

Vấn đề 2. Giải bất phương trình

Phương pháp :

❖ Chuyển hết các số hạng sang cùng một vế và đưa chúng về tích, thương các nhị thức, tam thức bậc hai, gọi vế đó là vế trái (VT) của bất phương trình.

❖ Lập bảng xét dấu vế trái của bất phương trình.

❖ Dựa vào bảng xét dấu kết luận tập nghiệm của bất phương trình.

Bài tập 1. Giải các bất phương trình :

a) $-x^2+6x-9>0$ (1) b) $-12x^2+3x+1<0$ (2).

Giải

a) Ta có : $-x^2+6x-9=0 \Leftrightarrow x=3$ (nghiệm kép)

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
VT(1)		-	0	-	

Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Ta có : $-12x^2+15x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{1}{4}\end{array}\right.$

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
VT(2)		-	0	+	0	-	

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)\cup\left(1;+\infty\right)$.

Bài tập 2. Giải các bất phương trình :

a) $(2x-8)(x^2-4x+3)\geq 0$ (3) b) $\frac{6x^2-7x-3}{3x^2-2x-5}\leq 1$

Giải

a) Ta có : $2x-8=0 \Leftrightarrow x=4$;

$$x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		1		3		4		$+\infty$
$2x-8$		-	|	-	|	-	0	+	
x^2-4x+3		+	0	-	0	+	|	+	
VT(3)		-	0	+	0	-	0	+	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=[1;3]\cup[4;+\infty)$.

b) $\dfrac{6x^2-7x-3}{3x^2-2x-5}\le 1 \Leftrightarrow \dfrac{6x^2-7x-3}{3x^2-2x-5}-1\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{3x^2-5x+2}{3x^2-2x-5}\le 0$ (4).

Ta có : $3x^2-5x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$;

$$3x^2-2x-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{5}{3} \end{array}\right..$$

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		-1		$\frac{2}{3}$		1		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$3x^2-5x+2$		+	|	+	0	-	0	+	|	+	
$3x^2-2x-5$		+	0	-	|	-	|	-	0	+	
VT(4)		+	||	-	0	+	0	-	||	+	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-1;\dfrac{2}{3}\right]\cup\left[1;\dfrac{5}{3}\right)$.

Bài tập 3. Giải hệ bất phương trình : $\begin{cases} 3x^2-10x+3\ge 0\,(1) \\ \dfrac{x-2}{5-x}\ge 0\,(2) \end{cases}$.

Giải

❖ Giải (1) :

Ta có : $3x^2-10x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Rightarrow 3x^2-10x+3\geq 0 \Leftrightarrow x\leq\dfrac{1}{3}$ hoặc $x\geq 3$

$\Rightarrow$ tập nghiệm của bất phương trình (1) là $S_1=\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right]\cup\left[3;+\infty\right)$.

❖ Giải (2) : $\dfrac{x-2}{5-x}\geq 0 \Leftrightarrow 2\leq x<5$

$\Rightarrow$ tập nghiệm của bất phương trình (2) là $S_2=\left[2;5\right)$.

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình là $S=S_1\cap S_2=\left[3;5\right)$.

Trong thực hành ta thường giải hệ trên bằng phép biến đổi tương đương như sau :

$$\begin{cases} 3x^2-10x+3\geq 0 \\ \dfrac{x-2}{5-x}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\leq\dfrac{1}{3} \\ x\geq 3 \end{array}\right. \\ 2\leq x<5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\leq\dfrac{1}{3} \\ 2\leq x<5 \end{cases} \\ \begin{cases} x\geq 3 \\ 2\leq x<5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in\varnothing \\ 3\leq x<5 \end{array}\right. \Leftrightarrow 3\leq x<5.$$

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình là $S=\left[3;5\right)$.

Vấn đề 3. Định m để $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ có dấu không đổi

Phương pháp :

❖ Áp dụng hệ quả của dấu tam thức (phần 2) với chú ý rằng khi a chứa tham số, ta phải xét trường hợp a = 0.

Bài tập 1. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau vô nghiệm

$$\left(m-2\right)x^2+2\left(2m-3\right)x+5m-6=0\left(1\right).$$

Giải

❖ Trường hợp $m-2=0\Leftrightarrow m=2$:

$\left(1\right)\Leftrightarrow 2x+4=0\Leftrightarrow x=-2$, phương trình (1) có nghiệm.

❖ Trường hợp $m-2\neq 0\Leftrightarrow m\neq 2$:

(1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 2 \\ \Delta'<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 2 \\ \left(2m-3\right)^2-\left(m-2\right)\left(5m-6\right)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 2 \\ -m^2+4m-3<0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ \left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m > 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m > 3 \end{array}\right..$$

Vậy phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m > 3 \end{array}\right.$.

Bài tập 2. Cho bất phương trình $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3 \geq 0$ (2).
Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình (2) vô nghiệm .

Giải

❖ Trường hợp $m+1=0 \Leftrightarrow m=-1$:

(2) $\Leftrightarrow 4x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{3}{2}$, bất phương trình (2) có nghiệm.

❖ Trường hợp $m \neq -1$:

(2) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m+1<0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ (m-1)^2 - (m+1)(3m-3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ -2m^2 - 2m + 4 < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ \left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m < -2.$$

Vậy bất phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow m < -2$.

Bài tập 3. Cho bất phương trình $m(m-1)x^2 + 2(m-1)x + 1 \geq 0$ (3).
Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình (3) nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

Giải

❖ Trường hợp $m(m-1)=0 \Leftrightarrow m=0$ hoặc $m=1$:

- Với $m=0$, (3) $\Leftrightarrow -2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{1}{2}$, (3) không nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.
- Với $m=1$, (3) $\Leftrightarrow 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, (3) nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

❖ Trường hợp $m(m-1) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$ và $m \neq 1$:

(3) nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m-1) > 0 \\ (m-1)^2 - m(m-1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m > 0 \\ -m+1 \leq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow m > 1. \\ m \ge 1 \end{cases}$$

Vậy $m \ge 1$, bất phương trình nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Xét dấu các biểu thức sau :

a) $2x^2 + 5x + 2$ b) $4x^2 - 3x - 1$ c) $-3x^2 + 5x + 1$

d) $f(x) = (3x^2 - 10x + 3)(4x - 5)$ e) $f(x) = \dfrac{10 - x}{5 + x^2} - \dfrac{1}{2}$

Bài 2. Giải bất phương trình :

a) $-2x^2 + 3x - 7 \ge 0$ b) $3x^2 - 4x + 4 \ge 0$ c) $x^2 - x - 6 \le 0$

d) $\dfrac{-3x^2 - x + 4}{x^2 + 3x + 5} > 0$ e) $\dfrac{4x^2 + 3x - 1}{x^2 + 5x + 7} > 0$ f) $\dfrac{5x^2 + 3x - 8}{x^2 - 7x + 6} < 0$.

Bài 3. Giải hệ bất phương trình :

a) $\begin{cases} x^2 - 9 \ge 0 \\ 4x^2 - x - 3 < 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \ge 0 \\ 2x^2 - x - 10 < 0 \end{cases}$ c) $-4 \le \dfrac{x^2 - 2x - 7}{x^2 + 1} \le 1$.

Bài 4. Tìm *m* để các phương trình sau có nghiệm

a) $(m-5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$ b) $(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m - 6 = 0$.

Bài 5. Tìm *m* để các phương trình sau vô nghiệm

a) $(3-m)x^2 - 2(m+3)x + m + 2 = 0$ b) $(1+m)x^2 - 2mx + 2m = 0$.

Bài 6. Tìm *m* để các bất phương trình sau vô nghiệm

a) $(m+2)x^2 - 2(m-1)x + 4 < 0$ b) $(m-3)x^2 + (m+2)x - 4 \ge 0$.

Bài 7. Tìm *m* để các bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi *x*

a) $2x^2 + (m-2)x - m + 4 \ge 0$ b) $mx^2 + (m-1)x + m - 1 < 0$.

§1. BẢNG PHÂN BỐ TẦN SỐ VÀ TẦN SUẤT

A.KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Tần số

Tần số của giá trị x_i là số lần lập lại của giá trị x_i trong cuộc điều tra. Tần số của giá trị x_i được kí hiệu là n_i .

2. Tần suất

Tần suất của giá trị x_i là tỷ số giữa tần số của giá trị x_i với tổng số n các phần tử điều tra. Tần suất của giá trị x_i kí hiệu là f_i.

Như vậy: $f_i = \frac{n_i}{n}$.

3. Bảng phân bố tần số và tần suất

Từ số liệu ban đầu ta lọc ra các giá trị x_i và tần số n_i tương ứng của chúng, rồi sắp xếp thành một bảng phân bố tần số - tần suất và được trình bày như sau:

Bảng 1

Giá trị của x_i	Tần số n_i	Tần suất f_i (%)
x_1	n_1	f_1
x_2	n_2	f_2
x_3	n_3	f_3
x_4	n_4	f_4
…..	…..	…..
x_m	n_m	f_m
	Tổng n	Tổng 100%

4. Bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp

Khi mẫu điều tra có kích thước lớn (nhiều phần tử) người ta thường nhóm các giá trị đó thành từng lớp và lập bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp được trình bày như sau:

Bảng 2

Giá trị của x_i	Tần số n_i	Tần suất f_i (%)
$[x_1; x_2)$	n_1	f_1
$[x_2; x_3)$	n_2	f_2
$[x_3; x_4)$	n_3	f_3
$[x_4; x_5)$	n_4	f_4
…..	…..	…..
$[x_{m-1};x_m]$	n_m	f_m
	Tổng n	Tổng 100%

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Lập bảng phân bố tần số và tần suất.

Phương pháp :

❖ Xác định các giá trị x_i ;

❖ Đếm số lần xuất hiện các giá trị x_i (tần số n_i) ;

❖ Tính : $f_i = \frac{n_i}{n}$.

Bài tập . Chiều cao của một nhóm 30 học sinh(đơn vị : m) lớp 10 được liệt kê ở bảng sau :

1.45	1.58	1.51	1.52	1.52	1.67
1.50	1.60	1.65	1.55	1.55	1.64
1.47	1.70	1.73	1.59	1.62	1.56
1.48	1.48	1.58	1.55	1.49	1.52
1.52	1.50	1.60	1.50	1.63	1.71

Hãy lập bảng phân bố tần số - tần suất.

Giải

Bảng phân bố tần số - tần suất:

Chiều cao	Tần số	Tần suất
1.45	1	3.33
1.47	1	3.33
1.48	2	6.67
1.49	1	3.33
1.50	3	10.0
1.52	4	13.33
1.55	3	10.0
1.56	1	3.33
1.58	2	6.67
1.59	1	3.33
1.60	2	6.67
1.61	1	3.33
1.62	1	3.33
1.63	1	3.33
1.64	1	3.33
1.65	1	3.33
1.67	1	3.33
1.70	1	3.33
1.71	1	3.33
1.73	1	3.33
	n=50	

Vấn đề 2. Lập bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp.

Phương pháp:

- ❖ Xác định các lớp ghép theo yêu cầu của đề bài;
- ❖ Đếm số phần tử của mỗi lớp ghép (tần số của lớp);
- ❖ Tính tần suất của mỗi lớp: $f_i = \frac{n_i}{n}$.

Bài tập 1. Chiều cao của một nhóm 30 học (đơn vị: m) lớp 10 được liệt kê ở bảng sau :

1.45	1.58	1.51	1.52	1.52	1.67
1.50	1.60	1.65	1.55	1.55	1.64
1.47	1.70	1.73	1.59	1.62	1.56
1.48	1.48	1.58	1.55	1.49	1.52
1.52	1.50	1.60	1.50	1.63	1.71

Hãy lập bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp với các lớp là: [1.45 ; 1.55) ; [1.55 ; 1.65) ; [1.65 ; 1. 75].

Giải

Tần số của lớp 1 : [1.45 ; 1.55) là $n_1 = 12$; tần suất $f_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{12}{30} = 40\%$.

Tần số của lớp 2 : [1.55 ; 1.65) là $n_2 = 13$; tần suất $f_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{13}{30} \approx 43.33\%$.

Tần số của lớp 3 : [1.65 ; 1.75] là $n_3 = 5$; tần suất $f_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{5}{30} \approx 16.67\%$.

Bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp :

Lớp chiều cao (m)	Tần số	Tần suất (%)
[1.45 ; 1.55)	12	40.00
[1.55 ; 1.65)	13	43.33
[1.65 ; 1.75]	5	16.67
Cộng	30	100 %

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho các số liệu thống kê ghi trong bảng sau:

thời gian hoàn thành một sản phẩm ở một nhóm công nhân (đơn vị: phút)

42 42 42 42 44 44 44 44 44 45 45 45 45 45 45 45 45 45 45 45 45 45 45 45 45 45 45 45 54 54 54 50 50 50 50 48 48 48 48 48 48 48 48 48 48 48 50 50 50 50

a) Hãy lập bảng phân bố tần số, tần suất;

b) Trong 50 công nhân được khảo sát, những công nhân có thời gian hòan thành một sản phẩm từ 45 phút đến 50 phút chiếm bao nhiêu phần trăm?

Bài tập 2. Cho các số liệu thống kê ghi trong bảng sau:

thời gian (phút) đi từ nhà đến trường của bạn A trong 35 ngày.

21 22 24 19 23 26 25 22 19 23 20 23 27 26 22 20 24 21 24 28 25 21 20 23 22 23 29 26 23 21 26 21 24 28 25

a) Lập bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp, với các lớp:

[19 , 21) ; [21 , 23) ; [23 , 25) ; [25 , 27) ; [27 , 29).

b) Trong 35 ngày được khảo sát, những ngày bạn A có thời gian đi đến trường từ 21 phút đến dưới 25 phút chiếm bao nhiêu phần trăm ?

§2. BIỂU ĐỒ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Biểu đồ tần suất hình cột

Cách vẽ biểu đồ hình cột:

- Vẽ hai đường thẳng vuông góc. Trên đường thẳng nằm ngang (dùng làm trục số) ta đánh dấu các khoảng xác định lớp.
- Tại mỗi khoảng ta dựng lên một hình cột chữ nhật, với đáy là khoảng đó, còn chiều cao bằng tần suất của lớp mà khoảng đó xác định.

2. Đường gấp khúc tần suất

Cách vẽ đường gấp khúc tần suất :

Ta vẽ hai đường thẳng vuông góc (như vẽ biểu đồ hình cột). Trên mặt phẳng tọa độ xác định các điểm (c_i ; f_i) , i = 1, 2,….,n sau đó vẽ các đoạn thẳng nối các điểm (c_i ; f_i) với các điểm (c_{i+1}; f_{i+1}), i = 1,2,…, n ta thu được một đường gấp khúc. Đường gấp khúc này gọi là đường gấp khúc tần suất.

3. Biểu đồ hình quạt

Cách vẽ biểu đồ hình quạt :

Vẽ hình tròn, chia hình tròn thành những hình quạt. mỗi lớp tương ứng với một hình quạt mà diện tích của nó tỉ lệ với tần suất của lớp đó.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Vẽ biểu đồ tần suất hình cột.

Phương pháp:

❖ Vẽ hai đường thẳng vuông góc. Trên đường thẳng nằm ngang (dùng làm trục số) ta đánh dấu các khoảng xác định lớp.

❖ Tại mỗi khoảng ta dựng lên một hình cột chữ nhật, với đáy là khoảng đó, còn chiều cao bằng tần suất của lớp mà khoảng đó xác định.

Bài tập 1. Thống kê điểm toán cuả 40 học sinh cuả một lớp người ta thu được mẫu số liệu ban đầu như sau :

5	6	6	5	7	1	2	4	6	9
4	5	7	5	6	8	10	5	5	7
2	1	3	3	6	4	6	5	5	9
8	7	2	1	8	6	4	4	6	5

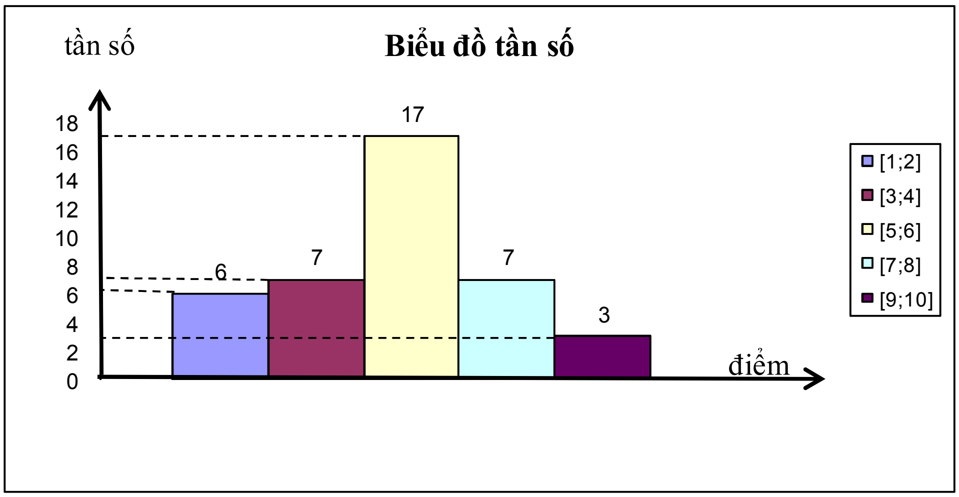
a) Hãy lập bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp với các lớp như sau:

[1;2] ; [3;4] ; [5;6] ; [7;8] ; [9;10].

b) Vẽ biểu đồ hình cột tần số.

Giải

Điểm toán	Tần số	Tần suất %
[1;2]	6	15
[3;4]	7	17,5
[5;6]	17	42,5
[7;8]	7	17,5
[9;10]	3	7,5



Bài tập 2. Doanh thu của 20 công ty sản xuất ô tô trong năm vừa qua được cho như sau:

(đơn vị triệu đô la)

8	32	54	12	50	80	90	64	54	52
20	43	70	56	20	12	7	14	22	35

a) Hãy lập bảng phân bố tần số -tần suất ghép lớp với các lớp như sau:

[0 ; 20) ; [20 ; 40) ; [40;60) ; [60 ; 80) ; [80 ; 100)

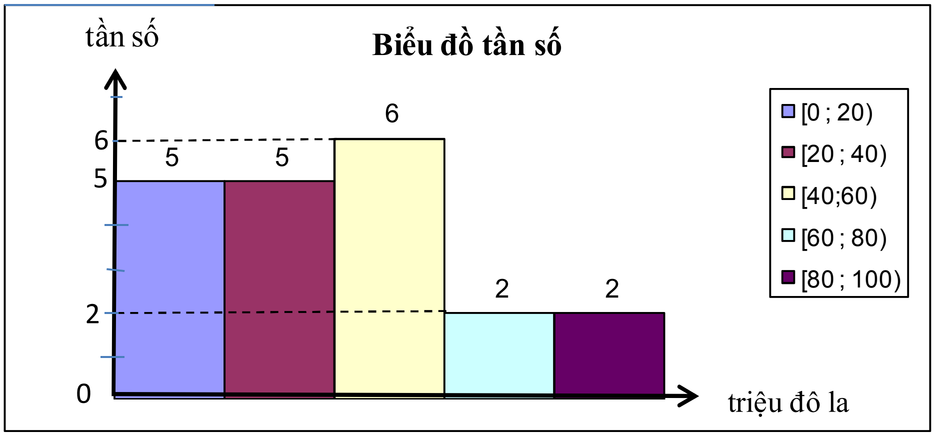
b) Vẽ biểu đồ tần số hình cột

Giải

a) Bảng phân bố tần số -tần suất ghép lớp :

Lớp doanh thu	Tần số	Tần suất (%)
[0 ; 20)	5	25
[20 ; 40)	5	25
[40 ; 60)	6	30
[60 ; 80)	2	10
[80 ; 100)	2	10

b) Biểu đồ tần số hình cột :



Vấn đề 2. Vẽ biểu đồ đường gấp khúc tần số , tần suất ghép lớp.

Phương pháp:

❖ Ta vẽ hai đường thẳng vuông góc (như vẽ biểu đồ hình cột). Trên mặt phẳng tọa độ xác định các điểm (c_i ; f_i) , i = 1, 2,….,n sau đó vẽ các đoạn thẳng nối các điểm (c_i ; f_i) với các điểm (c_{i+1}; f_{i+1}), i = 1,2,…, n ta thu được một đường gấp khúc.

Bài tập. Thống kê điểm toán của 40 học sinh của một lớp người ta thu được mẫu số liệu ban đầu như sau:

5	6	6	5	7	1	2	4	6	9
4	5	7	5	6	8	10	5	5	7
2	1	3	3	6	4	6	5	5	9
8	7	2	1	8	6	4	4	6	5

a/ Hãy lập bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp với các lớp như sau:

[1;2] ; [3;4] ; [5;6] ; [7;8] ; [9;10]

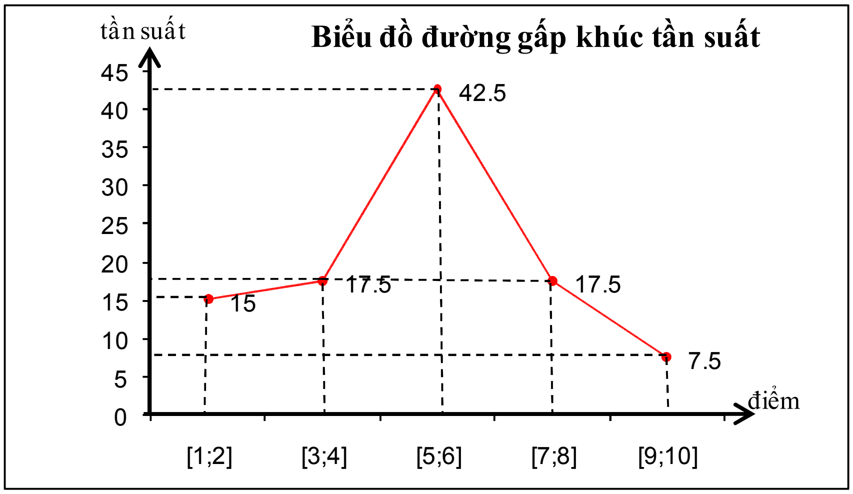
b/ Vẽ biểu đồ đường gấp khúc tần suất.

Giải

a/ Bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp :

Điểm toán	Tần số	Tần suất %
[1;2]	6	15
[3;4]	7	17,5
[5;6]	17	42,5
[7;8]	7	17,5
[9;10]	3	7,5

b/ Vẽ biểu đồ đường gấp khúc tần suất :



Vấn đề 3. Vẽ biểu đồ hình hình quạt.

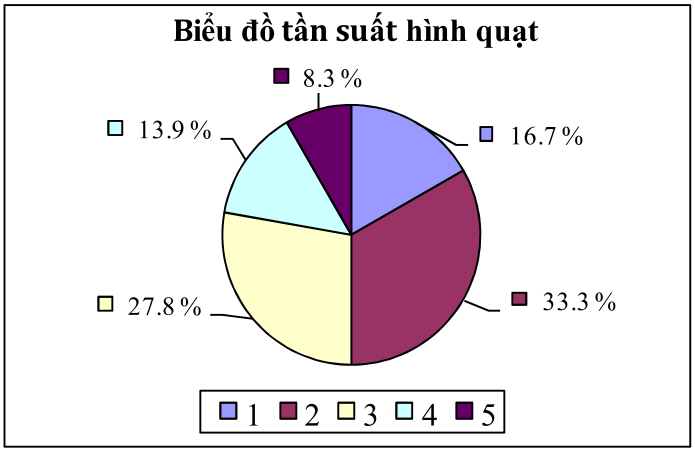
Phương pháp:

- Vẽ hình tròn;
- Chia hình tròn thành các hình quạt;
- Mỗi lớp được vẽ tương ứng với một hình quạt mà diện tích của nó tỉ lệ với tần suất của của lớp đó.

Bài tập 1. Vẽ biểu đồ hình quạt thống kê chiều cao của 36 học sinh(đơn vị : cm) nam của một trường trung học phổ thông được cho bởi bảng phân bố tần số - tần suất sau:

Nhóm	Lớp	Tần số	Tần suất
1	[160; 162]	6	16,7
2	[163; 165]	12	33,3
3	[166; 168]	10	27,8
4	[169; 171]	5	13.9
5	[172; 174]	3	8,3
		n=36	100%

Giải



C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Cơ cấu các loại đất Việt Nam năm 2000 cho bởi bảng sau:

Loại đất	Đất nông nghiệp	Đất lâm nghiệp	Đất chuyên dùng và thổ cư	Đất chưa sử dụng
Tỉ lệ %	28,4	35,2	6,0	30,4

Vẽ biểu đồ cơ cấu các loại đất Việt nam năm 2000?

Bài 2. Sau một tháng gieo trồng một giống hoa, người ta thu được số liệu sau về chiều cao (đơn vị là milimét) của các cây hoa được trồng:

Nhóm	Chiều cao	Số cây đạt được
1	Từ 100 đến 199	20
2	Từ 200 đến 299	75
3	Từ 300 đến 399	70
4	Từ 400 đến 499	25
5	Từ 500 đến 599	10

a) Lập bảng phân bố tần suất ghép lớp của mẫu số liệu trên.

b) Vẽ biểu đồ tần suất hình cột .

c) Hãy tính số trung bình cộng , phương sai , độ lệch chuẩn của các số liệu thống kê

Bài 3. Chiều cao của 40 vận động viên bóng chuyền.

Lớp chiều cao (cm)	Tần số
[168 ; 172)	4
[172 ; 176)	4
[176 ; 180)	6
[180 ; 184)	14
[184 ; 188)	8
[188 ; 192]	4
Cộng	40

a) Hãy lập bảng phân bố tần suất ghép lớp ?

b) Nêu nhận xét về chiều cao của 40 vận động viên bóng chuyền kể trên ?

c) Tính số trung bình cộng , phương sai , độ lệch chuẩn ?

d) Hãy vẽ biểu đồ tần suất hình cột để mô tả bảng phân bố tần suất ghép lớp đã lập ở câu 1.

§3. SỐ TRUNG BÌNH CỘNG – SỐ TRUNG VỊ - MỐT

A.KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Số trung bình cộng

Trường hợp bảng phân bố tần số tần suất

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\left(n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_kx_k\right) = f_1x_1 + f_2x_2 + ... + f_kx_k \quad (1)$$

Trong đó n_i, f_i lần lượt là tần số , tần suất của giá trị x_i, n là các số liệu thống kê

($n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$)

Trường hợp bảng phân bố ghép lớp

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\left(n_1c_1 + n_2c_2 + ... + n_kc_k\right) = f_1c_1 + f_2c_2 + ... + f_kc_k \quad (2)$$

Trong đó c_i, n_i, f_i lần lượt là giá trị đại diện, tần số, tần suất của lớp thứ i , n là số các số liệu thống kê ($n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$).

2. Mốt

Mốt của một bảng phân bố tần số là giá trị có tần số lớn nhất và được kí hiệu là M_0 .

3. Số trung vị.

Sắp thứ tự các số liệu thống kê thành một dãy không giảm. Số đứng giữa của dãy sắp thứ tự này là số trung vị , kí hiệu là M_e.

Giả sử mẫu có N số liệu

• Nếu N là một số lẻ thì số liệu đứng thứ $\frac{N+1}{2}$ là số trung vị.

• Nếu N là số chẵn , ta lấy số trung bình cộng của hai số liệu đứng thứ $\frac{N}{2}$ và $\frac{N}{2}$+1 làm số trung vị.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Tính số trung bình

Phương pháp : Xác định xem là bảng phân bố rời rạc hay ghép lớp. Nếu là bảng rời rạc thì dùng công thức (1), nếu là bảng ghép lớp thì dùng công thức (2).

Bài tập 1. Điểm thi học kì II môn toán của một tổ học sinh lớp 10A (quy ước rằng điểm kiểm tra học kì có thể làm tròn đến 0,5 điểm) được liệt kê như sau :

2 ; 5; 7,5 ; 8 ; 5 ; 7 ; 6,5 ; 9 ; 4,5 ; 10.

Tính điểm trung bình của 10 học sinh đó (chỉ lấy đến một chữ số thập phân sau khi đã làm tròn)

Giải

Điểm trung bình của 10 học sinh là:

$$\overline{x} = \frac{1}{10}\left(2 + 2.5 + 7,5 + 8 + 7 + 6,5 + 9 + 4,5 + 10\right) = \frac{64,5}{10} = 6,5\,.$$

Bài tập 2. Thu nhập gia đình/ năm của hai nhóm dân cư ở hai xã của một huyện được cho trong bảng sau: (thu nhập tính theo đơn vị triệu đồng).

Thu nhập / năm	Số gia đình	
Lớp	Nhóm 1	Nhóm 2
[12,5; 13,0)	4	2
[13,0; 13,5)	40	20
[13,5; 14,0)	73	42
[14,0 ; 14,5)	0	10
[14,5 ; 15,0]	3	16

a/ Tìm số trung bình của thu nhập gia đình / năm của nhóm 1.

b/ Tìm số trung bình của thu nhập gia đình / năm của nhóm 2.

Hỏi nhóm nào có thu nhập cao hơn.

Giải

a/ Số trung bình của thu nhập gia đình / năm của nhóm 1

$$\overline{x_1} = \frac{1}{n}\left(n_1c_1 + n_2c_2 + ... + n_kc_k\right)$$

$$= \frac{1}{120}\left(4.12,75 + 40.13,25 + 73.13,75 + 0.14.25 + 3.14.75\right) = 13,575.$$

b/ Số trung bình thu nhập gia đình trên năm của nhóm 2

$$\overline{x_2} = \frac{1}{n}\left(n_1c_1 + n_2c_2 + ... + n_kc_k\right) = 13,85.$$

Do đó nhóm 2 có thu nhập cao hơn.

Vấn đề 2. Tính Mốt

Phương pháp:

- ❖ Lập bảng phân bố tần số của dấu hiệu.
- ❖ Xác định giá trị có tần số lớn nhất là mốt.

Bài tập 1. Điểm điều tra về chất lượng sản phẩm mới (thang điểm 100) như sau:

80 65 51 48 45 61 30 35 84 83 60 58 75 72 68 39 41 54 61 72

75 72 61 50 65

Tìm mốt của bảng số liệu trên.

Giải

Lập lại bảng phân bố tần số:

Điểm	30	35	39	41	45	48	50	51	54	58	60	61	65	68	72	75	80	83	87
Tần số	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3	2	1	3	2	1	1	1

Bảng trên có 2 số có tần số lớn nhất là 61 và 72

Vậy phân bố trên có hai mốt là $M_0 = 61$, $M_0 = 72$.

Bài tập 2. Số lượng giày bán ra của một cửa hàng các tháng trong năm 2010 được cho bởi bảng sau (số lượng tính theo đôi).

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số lượng	430	560	450	550	760	430	525	410	635	450	800	950

Tính mốt của bảng số liệu trên.

Giải

Sắp xếp lại bảng số liệu trên như sau :

Số lượng	410	430	450	525	550	560	635	760	800	950
Tần số	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1

Suy ra mốt là 2 số : 430 và 450.

Vấn đề 3. Tính số trung vị

Phương pháp :

Xác định số liệu phân bố n là chẳn hay lẻ

- ❖ Nếu n lẻ thì số trung vị là số đứng thứ $\frac{n+1}{2}$;
- ❖ Nếu n chẳn thì số trung vị là số trung bình cộng của hai số liên tiếp đứng thứ $\frac{n}{2}$ và $\frac{n}{2}+1$.

Bài tập 1. Đo chiều cao của 36 học sinh của một trường, ta có mẫu số liệu sau, sắp xếp theo thứ tự tăng (đơn vị cm)

160 161 161 162 162 162 163 163 163 164 164 164 164 165 165 165 165 165
166 166 166 166 167 167 168 168 168 168 169 169 170 171 171 172 172 174

Tìm số trung vị của mẫu số liệu này.

Giải

Vì n = 36 là số chẵn nên số trung vị là trung bình cộng của hai số liệu đứng thứ 18 và 19

Do vậy số trung vị là : $M_e = \frac{165+166}{2} = 165,5$

Bài tập 2. Điểm điều tra về chất lượng sản phẩm mới (thang điểm 100) như sau:

80 65 51 48 45 61 30 35 84 83 60 58 75 72 68 39 41 54 61 72
75 72 61 50 65

Tính số trung vị của dãy số liệu trên.

Giải

Sắp xếp lại số liệu trên theo thứ tự tăng dần của điểm số

Điểm	30	35	39	41	45	48	50	51	54	58	60	61	65	68	72	75	80	83	87
Tần số	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3	2	1	3	2	1	1	1

Vì n = 25 là số lẻ nên số trung vị là số đứng ở vị trí thứ 13

Dó đó số trung vị là : $M_e = 61$

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Số lượng giày bán ra (tính theo đôi) của một cửa hàng ở các tháng trong năm 2009 được cho bởi bảng sau:

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số lượng	430	560	450	550	760	430	525	410	635	450	800	950

Tính số trung bình, số trung vị và mốt.

Đáp số

Số trung bình :579,17

Số trung vị : 537,5

Mốt là : 430 và 450.

Bài tập 2. Điều tra một số người bằng cách cho điểm sản phẩm mới (thang điểm 100), kết quả như sau:

80 65 51 48 45 61 41 84 72 60 58 75 72 68 39 35 61 75 72 61 50 65 30 54 83

Tìm số trung bình, số trung vị, mốt.

Đáp số

Số trung bình 60,2

Số trung vị: 61. Mốt 61 và 72.

§4. PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương sai dùng để đo mức độ biến động, chênh lệch giữa các giá trị của dấu hiệu. kí hiệu s_x^2 .

❖ *Trường hợp bảng phân bố tần số, tần suất :*

$$s_x^2 = \frac{1}{n}\left[n_1\left(x_1-\overline{x}\right)^2 + n_2\left(x_2-\overline{x}\right)^2 + \dots + n_k\left(x_k-\overline{x}\right)^2\right]$$
$$= f_1\left(x_1-\overline{x}\right)^2 + f_2\left(x_2-\overline{x}\right)^2 + \dots + f_k\left(x_k-\overline{x}\right)^2$$

❖ *Trường hợp bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp:*

$$s_x^2 = \frac{1}{n}\left[n_1\left(c_1-\overline{x}\right)^2 + n_2\left(c_2-\overline{x}\right)^2 + \dots + n_k\left(c_k-\overline{x}\right)^2\right] = f_1\left(c_1-\overline{x}\right)^2 + f_2\left(c_2-\overline{x}\right)^2 + \dots + f_k\left(c_k-\overline{x}\right)^2.$$

Trong đó n_i, f_i , c_i lần lượt là tần số , tần suất ,giá trị đại diện của lớp thứ i ; n là số các số liệu thống kê ; $\overline{x}$ là số trung bình cộng của các số liệu thống kê đã cho.

Chú ý : Có thể tính phương sai theo công thức $s_x^2 = \overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2$

Với • $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\left(n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + \dots + n_kx_k^2\right) = f_1x_1^2 + f_2x_2^2 + \dots + f_kx_k^2$

(đối với bảng phân bố tần số tần suất).

• $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\left(n_1c_1^2 + n_2c_2^2 + \dots + n_kc_k^2\right) = f_1c_1^2 + f_2c_2^2 + \dots + f_kc_k^2$

(đối với bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp).

2. Căn bậc hai của phương sai được gọi là **độ lệch chuẩn**, kí hiệu là s_x : $s_x = \sqrt{s_x^2}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Tính phương sai và độ lệch chuẩn đối với bảng phân bố tần số, tần suất.

Phương pháp

❖ Lập bảng phân bố tần số tần suất ;

❖ Áp dụng công thức $s_x^2 = \frac{1}{n}\left[n_1\left(x_1-\overline{x}\right)^2 + n_2\left(x_2-\overline{x}\right)^2 + \dots + n_k\left(x_k-\overline{x}\right)^2\right]$.

Bài tập 1. Người ta tiến hành phỏng vấn một số người về chất lượng của một loại sản phẩm mới. người điều tra yêu cầu cho điểm sản phẩm (thang điểm 100), kết quả như sau:

80 65 51 48 45 61 30 35 84 83 60 58 75 72 68 39 41 54 61 72 75 72 61 50 65 .

Tìm phương sai và độ lệch chuẩn. Nhận xét gì về các kết quả nhận được.

Giải

Ta lập bảng phân bố tần số như sau:

Điểm	30	35	39	41	45	48	50	51	54	58	60	61	65	68	72	75	80	83	84
Tần số	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3	2	1	3	2	1	1	1

Ta có : $\overline{x} = \frac{1}{n}\left(n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_kx_k\right) = 60,2$.

Phương sai :

$$s_x^2 = \frac{1}{n}\left[n_1\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + n_2\left(x_2 - \overline{x}\right)^2 + ... + n_k\left(x_k - \overline{x}\right)^2\right] = 216,8.$$

Độ lệch chuẩn :

$$s_x = \sqrt{s_x^2} = \sqrt{216,8} = 14,724.$$

Nhận xét : mức độ chênh lệch điểm giữa các giá trị là khá lớn.

Bài tập 2. Sản lượng lúa (đơn vị tạ) của 40 thửa ruộng thí nghiệm có cùng diện tích được trình bày trong bảng tần số sau đây:

Sản lượng	20	21	22	23	24
Tần số	5	8	11	10	6

a/ Tìm sản lượng trung bình của 40 thửa ruộng;

b/ Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

Giải

a/ Sản lượng trung bình của 40 thửa ruộng là:

$$\overline{x} = \frac{1}{5+8+11+10+6}\left(5.20 + 8.21 + 11.22 + 10.23 + 6.24\right) = 22,1 \text{ (tạ).}$$

Phương sai: $S^2_x = 1,54$. Độ lệch chuẩn: $S_x = 1,24$ (tạ).

Vấn đề 2. Tính phương sai và độ lệch chuẩn đối với bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp.

Phương pháp :

❖ Lập bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp, xác định giá trị đại diện;
❖ Áp dụng công thức :

$$s_x^2 = \frac{1}{n}\left[n_1\left(c_1-\overline{x}\right)^2 + n_2\left(c_2-\overline{x}\right)^2 + \ldots + n_k\left(c_k-\overline{x}\right)^2\right] = f_1\left(c_1-\overline{x}\right)^2 + f_2\left(c_2-\overline{x}\right)^2 + \ldots + f_k\left(c_k-\overline{x}\right)^2.$$

Bài tập 1. Bảng phân bố sau đây cho biết chiều cao (tính bằng cm) của 500 học sinh trong một trường THCS.

Chiều cao	[150 ; 154)	[154; 158)	[158; 162)	[162; 166)	[166; 170]
Tần số	25	50	200	175	50

Tính :

a/ Số trung bình $\overline{x}$.

b/ Tính phương sai và độ lệch tiêu chuẩn.

Giải

Lớp chiều cao	Giá trị đại diện	Tần số
[150; 154)	152	25
[154 ; 158)	156	50
[158 ; 162)	160	200
[162 ; 166)	164	175
[166 ; 170]	168	50

a/ Số trung bình: $\overline{x} = \frac{1}{500}\left(152.25 + 156.50 + 160.200 + 164.175 + 168.50\right) = 161,4$.

b/ Phương sai : $s^2_x = 14,48$.

Độ lệch chuẩn : $s_x = \sqrt{14,48} = 3,85$.

Bài tập 2. Trên hai con đường A và B, trạm kiểm soát đã ghi lại tần số của 30 chiếc ô tô trên mỗi con đường như sau :

Con đường A :

60	65	70	68	62	75	80	83	82	69	73	75	85	72	67
88	90	85	72	63	75	76	85	84	70	61	60	65	73	76

Con đường B :

76	64	58	82	72	70	68	75	63	67	74	70	79
80	73	75	71	68	72	73	79	80	63	62	71	70
74	69	60	63									

a)Tìm số trung bình , số trung vị, phương sai, độ lệch chuẩn của tốc độ trên mỗi con đường A, B .

b)Theo em thì xe chạy trên con đường nào thì an toàn hơn.

Giải

$\overline{x_A} = 73,55$ $\qquad$ $\overline{x_B} = 70,81$

$M_e = 73$ $\qquad$ $M_e = 71$

$S_A^2 = 77,14$ $\qquad$ $S_B^2 = 37,73$

$S_A = 8,78$ $\qquad$ $S_B = 6,11$

Chạy trên đường B an toàn hơn.

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Chiều cao của 50 học sinh lớp 5 (tính bằng cm) được ghi lại như sau :

102	102	113	138	111	109	98	114	101
103	127	118	111	130	124	115	122	126
107	134	108	118	122	99	109	106	109
104	122	133	124	108	102	130	107	114
147	104	141	103	108	118	113	138	112

a) Lập bảng phân bố ghép lớp [98 ;103); [103 ;108); [108 ; 113);[113 ; 118);[118 ;123); [123 ; 128); [128 ;133); [133 ; 138); [138 ;143); [143 ;148].

b) Tính số trung bình cộng.

c) Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Bài 2. Số tiết tự học tại nhà trong 1 tuần (tiết/tuần) của 20 học sinh lớp 10 trường THPT Nguyễn Văn Trỗi được ghi nhận như sau :

9 15 11 12 16 12 10 14 14 15 16 13 16 8 9 11 10 12 18 18.

a) Lập bảng phân bố tần số , tần suất cho dãy số liệu trên.

b) Vẽ biểu đồ đường gấp khúc theo tần số biểu diễn bảng phân bố trên.

c) Tính số trung bình cộng và phương sai và độ lệch chuẩn của giá trị này.

CHƯƠNG VI GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

§1. GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Quan hệ giữa độ và rađian

$1^0 = \frac{\pi}{180}\ rad;\ 1\ rad = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0$.

2. Độ dài của cung tròn

Độ dài của cung tròn có số đo a rad và bán kính bằng R

$l = R\alpha$

3. Số đo của cung lượng giác

Số đo của cung lượng giác có điểm đầu là A điểm cuối là B

$s\text{đ}\,\overset{\curvearrowright}{AB} = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Trong đó α là số đo của một cung lượng giác tùy ý có điểm đầu A ,điểm cuối B, mỗi giá trị của k ứng với một cung.

Nếu viết số đo bằng độ thì ta có:

$s\text{đ}\,\overset{\curvearrowright}{AB} = a^0 + k360^0, k \in \mathbb{Z}$

4. Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác

Để biểu diễn cung lượng giác có số đo α trên đường tròn lượng giác ta chọn điểm A (1;0) làm điểm đầu của cung. Ta xác định điểm cuối M của cung trên đường tròn lượng giác sao cho cung $\overset{\frown}{AM}$ có sđ $\overset{\curvearrowright}{AM} = \alpha$.

5. Góc lượng giác

Mỗi cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{CD}$ ứng với một góc lượng giác (OC, OD) và ngược lại. Số đo của cung lượng giác và số đo của góc lượng giác tương ứng trùng nhau.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Đổi đơn vị góc từ độ sang rađian và ngược lại.

Phương pháp:

1) *Đổi đơn vị góc từ độ sang rađian :* Nhân góc cần đổi với $\frac{\pi}{180}$

2) *Đổi đơn vị góc từ rađian sang độ :* Nhân góc cần đổi với $\frac{180}{\pi}$

Bài tập 1. Đổi các góc sau sang rađian

a) 135^0 b) $45^0 30'$.

Giải

a) $135^0 = 135.\frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{4}$.

b) $45^0 30' = 45^0 + 0.5^0 = 45,5^0 = 45.5.\frac{\pi}{180} = \frac{91\pi}{360}$

Bài tập 2. Đổi các cung sau sang độ, phút, giây.

$a)\ \frac{\pi}{12}$ $\qquad$ $b)\ \frac{5}{4}$.

Giải

a) $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{12}.\frac{180^0}{\pi} = 15^0$.

b) $\frac{5}{4} = \frac{5}{4}.\frac{180^0}{\pi} \approx 71^0 37' 11''$

Vấn đề 2. Tính độ dài cung tròn.

Phương pháp :

Sử dụng công thức tính độ dài cung tròn: $l = R\alpha$.

Chú ý: Nếu số đo của cung là độ ta phải đổi sang rađian sau đó tính độ dài cung.

Bài tập. Một đường tròn có bán kính 10 cm. Tìm độ dài của các cung trên đường tròn có số đo

a) $\frac{\pi}{18}$ $\qquad$ b) 45^0.

Giải

$a)\ l = R.\alpha = 10.\frac{\pi}{18} \approx 1.76\ cm$.

b) Ta có : $45^0 = \frac{\pi}{4}$

$l = 10.\frac{\pi}{4} \approx 7.85\ cm$.

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Đổi các góc sau sang rađian

a) -230^0 $\qquad$ b) $135^0 30'$ $\qquad$ c) $12^0 15'$ $\qquad$ d) 137^0.

Bài 2. Một đường tròn có bán kính 15 cm. Tìm độ dài của các cung trên đường tròn có số đo

a) $\frac{3\pi}{4}$ $\qquad$ b) 135^0 $\qquad$ c) 720^0 $\qquad$ d) 1,5;

§2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Trên đường tròn lượng giác gốc A, cho cung $\overset{\frown}{AM}$ có $sđ\,\overset{\frown}{AM} = \alpha$. Tung độ của M là $\sin\alpha$, hoành độ của M là $\cos\alpha$. $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (nếu $\cos\alpha \neq 0$), $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ (nếu $\sin\alpha \neq 0$).

2. $-1 \le \sin\alpha \le 1; -1 \le \cos\alpha \le 1$ với mọi α.

3. $\tan\alpha$ xác định khi và chỉ khi $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

4. $\cot\alpha$ xác định khi $\alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

5. Dấu của các giá trị lượng giác

Góc phần tư / Giá trị lượng giác	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	-	-
$\cos\alpha$	+	-	-	+
$\tan\alpha$	+	-	+	-
$\cot\alpha$	+	-	+	-

6. Giá trị lượng giác các cung đặc biệt

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\Vert$
$\cot\alpha$	$\Vert$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Kí hiệu: $\Vert$ là không xác định.

7. Hằng đẳng thức lượng giác

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\tan\alpha.\cot\alpha = 1.$$

8. Giá trị lượng giác của các cung có liên quan đặc biệt

a. Cung đối nhau : α và $-\alpha$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha.$$

c. Cung hơn kém π : α và $\alpha + \pi$

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$$

$$\cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha$$

$$\tan(\alpha+\pi) = \tan\alpha$$

$$\cot(\alpha + \pi) = \cot\alpha$$

d. Cung phụ : α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha.$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Xác định dấu của các giá trị lượng giác của một cung

Phương pháp:

Tìm vị trí điểm cuối của cung xem nằm ở phần tư nào, sau đó dựa vào bảng dấu của các giá trị lượng giác để xác định.

Bài tập. Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Xác định dấu của các giá trị lượng giác :

a) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ b) $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

Giải

a) Ta có $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, do đó $\frac{\pi}{2} < \alpha + \frac{\pi}{2} < \pi$

Vậy $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) > 0$.

b) Ta có $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, do đó $-\frac{\pi}{2} < -\alpha < 0$ nên $\pi < \frac{3\pi}{2} - \alpha < \frac{3\pi}{2}$

Vậy $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) > 0$.

Vấn đề 2. Tính các giá trị lượng giác của một góc.
Phương pháp :
Vận dụng hằng đẳng thức lượng giác để tính toán các giá trị lượng giác.

Bài tập 1. Tính các giá trị lượng giác của góc α biết

a) $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

b) $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Giải

a) Ta có $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Do $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\cos\alpha < 0$

Vậy $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{4}} = 2\sqrt{2}.$$

b) Ta có $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{5}{9}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

Do $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên $\sin\alpha < 0$

Vậy $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{-2\sqrt{5}}{5}.$$

Bài tập 2. Tính các giá trị lượng giác của góc α biết :

a) $\tan\alpha = \frac{13}{8}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

b) $\cot\alpha = -\frac{19}{7}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Giải

a) Ta có $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{1+\left(\frac{13}{8}\right)^2} = \frac{64}{233}$

$\Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{8}{\sqrt{233}}$

Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos\alpha > 0$

Vậy $\cos\alpha = \frac{8}{\sqrt{233}}$

$\sin\alpha = \cos\alpha.\tan\alpha = \frac{8}{\sqrt{233}}.\frac{13}{8} = \frac{13}{\sqrt{233}}$

$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{8}{13}$

b) Ta có $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{1+\cot^2\alpha} = \frac{1}{1+\left(-\frac{19}{7}\right)^2} = \frac{49}{410}$

$\Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{7}{\sqrt{410}}$

Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\sin\alpha > 0$

Vậy $\sin\alpha = \frac{7}{\sqrt{410}}$

$\cos\alpha = \sin\alpha.\cot\alpha = -\frac{19}{\sqrt{410}}$

$\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} = -\frac{7}{19}$.

Vấn đề 3. Chứng minh đẳng thức, rút gọn các biểu thức đơn giản

Phương pháp :

Vận dụng các hằng đẳng thức lượng giác cơ bản giữa các giá trị lượng giác để chứng minh, rút gọn các hệ thức đơn giản.

Bài tập1. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sin^2 x - \tan^2 x = \sin^2 x.\tan^2 x$.

b) $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2\cos^2 x$.

Giải

a) $VT = \tan^2 x - \sin^2 x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x = \sin^2 x\left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1\right)$

$= \sin^2 x(1 + \tan^2 x - 1) = \tan^2 x.\sin^2 x = VP$

b) $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2\cos^2 x$

$VT = \sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 - (\cos^2 x)^2$

$= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x)$

$= 1 - \cos^2 x - \cos^2 x = 1 - 2\cos^2 x = VP$

Bài tập 2. Rút gọn các biểu thức sau :

$A = (\tan x + \cot x)^2 - (\tan x - \cot x)^2$

$B = (1 - \sin^2 x)\cot^2 x + 1 - \cot^2 x$.

Giải

• $A = (\tan x + \cot x)^2 - (\tan x - \cot x)^2 = (\tan x + \cot x - \tan x + \cot x)(\tan x + \cot x + \tan x - \cot x)$

$= 4\tan x.\cot x = 4$.

• $B = (1 - \sin^2 x)\cot^2 x + 1 - \cot^2 x = \cot^2 x - \cot^2 x.\sin^2 x + 1 - \cot^2 x$

$= -\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}.\sin^2 x + 1 = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$.

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Cho $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Xác định dấu của các giá trị lượng giác :

a) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)$ b) $\tan\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)$ c) $\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)$ d) $\cot\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Bài 2. Cho $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$. Xác định dấu của các giá trị lượng giác :

a) $\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right)$ b) $\tan\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)$ c) $\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)$ d) $\cot(\alpha + \pi)$.

Bài 3. Tính các giá trị lượng giác của góc α biết :

a) $\sin\alpha = -\dfrac{2}{3}$ và $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

b) $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ và $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

c) $\tan\alpha=3$ và $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

b) $\cot\alpha=-4$ và $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Bài 4. Chứng minh các đẳng thức sau :

$a)\ \frac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=1-\sin\alpha\cos\alpha.$

$b)\ \frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{1+2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha-1}{\tan\alpha+1}.$

$c)\ \sin^4\alpha+\cos^4\alpha-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha=\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$

Bài 5. Rút gọn các biểu thức :

$A=\frac{\sin^2\alpha-\tan^2\alpha}{\cos^2\alpha-\cot^2\alpha}.$

$B=(1+\cot^2\alpha)\sin^3\alpha+(1+\tan\alpha)\cos^3\alpha.$

$C=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\cot\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}.$

$D=\sin^2(180^0-\alpha)+\tan^2(180^0-\alpha)\tan^2(270^0+\alpha)+\sin(90^0+\alpha)\cos(\alpha\text{-}360^0).$

§3. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Công thức cộng

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$$

$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$$

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$

$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$$

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$$

$$\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$$

2. Công thức nhân đôi

$$\sin 2a=2\sin a\cos a$$

$$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$$

$$\tan 2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

3. Công thức hạ bậc

$$\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$$

$$\tan^2 a=\frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$$

4. Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\sin a.\sin b=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$$

$$\sin a.\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a-b)+\sin(a+b)\right]$$

$$\cos a.\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)+\cos(a+b)\right]$$

5. Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\sin u+\sin v=2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2} \qquad \cos u+\cos v=2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$

$$\sin u-\sin v=2\cos\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2} \qquad \cos u-\cos v=-2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}.$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Tính các giá trị lượng giác.
Phương pháp :
Sử dụng công thức lượng giác đưa giá trị lượng giác cần tính về các giá trị lượng giác đã biết.

Bài tập 1. Tính $\cos 105^0$, $\tan 15^0$.

Giải

* Ta có $\cos 105^0 = \cos(45^0 + 60^0) = \cos 45^0 \cos 60^0 - \sin 45^0 \sin 60^0$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

* Ta có $\tan 15^0 = \tan(45^0 - 30^0)$

$$= \frac{\tan 45^0 - \tan 30^0}{1 + \tan 45^0 \tan 30^0} = 2 - \sqrt{3}$$

Vấn đề 2. Rút gọn biểu thức lượng giác, chứng minh đẳng thức lượng giác.
Phương pháp :
Sử dụng công thức lượng giác để rút gọn, chứng minh.

Bài tập 1. Rút gọn các biểu thức sau :

$A = \dfrac{\sin 2a + \sin a}{1 + \cos 2a + \cos a}$;

$B = \sin 5x - 2\sin x(\cos 4x + \cos 2x)$.

Giải

• $A = \dfrac{\sin 2a + \sin a}{1 + \cos 2a + \cos a}$

$$= \frac{2\sin a\cos a + \sin a}{1 + 2\cos^2 a - 1 + \cos a} = \frac{\sin a(2\cos a + 1)}{\cos a(2\cos a + 1)} = \tan a.$$

• $B = \sin 5x - 2\sin x(\cos 4x + \cos 2x)$

$$= \sin 5x - 2\sin x\cos 4x - 2\sin x\cos 2x$$

$$= \sin 5x - (\sin 5x - \sin 3x) - (\sin 3x - \sin x) = \sin x.$$

Bài tập 2. Chứng minh các đẳng thức sau :

$a)$ $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x.$

$b)$ $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2\text{x}$.

Giải

$a) VT = \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x$

$$= 1 - 2(\sin x\cos x)^2 = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x = VP.$$

$b) VT = \cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x)^2 - (\sin^2 x)^2$

$= (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos 2x.$

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Tính $\cos 75^0$, $\sin(-105^0)$, $\cot 15^0$, $\sin\dfrac{\pi}{12}$

Bài 2. Rút gọn các biểu thức :

$A = \dfrac{\tan 2\alpha}{\tan 4\alpha - \tan 2\alpha}$; $B = \sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha},\ 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

$C = \dfrac{3 - 4\cos\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4\cos\alpha + \cos 4\alpha}$; $D = \dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha}$.

Bài 3. Chứng minh :

$a)\ \cos x \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) = \dfrac{1}{4}\cos 3x;$

$b)\ \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x;$

$c)\ \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x;$

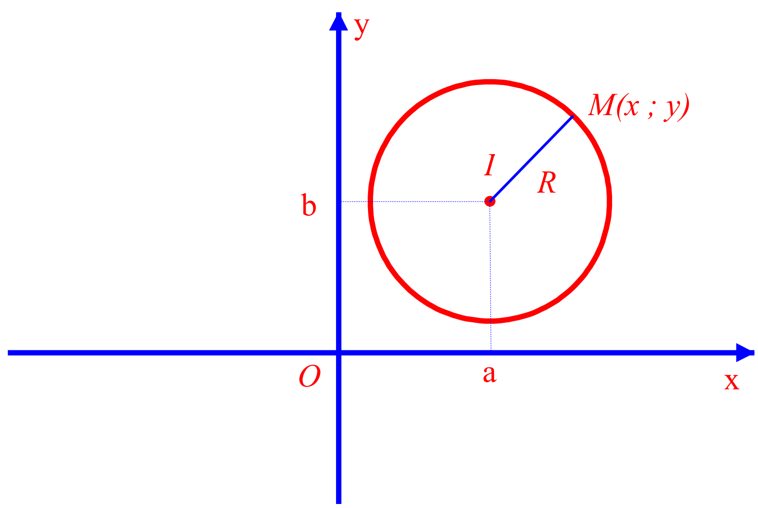
$d)\ \tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x};$

$e)\ \cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x = \dfrac{\sin 4x}{4};$

$f)\ \tan x \tan\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) = \tan 3x.$

PHẦN 2

HÌNH HỌC



§1. CÁC ĐỊNH NGHĨA

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Để xác định một vectơ cần biết một trong hai điều kiện sau:

- Điểm đầu và điểm cuối của vectơ.
- Độ dài và hướng.

2. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

Nếu hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương thì chúng có thể cùng hướng hoặc ngược hướng.

3. Độ dài của một vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

4. $\vec{a}=\vec{b}$ khi và chỉ khi $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ và $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng.

5. Với mỗi điểm A ta gọi $\overrightarrow{AA}$ là vectơ – không. Vectơ – không được kí hiệu là $\vec{0}$ và quy ước rằng $|\vec{0}|=0$ vectơ $\vec{0}$ cùng phương và cùng hướng với mọi vectơ.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Xác định một vectơ, sự cùng phương và hướng của hai vectơ.

Phương pháp:

- Để xác định vec tơ $\vec{a}\neq\vec{0}$ ta cần biết $|\vec{a}|$ và hướng của $\vec{a}$ hoặc biết điểm đầu và điểm cuối của $\vec{a}$. Chẳng hạn,với hai điểm phân biệt A và B ta có hai vec tơ khác vec tơ $\vec{0}$ là $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$
- Vec tơ $\vec{a}$ là vec tơ – không khi và chỉ khi $|\vec{a}|=0$ hoặc $\vec{a}=\overrightarrow{AA}$ với A là điểm bất kì.

Dạng 2: Chứng minh hai vectơ bằng nhau

Phương pháp: Để chứng minh hai vectơ bằng nhau ta có thể dùng một trong ba cách sau:

$$* \left.\begin{array}{l}|\vec{a}|=|\vec{b}| \\ \vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ cùng hướng}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{a}=\vec{b}.$$

* Tứ giác ABCD là hình bình hành $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$.

* Nếu $\vec{a}=\vec{b},\ \vec{b}=\vec{c}$ thì $\vec{a}=\vec{c}$

Bài 1. Cho hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương. Kết luận gì về ba điểm A, B, C ?

Giải

Hai vec tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương và có điểm A chung nên chúng cùng nằm trên một đường thẳng . Vậy A, B, C thẳng hàng.

Bài 2. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi M là trung điểm của BC và N là trung điểm AC.

a). Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ đúng hay sai?

b). Các vectơ nào cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$? Các vectơ nào ngược hướng với $\overrightarrow{BC}$?

c). Các vectơ nào bằng nhau?

Giải

a). Hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên không bằng nhau.

b). Ta có MN nối trung điểm hai cạnh BC và AC nên MN song song AB.
Vậy $\overrightarrow{NM}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$.

Ba điểm B, C, M thẳng hàng nên các vectơ ngược hướng với $\overrightarrow{BC}$ là: $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{MB}$.

c).Ta có các cặp vec tơ sau đây bằng nhau vì cùng hướng và có độ dài bằng nhau.
$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{NA}$.

Bài 3. Cho hình bình hành ABCD. Lấy điểm M trên đoạn AB và điểm N trên đoạn CD sao cho AM=CN.Chứng minh rằng $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MC}$ và $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BN}$.

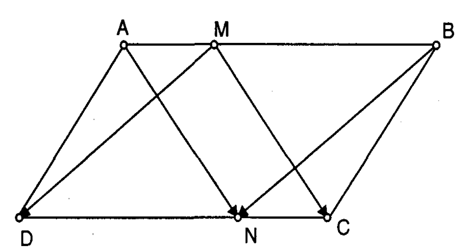
Giải

Ta có: AM=CN (gt)

AM || CN (vì AB || CD)

Do đó AMCN là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MC}$

Tương tự BMDN là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BN}$



C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Cho tam giác đều ABC. Các đẳng thức sau đây đúng hay sai?

a). $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ b). $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ c). $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{CA}\right|$

Bài 2. Cho tam giác ABC. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Tìm trên hình vẽ các vectơ lần lượt bằng các vectơ: $\overrightarrow{IK}, \overrightarrow{BJ}$ và $\overrightarrow{IJ}$.

Bài 3. Cho hình bình hành ABCD. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

AN và CM lần lượt cắt BD tại E và F. CMR: $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FB}$.

Bài 4. Cho hình bình hành ABCD. Gọi E là điểm đối xứng của C qua D .

CMR: $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FB}$.

§2. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VEC TƠ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Định nghĩa: Cho $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$; $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$
- Tính chất : * Giao hoán : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

  * Kết hợp $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

  * Tính chất vectơ –không $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- Quy tắc 3 điểm : Cho A, B ,C tùy ý, ta có : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- Quy tắc hình bình hành . Nếu ABCD là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Tìm tổng của hai vectơ và tổng của nhiều vectơ.

Phương pháp: Dùng định nghĩa tổng của hai vectơ, quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành và các tính chất của tổng các vectơ.

Dạng 2: Tìm vectơ đối và hiệu của hai vectơ

Phương pháp:

+ Vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b} \Rightarrow \vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{CA}$

+ Vận dụng quy tắc $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$ với ba điểm O, A, B bất kì.

Dạng 3: Tính độ dài của $\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}$

Phương pháp: Đầu tiên tính $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}, \vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{CD}$. Sau đó tính độ dài các đoạn thẳng AB và CD bằng cách gắn nó vào các đa giác mà ta có thể tính được độ dài các cạnh của nó hoặc bằng phương pháp tính trực tiếp khác.

Dạng 4: Chứng minh đẳng thức vectơ.

Phương pháp: Mỗi vế của một đẳng thức vectơ gồm các vectơ được nối với nhau bởi các phép toán vectơ.

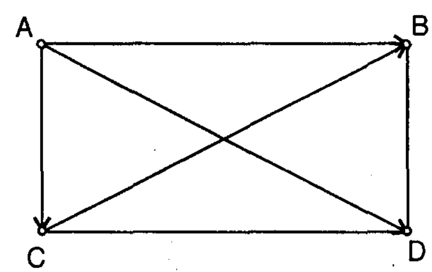
+ Dùng quy tắc tìm tổng, hiệu của hai vectơ, tìm vectơ đối để biến đổi vế này thành vế kia của đẳng thức hoặc biến đổi cả hai vế của đẳng thức để được hai vế bằng nhau.

+ Biến đổi đẳng thức vectơ cần chứng minh đó tương đương với một đẳng thức vectơ được công nhận là đúng.

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A biết AB=2a, AC=a. Tính độ dài của các vectơ:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

Giải



Vẽ hình bình hành ABDC.

Theo qui tắc hình bình hành ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$

với AD là đường chéo của hbh ABCD

Mà A= 90^0 nên ABCD là hình chữ nhật. Do đó AD=BC

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông ABC ta có:

$BC^2=AB^2+AC^2=4a^2+a^2=5a^2$

Vậy: $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right|=AD=BC=a\sqrt{5}$

Theo qui tắc hiệu vec tơ ta có: $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$

Vậy $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{CB}\right|=BC=a\sqrt{5}.$

Bài 2. Cho sáu điểm A, B, C, D, E, F tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}.$$

Giải

Theo quy tắc ba điểm ta có:

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FC}$

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF}$

Cộng theo vế 3 đẳng thức trên ta được:

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ED}$. (vì $\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF} = \vec{0}$)

Bài 3. Cho hình bình hành ABCD tâm O. CMR :

a). $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$ b). $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

Giải

a). Theo quy tắc hiệu hai vec tơ ta có:

$\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}$

Mà $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ (vì ABCD là hình bình hành)

Nên: $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$.

b). Ta có: $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$ mà $\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{BA}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Chứng minh rằng với bốn điểm bất kỳ A, B, C, D ta luôn có $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

Bài 2. Cho bốn điểm A, B, C, D. Tìm các vec tơ tổng sau đây:

a). $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ b). $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$

Bài 3. Cho bốn điểm A, B, C, D. CMR: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ và $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$.

Bài 4. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$.

Bài 5. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tính độ dài của vec tơ tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Bài 6. Cho hình bình hành ABCD, M là một điểm tùy ý. CMR: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

§3. TÍCH CỦA VECTƠ VỚI MỘT SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Cho $k \in R$, $k\vec{a}$ là 1 vectơ được xác định:

  * Nếu $k \geq 0$ thì $k\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{a}$; $k < 0$ thì $k\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{a}$

  * Độ dài vectơ $k\vec{a}$ bằng $|k|.|\vec{a}|$

- Tính chất :

  a) $k(m\vec{a}) = (km)\vec{a}$

  b) $(k + m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$

  c) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

  d) $k\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.

- $\vec{b}$ cùng phương $\vec{a}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$) khi và chỉ khi có số k thỏa $\vec{b} = k\vec{a}$.
- Điều kiện cần và đủ để A , B , C thẳng hàng là có số k sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.
- Cho $\vec{b}$ không cùng phương $\vec{a}$, $\forall \vec{x}$ ta có $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$ (m, n duy nhất).
- Nếu I là trung điểm của AB và M là điểm tùy ý ta có : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.
- G là trọng tâm của tam giác ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

<u>Dạng 1:</u> Xác định vectơ $k\vec{a}$.

<u>Phương pháp:</u> Dựa vào định nghĩa vectơ $k\vec{a}$

* $|k\vec{a}| = |k||\vec{a}|$.

- Nếu $k > 0$, $k\vec{a}$ *và* $\vec{a}$ *cùng hướng* .

- Nếu $k < 0$, $k\vec{a}$ *và* $\vec{a}$ *ngược hướng* .

* $k\vec{0}=\vec{0}, \forall k\in\mathbb{R}$ $\quad 0.\vec{a}=\vec{0}, \forall\vec{a}$

* $1.\vec{a}=\vec{a}; (-1)\vec{a}=-\vec{a}$

* Cho điểm A và cho $\vec{a}$. Có duy nhất điểm M sao cho $\overrightarrow{AM}=\vec{a}$.

* $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow B\equiv C$, $\overrightarrow{A_1B}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow A_1\equiv A$.

Dạng 2: Phân tích (biểu thị) một vec tơ theo hai vec tơ không cùng phương.

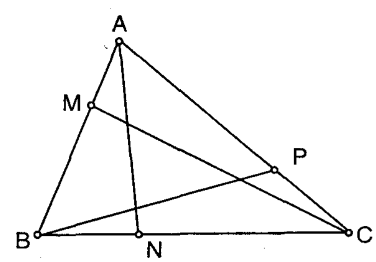
Phương pháp : Dùng qui tắc 3 điểm để biến đổi một vectơ thành tổng hay hiệu hai vectơ khác $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$.

Dạng 3: Chứng minh đẳng thức vectơ. ***(Xem phần trước)***

Bài 1. Cho tam giác ABC. Trên các đoạn AB, BC và CA lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho: AM=$\frac{1}{3}AB$, BN =$\frac{1}{3}BC$, CP=$\frac{1}{3}CA$.

CMR:$\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}$.

$$\text{Ta có:}\begin{cases}\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC} & \left(\text{do BN=}\frac{1}{3}BC\right)\\ \overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA} & \left(\text{do CP=}\frac{1}{3}CA\right)\\ \overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} & \left(\text{do AM=}\frac{1}{3}AB\right)\end{cases}$$



$$\Rightarrow\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CM}=\frac{4}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=\frac{4}{3}\vec{0}=\vec{0}\ (\text{đpcm}).$$

Bài 2. Cho tam giác ABC. Gọi D là điểm sao cho $\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ và I là trung điểm của AD.

Gọi M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.

a). Tính $\overrightarrow{BI}$ theo $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$;

b). Tính $\overrightarrow{BM}$ theo $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$.

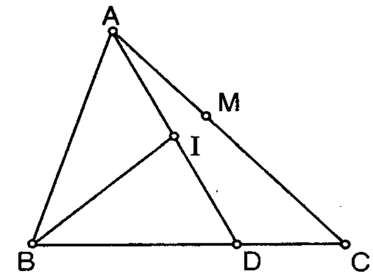
Giải

a). Do I là trung điểm của AD nên ta có:

$$\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

b). Ta có: $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BA}=\frac{2}{5}\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\right)$

$\Rightarrow\overrightarrow{BM}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$



C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Cho hình bình hành ABCD tâm O, gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

a). CMR: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}$.

b). CMR: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AO}$.

c). Cho M là điểm tùy ý, chứng minh : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$.

Bài 2. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BD.

CMR: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{MN}$.

Bài 3. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABC và A'B'C'.

Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABC và A'B'C'.
CMR: $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}$.

Bài 4. Cho tam giác ABC trọng tâm G. Tính $\overrightarrow{AB}$ theo $\overrightarrow{GB}$ và $\overrightarrow{GC}$.

Bài 5. Cho tam giác ABC trọng tâm G. Gọi I là trung điểm của AG.

CMR: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+6\overrightarrow{GI}=\vec{0}$.

Bài 6. Cho 4 điểm A, B, C, D. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

CMR: $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MN}$.

Bài 7. Cho tam giác ABC, M là một điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MC}$.

CMR: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

§4. TRỤC TỌA ĐỘ VÀ HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Trục là đường thẳng trên đó xác định điểm O và 1 vectơ $\vec{i}$ có độ dài bằng 1.

  Ký hiệu trục (O; $\vec{i}$) hoặc x'Ox

- A,B nằm trên trục (O; $\vec{i}$) thì $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\,\vec{i}$. Khi đó $\overline{AB}$ gọi là độ dài đại số của $\overrightarrow{AB}$

- Hệ trục tọa độ vuông góc gồm 2 trục Ox $\perp$ Oy. Ký hiệu Oxy hoặc (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$)

- Đối với hệ trục (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$), nếu $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ thì (x;y) là toạ độ của $\vec{a}$.

  Ký hiệu $\vec{a}$ = (x;y)

- Cho $\vec{a}$ = (x;y) ; $\vec{b}$ = (x';y') ta có

  $\vec{a} \pm \vec{b}$ = (x ± x';y ± y')

  $k\vec{a}$=(kx ; ky) ; $\forall$ k $\in$ R

  $\vec{b}$ cùng phương $\vec{a}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$) khi và chỉ khi có số k thỏa x'=kx và y'= ky

- Cho M(x_M ; y_M) và N(x_N ; y_N) ta có :

  \+ P là trung điểm MN thì $x_p = \dfrac{x_M + x_N}{2}$ và $y_P = \dfrac{y_M + y_N}{2}$

  \+ $\overrightarrow{MN}$ = ($x_M - x_N$; $y_M - y_N$)

  \+ Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$ và $y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Xác định tọa độ của vectơ và của điểm trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

Phương pháp: Căn cứ vào định nghĩa tọa độ của vectơ và tọa độ của một điểm trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

- $\vec{a} = (a_1, a_2) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1.\vec{i} + a_2.\vec{j}$ $\qquad$ $A(x, y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$

- $\overrightarrow{AB} = \left(x_B - x_A; y_B - y_A\right)$.

Dạng 2: Tìm tọa độ của các vec tơ $\vec{u}+\vec{v}$; $\vec{u}-\vec{v}$; $k.\vec{u}$

Phương pháp:

Tính theo các công thức tọa độ của $\vec{u}+\vec{v}$; $\vec{u}-\vec{v}$; $k.\vec{u}$

$m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \left(ma_1 + nb_1 + pc_1,\ ma_2 + nb_2 + pc_2\right)$

Dạng 3: Chứng minh ba điểm thẳng hàng, hai đường thẳng song song bằng tọa độ.

Phương pháp: Sử dụng các điều kiện cần và đủ sau:

+ Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

+ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương $\left(\vec{b} \neq \vec{0}\right) \Leftrightarrow$ *có số k để* $\vec{a} = k.\vec{b} \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$ $\left(\text{với } a_2, b_2 \neq 0\right)$

Dạng 4: Tính tọa độ trung điểm của một đoạn thẳng, tọa độ trọng tâm của tam giác. ***Phương pháp:*** Sử dụng các công thức sau:

+ P là trung điểm MN thì $x_P = \dfrac{x_M + x_N}{2}$ và $y_P = \dfrac{y_M + y_N}{2}$

+ G là trọng tâm tam giác ABC thì $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$ và $y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$.

Bài 1. Cho $\vec{a} = (1,-2)$, $\vec{b} = \left(3,4\right)$, $\vec{c} = \left(5,-1\right)$. Tìm tọa độ vec tơ $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

Giải

Ta có : $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \left(2.1 + 3 - 5;\ 2.(-2) + 4 - (-1)\right) = \left(0;\ 1\right)$.

Bài 2. Cho $\vec{a} = (1;-1)$, $\vec{b} = \left(2;1\right)$. Hãy phân tích vectơ $\vec{c} = (4;-1)$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Giải

Giả sử $\vec{c} = k\vec{a} + h\vec{b} = (k + 2h; -k + h)$

Tacó: $\begin{cases} k + 2h = 4 \\ -k + h = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ h = 1 \end{cases}$. Vậy $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$.

Bài 3. Cho A(2, 0), B(0, 4), C(1, 3). Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB và tọa độ trọng tâm của tam giác ABC.

Giải

Gọi $I(x,y)$ là trung điểm AB, ta có : $\begin{cases} x = \dfrac{2+0}{2} = 1 \\ y = \dfrac{0+4}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow I(1,2).$

Gọi $G(x_G, y_G)$ là trọng tâm ΔABC, ta có: $\begin{cases} x_G = \dfrac{2+0+1}{3} = 1 \\ y_G = \dfrac{0+4+3}{3} = \dfrac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(1, \dfrac{7}{3}\right).$

Bài 4. Mỗi cặp vectơ sau, cặp nào cùng phương ?

1). $\vec{a} = (1,2)$ và $\vec{b} = (-1,3)$;

2). $\vec{a} = (1,0)$ và $\vec{b} = (2010;0)$;

3). $\vec{a} = (1,2)$ và $\vec{b} = (-3;-6)$.

Giải

1). ta có : $\dfrac{1}{-1} \neq \dfrac{2}{3} \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương.

2). $\vec{b} = 2010\vec{b} \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ cùng phương .

3). $\dfrac{1}{-3} \neq \dfrac{2}{-6} \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương .

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Cho tam giác ABC với A(-5 ; 6) ; B (-4 ; -1) và C(4 ; 3). Tìm D để ABCD là hình bình hành.

Bài 2. Cho tam giác ABC có A(1 ; 2) ; B(5 ; 2) và C(1 ; -3). Tìm tọa tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 3. Cho $\vec{a}$ =(1 ; 2) và $\vec{b}$= (3 ; 4). Tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{m} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.

Bài 4. Cho $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ và $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$. Tìm :

a) $|\vec{a}|$ b) $|\vec{b}|$ c) $\vec{a} - \vec{b}$ d) $\vec{a} + 3\vec{b}$

Bài 5 . Cho tam giác ABC . Các điểm M(1; 0) , N(2; 2) , p(-1;3) lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác .

Bài 6 . Cho A(1; 1); B(3; 2); C(m+4; 2m+1). Tìm m để 3 điểm A, B, C thẳng hàng.

Bài 7. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Chọn hệ trục tọa độ (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$), trong đó O là trung điểm BC, $\vec{i}$ cùng hướng với $\overrightarrow{OC}$, $\vec{j}$ cùng hướng $\overrightarrow{OA}$.

a) Tính tọa độ của các đỉnh của tam giác ABC.
b) Tìm tọa độ trung điểm E của AC.
c) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 8. Cho A(-1; 2), B (3; -4), C(5; 0). Tìm tọa độ điểm D nếu biết:

a) $\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{BD} + 3\overrightarrow{CD} = \vec{0}$.
b) $\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}$.
c) ABCD hình bình hành.
d) ABCD hình thang có hai đáy là BC, AD với BC = 2AD.

Bài 9 . Cho hai điểm I(1; -3), J(-2; 4) chia đọan AB thành ba đọan bằng nhau AI = IJ = JB

a) Tìm tọa độ của A, B.
b) Tìm tọa độ của điểm I’ đối xứng với I qua B.
c) Tìm tọa độ của C, D biết ABCD hình bình hành tâm K(5, -6).

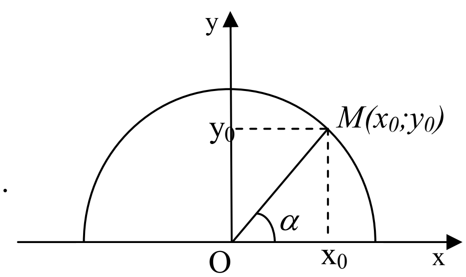
Bài 10. Cho $\vec{a}$ =(2; 1) ; $\vec{b}$ =(3 ; 4) và $\vec{c}$ =(7; 2).

a) Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$;
b) Tìm tọa độ của vectơ $\vec{x}$ thỏa $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$;
c) Tìm các số m ; n thỏa $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

§1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KÌ TỪ 0^0 ĐẾN 180^0

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I.GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC



1. Trong mặt phẳng Oxy, với mỗi góc $\alpha\left(0^0 \le \alpha \le 180^0\right)$ ta xác định điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho : $\widehat{xOM} = \alpha$, giả sử điểm M có toạ độ $M\left(x_0; y_0\right)$.

Khi đó :

$\sin\alpha = y_0$; $\cos\alpha = x_0$;

$\tan\alpha = \dfrac{y_0}{x_0}\left(x_0 \ne 0\right)$; $\cot\alpha = \dfrac{x_0}{y_0}\left(y_0 \ne 0\right)$

Và các giá trị $\sin\alpha$; $\cos\alpha$; $\tan\alpha$; $\cot\alpha$ được gọi là các giá trị lượng giác của góc α.

Lưu ý: 1) Nếu α là góc tù thì $\cos\alpha < 0, \tan\alpha < 0, \cot\alpha < 0$.

2) $\tan\alpha$ xác định khi $\alpha \ne 90^0$ và $\cot\alpha$ xác định khi $\alpha \ne 0^0$ và $\alpha \ne 180^0$

2. Tính chất

❖ **Góc phụ nhau :**

$\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$

$\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$

$\tan(90^0 - \alpha) = \cot\alpha$

$\cot(90^0 - \alpha) = \tan\alpha$

$\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$

$\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(180^0 - \alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(180^0 - \alpha) = -\cot\alpha$

3. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt

	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\parallel$	0
$\cot\alpha$	$\parallel$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\parallel$

II. GÓC GIỮA HAI VECTƠ

Cho hai vectơ $\vec{a}; \vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$, từ một điểm O bất kỳ ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}; \overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Khi đó góc $0^0 \le \widehat{AOB} \le 180^0$ gọi là góc giữa hai vectơ $\vec{a}; \vec{b}$. Kí hiệu: $(\vec{a}; \vec{b})$.

Lưu ý: $(\vec{a}; \vec{b}) = (\vec{b}; \vec{a})$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Tính giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt, cho biết một giá trị lượng giác của một góc, rồi tìm các giá trị lượng giác còn lại có góc đó.

Phương pháp : Dựa vào bảng giá trị lượng giác đặc biệt, và các công thức liên quan

Các hệ thức cơ bản :

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad (\cos\alpha \ne 0)$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad (\sin\alpha \ne 0)$$

$$\tan\alpha.\cot\alpha = 1 \ (\sin\alpha.\cos\alpha \ne 0)$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \ (\cos\alpha \ne 0)$$

$$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \ (\sin\alpha \ne 0).$$

Chú ý: $0 \le \sin\alpha \le 1; \ -1 \le \cos\alpha \le 1$.

Bài tập 1. Tính $A = 3\sin 135^0 + \cos 60^0 + 4\sin 150^0$.

Giải

$$A = 3\sin 45^0 + \cos 60^0 + 4\sin 30^0$$

$$= 3\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + 4\cdot\frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{2}+5}{2}$$

Bài tập 2. Cho góc tù x, biết $\sin x = \frac{1}{5}$. Hãy tính các giá trị lượng giác của góc x.

Giải

Ta có : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Suy ra : $\cos x = -\sqrt{1-\sin^2 x} = -\sqrt{1-\frac{1}{25}} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$ (Do x là góc tù nên cosx < 0)

\+ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{1}{2\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{12}$;

\+ $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = -2\sqrt{6}$

Bài tập 3. Cho góc x nhọn, với $\cos x = \frac{1}{3}$. Tính các giá trị lượng giác của góc x.

Giải

Ta có: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Suy ra: $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

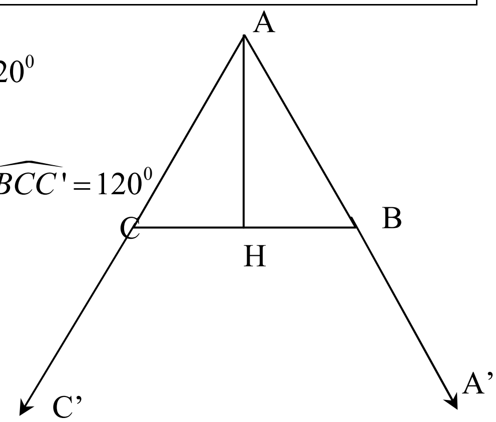
+ $\tan x = \frac{\mathrm{s\,inx}}{\cos x} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$;

+ $\cot x = \frac{\mathrm{cosx}}{\sin x} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Vấn đề 2. Tính góc giữa hai vectơ, độ dài của vectơ
Phương pháp : Để tính góc giữa hai vectơ ta đưa về tính góc giữa hai vectơ có cùng điểm đầu.

Bài tập. Cho tam giác ABC đều cạnh a, đường cao AH. Tính góc giữa các cặp vectơ sau:
$a)\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)$; $b)\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)$; $c)\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BC}\right)$.

Giải



Ta vẽ $\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{AB}$, khi đó : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{BC}\right) = \widehat{CBA'} = 120^0$

(Vì góc $\widehat{ABC} = 60^0$, A, B, B' thẳng hàng)

Tương tự: ta vẽ $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC}$, khi đó: $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{CC'},\overrightarrow{CB}\right) = \widehat{BCC'} = 120^0$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BC}\right) = 90^0$.

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $a\sin 0^0 + b\cos 0^0 + c\sin 90^0$ b) $a\cos 90^0 + b\sin 90^0 + c\sin 180^0$.

c) $4a^2\sin^2 45^0 - 3(a\tan 45^0)^2 + (2a\cos 45^0)^2$ d) $\cos^2 12^0 + \cos^2 78^0 + \cos^2 1^0 + \cos^2 89^0$.

Bài 2. Cho biết một giá trị lượng giác của một góc, tính các giá trị lượng giác còn lại:

a) $\sin\beta = \frac{1}{4}$, β nhọn. b) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ c) $\tan x = 2\sqrt{2}$

Bài 3. Cho tam giác đều ABC có trọng tâm G . Tính góc giữa :

a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{AG}$ và $\overrightarrow{BC}$

d) $\overrightarrow{GB}$ và $\overrightarrow{GC}$ e) $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = a, BC = 2a. Xác định góc giữa các cặp vectơ sau:

a) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ b) $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)$ c) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)$.

Bài 5. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a. Xác định góc giữa các cặp vectơ sau:

a) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ b) $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)$ c) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)$.

§2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1.Định nghĩa tích vô hướng

$\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)$; với $\vec{a}\neq\vec{0};\vec{b}\neq\vec{0}$

Lưu ý: 1) Nếu $\vec{a}=\vec{0}$ hoặc $\vec{b}=\vec{0}$ thì $\vec{a}.\vec{b}=0$.

2) Với $\vec{a}\neq\vec{0};\vec{b}\neq\vec{0}$, ta có: $\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$.

2. Biểu thức toạ độ của tích vô hướng

Cho hai vectơ $\vec{a}=\left(a_1;a_2\right);\vec{b}=\left(b_1;b_2\right)$, khi đó: $\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

3. Ứng dụng của tích vô hướng

a) Độ dài của vectơ $\vec{a}=\left(a_1;a_2\right)$ được tính như sau: $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$

b) Góc giữa hai vectơ $\vec{a}=\left(a_1;a_2\right);\vec{b}=\left(b_1;b_2\right)$ đều khác vectơ $\vec{0}$, khi đó:

$$\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

c) Khoảng cách giữa hai điểm $A\left(x_A;y_A\right);B\left(x_B;y_B\right)$ được tính theo công thức:

$$AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}.$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Tính tích vô hướng của hai vectơ

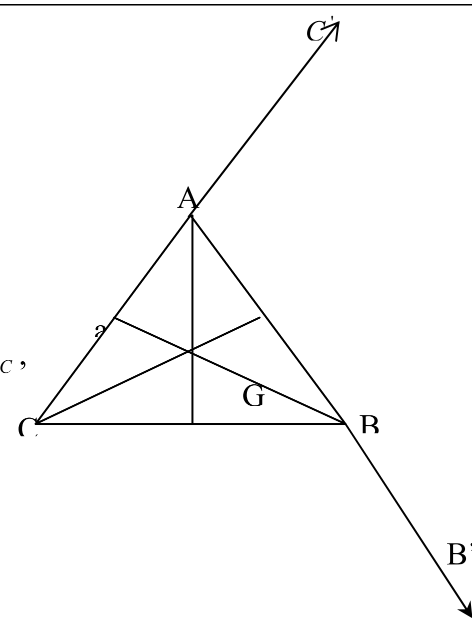
Phương pháp :

- Dùng định nghĩa : $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)$.

Bài tập. Cho tam giác đều ABC cạnh a, trọng tâm G.

Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA};\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}$ theo a;

Tính : $\sin\left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}\right)$; $\cot\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)$.



Giải

Áp dụng công thức tích vô hướng: $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)$

Ta có :

❖ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}=a^2\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC'}\right)=a^2\cos120^0=-\frac{a^2}{2}$.

❖ $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}=\left|\overrightarrow{GA}\right|\left|\overrightarrow{GB}\right|\cos\widehat{AGB}$.

❖ Gọi đường cao xuất phát từ đỉnh A, B, C là h_A,h_B,h_C,

khi đó: $h_A=h_B=h_C=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Do G là trọng tâm tam giác đều ABC cạnh a nên:

$GA = GB = \frac{2}{3}h_A = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cos 120^0 = -\frac{a^2}{6}$

Ta có: $\left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}\right) = \widehat{AGB} = 120^0$; $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{BB'},\overrightarrow{BC}\right) = \widehat{B'BC} = 120^0$

$\Rightarrow \sin\left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}\right) = \sin 120^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cot\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right) = \cot 120^0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Vấn đề 2. Tính độ dài vectơ, khoảng cách giữa hai điểm, góc giữa hai vectơ

Phương pháp :

Sử dụng các công thức sau :

❖ Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$; $\vec{b} = (b_1; b_2)$, khi đó: $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

❖ Độ dài của vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ được tính như sau: $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

❖ Góc giữa hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$; $\vec{b} = (b_1; b_2)$ đều khác vectơ $\vec{0}$, khi đó:

$$\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

❖ Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A; y_A)$; $B(x_B; y_B)$ được tính theo công thức:

$$AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Bài tập 1. Cho tam giác ABC có $A(10;5), B(3;2), C(6;-5)$.

Tính chu vi tam giác ABC.

Tam giác ABC là tam giác gì ?

Giải

Áp dụng công thức tính khoảng cách giữa hai điểm :

• Ta có: $AB = \sqrt{(-7)^2 + (-3)^2} = \sqrt{58}$;

$AC = \sqrt{(-4)^2 + (-10)^2} = \sqrt{116}$; $\quad BC = \sqrt{3^2 + (-7)^2} = \sqrt{58}$

chu vi tam giác ABC: $\sqrt{58} + \sqrt{58} + \sqrt{116}$

Ta có:

$\overrightarrow{BA} = (7;3)$; $\overrightarrow{BC} = (3;-7)$

• Áp dụng công thức tính góc giữa hai vectơ :

$$\cos\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right) = \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|} \frac{7.3 + 3.(-7)}{\sqrt{58}.\sqrt{58}} = 0.$$

Suy ra $\widehat{ABC} = 90^0$.

Mà AB = BC

Vậy tam giác ABC vuông cân tại B.

Bài tập 2. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong các trường hợp sau :

a) $\vec{a}=(3;4), \vec{b}=(4;-3)$ b/ $\vec{a}=(3;2), \vec{b}=(5;-1)$ c) $\vec{a}=\left(-2;-2\sqrt{3}\right), \vec{b}=\left(3;\sqrt{3}\right)$

Giải

a) $\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{3.4+(-3).4}{\sqrt{2^2+(-3)^2}.\sqrt{6^2+4^2}}=0\Rightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=90^0.$

b) $\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{3.5+2.(-1)}{\sqrt{3^2+2^2}.\sqrt{5^2+(-1)^2}}=\dfrac{13}{\sqrt{13}.\sqrt{26}}=\dfrac{13}{13\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=45^0.$

c) $\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{-2.3+\left(-2\sqrt{3}\right).\sqrt{3}}{\sqrt{(-2)^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2}.\sqrt{3^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}}=\dfrac{-12}{\sqrt{16}.\sqrt{12}}=\dfrac{-12}{8\sqrt{3}}=\dfrac{-3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=150^0.$

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = a, BC = 2a. Tính các tích vô hướng:

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$ c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

Bài 2. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a. Tính các tích vô hướng:

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$ c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

Bài 3. Cho tam giác ABC với A (3; -1) ; B(-4;2) ; C(4; 3). Tìm D để ABDC là hình bình hành.

Bài 4. Cho $\overrightarrow{AB}$=(2x - 5 ; 2) ; $\overrightarrow{AC}$=(3 – x; -2). Định x để A , B , C thẳng hàng.

Bài 5. Cho tam giác ABC có A (-2 ; 2) , B(6 ; 6) , C(2 ; -2).

a) Chứng minh rằng A ; B ; C không thẳng hàng;

b) Tìm tọa độ điểm D để ABCD là hình bình hành ;

c) Tìm điểm M $\in$ trục x'Ox để tam giác ABM vuông tại B;

d) Tam giác ABC là tam giác gì ?

e) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.

Bài 6. Cho tam giác ABC có AB = 5, BC = 7, AC = 8.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, rồi suy ra giá trị của góc A.

b) Tính $\overrightarrow{CA}\overrightarrow{CB}$.

c) Gọi D là điểm trên CA sao cho CD = 3. Tính $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}$.

Bài 7. Cho tam giác ABC có A(1; –1), B(5; –3), C(2; 0).

a) Tính chu vi và nhận dạng tam giác ABC.

b) Tìm toạ độ điểm M biết $\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$.

c) Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 8. Cho tam giác ABC có A(1; 2), B(–2; 6), C(9; 8).

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. Chứng minh tam giác ABC vuông tại A.

b) Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

c) Tìm toạ độ trực tâm H và trọng tâm G của tam giác ABC.

d) Tính chu vi, diện tích tam giác ABC.

e) Tìm toạ độ điểm M trên Oy để B, M, A thẳng hàng.

§3. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ GIẢI TAM GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định lý côsin

❖ Trong tam giác ABC bất kì với $BC = a; CA = b; AB = c$ ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A;$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B;$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C;$$

❖ Từ đó ta có công thức tính góc của tam giác ABC bất kỳ, khi biết độ dài các cạnh:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$
$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};$$
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab};$$

❖ Tính độ dài trung tuyến của tam giác bất kỳ

Cho tam giác ABC các cạnh $BC = a; CA = b; AB = c$. Gọi m_a, m_b, m_c là độ dài các đường trung tuyến lần lượt từ các đỉnh A, B và C, ta có:

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4};$$
$$m_b^2 = \frac{2\left(a^2 + c^2\right) - b^2}{4};$$
$$m_c^2 = \frac{2\left(a^2 + b^2\right) - c^2}{4};$$

2. Định lý sin

Trong tam giác ABC bất kì với $BC = a; CA = b; AB = c$ và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp, ta có: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

3. Công thức tính diện tích tam giác

Cho tam giác ABC bất kì với $BC = a; CA = b; AB = c$, $h_a; h_b; h_c$ lần lượt là độ dài đường cao xuất phát từ các đỉnh A, B, C. Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác và $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi của tam giác. Diện tích S của tam giác ABC được tính như sau:

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c;$$

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B;$$

$$S=\frac{abc}{4R};\qquad S=pr;$$

$$S=\sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}\qquad\text{(công thức Hê-rông)}$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Tìm các yếu tố của một tam giác khi biết một vài yếu tố.
Phương pháp :
Áp dụng các định lí sin, côsin, công thức trung tuyến.

Bài tập 1. Cho tam giác ABC biết $\widehat{A}=120^0$, cạnh $b=8cm; c=5cm.$ Tính cạnh a, và các góc $\widehat{B},\widehat{C}$ của tam giác đó.

Giải

Áp dụng định lý côsin ta có:
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=8^2+5^2-2.8.5\cos 120^0=129$
$\Rightarrow a=\sqrt{129}$
Áp dụng hệ quả của định lý Cosin, ta có:

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\left(\sqrt{129}\right)^2+5^2-8^2}{2.5\sqrt{129}}=\frac{3\sqrt{129}}{43}$$

$\Rightarrow \widehat{B}\approx 37^0 35'20''$
Tương tự : $\widehat{C}\approx 22^0 24'39''$
Cách khác:
Ta có: $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^0$
$\Rightarrow \widehat{C}=180^0-\left(\widehat{A}+\widehat{B}\right)=22^0 24'39''$

Bài tập 2. Cho tam giác ABC có $a=\sqrt{6}, b=2, c=\sqrt{3}+1$. Tính các góc A, B, bán kính R của đường tròn ngoại tiếp, trung tuyến m_a của tam giác ABC.

Giải

Áp dụng hệ quả định lý cosin, ta có:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2^2+\left(\sqrt{3}+1\right)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2}{2.2\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \widehat{A}=60^0$

Áp dụng định lý sin, ta có: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

$$\Rightarrow \sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{2\sin 60^0}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\Rightarrow \widehat{B}=45^0$

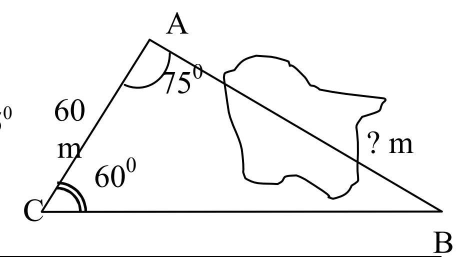
Mặt khác: $\dfrac{a}{\sin A}=2R$

$$\Rightarrow R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{\sqrt{6}}{2\sin 60^0} = \sqrt{2}$$

$$m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} = \frac{2\left[2^2+\left(\sqrt{3}+1\right)^2\right]-\left(\sqrt{6}\right)^2}{4} = \frac{5+2\sqrt{3}}{2}$$

Bài tập 3. (Bài toán thực tiễn)
Hai điểm A, B cách nhau bởi một hồ nước. Người ta lấy một địa điểm C và đo được góc BAC bằng 75^0, góc BCA bằng 60^0, đoạn AC dài 60 mét. Hãy tính khoảng cách từ A đến B.

Giải



Áp dụng định lý sin, ta có: $\dfrac{AC}{\sin\widehat{ABC}} = \dfrac{AB}{\sin\widehat{BCA}}$

Mặt khác: $\widehat{ABC} = 180^0 - \left(\widehat{BCA}+\widehat{BAC}\right) = 180^0 - \left(75^0+60^0\right) = 45^0$

$$\Rightarrow AB = \frac{AC\sin\widehat{BCA}}{\sin\widehat{ABC}} = \frac{60\sin 60^0}{\sin 45^0} = 30\sqrt{6}\ \text{(m)}$$

Vấn đề 2. Diện tích tam giác
Phương pháp :
Áp dụng các công thức tính diện tích tam giác (mục 3)

Bài tập 1. Tam giác ABC có $a=58,\ b=25,\ \widehat{C}=35^0$.
a) Tính diện tích tam giác ABC.
b) Tính đường cao xuất phát từ đỉnh A.
c) Tính bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác ABC.

Giải

a) Ta có : $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}58.25.\sin 35^0 = 415,84$ (đvdt).

b) Ta có : $S = \frac{1}{2}ah_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2.415,84}{58} = 14,3$

c) Áp dụng định lí côsin , ta có : $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C$

$= 58^2+25^2-2.58.25.\cos 35^0 = 1613,46$

$\Rightarrow c = 40,17$

• Áp dụng định lí sin, ta có :

$$\frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \frac{c}{2\sin C} = \frac{40,17}{2.\sin 35^0} = 35,02.$$

• $p = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{58+25+40,17}{2} = 61,585$

Ta có : $S = p.r \Rightarrow r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{415,84}{61,585} = 6,75$.

Bài tập 2. Tam giác ABC có $a=45,\ b=35,\ c=20$.
a) Tính diện tích tam giác ABC.
b) Tính bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác ABC.

Giải

a) $p=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{45+35+20}{2}=50$.

Áp dụng công thức Hê-rông ta có :

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{50(50-45)(50-35)(50-20)}$ =335,4 (đvdt).

b) Ta có :

- $S=p.r\Rightarrow r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{335,4}{50}=6,71$.
- $S=\dfrac{abc}{4R}\Rightarrow R=\dfrac{abc}{4S}=\dfrac{45.35.20}{4.335,4}=23,5$.

Bài tập 3. Cho Δ ABC có a = 7, b = 8, c = 5. Tính : Â, S, h_a, R, r, m_a.

Giải

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Leftrightarrow 49 = 64 + 25 - 2.8.5\cos A$

  $\Leftrightarrow \cos A = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^0$.

- $S = \dfrac{1}{2}.b.c.\sin A = \dfrac{1}{2}.8.5.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$ (đvdt).
- $S = \dfrac{1}{2}.a.h_a \Leftrightarrow h_a = \dfrac{2S}{a}=\dfrac{20\sqrt{3}}{7}$.
- $S = \dfrac{abc}{4R} \Leftrightarrow R = \dfrac{abc}{4S}=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$
- $S = p.r \Leftrightarrow r = \dfrac{S}{p}=\dfrac{10\sqrt{3}}{\frac{1}{2}(7+8+5)}=\sqrt{3}$.
- $m_a^2=\dfrac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}=\dfrac{129}{4} \Rightarrow m_a=\dfrac{\sqrt{129}}{2}$.

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Giải tam giác ABC, biết:

a) $c=14;\ \widehat{A}=60^0;\ \widehat{B}=40^0$ b) $b=4,5;\ \widehat{A}=30^0;\ \widehat{C}=75^0$

Bài 2. Giải tam giác ABC, biết:

a) $a=6,3;\ b=6,3;\ \widehat{C}=54^0$ b) $b=32;\ c=45;\ \widehat{A}=87^0$.

Bài 3. Giải tam giác ABC, biết:

a) $a=14;\ b=18;\ c=20$ b) $a=6;\ b=7,3;\ c=4,8$.

Bài 4. Cho tam giác ABC

a) a=5 ; b = 6 ; c = 7. Tính S, h_a, h_b, h_c, R, r.

b) a= $2\sqrt{3}$; b= $2\sqrt{2}$; c= $\sqrt{6}$ - $\sqrt{2}$. Tính 3 góc của tam giác ABC.

c) b=8; c=5; góc A = 60^0. Tính S , R , r , h_a , m_a

d) a=21; b= 17;c =10.Tính S, R , r , h_a , m_a

e) A = 60^0; h_c = $\sqrt{3}$; R = 5 . Tính 3 cạnh a , b, c.

f) A=120^0; B =45^0 ; R =2. Tính 3 cạnh a , b, c.

g) a = 4 , b = 3 , c = 2. Tính S_{ABC}, suy ra S_{AIC} (I trung điểm AB)

h) c = 3 , b = 4 ; S = $3\sqrt{3}$. Tính a

Bài 5. Gọi G là trọng tâm tam giác . Chứng minh rằng : $GA^2 + GB^2 + GC^2 = 1/3\ (a^2+ b^2+ c^2)$.

Bài 6. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta có:

a) $a = b.\cos C + c.\cos B$

b) $\sin A = \sin B\cos C + \sin C\cos B$

c) $h_a = 2R\sin B\sin C$

d) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$

e) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$

f) $4m_a^2 = b^2 + c^2 + 2bc.\cos A$.

g) $S = 2R^2\sin A.\sin B.\sin C$

h) S=Rr(sinA + sinB + sinC)

i) h_a = 2RsinBsinC.

§1. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

Vectơ $\vec{u}$ được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và giá của vectơ $\vec{u}$ song song hoặc trùng với đường thẳng Δ.

❖ Chú ý : Một đường thẳng có vô số vectơ chỉ phương.

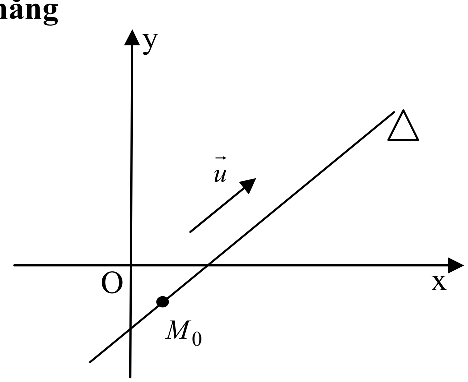
2. Phương trình tham số của đường thẳng

Phương trình tham số của đường thẳng

Δ đi qua $M_0\left(x_0; y_0\right)$

và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \left(u_1; u_2\right)$

là $\begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \end{cases}, \left(u_1{}^2 + u_2{}^2 \neq 0\right)$



3. Phương trình đường thẳng có hệ số góc k

Phương trình đường thẳng đi qua $M_0\left(x_0; y_0\right)$ và có hệ số góc k là :

$$y - y_0 = k\left(x - x_0\right).$$

4. Vectơ pháp tuyến của đường thẳng

Vectơ $\vec{n}$ được gọi là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ nếu $\vec{n} \neq \vec{0}$ và $\vec{n}$ vuông góc với vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

❖ Chú ý : Một đường thẳng có vô số vectơ pháp tuyến.

5. Mối quan hệ giữa vectơ chỉ phương, vectơ pháp tuyến và hệ số góc

❖ Nếu Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \left(u_1; u_2\right)$ với $u_1 \neq 0$ thì hệ số góc của Δ là $k = \dfrac{u_2}{u_1}$.

❖ Nếu Δ có hệ số góc là k thì Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = \left(1; k\right)$.

❖ Δ có $\vec{u} = \left(a; b\right) \Leftrightarrow \vec{n} = \left(-b; a\right)$

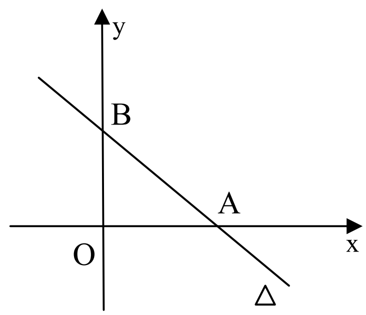
6. Phương trình tổng quát của đường thẳng

❖ Phương trình tổng quát của đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0;y_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(a;b)$ là $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0,\left(a^2+b^2\neq 0\right)$.

❖ Phương trình $ax+by+c=0$ với $a^2+b^2\neq 0$ gọi là phương trình tổng quát của đường thẳng nhận $\vec{n}=(a;b)$ làm vectơ pháp tuyến.

7. Phương trình theo đoạn chắn

Đường thẳng Δ cắt Ox và Oy lần lượt tại $A(a;0)$ và $B(0;b)$ có phương trình theo đoạn chắn là $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a\neq 0,b\neq 0)$.



8. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng : $\begin{matrix}\Delta_1: a_1x+b_1y+c_1=0; \\ \Delta_2: a_2x+b_2y+c_2=0.\end{matrix}$

a) Để xét vị trí tương đối của hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 ta xét số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}\quad (I)$

❖ Hệ (I) có một nghiệm : Δ_1 cắt Δ_2.

❖ Hệ (I) vô nghiệm : $\Delta_1 // \Delta_2$.

❖ Hệ (I) có vô số nghiệm : $\Delta_1\equiv\Delta_2$.

b) Nếu $a_2b_2c_2\neq 0$ thì :

❖ $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}\Leftrightarrow\Delta_1$ cắt Δ_2 ;

❖ $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}\Leftrightarrow\Delta_1 // \Delta_2$;

❖ $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\Leftrightarrow\Delta_1\equiv\Delta_2$.

c) $\Delta_1\perp\Delta_2\Leftrightarrow\vec{n}_{\Delta_1}.\vec{n}_{\Delta_2}=0\Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2=0$.

9. Góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng

$\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ có $\overrightarrow{n_1} = (a_1; b_1)$

và $\Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ có $\overrightarrow{n_2} = (a_2; b_2)$.

Góc giữa chúng được tính theo công thức $\boxed{\cos\left(\widehat{\Delta_1;\Delta_2}\right) = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right)\right| = \dfrac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}}$.

10. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Khoảng cách từ một điểm $M_0(x_0; y_0)$ đến một đường thẳng Δ có phương trình

$ax + by + c = 0$ được tính theo công thức : $\boxed{d(M_0;\Delta) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Viết phương trình tham số, phương trình tổng quát của đường thẳng

Phương pháp :

❖ Để lập phương trình tham số của đường thẳng Δ ta cần xác định

một điểm $M_0(x_0; y_0) \in \Delta$ và một VTCP $\vec{u} = (u_1; u_2)$ của Δ.

Phương trình tham số của Δ : $\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases}$.

❖ Để lập phương trình tổng quát của đường thẳng Δ ta cần xác định một điểm

$M_0(x_0; y_0) \in \Delta$ và một VTPT $\vec{n} = (a; b)$ của Δ.

Phương trình tổng quát của Δ : $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

❖ Nếu Δ cắt trục Ox , trục Oy lần lượt tại A(a; 0), B(0; b) (a, b ≠ 0) thì $\Delta : \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

❖ Nếu Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ và có hệ số góc k thì Δ : $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Bài tập 1. Lập phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường thẳng :

a) Δ đi qua $A(4; -2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 3)$.

b) Δ đi qua $B(1; -2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (5; -3)$.

c) Δ đi qua $C(0;3)$ và có hệ số góc $k=1$.

d) Δ đi qua $D(1;4), E(-2;8)$.

e) Δ đi qua $G(3;0), H(0;-2)$.

Giải

a) ❖ Δ đi qua $A(4;-2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;3)$. Vậy phương trình tham số của đường thẳng Δ là $\begin{cases} x=4+t \\ y=-2+3t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

❖ Δ đi qua $A(4;-2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;3)$ nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;-1)$. Vậy phương trình tổng quát của đường thẳng Δ là $3(x-4)-1(y+2)=0$

$\Leftrightarrow 3x-y-14=0$

b) ❖ Δ đi qua $B(1;-2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(5;-3)$. Vậy phương trình tổng quát của đường thẳng Δ là $5(x-1)-3(y+2)=0 \Leftrightarrow 5x-3y-11=0$.

❖ Δ đi qua $B(1;-2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(5;-3) \Rightarrow \vec{u}=(3;5)$ là vectơ chỉ phương của Δ. Vậy phương trình tham số của đường thẳng Δ là $\begin{cases} x=1+3t \\ y=-2+5t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

c) ❖ Δ đi qua $C(0;3)$ và có hệ số góc $k=1$ nên có phương trình tổng quát là

$y-3=1(x-0) \Leftrightarrow x-y+3=0$.

❖ Δ đi qua $C(0;3)$ và có hệ số góc $k=1 \Rightarrow \vec{u}=(1;1)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ nên Δ có phương trình tham số là $\begin{cases} x=t \\ y=3+t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

d) ❖ Δ đi qua $D(1;4), E(-2;8) \Rightarrow \vec{u}=\overrightarrow{DE}=(-3;4)$ là VTCP của đường thẳng Δ. Vậy phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x=1-3t \\ y=4+4t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

❖ Δ đi qua $D(1;4)$ và có VTCP $\vec{u}=(-3;4) \Rightarrow \vec{n}=(4;3)$ là VTPT của Δ. Vậy phương trình tổng quát của Δ là $4(x-1)+3(y-4)=0 \Leftrightarrow 4x+3y-16=0$.

e) ❖ Δ đi qua $G(3;0), H(0;-2)$ nên phương trình có dạng $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{-2}=1 \Leftrightarrow -2x+3y+6=0$.

❖ Δ đi qua $G(3;0), H(0;-2) \Rightarrow \vec{u}=\overrightarrow{GH}=(-3;-2)$ là VTCP. Vậy phương trình tham số của

Δ là $\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = -2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Bài tập 2. Lập phương trình tổng quát của đường thẳng :

a) Δ đi qua $M(1;2)$ và song song với đường thẳng $d_1 : 2x - y + 1 = 0$.

b) Δ đi qua $N(1;-2)$ và vuông góc với đường thẳng $d_2 : 8x - 11y + 15 = 0$.

Giải

❖ Chú ý :

1) Nếu $\Delta \perp d : ax + by + c = 0 \Rightarrow \Delta$ có dạng : $bx - ay + c' = 0$.

2) Nếu $\Delta // d : ax + by + c = 0 \Rightarrow \Delta$ có dạng : $ax + by + c' = 0 \; (c' \neq c)$.

a) Δ song song với đường thẳng $d_1 : 2x - y + 1 = 0$ nên Δ có dạng : $2x - y + c = 0$.

Vì Δ đi qua $M(1;2)$ nên $2.1 - 2 + c = 0 \Rightarrow c = 0$. Vậy phương trình tổng quát của Δ là $2x - y = 0$.

b) Δ vuông góc với đường thẳng $d_2 : 8x - 11y + 15 = 0$ nên Δ có dạng : $-11x - 8y + c = 0$.

Vì Δ đi qua $N(1;-2)$ nên $-11.1 - 8(-2) + c = 0 \Rightarrow c = -5$. Vậy phương trình tổng quát của Δ là $-11x - 8y - 5 = 0 \Leftrightarrow 11x + 8y + 5 = 0$.

Bài tập 3. Lập phương trình tổng quát của đường thẳng :

a) Δ đi qua $M(-3;5)$ và song song với đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$.

b) Δ đi qua $N(1;-2)$ và vuông góc với đường thẳng $d_2 : \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 11 + 7t \end{cases}$.

Giải

a) Vì $\Delta // d_1$ nên VTCP của d_1 là VTCP của $\Delta \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} = \overrightarrow{u_{d_1}} = (3;-2) \Rightarrow \vec{n} = (2;3)$ là VTPT của Δ. Vậy phương trình tổng quát của Δ là $2(x+3) + 3(y-5) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - 9 = 0$.

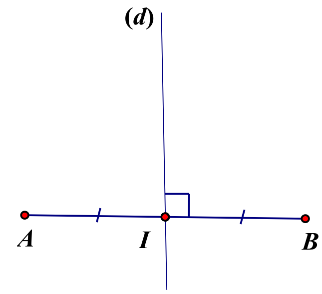
b) Vì $\Delta \perp d_2$ nên VTCP của d_2 là VTPT của $\Delta \Rightarrow \overrightarrow{n_\Delta} = \overrightarrow{u_{d_2}} = (-2;7)$. Vậy phương trình tổng quát của Δ là $-2(x-1) + 7(y+2) = 0 \Leftrightarrow -2x + 7y + 16 = 0$.

Bài tập 4. Lập phương trình đường trung trực của đoạn thẳng AB biết $A(1;3)$, $B(3;-7)$.

Giải

Gọi I là trung điểm của AB $\Rightarrow I(2;-2)$.

Gọi d là đường trung trực của AB $\Rightarrow d$ đi qua I và $d \perp AB$.



❖ $d \perp AB \Rightarrow d$ có VTPT là $\vec{n} = \overrightarrow{AB} = (2;-10)$.

❖ Vậy phương trình tổng quát của đường thẳng d là :

$2(x-2)-10(y+2)=0$

$\Leftrightarrow 2x-10y-24=0$

$\Leftrightarrow x-5y-12=0$.

Vấn đề 2. Chuyển đổi giữa phương trình tổng quát, phương trình tham số của đường thẳng

Phương pháp :

1) Δ có phương trình tổng quát $ax+by+c=0$, ta lập phương trình tham số của Δ như sau :

❖ Cách 1 : $\Delta: ax+by+c=0 \Rightarrow \overrightarrow{n_\Delta}=(a;b) \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta}=(b;-a)$. Ta tìm điểm $M_0(x_0;y_0)\in\Delta$, từ đó lập được phương trình tham số của Δ.

❖ Cách 2 : $\Delta: ax+by+c=0$. Ta cho $x=t$ (nếu $a\neq 0$), suy ra y theo t . Trong trường hợp $a=0$ thì PTTS của Δ là $\begin{cases} x=t \\ y=-\dfrac{c}{b} \end{cases} (t\in\mathbb{R})$

2) Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x=x_0+tu_1 \\ y=y_0+tu_2 \end{cases}$, ta lập phương trình tổng quát của Δ như sau :

❖ Cách 1 : Δ đi qua $M_0(x_0;y_0)$ và có VTCP $\vec{u}=(u_1;u_2) \Rightarrow VTPT\ \vec{n}=(u_2;-u_1)$.

❖ Cách 2 : Khử t ta được PTTQ.

Bài tập 1. Lập phương trình tham số của đường thẳng Δ có PTTQ : $2x+5y-3=0$.

Giải

❖ Cách 1 :

$\Delta: 2x+5y-3=0 \Rightarrow \overrightarrow{n_\Delta}=(2;5) \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta}=(5;-2)$. Ta có : $M_0(-1;1)\in\Delta$.

Vậy phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x=-1+5t \\ y=1-2t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

❖ Cách 2 :

$\Delta: 2x+5y-3=0$, cho $x=t \Rightarrow y=\dfrac{3-2t}{5}$.

Vậy phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x=t \\ y=\dfrac{3}{5}-\dfrac{2}{5}t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

Bài tập 2. Lập phương trình tổng quát của đường thẳng Δ có PTTS : $\begin{cases} x=-2+t \\ y=-1+3t \end{cases}$.

Giải

❖ Cách 1 :

Δ đi qua $M(-2;-1)$ và có VTCP $\vec{u}=(1;3) \Rightarrow VTPT\ \vec{n}=(3;-1)$.

Vậy phương trình tổng quát của đường thẳng Δ là $3(x+2)-1(y+1)=0 \Leftrightarrow 3x-y+5=0$.

❖ Cách 2 : Khử t ta được PTTQ của Δ

$\begin{cases} x=-2+t \\ y=-1+3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x=6-3t \\ y=-1+3t \end{cases} \Leftrightarrow -3x+y=5 \Leftrightarrow -3x+y-5=0$.

Vấn đề 3. Tìm hình chiếu của điểm M trên đường thẳng Δ.

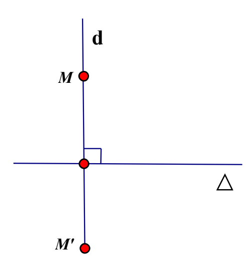
Tìm điểm đối xứng của điểm M qua Δ.

Phương pháp :

- Bước 1: Viết phương trình đường thẳng d qua M và $d\perp\Delta$.
- Bước 2: Gọi H là hình chiếu của M trên Δ.

  Khi đó, $H=d\cap\Delta$.
- Bước 3: M’ là điểm đối xứng của điểm M qua Δ

  $\Leftrightarrow H$ là trung điểm của MM’.



Bài tập. Cho đường thẳng $\Delta: x+2y-4=0$ và điểm $M(1;-5)$.

a) Tìm hình chiếu *H* của *M* lên Δ.

b) Tìm điểm đối xứng *M’* của *M* qua Δ.

Giải

a) ❖ Lập phương trình đường thẳng d qua M và vuông góc với Δ:

Đường thẳng $d \perp \Delta: x+2y-4=0 \Rightarrow d$ có dạng : $2x-y+c=0$.

Vì d qua $M(1;-5)$ nên $2.1-(-5)+c=0 \Rightarrow c=-7 \Rightarrow \Delta: 2x-y-7=0$.

❖ Gọi hình chiếu *H* của *M* lên Δ, khi đó $H=d\cap\Delta$

$\Rightarrow$ tọa độ H là nghiệm của hệ : $\begin{cases} 2x-y-7=0 \\ x+2y-4=0 \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{18}{5} \\ y=\dfrac{1}{5} \end{cases}. \text{ Vậy } H\left(\frac{18}{5};\frac{1}{5}\right).$$

b) *M'* là điểm đối xứng của *M* qua $\Delta \Leftrightarrow H$ là trung điểm của *MM'*.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H=\dfrac{x_M+x_{M'}}{2} \\ y_H=\dfrac{y_M+y_{M'}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'}=2x_H-x_M=2.\dfrac{18}{5}-1=\dfrac{31}{5} \\ y_{M'}=2y_H-y_M=2.\dfrac{1}{5}-(-5)=\dfrac{27}{5} \end{cases}.$$

Vậy $M'\left(\frac{31}{5};\frac{27}{5}\right)$.

Vấn đề 4. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Phương pháp :

Cho hai đường thẳng :

$\Delta_1: a_1x+b_1y+c_1=0;$
$\Delta_2: a_2x+b_2y+c_2=0.$

Toạ độ giao điểm của Δ_1 và Δ_2 là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$ (I)

❖ Δ_1 cắt Δ_2 $\Leftrightarrow$ hệ (I) có một nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$ (nếu $a_2b_2c_2\neq 0$).

❖ Δ_1 // Δ_2 $\Leftrightarrow$ hệ (I) vô nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$ (nếu $a_2b_2c_2\neq 0$).

❖ $\Delta_1 \equiv \Delta_2$ $\Leftrightarrow$ hệ (I) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$ (nếu $a_2b_2c_2\neq 0$).

Bài tập 1. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau, nếu chúng cắt nhau thì tìm toạ độ giao điểm của chúng :

a) $\Delta_1 : 2x + y - 1 = 0,\quad \Delta_2 : 4x + 2y + 5 = 0$.

b) $\Delta_1 : x - 2y + 5 = 0,\ \Delta_2 : 2x + 4y + 10 = 0$.

c) $\Delta_1 : x + y + 2 = 0,\quad \Delta_2 : 2x - y - 5 = 0$.

d) $\Delta_1 : 3x - 4y + 6 = 0,\ \Delta_2 : -12x + 16y - 24 = 0$.

Giải

a) Ta có : $\dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \neq \dfrac{-1}{5} \Rightarrow \Delta_1 // \Delta_2$.

b) Ta có : $\dfrac{1}{2} \neq \dfrac{-2}{4} \Rightarrow \Delta_1$ cắt Δ_2 tại M.

Tọa độ M là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ 2x + 4y + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-5;0)$.

c) Ta có : $\dfrac{1}{2} \neq \dfrac{1}{-1} \Rightarrow \Delta_1 \cap \Delta_2 = N$

$\Rightarrow$ tọa độ N là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ 2x - y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow N(1;-3)$.

d) Ta có : $\dfrac{3}{-12} = \dfrac{-4}{16} = \dfrac{6}{-24} \Rightarrow \Delta_1 \equiv \Delta_2$.

Bài tập 2. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau, nếu chúng cắt nhau thì tìm toạ độ giao điểm của chúng :

a) $\Delta_1 : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -3 - 2t \end{cases}$, $\Delta_2 : \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -7 + 3t \end{cases}$.

b) $\Delta_1 : -4x - 5y + 6 = 0$, $\Delta_2 : \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -7 + 3t \end{cases}$.

c) $\Delta_2 : 8x + 10y - 12 = 0,\ \Delta_1 : \begin{cases} x = -6 + 5t \\ y = 6 - 4t \end{cases}$.

d) $\Delta_1 : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -1 \end{cases}$, $\Delta_2 : x + y - 5 = 0$.

Giải

❖ Chú ý : Nếu có đường thẳng nào ở dạng tham số ta đưa chúng về dạng tổng quát rồi xét vị trí tương đối.

a) ❖ Ta có $\Delta_1:\begin{cases}x=5+t\\y=-3-2t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=10+2t\\y=-3-2t\end{cases}\Leftrightarrow 2x+y-7=0$.

$\Delta_2:\begin{cases}x=4+2t\\y=-7+3t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=12+6t\\-2y=14-6t\end{cases}\Leftrightarrow 3x-2y-26=0$.

❖ Vì $\frac{2}{3}\neq\frac{1}{-2}\Rightarrow\Delta_1\cap\Delta_2=A$

$\Rightarrow$ tọa độ A là nghiệm của hệ :

$\begin{cases}2x+y-7=0\\3x-2y-26=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{40}{7}\\y=-\frac{31}{7}\end{cases}\Rightarrow A\left(\frac{40}{7};-\frac{31}{7}\right)$.

b) ❖ Ta có : $\Delta_1:-6x+4y+21=0$, $\Delta_2:3x-2y-26=0$ (theo câu a)

❖ Vì $\frac{-6}{3}=\frac{4}{-2}\neq\frac{21}{26}\Rightarrow\Delta_1//\Delta_2$

c) ❖ Ta có $\Delta_2:8x+10y-12=0$.

$\Delta_1:\begin{cases}x=-6+5t\\y=6-4t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x=-24+20t\\5y=30-20t\end{cases}\Leftrightarrow 4x+5y-6=0$.

❖ Vì $\frac{4}{8}=\frac{5}{10}=\frac{-12}{-6}\Rightarrow\Delta_1\equiv\Delta_2$.

d) ❖ Ta có $\Delta_1:\begin{cases}x=5+t\\y=-1\end{cases}\Leftrightarrow y+1=0$

$\Delta_2:x+y-5=0$

❖ Vì $\frac{0}{1}\neq\frac{1}{1}\Rightarrow\Delta_1\cap\Delta_2=B$.

$\Rightarrow$ tọa độ B là nghiệm của hệ : $\begin{cases}y+1=0\\x+y-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\y=-1\end{cases}\Rightarrow B(6;-1)$.

Vấn đề 5. Góc giữa hai đường thẳng

Phương pháp :

Cho hai đường thẳng

$\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ có VTPT $\overrightarrow{n_1} = (a_1; b_1)$

và $\Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ có VTPT $\overrightarrow{n_2} = (a_2; b_2)$.

❖ $\cos\left(\widehat{\Delta_1;\Delta_2}\right) = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right)\right| = \dfrac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$

❖ Chú ý: 1) $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

2) Cho Δ_1 : $y = k_1x + m_1$, Δ_2: $y = k_2x + m_2$ thì :

▪ $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$ ▪ $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow k_1 . k_2 = -1$.

Bài tập 1. Tính góc giữa hai đường thẳng

a) $\Delta_1 : x + 2y + 4 = 0$ và $\Delta_2 : x - 3y + 6 = 0$.

b) $\Delta_1 : 4x - 2y - 3 = 0$ và $\Delta_2 : x - 3y + 1 = 0$.

c) $\Delta_1 : x + \sqrt{3}y + 2 = 0$ và $\Delta_2 : \sqrt{3}x - y + 2\sqrt{3} = 0$.

d) $\Delta_1 : x + y + 2 = 0$ và $\Delta_1 : x + y - 1 = 0$.

e) $\Delta_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 7 + 2t \end{cases}$ và $\Delta_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 3 - 3t \end{cases}$.

Giải

a) Ta có : $\cos\left(\widehat{\Delta_1;\Delta_2}\right) = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right)\right| = \dfrac{|1.1 + 2.(-3)|}{\sqrt{1^2 + 2^2}.\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}\sqrt{5}\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy $\left(\widehat{\Delta_1;\Delta_2}\right) = 45^0$.

b) Ta có : $\cos\left(\widehat{\Delta_1;\Delta_2}\right) = \dfrac{|4.1 + (-2).(-3)|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2}.\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \dfrac{10}{\sqrt{20}\sqrt{10}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy $\left(\widehat{\Delta_1;\Delta_2}\right) = 45^0$.

c) Ta có : $1.\sqrt{3}+(-1)\sqrt{3}=0 \Rightarrow \Delta_1 \perp \Delta_2 \Rightarrow \left(\widehat{\Delta_1,\Delta_2}\right)=90^0$.

d) Ta có : $\cos\left(\widehat{\Delta_1;\Delta_2}\right)=\dfrac{|1.1+1.1|}{\sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{2}{2}=1 \Rightarrow \left(\widehat{\Delta_1;\Delta_2}\right)=0^0$.

e) Ta có : $\Delta_1:\begin{cases}x=1+t\\ y=7+2t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2x=-2-2t\\ y=7+2t\end{cases} \Leftrightarrow -2x+y-5=0$

$\Delta_2:\begin{cases}x=t\\ y=3-3t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x=3t\\ y=3-3t\end{cases} \Leftrightarrow 3x+y-3=0$.

$\Rightarrow \cos\left(\widehat{\Delta_1;\Delta_2}\right)=\dfrac{|-2.3+1.1|}{\sqrt{(-2)^2+1^2}.\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left(\widehat{\Delta_1;\Delta_2}\right)=45^0.$

Bài tập 2. Cho hai đường thẳng $\Delta_1: mx+2y-5m=0$ và $\Delta_2: 3x+my-2m-1=0$.

Định m để góc tạo bởi Δ_1 và Δ_2 bằng 45^0.

Giải

$\left(\widehat{\Delta_1;\Delta_2}\right)=45^0 \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\Delta_1;\Delta_2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{|m.3+2.m|}{\sqrt{m^2+2^2}\sqrt{3^2+m^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}|5m|=\sqrt{(m^2+4)(9+m^2)} \Leftrightarrow m^4+13m^2+36=50m^2 \Leftrightarrow m^4-37m^2+36=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m^2=1\\ m^2=36\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=\pm1\\ m=\pm6\end{array}\right.$

Vậy $\left[\begin{array}{l}m=\pm1\\ m=\pm6\end{array}\right.$ thì $\left(\widehat{\Delta_1;\Delta_2}\right)=45^0$.

Bài tập 3. Cho hai đường thẳng $\Delta: x+y-2=0$.

Lập phương trình đường thẳng d đi qua $M(1;0)$ và tạo với Δ một góc 60^0.

Giải

❖ Vì d đi qua $M(1;0)$ nên d có dạng : $a(x-1)+b(y-0)=0 \Leftrightarrow ax+by-a=0$.

❖ d tạo với Δ một góc 60^0 nên $\cos\left(\widehat{d,\Delta}\right)=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{|1.a+1.b|}{\sqrt{1^2+1^2}\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{1}{2}$.

$\Leftrightarrow 2|a+b|=\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow 4(a+b)^2=2(a^2+b^2) \Leftrightarrow 2(a^2+b^2+2ab)=a^2+b^2$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 4ab = 0 \ (*)$

Chia hai vế của $(*)$ cho b^2 ta được $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 4\left(\frac{a}{b}\right) + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a}{b} = -2 + \sqrt{3} \\ \frac{a}{b} = -2 - \sqrt{3} \end{array}\right.$$

- Trường hợp 1 : $b = 1 \Rightarrow a = -2 + \sqrt{3} \Rightarrow d_1 : \left(-2 + \sqrt{3}\right)x + y + 2 - \sqrt{3} = 0$.

- Trường hợp 2 : $b = 1 \Rightarrow a = -2 - \sqrt{3} \Rightarrow d_2 : \left(-2 - \sqrt{3}\right)x + y + 2 + \sqrt{3} = 0$.

Vậy có hai đường thẳng cần tìm là :

$d_1 : \left(-2 + \sqrt{3}\right)x + y + 2 - \sqrt{3} = 0$;

$d_2 : \left(-2 - \sqrt{3}\right)x + y + 2 + \sqrt{3} = 0$.

Vấn đề 6. Khoảng cách từ điểm đến đường thẳng

Phương pháp :

1) Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Cho đường thẳng Δ: $ax + by + c = 0$ và điểm $M_0(x_0; y_0)$ là $\boxed{d(M_0, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$

2) Vị trí tương đối của hai điểm đối với một đường thẳng

Cho đường thẳng Δ: $ax + by + c = 0$ và hai điểm $M(x_M; y_M)$, $N(x_N; y_N) \notin \Delta$.

❖ Hai điểm M, N nằm cùng phía đối với Δ ⇔ $(ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) > 0$.

❖ Hai điểm M, N nằm khác phía đối với Δ ⇔ $(ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) < 0$.

3) Phương trình các đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng Δ_1: $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ và Δ_2: $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ cắt nhau.

Phương trình các đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 là

$$\boxed{\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}}$$

Bài tập 1. Tính khoảng cách từ các điểm đến các đường thẳng tương ứng sau đây :

a) $M\left(1;-1\right)$ và $\Delta: 3x+4y-1=0$

b) $N\left(2;-1\right)$ và $\Delta: 2x+\sqrt{5}y+\sqrt{5}=0$.

c) $P(2;-3)$ và $\varDelta: \begin{cases} x=2t \\ y=2+3t \end{cases}$.

Giải

a) $d(M,\varDelta)=\dfrac{\left|3.1+4.\left(-1\right)-1\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{2}{5}$.

b) $d(N,\varDelta)=\dfrac{\left|2.2+\sqrt{5}\left(-1\right)+\sqrt{5}\right|}{\sqrt{2^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}}=\dfrac{4}{3}$.

c) ❖ <u>Cách 1</u> :

$$d: \begin{cases} x=2t \\ y=2+3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=6t \\ -2y=-4-6t \end{cases} \Leftrightarrow 3x-2y+4=0.$$

$$\Rightarrow d(P,\varDelta)=\dfrac{\left|3.2-2\left(-3\right)+4\right|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\dfrac{16}{\sqrt{13}}$$

❖ <u>Cách 2</u> :

Lấy $H\left(2t;2+3t\right)\in\Delta$.

Ta có : $PH=\sqrt{\left(2t-2\right)^2+\left(3t+5\right)^2}=\sqrt{13t^2+22t+29}=\sqrt{13\left(t^2+\dfrac{22}{13}t+\dfrac{29}{13}\right)}$

$$=\sqrt{13\left(t^2+2.\dfrac{11}{13}t+\left(\dfrac{11}{13}\right)^2-\dfrac{121}{169}+\dfrac{29}{13}\right)}=\sqrt{13\left(\left(t+\dfrac{11}{13}\right)^2+\dfrac{256}{169}\right)}==\sqrt{13\left(t+\dfrac{11}{13}\right)^2+\dfrac{256}{13}}$$

Mặc khác : $13\left(t+\dfrac{11}{13}\right)^2+\dfrac{256}{13}\geq\dfrac{256}{13}\Rightarrow\sqrt{13\left(t+\dfrac{11}{13}\right)^2+\dfrac{256}{13}}\geq\dfrac{16}{\sqrt{13}}$ (*)

$$\Rightarrow d(P,\varDelta)=\dfrac{16}{\sqrt{13}}.$$

Chú ý : Cách này dùng để tìm tọa độ hình chiếu của điểm lên đường thẳng khi đường thẳng có phương trình tham số.

Trong bài toán trên, đẳng thức ở (*) xảy ra $\Leftrightarrow t=-\frac{11}{13}$. Vậy tọa độ hình chiếu của điểm P lên đường thẳng Δ là $H\left(-\frac{22}{13};-\frac{7}{13}\right)$.

Bài tập 2. Tìm bán kính của đường tròn (C) có tâm $I(1;-3)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 3x-4y-5=0$.

Giải

Δ tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow d(I,\Delta)=R$, với R là bán kính của đường tròn (C) $\Rightarrow R=\frac{|3.1-4(-3)-5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{10}{5}=2$.

Bài tập 3. Viết phương trình đường thẳng đi qua A(2; 5) và cách B(5; 1) một khoảng bằng 3

Giải

❖ Đường thẳng Δ đi qua A(1; 1) có dạng : $a(x-2)+b(y-5)=0$ $\left(a^2+b^2\neq 0\right)$

$\Rightarrow \Delta: ax+by-2a-5b=0$.

❖ Ta có : $d(B,\Delta)=3 \Leftrightarrow \frac{|a.5+b.1-2a-5b=0|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3 \Leftrightarrow |3a-4b|=3\sqrt{a^2+b^2}$

$\Leftrightarrow (3a-4b)^2=9\left(a^2+b^2\right) \Leftrightarrow 9a^2-24ab+16b^2=9a^2+9b^2$

$\Leftrightarrow 7b^2-24ab=0 \Leftrightarrow b(7b-24a)=0$ (*).

▪ Chọn $b=0, a=1 \Rightarrow \Delta_1: x-2=0$.

▪ Chọn $b=24 \Rightarrow a=7 \Rightarrow \Delta_2: 7x+24y-2.7-5.24=0 \Leftrightarrow 7x+24y-134=0$.

Vậy có hai đường thẳng cần tìm là :

$\Delta_1: x-2=0$; $\Delta_2: 7x+24y-134=0$.

Bài tập 4. Cho đường thẳng $\Delta: 2x-5y+8=0$. Chứng tỏ rằng $A(1;1)$ và $B(-2;1)$ nằm khác phía đối với Δ.

Giải

Ta có : $2x_A-5y_A+8=2.1-5.1+8=5$ và $2x_B-5y_B+8=2.(-2)-5.1+8=-1$

$\Rightarrow (2x_A-5y_A+8)(2x_B-5y_B+8)<0$

$\Rightarrow A$ và B nằm về khác phía đối với Δ.

Bài tập 5. Cho hai đường thẳng $\Delta_1: 4x-3y-1=0$ và $\Delta_2: 12x-5y+3=0$.

a) Chứng tỏ Δ_1 và Δ_2 cắt nhau.

b) Lập phương trình hai đường phân giác của các góc tạo bởi Δ_1 và Δ_2.

Giải

a) Vì $\frac{4}{12} \neq \frac{-3}{-5} \Rightarrow \Delta_1$ cắt Δ_2.

b) Phương trình hai đường phân giác của các góc tạo bởi Δ_1 và Δ_2 là :

$$\frac{4x-3y-1}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \pm\frac{12x-5y+3}{\sqrt{12^2+(-5)^2}} \Leftrightarrow \frac{4x-3y-1}{5} = \pm\frac{12x-5y+3}{13}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 13(4x-3y-1)=5(12x-5y+3) \\ 13(4x-3y-1)=-5(12x-5y+3) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8x+14y+28=0 \\ 112x-64x+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x+7y+14=0 \\ 56x-32y+1=0 \end{array}\right..$$

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Lập phương trình tham số của đường thẳng Δ biết rằng :

a) Δ đi qua A(2;3) và có VTCP $\vec{u}=(-5;2)$.

b) Δ đi qua B(4;5) và có VTPT $\vec{n}=(3;-2)$.

c) Δ đi qua C(9;5) và có hệ số góc $k=-3$.

d) Δ đi qua D(-1;2) và tạo với trục hoành góc 45^0.

Bài 2. Lập phương trình tổng quát của đường thẳng Δ biết rằng:

a) Δ đi qua A(1;2) và có VTPT $\vec{n}=(4;1)$.

b) Δ đi qua B(1;0) và có VTCP $\vec{u}=(-2;5)$.

c) Δ đi qua C(2;1) và có hệ số góc k = 1.

d) Δ đi qua D(5;2) và tạo với trục hoành góc 45^0.

Bài 3. Lập phương trình đường thẳng Δ trong các trường hợp sau :

a) Δ đi qua M(8;2) và song song với đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x=-1+t \\ y=1+2t \end{cases}$.

b) Δ đi qua N(5;-3) và vuông góc với đường thẳng $\Delta_2 : x - 2y + 3 = 0$.

Bài 4. Cho đường thẳng $\Delta : 2x - 3y + 1 = 0$.

a) Tìm VTPT và VTCP của đường thẳng Δ.

b) Lập phương trình tham số của đường thẳng Δ.

Bài 5. Cho tam giác ABC có A(2;1), B(4;3), C(6;7).

a) Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC.

b) Lập phương trình đường cao AA'.

c) Tìm toạ độ trực tâm H của tam giác ABC.

d) Lập phương trình 3 đường trung trực của tam giác. Từ đó tìm toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Bài 6. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau :

a) $d : \begin{cases} x = -1 - 5t \\ y = 2 + 4t \end{cases}$ và $d' : \begin{cases} x = -6 + 5t \\ y = 2 - 4t \end{cases}$

b) $d : \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$ và $d' : 2x + 4y - 10 = 0$

c) $d : x + y - 2 = 0$ và $d' : 2x + y - 3 = 0$

Bài 7. Tìm góc giữa các cặp đường thẳng sau:

a) $d : x + 2y - 4 = 0$ và $d' : -x + 3y + 1 = 0$

b) $d : \begin{cases} x = 5 + 5t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$ và $d' : 2x - 5y + 1 = 0$

c) $d : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$ và $d' : \begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$

Bài 8. Tính khoảng cách từ điểm I(1;2) đến đường thẳng Δ: x - 3y + 2 = 0 bằng hai cách.

Bài 9. Cho tam giác ABC có A(5;3), B(-1;2), C(-4;5).

a) Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC.

b) Lập phương trình các đường cao của tam giác. Từ đó tìm toạ độ trực tâm H của tam giác.

c) Tìm toạ độ điểm I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

d) Lập phương trình các đường phân giác trong của tam giác ABC.

e) Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC. Hãy chứng minh I, G, H thẳng hàng.

Bài 10. Viết phương trình đường thẳng Δ trong các trường hợp sau :

a) Δ đi qua điểm M(-2;-4) và cắt các trục toạ độ lần lượt tại A và B sao cho tam giác OAB vuông cân.

b) Δ đi qua điểm N(5;-3) và cắt các trục toạ độ tại A và B sao cho N là trung điểm của AB.

c) Δ đi qua M(1;2) và Δ tạo với đường thẳng d: 2x-3y+1=0 góc 60^0.

Bài 11. Cho đường thẳng d có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 2t \end{cases}$.

a) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M(-2;1) và vuông góc với đường thẳng d.

b) Tìm giao điểm của đường thẳng Δ với đường thẳng d.

c)Tìm điểm M' đối xứng với điểm M qua d.

Bài 12. Viết phương trình đường thẳng đi qua M(2;5) và cách đều hai điểm A(-1;2) và B(5;4).

Bài 13. Tìm phương trình của tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng:
$\Delta_1 : 5x + 3y - 3 = 0$ và $\Delta_2 : 5x + 3y + 7 = 0$.

Bài 14. Cho ΔABC có A(1;3). Các đường trung tuyến qua B và C lần lượt là $y - 1 = 0$ và $x - 2y + 1 = 0$. Hãy xác định toạ độ B và C.

Bài 15. Cho ΔABC có phương trình đường thẳng AB : 5x - 3y + 2 = 0. Các đường cao qua A và B lần lượt có phương trình: 4x - 3y + 2 = 0 và 7x + 2y – 22 = 0.
Lập phương trình đường thẳng AC và BC.

Bài 16. Cho ΔABC có A(1;2). Đường cao BE: 2x + y + 1 = 0 và đường phân giác trong CD: x + y + 2 = 0. Lập phương trình 3 cạnh tam giác ABC.

Bài 17. Cho ΔABC có A(1;1). Đường phân giác trong BD : 2x – y + 3 = 0 và trung tuyến CM : x + y + 1 = 0. Lập phương trình 3 cạnh tam giác ABC.

Bài 18. Lập phương trình 4 cạnh của hình vuông ABCD biết AB, BC, CD, DA lần lượt qua M(1;2), N(3;0), P(5;1), Q(-2;7).

Bài 19. Cho A(1;2), B(3;7) và d: x + y + 1 = 0.

a) Chứng minh A,B nằm cùng phía với d.

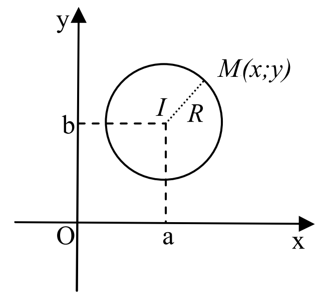
b) Tìm điểm M thuộc đường thẳng d sao cho MA + MB đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 20. Cho 2 đường thẳng d_1 : 2x – y – 1 = 0 và d_2 : 3x + 2y – 5 = 0.
Lập phương trình đường thẳng d_3 đối xứng với đường thẳng d_1 qua đường thẳng d_2.

§2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình đường tròn



❖ Phương trình đường tròn tâm $I(a;b)$ và bán kính R là : $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

❖ Nếu $a^2+b^2-c>0$ thì phương trình $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ là phương trình của đường tròn với tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

2. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

Tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0;y_0)$ của đường tròn tâm $I(a;b)$ có phương trình là :

$(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Lập phương trình đường tròn

1) Cách 1 : Dùng tâm và bán kính

❖ Tìm tâm $I(a;b)$ và bán kính R của đường tròn (C).

❖ Phương trình đường tròn (C) có dạng : $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

2) Cách 2 : Dùng phương trình tổng quát

❖ Phương trình đường tròn (C) có dạng : $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$, với $a^2+b^2-c>0$.

❖ Lập hệ phương trình với các ẩn số là a, b, c.

❖ Tìm a, b, c suy ra phương trình đường tròn (C).

Bài tập 1. Viết phương trình đường tròn có tâm I(1; – 2) và

a) đi qua điểm A(3; 5).

b) tiếp xúc với đường thẳng có phương trình Δ : x + y – 1 = 0.

Giải

a) (C) có tâm (1; – 2) và đi qua A(3; 5) nên có bán kính

$$R = IA = \sqrt{(3-1)^2 + (5-(-2))^2} = \sqrt{4+49} = \sqrt{53}.$$

Vậy phương trình của đường tròn (C) là : $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 53$.

b) C) có tâm (1; – 2) và tiếp xúc với đường thẳng Δ :   x + y – 1 = 0

$$\Rightarrow R = d(I,\Delta) = \frac{|1-2-1|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Vậy phương trình của đường tròn (C) là : $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2$.

Bài tập 2. Viết phương trình đường tròn (C) trong các trường hợp sau :

a) (C) có đường kính AB biết A(3; 5) và B(- 1; 3).

b) (C) có đi qua ba điểm A(1;-2), B(2;5) và C(4;-3).

c) (C) đi qua hai điểm $A(2;3)$, $B(-1;1)$ và có tâm nằm trên đường thẳng $\Delta: x - 3y - 11 = 0$

Giải

a) ❖ Tâm I của (C) là trung điểm của AB

Ta có : $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{3+(-1)}{2} = 1 \\ x_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{5+3}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow I(1;4)$.

❖ (C) có bán kính $R = IA = \sqrt{(3-1)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$.

Vậy phương trình của đường tròn (C) là : $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 5$.

b) ❖ Phương trình đường tròn (C) có dạng : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với $a^2 + b^2 - c > 0$.

❖ (C) có đi qua ba điểm A(1;-2), B(2;5) và C(4;-3) nên ta có hệ :

$$\begin{cases} 1^2 + (-2)^2 - 2a - 2b(-2) + c = 0 \\ 2^2 + 5^2 - 2a.2 - 2b.5 + c = 0 \\ 4^2 + (-3)^2 - 2a.4 - 2b.(-3) + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a + 4b + c = -5 \\ -4a - 10b + c = -29 \\ -8a + 6b + c = -25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{41}{11} \\ b = \dfrac{13}{11} \\ c = -\dfrac{25}{11} \end{cases}$$

❖ Vậy phương trình của đường tròn (C) là : $x^2+y^2-\frac{82}{11}x-\frac{26}{11}y-\frac{25}{11}=0$.

c) ❖ Phương trình đường tròn (C) có dạng : $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ với $a^2+b^2-c>0$.

❖ (C) có tâm nằm trên đường thẳng $\Delta: x-3y-11=0 \Rightarrow a-3b-11=0$; (1)

(C) đi qua hai điểm $A(2;3) \Leftrightarrow 4+9-4a-6b+c=0 \Leftrightarrow -4a-6b+c=-13$; (2)

(C) đi qua hai điểm $B(-1;1) \Leftrightarrow 1+1+2a-2b+c=0 \Leftrightarrow 2a-2b+c=-2$; (3)

Từ (1), (2), (3) ta có hệ :

$$\begin{cases} a-3b=11 \\ -4a-6b+c=-13 \\ 2a-2b+c=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{7}{2} \\ b=-\frac{5}{2} \\ c=-14 \end{cases}.$$

❖ Vậy phương trình của đường tròn (C) là : $x^2+y^2-7x+5y-14=0$.

Bài tập 3. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(1;0)$, $B(3;0)$ và tiếp xúc với $\Delta: x-y+1=0$.

Giải

Gọi $I(a;b)$ là tâm của đường tròn (C).

▪ (C) đi qua $A(1;0)$ và $B(3;0)$ nên $IA=IB \Leftrightarrow IA^2=IB^2$

$\Leftrightarrow (1-a)^2+(0-b)^2=(3-a)^2+(0-b)^2 \Leftrightarrow |1-a|=|3-a| \Leftrightarrow a=2 \Rightarrow I(2;b)$

▪ (C) tiếp xúc với $\Delta \Leftrightarrow IA=d(I,\Delta) \Leftrightarrow \sqrt{1+b^2}=\frac{|2-b+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}$

$\Leftrightarrow 2(1+b^2)=(3-b)^2 \Leftrightarrow b^2+6b-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=-7 \end{array}\right.$.

Vậy có hai đường tròn cần tìm là :

❖ Tâm $I(2;1) \Rightarrow R=IA=\sqrt{1+b^2}=\sqrt{1+1^2}=\sqrt{2} \Rightarrow (C_1):(x-2)^2+(y+1)^2=2$.

❖ Tâm $I(2;-7) \Rightarrow R=IA=\sqrt{1+(-7)^2}=\sqrt{50} \Rightarrow (C_1):(x-2)^2+(y+7)^2=50$.

Vấn đề 2. Nhận dạng phương trình bậc hai là phương trình đường tròn. Xác định tọa độ tâm và bán kính của đường tròn.

Phương pháp :

1) Cách 1 : Đưa phương trình về dạng : $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. Khi đó phương trình đã cho là phương trình đường tròn có tâm $I(a;b)$ và bán kính R.

2) Cách 2 : Đưa phương trình về dạng : $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$.

Tìm a, b, c và tính giá trị a^2+b^2-c.

▪ Nếu $a^2+b^2-c>0$ thì phương trình trên là phương trình đường tròn có tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

▪ Nếu $a^2+b^2-c\le 0$ thì phương trình trên không là phương trình đường tròn.

Bài tập 1. Xét xem các phương trình sau có là phương trình của đường tròn không ? Nếu có hãy tìm tâm và bán kính :

a) $x^2+y^2+4x-8y-29=0$.

b) $x^2+y^2-6x+4y+14=0$.

c) $4x^2+4y^2-8x-16y+19=0$.

Giải

a) ***Cách 1 :***

Phương trình (C) có dạng : $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$.

Ta có : $\begin{cases}-2a=4\\-2b=-8\\c=-29\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b=4\\c=-29\end{cases}\Rightarrow a^2+b^2-c=4+16+29=49>0$.

Vậy (C) là đường tròn có tâm $I(-2;4)$ và bán kính $R=\sqrt{49}=7$.

Cách 2 :

$$x^2+y^2+4x-8y-29=0\Leftrightarrow\left(x^2+4x+4\right)+\left(y^2-8y+16\right)-4-16-29=0$$

$$\Leftrightarrow(x+2)^2+(y-4)^2=49.$$

Vậy (C) là đường tròn có tâm $I\left(-2;4\right)$ và bán kính $R=\sqrt{49}=7$.

b) Phương trình (C) có dạng : $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$.

Ta có : $\begin{cases}-2a=-6\\-2b=4\\c=14\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=3\\b=-2\\c=14\end{cases} \Rightarrow a^2+b^2-c=9+4-14=-1<0$.

Vậy phương trình (C) không là phương trình của đường tròn.

c) $4x^2+4y^2-8x-16y+19=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x-4y+\dfrac{19}{4}=0$.

Ta có : $\begin{cases}-2a=-2\\-2b=-4\\c=\dfrac{19}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=2\\c=\dfrac{19}{4}\end{cases} \Rightarrow a^2+b^2-c=1+4-\dfrac{19}{4}=\dfrac{1}{4}>0$.

Vậy (C) là đường tròn có tâm $I\left(1;2\right)$ và bán kính $R=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}$.

Bài tập 2. Cho (C_m) : $x^2+y^2+4mx-2my+2m+3=0$.

Định m để (C_m) là đường tròn. Khi đó, hãy tìm tọa độ tâm và tính bán kính của đường tròn (C_m) theo m.

Giải

▪ Ta có :

$$\begin{cases}-2a=4m\\-2b=-2m\\c=2m+3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2m\\b=m\\c=2m+3\end{cases}$$

$\Rightarrow a^2+b^2-c=4m^2+m^2-\left(2m+3\right)=5m^2-2m-3$

▪(C_m) là đường tròn $\Leftrightarrow a^2+b^2-c>0 \Leftrightarrow 5m^2-2m-3>0 \Leftrightarrow m<-\dfrac{3}{5}$ hoặc $m>1$.

Khi đó, (C_m) có tâm $I\left(2m;m\right)$ và bán kính $R=\sqrt{5m^2-2m-3}$

Vấn đề 3. Lập phương trình tiếp tuyến của đường tròn

Phương pháp :

Cho đường tròn (C) có tâm $I\left(a;b\right)$ và bán kính R.

1) Loại 1. Lập phương trình tiếp tuyến Δ tại điểm $M_0(x_0;y_0)\in\left(C\right)$.

Δ có dạng : $\left(x_0-a\right)\left(x-x_0\right)+\left(y_0-b\right)\left(y-y_0\right)=0$.

2) Loại 2. Lập phương trình tiếp tuyến Δ có phương cho trước.

Dùng điều kiện tiếp xúc để xác định Δ. Δ tiếp xúc với (C)$\Leftrightarrow d\left(I,\Delta\right)=R$.

- *Dạng 1 :* Tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: ax+by+c=0$.
  - – Tiếp tuyến $\Delta // d \Rightarrow \Delta: ax+by+c'=0$ $\left(c'\neq c\right)$.
  - – Δ tiếp xúc với (C)$\Leftrightarrow d\left(I,\Delta\right)=R\Rightarrow c'$.
  - – Thay *c'* vào phương trình Δ suy ra tiếp tuyến cần tìm.
- *Dạng 2 :* Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: ax+by+c=0$.
  - – Tiếp tuyến $\Delta\perp d\Rightarrow\Delta: bx-ay+c'=0$.
  - – Δ tiếp xúc với (C)$\Leftrightarrow d\left(I,\Delta\right)=R\Rightarrow c'$.
  - – Thay *c'* vào phương trình Δ suy ra tiếp tuyến cần tìm.

3) Loại 3. Lập phương trình tiếp tuyến Δ đi qua $A\left(x_A;y_A\right)\notin\left(C\right)$.

– Δ đi qua $A\left(x_A;y_A\right)\Rightarrow\Delta: a\left(x-x_A\right)+b\left(y-y_A\right)=0$.

– Δ tiếp xúc với (C)$\Leftrightarrow d\left(I,\Delta\right)=R$. Chọn một giá trị $b\Rightarrow a$.

– Thay a, b vào phương trình Δ suy ra tiếp tuyến cần tìm.

Bài tập 1. Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-4x+8y-5=0$.

a) Xác định tâm và bán kính của (C).

b) Lập phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M\left(-1;0\right)$.

c) Lập phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d_1: 4x-3y+5=0$.

d) Lập phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $d_2: 12x-5y+3=0$.

Giải

a) Phương trình (C) có dạng : $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$.

Ta có : $\begin{cases}-2a=-4\\-2b=8\\c=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-4\\c=-5\end{cases}\Rightarrow a^2+b^2-c=4+16+5=25$.

Vậy đường tròn (C) có tâm $I\left(2;-4\right)$ và bán kính $R=\sqrt{25}=5$.

b) Phương trình tiếp tuyến Δ của (C) tại điểm $M(-1;0)$ có dạng :

$$(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0$$
$$\Leftrightarrow (-1-2)(x+1)+(0+4)(y-0)=0$$
$$\Leftrightarrow -3x+4y-3=0$$

c) Tiếp tuyến $\Delta // d_1: 4x-3y+5=0 \Rightarrow$ Phương trình Δ có dạng : $4x-3y+c=0\ (c\neq 5)$.

Δ tiếp xúc với (C)$\Leftrightarrow d(I,\Delta)=R$

$$\Leftrightarrow \frac{|4.2-3(-4)+c|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=5 \Leftrightarrow |20+c|=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}20+c=25\\20+c=-25\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}c=5\\c=-45\end{array}\right. \text{(loại c = 5)}$$

Vậy tiếp tuyến Δ cần tìm là : $4x-3y-45=0$.

d) Tiếp tuyến $\Delta \perp d_2: 12x-5y+3=0 \Rightarrow$ Phương trình Δ có dạng : $5x+12y+c=0$.

Δ tiếp xúc với (C)$\Leftrightarrow d(I,\Delta)=R$

$$\Leftrightarrow \frac{|5.2+12.(-4)+c|}{\sqrt{5^2+12^2}}=5 \Leftrightarrow |c-38|=65 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}c-38=65\\c-38=-65\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}c=103\\c=-27\end{array}\right.$$

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm là :

$$\Delta_1: 5x+12y+103=0$$
$$\Delta_2: 5x+12y-27=0.$$

Bài tập 2. Cho đường tròn (C) có phương trình $(x+1)^2+(y-2)^2=5$.

Lập phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) đi qua $A(4;7)$.

Giải

(C) có tâm $I(-1;2)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$.

Tiếp tuyến Δ đi qua $A(4;7)$ có dạng : $a(x-4)+b(y-7)=0\ (a^2+b^2\neq 0)$

$\Rightarrow \Delta: ax+by-4a-7b=0$.

Δ tiếp xúc với (C)$\Leftrightarrow d(I,\Delta)=R$

$$\Leftrightarrow \frac{|a.(-1)+b.2-4a-7b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow |-5a-5b|=\sqrt{5}\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow 5|a+b|=\sqrt{5}\sqrt{a^2+b^2}$$

$\Leftrightarrow \sqrt{5}\left|a+b\right| = \sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow 5a^2+5b^2+10ab = a^2+b^2 \Leftrightarrow 4a^2+10ab+4b^2 = 0$

$\Leftrightarrow 2a^2+5ab+2b^2 = 0$ (*)

Chia hai vế của (*) cho b^2 ta được $2\left(\frac{a}{b}\right)^2+5\left(\frac{a}{b}\right)+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a}{b}=-\frac{1}{2} \\ \frac{a}{b}=-2 \end{array}\right.$

▪ Chọn $a=1 \Rightarrow b=-2 \Rightarrow \Delta_1 : x-2y+10=0$.

▪ Chọn $a=2 \Rightarrow b=-1 \Rightarrow \Delta_2 : 2x-y-1=0$.

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm là :

$\Delta_1 : x-2y+10=0$
$\Delta_2 : 2x-y-1=0.$

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình đường tròn. Tìm tâm và bán kính của đường tròn đó :

a) $x^2+y^2-2x-2y-2=0$; b) $x^2+y^2-6x+4y-1=0$;

c) $2x^2+2y^2+4x+8y+18=0$; d) $x^2+y^2-6x+7=0$.

Bài 2. Tìm *m* để các phương trình sau là phương trình đường tròn :

a) $x^2+y^2+4mx-2my+2m-4=0$;

b) $x^2+y^2-2(m+1)x+2my+3m^2-2=0$;

c) $x^2+y^2-2(m-3)x+4my-m^2+5m+4=0$;

d) $x^2+y^2-2mx-2(m^2-1)y+m^4-2m^4-2m^2-4m+1=0$.

Bài 3. Lập phương trình đường tròn trong mỗi trường hợp sau:

a) Đường tròn tâm A bán kính AB và đường tròn đường kính AB biết A(−1 ; 1) , B(5 ; 3)
b) Đường tròn tâm I(−4 ; 2) và tiếp xúc với đường thẳng 3x + 4y – 16 = 0
c) Đường tròn tiếp xúc với đường thẳng 3x – 4y – 31 = 0 tại điểm A(1 ; −7) và có bán kính bằng 5.
d) Đường tròn tiếp xúc với hai trục tọa độ và đi qua $M(-4;8)$.

Bài 4. Lập phương trình đường tròn đi qua 3 điểm A , B , C trong mỗi trường hợp sau:

a) A(1 ; 3) , B(5 ; 6) , C(7 ; 0) ;
b) A(0 ; 1) , B(1 ; −1) , C(2 ; 0).

Tìm tâm và bán kính của các đường tròn đã cho.

Bài 5. Lập phương trình tiếp tuyến với (C) : $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 1 = 0$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng 5x + 12y – 6 = 0.

Bài 6. Lập phương trình tiếp tuyến với (C): $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$ và vuông góc với đường thẳng $3x - y + 6 = 0$.

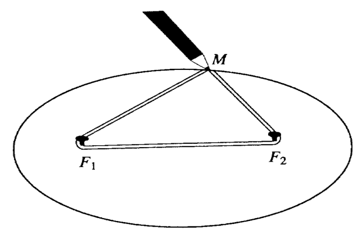
Bài 7. Lập phương trình tiếp tuyến với (C): $x^2 + y^2 - 8x + 12y - 5 = 0$ biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(-1;1)$.

§3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG ELIP

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa đường elip

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ và độ dài không đổi 2a $(a > c > 0)$.



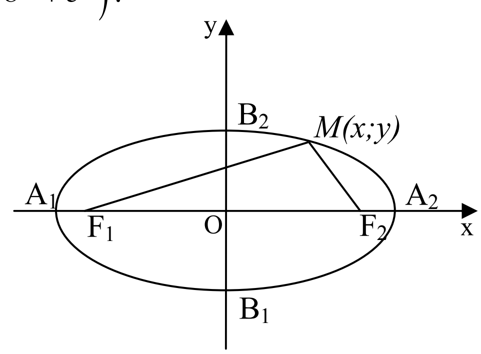
Elip là tập hợp các điểm M sao cho $F_1M + F_2M = 2a$.

Ta có thể viết : $(E) = \{M \mid F_1M + F_2M = 2a\}$.

2. Phương trình chính tắc của elip

Phương trình chính tắc của elip (E) là : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad \left(a^2 = b^2 + c^2\right)$.

3. Các yếu tố của elip



- Hai tiêu điểm : $F_1(-c;0), F_2(c;0)$.
- Bốn đỉnh : $A_1(-a;0), A_2(a;0), B_1(0;-b), B_2(0;b)$.
- Độ dài trục lớn : $A_1A_2 = 2a$.
- Độ dài trục bé : $B_1B_2 = 2b$.
- Tiêu cự : $F_1F_2 = 2c$.

4. Hình dạng của elip

• (E) có hai trục đối xứng là Ox, Oy và có tâm đối xứng là gốc tọa độ.

• Mọi điểm của elip (E) đều nằm trong hình chữ nhật có kích thước 2a và 2b giới hạn bởi các đường thẳng $x = \pm a$, $y = \pm b$. Hình chữ nhật đó được gọi là hình chữ nhật cơ sở của elip (E).

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

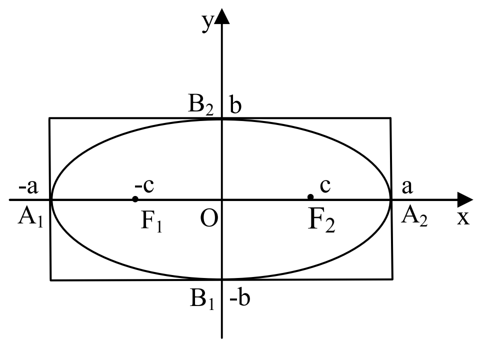
Vấn đề 1. Xác định các yếu tố của một elip

Phương pháp :

- Đưa phương trình elip về dạng chính tắc.
- Tìm a, b, c.
- Kết luận theo yêu cầu của bài toán.

Cần nhớ các yếu tố của elip :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \left(a^2=b^2+c^2\right)$$



- Hai tiêu điểm : $F_1\left(-c;0\right), F_2\left(c;0\right)$.
- Bốn đỉnh : $A_1\left(-a;0\right), A_2\left(a;0\right), B_1\left(0;-b\right), B_2\left(0;b\right)$.
- Độ dài trục lớn : $A_1A_2=2a$.
- Độ dài trục bé : $B_1B_2=2b$.
- Tiêu cự : $F_1F_2=2c$.
- Phương trình các đường thẳng chứa hình chữ nhật cơ sở là $x=\pm a,\ y=\pm b$.

Bài tập 1. Cho elip (E) : $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.Tìm toạ độ các tiêu điểm , tọa độ các đỉnh, độ dài trục lớn, độ dài trục bé của elip. Vẽ elip (E).

Giải

Phương trình elip (E) có dạng : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Do đó $\begin{cases} a^2=16 \\ b^2=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases}$.

Ta có : $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$.

Vậy elip (E) có :

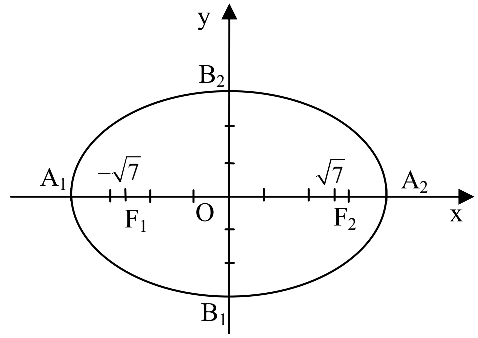
- Hai tiêu điểm : $F_1\left(-\sqrt{7};0\right), F_2\left(\sqrt{7};0\right)$.
- Bốn đỉnh : $A_1\left(-4;0\right), A_2\left(4;0\right), B_1\left(0;-3\right), B_2\left(0;3\right)$.

▪ Độ dài trục lớn : $A_1A_2 = 2a = 2.4 = 8$.

▪ Độ dài trục bé : $B_1B_2 = 2b = 2.3 = 6$.

▪ Tiêu cự : $F_1F_2 = 2c = 2\sqrt{7}$.

❖ Hình vẽ của elip (E) ở hình bên.



Bài tập 2. Cho elip (E) : $9x^2 + 25y^2 = 225$. Tìm toạ độ các tiêu điểm , tọa độ các đỉnh, độ dài trục lớn, độ dài trục bé của elip (E).

Giải

Ta có :

$$9x^2 + 25y^2 = 225 \Leftrightarrow \frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Phương trình elip (E) có dạng : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Do đó $\begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases}$.

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$.

Vậy elip (E) có :

▪ Hai tiêu điểm : $F_1(-4;0), F_2(4;0)$.

▪ Bốn đỉnh : $A_1(-5;0), A_2(5;0), B_1(0;-3), B_2(0;3)$.

▪ Độ dài trục lớn : $A_1A_2 = 2a = 2.5 = 10$.

▪ Độ dài trục bé : $B_1B_2 = 2b = 2.3 = 6$.

▪ Tiêu cự : $F_1F_2 = 2c = 8$.

Vấn đề 2. Lập phương trình chính tắc của elip

Phương pháp :

Từ các yếu tố đã biết của elip xác định a, b. Nếu đề bài cho c thì tìm a, b theo công thức $a^2 = b^2 + c^2$ suy ra phương trình (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Bài tập. Lập phương trình chính tắc của elip (E) trong mỗi trường hợp sau :

a) Độ dài trục lớn bằng 12, trục nhỏ bằng 8.

b) Độ dài trục lớn bằng 10, tiêu cự bằng 8

c) Độ dài trục lớn bằng 8, độ dài trục nhỏ bằng tiêu cự.

d) Tiêu cự bằng 8 và đi qua điểm $M\left(\sqrt{15};-1\right)$.

e) Độ dài trục nhỏ bằng 6 và đi qua điểm $M\left(-2\sqrt{5};2\right)$.

f) Một tiêu điểm là $F_1(-2;0)$ và độ dài trục lớn bằng 10.

g) Một tiêu điểm là $F_1\left(-\sqrt{3};0\right)$ và đi qua điểm $M\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

h) Đi qua hai điểm $M\left(4;-\sqrt{3}\right)$, $N\left(2\sqrt{2};3\right)$.

Giải

Phương trình chính tắc của elip (E) có dạng : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a > b > 0).

a) Theo giả thiết độ dài trục lớn bằng 12, trục nhỏ bằng 8

$\Rightarrow \begin{cases} 2a=12 \\ 2b=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=4 \end{cases}$. Vậy (E) : $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$.

b) Độ dài trục lớn bằng 10, tiêu cự bằng 8

$\Rightarrow \begin{cases} 2a=10 \\ 2c=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ c=4 \end{cases}$

Mà $b^2=a^2-c^2=5^2-4^2=9 \Rightarrow b=3$. Vậy (E) : $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

c) Độ dài trục lớn bằng 8, độ dài trục nhỏ bằng tiêu cự

Ta có : $2a=8 \Rightarrow a=4$; $2b=2c \Rightarrow b=c$.

Mà $b^2=a^2-c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 2b^2=a^2 \Rightarrow b^2=\frac{a^2}{2}=\frac{4^2}{2}=8 \Rightarrow b=\sqrt{8}$.

Vậy (E) : $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$.

d) Tiêu cự bằng 8 và đi qua điểm $M\left(\sqrt{15};-1\right)$.

• Ta có : $2c = 8 \Rightarrow c = 4$

• (E) đi qua $M\left(\sqrt{15};-1\right)$ $\Rightarrow \dfrac{15}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = 1\left(*\right)$.

Mặc khác $a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + 4^2 = b^2 + 16$ (**)

$\left(*\right) \Rightarrow \dfrac{15}{b^2+16} + \dfrac{1}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \left(b^2+16\right)b^2 = 15b^2 + b^2 + 16 \Leftrightarrow b^4 = 16 \Leftrightarrow b^2 = 4$.

Với $b^2 = 4$ thay vào (**) ta được $a^2 = b^2 + 16 = 4 + 16 = 20$.

Vậy (E) : $\dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

e) Độ dài trục nhỏ bằng 6 và đi qua điểm $M\left(-2\sqrt{5};2\right)$.

• Ta có : $2b = 6 \Rightarrow b = 3$

• (E) đi qua $M\left(-2\sqrt{5};2\right)$ $\Rightarrow \dfrac{\left(-2\sqrt{5}\right)^2}{a^2} + \dfrac{2^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{20}{a^2} + \dfrac{4}{b^2} = 1\left(*\right)$.

Thay $b = 3$ vào (*) ta được $\dfrac{20}{a^2} + \dfrac{4}{9} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{20}{a^2} = 1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9} \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{9.20}{5} = 36$.

Vậy (E) : $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

f) Một tiêu điểm là $F_1(-2;0)$ và độ dài trục lớn bằng 10.

Ta có : $c = 2$; $2a = 10 \Rightarrow a = 5$

Mà $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 4 = 21$.

Vậy (E) : $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{21} = 1$.

g) Một tiêu điểm là $F_1\left(-\sqrt{3};0\right)$ và đi qua điểm $M\left(1;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

• Ta có : $c = \sqrt{3}$.

• (E) đi qua $M\left(1;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\Rightarrow \dfrac{1^2}{a^2} + \dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{3}{4b^2} = 1\left(*\right)$.

Mà $a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + 3$ (**). Thay vào (*) ta được :

$$\frac{1}{b^2+3}+\frac{3}{4b^2}=1 \Leftrightarrow \left(b^2+3\right)4b^2=4b^2+3\left(b^2+3\right) \Leftrightarrow 4b^4+5b^2-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b^2=1 \\ b^2=-\frac{9}{4}\left(\text{loại}\right) \end{array}\right.$$

(**) $\Rightarrow a^2=b^2+3=1^2+3=4$

Vậy (E) : $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$.

h) Đi qua hai điểm $M\left(4;-\sqrt{3}\right)$, $N\left(2\sqrt{2};3\right)$.

• (E) đi qua $M\left(4;-\sqrt{3}\right) \Rightarrow \frac{16}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1$ (1)

• (E) đi qua $N\left(2\sqrt{2};3\right) \Rightarrow \frac{8}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases} \frac{16}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1 \\ \frac{8}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^2}=\frac{1}{20} \\ \frac{1}{b^2}=\frac{1}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=20 \\ b^2=15 \end{cases}$. Vậy (E) : $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{15}=1$.

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Lập phương trình chính tắc của elip (E) trong mỗi trường hợp sau

a) Đỉnh $A_2\left(13;0\right)$ (E) đi qua điểm M(5 ; -2).

b) Độ dài trục lớn bằng 10 và (E) đi qua điểm B(0 ; 3).

c) Elip đi qua điểm $M(1;\frac{\sqrt{15}}{2})$ và có tiêu cự là $4\sqrt{3}$.

d) Elip đi qua 2 điểm : $M(\frac{8\sqrt{2}}{3};-1)$ và $N(2;-\frac{3\sqrt{3}}{2})$.

Bài 2. Lập phương trình chính tắc của elip (E) biết :

a) Hình chữ nhật cơ sở có đỉnh $P\left(-3;-2\right)$.

b) (E) có đỉnh B(0 ; 2), tiêu cự bằng $4\sqrt{5}$.

Bài 3. Xác định tọa độ các đỉnh, các tiêu điểm, tính độ dài các trục và tìm tâm sai của elip có phương trình sau :

a) $4x^2+9y^2=36$ b) $x^2+4y^2-1=0$

c) $9x^2+16y^2-144=0$ d) $x^2=9-12y^2$.

Bài 4. Cho elip (E) có phương trình chính tắc: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ có hai tiêu điểm F_1 , F_2

a) Tìm tọa độ các giao điểm của (E) với đường thẳng 3x + 5y = 0. Viết phương trình tiếp tuyến của elip tại các giao điểm đó.

b) Tìm điểm M trên (E) sao cho $F_1M = 3F_2M$.

MỤC LỤC