79 BÀI TẬP HÌNH HỌC PHẲNG TIÊU BIỂU

- Tài liệu để ôn thi đại học và cao đẳng
- Tài liệu chỉ dùng cho HS học theo chương trình chuẩn
- Tài liệu gồm 79 bài tập được chọn lọc kĩ và giải chi tiết

BT1. Trong mặt phẳng Oxy cho các điểm $A(1;0)$, $B(-2;4)$, $C(-1;4)$, $D(3;5)$ và đường thẳng $d:3x-y-5=0$. Tìm điểm M trên d sao cho hai tam giác MAB, MCD có diện tích bằng nhau.

Giải

M thuộc d thì $M(a;3a-5)$

$$\overrightarrow{AB}=(-3;4)\Rightarrow AB=5$$

Mặt khác : $AB:\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y}{4}\Leftrightarrow 4x+3y-4=0$

$\overrightarrow{CD}=(4;1)\Rightarrow CD=\sqrt{17}$

$CD:\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-4}{1}\Leftrightarrow x-4y-17=0$

Tính : $h_1=(M,AB)=\dfrac{|4a+3(3a-5)-4|}{5}=\dfrac{|13a-19|}{5}, h_2=\dfrac{|a-4(3a-5)-17|}{\sqrt{17}}=\dfrac{|3-11a|}{\sqrt{17}}$

Nếu diện tich 2 tam giác bằng nhau thì :

$$\frac{1}{2}AB.h_1=\frac{1}{2}CD.h_2\Leftrightarrow\frac{5.|13a-19|}{5}=\frac{\sqrt{17}.|3-11a|}{\sqrt{17}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}13a-19=3-11a\\13a-19=11a-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\dfrac{11}{12}\\a=8\end{array}\right.$$

Vậy trên d có 2 điểm : $M_1\left(\dfrac{11}{12};-\dfrac{27}{12}\right)$, $M_2(8;19)$

BT2. Cho hình tam giác ABC có diện tích bằng 2. Biết $A(1;0)$, $B(0;2)$ và trung điểm I của AC nằm trên đường thẳng $d:y=x$. Tìm toạ độ đỉnh C

Giải

Nếu C nằm trên $d:y=x$ thì $\mathrm{A}(\mathrm{a};\mathrm{a})$ do đó suy ra $\mathrm{C}(2\mathrm{a}-1;2\mathrm{a})$

Ta có : $d(B,d)=\dfrac{|0-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

Theo giả thiết : $S=\dfrac{1}{2}AC.d(B,d)=2\Rightarrow AC=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=\sqrt{(2a-2)^2+(2a-0)^2}$

$$\Leftrightarrow 8=8a^2-8a+4\Leftrightarrow 2a^2-2a-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\\a=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$$

Vậy ta có 2 điểm C : $C_1\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2};\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right),C_2\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2};\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

BT3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC với $A(1;1)$, $B(-2;5)$ và đỉnh C nằm trên đường thẳng $x-4=0$, và trọng tâm G của tam giác nằm trên đường thẳng $2x-3y+6=0$. Tính diện tích tam giác ABC.

Giải

Tọa độ C có dạng : $C(4;a)$, $\overrightarrow{AB}=(-3;4)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}AB=5\\(AB):\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-1}{4}\Leftrightarrow 4x+3y-7=0\end{array}\right.$

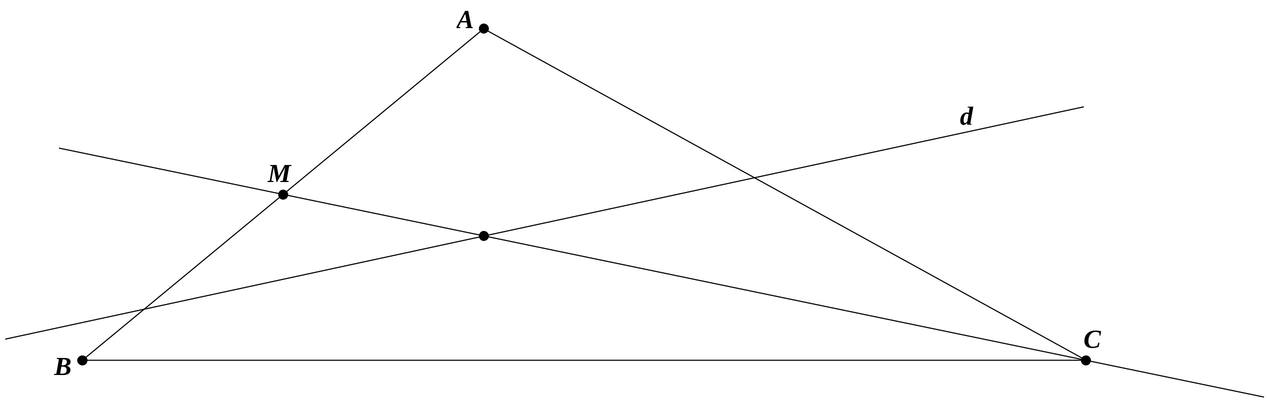
Theo tính chất trọng tâm ; $\begin{cases}x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}\\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_G=\dfrac{1-2+4}{3}=1\\ y_G=\dfrac{1+5+a}{3}=\dfrac{a+6}{3}\end{cases}$

Do G nằm trên $2x-3y+6=0$, cho nên : $\Rightarrow 2.1-3\left(\dfrac{a+6}{3}\right)+6=0\Leftrightarrow a=2$.

Vậy $M(4;2)$ và $d(C,AB)=\dfrac{|4.4+3.2-7|}{\sqrt{16+9}}=3\Rightarrow S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB.d(C,AB)=\dfrac{1}{2}5.3=\dfrac{15}{2}$ (đvdt)

BT4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC, với $A(2;-1)$, $B(1;-2)$, trọng tâm G của tam giác nằm trên đường thẳng $d: x+y-2=0$. Tìm tọa độ đỉnh C biết diện tích tam giác ABC bằng $\dfrac{27}{2}$.

Giải.



Ta có : M là trung điểm của AB thì $M\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$. Gọi $C(a;b)$, theo tính chất trọng tam tam giác

: $\begin{cases}x_G=\dfrac{a+3}{3}\\ y_G=\dfrac{b-3}{3}\end{cases}$

Do G nằm trên d : $\dfrac{a+3}{3}+\dfrac{b-3}{3}-2=0\Leftrightarrow a+b=6\ (1)$

Ta có : $\overrightarrow{AB}=(1;3)\Rightarrow(AB):\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{3}\Leftrightarrow 3x-y-5=0\Leftrightarrow h(C,AB)=\dfrac{|3a-b-5|}{\sqrt{10}}$

Từ giả thiết : $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.h(C,AB)=\frac{1}{2}\sqrt{10}.\frac{|2a-b-5|}{\sqrt{10}}=\frac{|2a-b-5|}{2}=\frac{27}{2}$

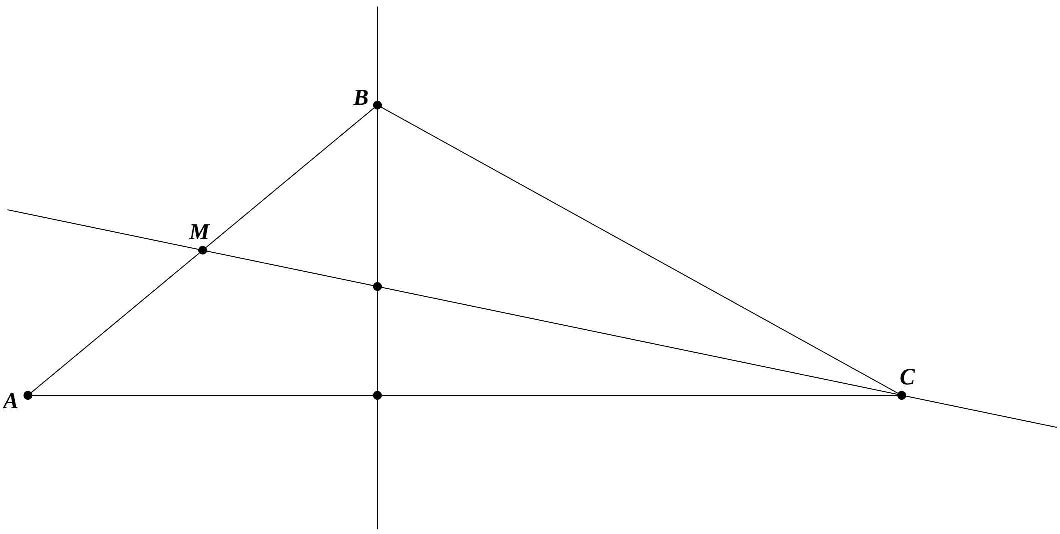
$\Leftrightarrow |2a-b-5|=27 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2a-b-5=27\\2a-b-5=-27\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2a-b=32\\2a-b=-22\end{array}\right.$

Kết hợp với (1) ta có 2 hệ :

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a+b=6\\2a-b=32\end{cases}\\\begin{cases}a+b=6\\2a-b=-22\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a+b=6\\3a=38\end{cases}\\\begin{cases}a+b=6\\3a=-18\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}b=-\frac{20}{3}\\a=\frac{38}{3}\end{cases}\\\begin{cases}b=12\\a=-6\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow C_1\left(\frac{38}{3};-\frac{20}{3}\right),\ C_2(-6;12)$$

BT5. Trong mặt phẳng Oxy cho ΔABC có $A(2;1)$. Đường cao qua đỉnh B có phương trình $x-3y-7=0$. Đường trung tuyến qua đỉnh C có phương trình $x+y+1=0$. Xác định tọa độ B và C. Tính diện tích ΔABC.

Giải



Đường thẳng AC qua $A(2;1)$ và vuông góc với đường cao kẻ qua B, nên có véc tơ chỉ phương

$\vec{n}=(1;-3)\Rightarrow (AC):\begin{cases}x=2+t\\y=1-3t\end{cases}(t\in R)$

Tọa độ C là giao của (AC) với đường trung tuyến kẻ qua C : $\Rightarrow \begin{cases}x=2+t\\y=1-3t\\x+y+1=0\end{cases}$

Giải ta được : $t=2$ và $C(4;-5)$. Vì B nằm trên đường cao kẻ qua B suy ra $B(3a+7;a)$.

M là trung điểm của AB $\Rightarrow M\left(\frac{3a+9}{2};\frac{a+1}{2}\right)$.

Mặt khác M nằm trên đường trung tuyến kẻ qua C : $\frac{3a+9}{2}+\frac{a+1}{2}+1=0 \Leftrightarrow a=-3$

$\Rightarrow B(1;-2)$

$\overrightarrow{AB}=(-1;-3)\Rightarrow AB=\sqrt{10}$

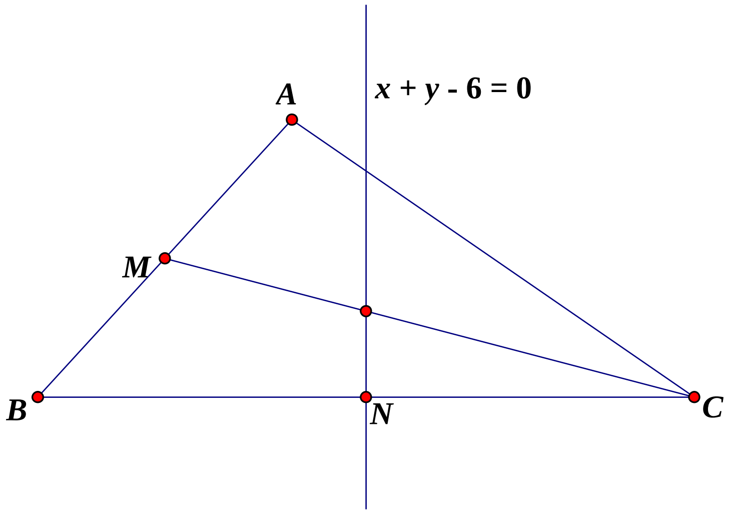
Ta có : $(AB):\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{3}\Leftrightarrow 3x-y-5=0$

$h(C;AB)=\dfrac{|12|}{\sqrt{10}}$

Vậy : $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB.h(C,AB)=\dfrac{1}{2}\sqrt{10}.\dfrac{12}{\sqrt{10}}=6$ (đvdt).

BT6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho tam giác *ABC* biết $A(5;2)$. Phương trình đường trung trực cạnh *BC*, đường trung tuyến *CC'* lần lượt là $x+y-6=0$ và $2x-y+3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác *ABC*

Giải



Gọi $B(a;b)$ suy ra $M\left(\dfrac{a+5}{2};\dfrac{b+2}{2}\right)$. M nằm trên trung tuyến nên : $2a-b+14=0$ (1).

B, B đối xứng nhau qua đường trung trực cho nên $(BC):\begin{cases}x=a+t\\y=b+t\end{cases}(t\in R)$.

Từ đó suy ra tọa độ N : $\begin{cases}x=a+t\\y=b+t\\x+y-6=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=\dfrac{6-a-b}{2}\\x=\dfrac{3a-b-6}{2}\\y=\dfrac{6+b-a}{2}\end{cases}$

$\Leftrightarrow N\left(\dfrac{3a-b-6}{2};\dfrac{6+b-a}{2}\right)$. Cho nên ta có tọa độ $C(2a-b-6;6-a)$

Do C nằm trên đường trung tuyến $5a-2b-9=0$ (2)

Từ (1) và (2) : $\Rightarrow\begin{cases}2a-b+14=0\\5a-2b-9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=37\\b=88\end{cases}\Rightarrow B(37;88),\ C(-20;-31)$

BT7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy* cho hai đường thẳng $\Delta: x+3y+8=0$, $\Delta':3x-4y+10=0$ và điểm $A(-2;1)$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc đường thẳng Δ, đi qua điểm *A* và tiếp xúc với đường thẳng Δ'.

Giải

Gọi tâm đường tròn là I, do I thuộc $\Delta:\begin{cases}x=-2+3t\\y=-2-t\end{cases}\Rightarrow I(-2+3t;-2-t)$

A thuộc đường tròn $\Rightarrow IA=\sqrt{(3t)^2+(3+t)^2}=R\,(1)$

Đường tròn tiếp xúc với $\Delta'\Rightarrow\dfrac{|3(-2+3t)-4(-t-2)+10|}{5}=R\Leftrightarrow\dfrac{|13t+12|}{5}=R$. (2)

Từ (1) và (2) : $\sqrt{(3t)^2+(3+t)^2}=\dfrac{|13t+12|}{5}\Leftrightarrow 25\left[(3t)^2+(3+t)^2\right]=(13t+12)^2$

BT8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn hai đường tròn $(C):x^2+y^2-2x-2y+1=0,\ (C'):x^2+y^2+4x-5=0$ cùng đi qua $M(1;0)$. Viết phương trình đường thẳng qua M cắt hai đường tròn $(C),(C')$ lần lượt tại A, B sao cho $MA=2MB$.

Giải

* Cách 1.

Gọi d là đường thẳng qua M có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b)\Rightarrow d:\begin{cases}x=1+at\\y=bt\end{cases}$

Đường tròn $(C_1):I_1(1;1),R_1=1.(C_2):I_2(-2;0),R_2=3$, suy ra :

$(C_1):(x-1)^2+(y-1)^2=1,(C_2):(x+2)^2+y^2=9$

Nếu d cắt (C_1) tại A : $\Rightarrow(a^2+b^2)t^2-2bt=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\to M\\t=\dfrac{2b}{a^2+b^2}\end{array}\right.\Rightarrow A\left(1+\dfrac{2ab}{a^2+b^2};\dfrac{2b^2}{a^2+b^2}\right)$

Nếu d cắt (C_2) tại B : $\Rightarrow(a^2+b^2)t^2+6at=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\to M\\t=-\dfrac{6a}{a^2+b^2}\end{array}\right.\Rightarrow B\left(1-\dfrac{6a^2}{a^2+b^2};-\dfrac{6ab}{a^2+b^2}\right)$

Theo giả thiết : $MA=2MB\Leftrightarrow MA^2=4MB^2\,(*)$.

Ta có : $\left(\dfrac{2ab}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\dfrac{2b^2}{a^2+b^2}\right)^2=4\left[\left(\dfrac{6a^2}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\dfrac{6ab}{a^2+b^2}\right)^2\right]$.

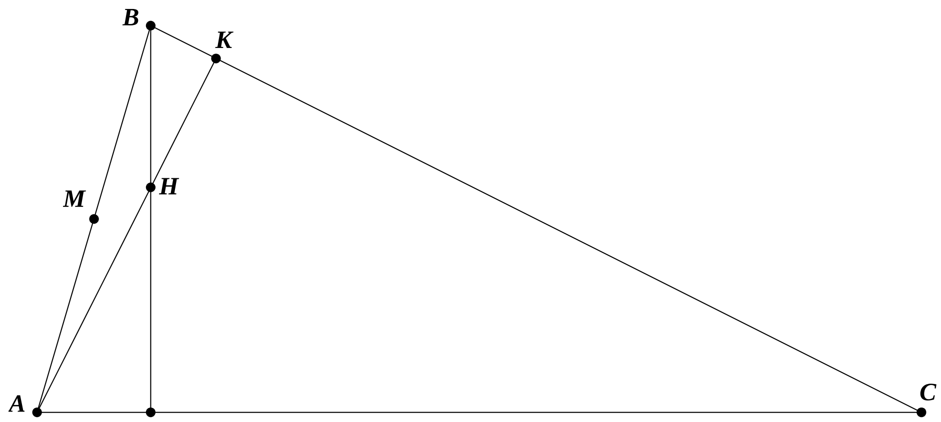
$\Leftrightarrow\dfrac{4b^2}{a^2+b^2}=4.\dfrac{36a^2}{a^2+b^2}\Leftrightarrow b^2=36a^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=-6a\to d:6x+y-6=0\\b=6a\to d:6x-y-6=0\end{array}\right.$

<u>* Cách 2.</u>

- Sử dụng phép vị tự tâm I tỉ số vị tự $k=-\dfrac{1}{2}$. (Học sinh tự làm)

BT9. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, hãy viết phương trình các cạnh của tam giác ABC biết trực tâm $H(1;0)$, chân đường cao hạ từ đỉnh B là $K(0;2)$, trung điểm cạnh AB là $M(3;1)$.

Giải



Theo tính chất đường cao : HK vuông góc với AC cho nên (AC) qua $K(0;2)$ có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{KH}=(1;-2) \Rightarrow (AC): x-2(y-2)=0 \Leftrightarrow x-2y+4=0$.

B nằm trên (BH) qua $\mathrm{H}(1;0)$ và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{KH}=(1;-2) \Rightarrow B(1+t;-2t)$.

$\mathrm{M}(3;1)$ là trung điểm của AB cho nên $\mathrm{A}(5-\mathrm{t};2+2\mathrm{t})$.

Mặt khác A thuộc (AC) cho nên : $5-\mathrm{t}-2(2+2\mathrm{t})+4=0$, suy ra $t=1$. Do đó $A(4;4)$, $B(2;-2)$

Vì C thuộc (AC) suy ra $C(2t;2+t)$,

$\overrightarrow{BC}=(2t-2;4+t)$, $\overrightarrow{HA}=(3;4)$. Theo tính chất đường cao kẻ từ A:

$\Rightarrow \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC}=0 \Rightarrow 3(2t-2)+4(4+t)=0 \rightarrow t=-1$. Vậy: $\mathrm{C}(-2;1)$.

(AB) qua $\mathrm{A}(4;4)$ có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{BA}=(2;6) \parallel \vec{u}=(1;3) \Rightarrow (AB): \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-4}{3}$

$\Leftrightarrow 3x-y-8=0$

(BC) qua $B(2;-2)$ có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{HA}=(3;4) \Rightarrow (BC): 3(x-2)+4(y+2)=0$

$\Leftrightarrow 3x+4y+2=0$.

BT10. Trong hệ tọa độ *Oxy*, cho hai đường tròn có phương trình $(C_1): x^2+y^2-4y-5=0$ và $(C_2): x^2+y^2-6x+8y+16=0$. Lập phương trình tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2).

Giải

Ta có: $\begin{array}{l}(C_1): x^2+(y-2)^2=9 \Rightarrow I_1(0;2),\ R_1=3,\\ (C_2): (x-3)^2+(y+4)^2=9 \Rightarrow I_2(3;-4),\ R_2=3\end{array}$

Nhận xét : $I_1I_2=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}<3+3=6 \Rightarrow (C_1)$ không cắt (C_2)

Gọi $d: ax+by+c=0$ ($a^2+b^2\neq 0$) là tiếp tuyến chung, thế thì : $d(I_1,d)=R_1;\ d(I_2,d)=R_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{|2b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3(1)\\ \dfrac{|3a-4b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3(2)\end{cases} \Rightarrow \frac{|2b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|3a-4b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Leftrightarrow |2b+c|=|3a-4b+c| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3a-4b+c=2b+c\\ 3a-4b+c=-2b-c\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2b \\ 3a-2b+2c=0 \end{array}\right.$. Mặt khác từ (1) : $(2b+c)^2=9(a^2+b^2) \Leftrightarrow$

Trường hợp : $a=2b$ thay vào (1) :

$$(2b+c)^2=9(4b^2+b^2) \Leftrightarrow 41b^2-4bc-c^2=0.\Delta'_b=4c^2+41c^2=45c^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=\dfrac{2b-3\sqrt{5}c}{4} \\ b=\dfrac{(2+3\sqrt{5})c}{4} \end{array}\right.$$

Do đó ta có hai đường thẳng cần tìm :

$d_1: \dfrac{(2-3\sqrt{5})}{2}x+\dfrac{(2-3\sqrt{5})}{4}y+1=0 \Leftrightarrow 2(2-3\sqrt{5})x+(2-3\sqrt{5})y+4=0$.

$d_1: \dfrac{(2+3\sqrt{5})}{2}x+\dfrac{(2+3\sqrt{5})}{4}y+1=0 \Leftrightarrow 2(2+3\sqrt{5})x+(2+3\sqrt{5})y+4=0$.

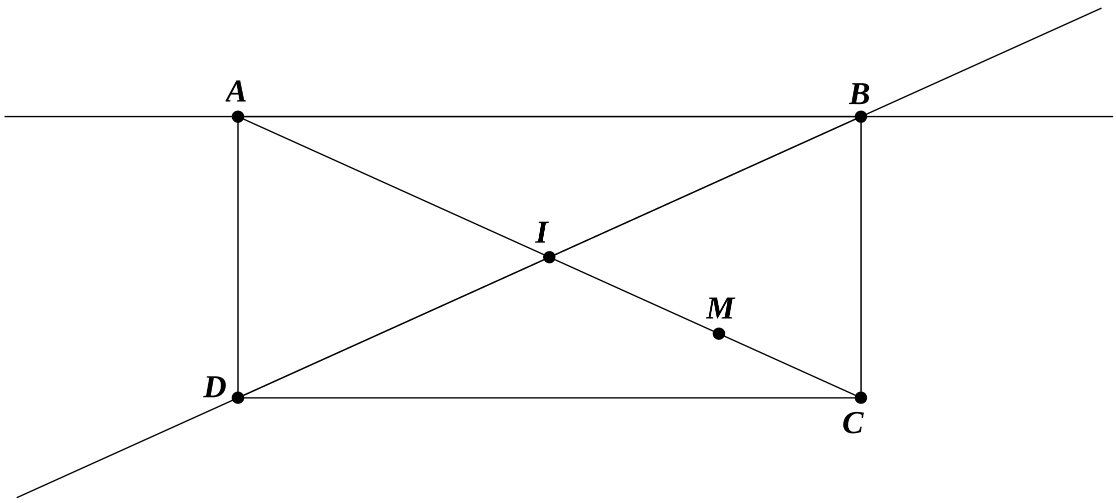
Trường hợp : $c=\dfrac{2b-3a}{2}$, thay vào (1) : $\dfrac{\left|2b+\dfrac{2b-3a}{2}\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3 \Leftrightarrow |2b-a|=\sqrt{a^2+b^2}$

$$\Leftrightarrow (2b-a)^2=a^2+b^2 \Leftrightarrow 3b^2-4ab=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \to c=-\dfrac{a}{2} \\ b=\dfrac{4a}{3} \to c=-\dfrac{a}{6} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=0, a=-2c \\ b=\dfrac{4a}{3}, a=-6c \end{array}\right.$$

Vậy có 2 đường thẳng : $d_3: 2x-1=0$, $d_4: 6x+8y-1=0$.

BT11. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có phương trình đường thẳng AB: $x-2y+1=0$, phương trình đường thẳng BD: $x-7y+14=0$, đường thẳng AC đi qua $M(2;1)$. Tìm toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật.

Giải



Dễ nhận thấy B là giao của BD với AB cho nên tọa dộ B là nghiệm của hệ:

$\left\{\begin{array}{l} x-2y+1=0 \\ x-7y+14=0 \end{array}\right. \Rightarrow B\left(\dfrac{21}{5};\dfrac{13}{5}\right)$

Đường thẳng (BC) qua $B(7;3)$ và vuông góc với (AB) cho nên có véc tơ chỉ phương:

$\vec{u}=(1;-2)\Rightarrow(BC):\begin{cases}x=\dfrac{21}{5}+t\\ y=\dfrac{13}{5}-2t\end{cases}$

Ta có : $\widehat{(AC,BD)}=\widehat{BIC}=2\widehat{ABD}=2\varphi=2\widehat{(AB,BD)}$

(AB) có $\overrightarrow{n_1}=(1;-2)$, (BD) có $\overrightarrow{n_2}=(1;-7)\Rightarrow\cos\varphi=\dfrac{\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{1+14}{\sqrt{5}\sqrt{50}}=\dfrac{15}{5\sqrt{10}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

Gọi (AC) có $\vec{n}=(a,b)\Rightarrow\cos(AC,BD)=\cos2\varphi=\dfrac{|a-7b|}{\sqrt{50}\sqrt{a^2+b^2}}=2\cos^2\varphi-1=2\left(\dfrac{9}{10}\right)-1=\dfrac{4}{5}$

Do đó : $5|a-7b|=4\sqrt{50}\sqrt{a^2+b^2}\Leftrightarrow(a-7b)^2=32\left(a^2+b^2\right)\Leftrightarrow31a^2+14ab-17b^2=0$.

Suy ra : $\left[\begin{array}{l}a=-\dfrac{17}{31}b\Rightarrow(AC):-\dfrac{17}{31}(x-2)+(y-1)=0\Leftrightarrow17x-31y-3=0\\ a=b\Rightarrow(AC):\quad x-2+y-1=0\Leftrightarrow x+y-3=0\end{array}\right.$

(AC) cắt (BC) tại C $\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{21}{5}+t\\ y=\dfrac{13}{5}-2t\\ x-y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow t=\dfrac{7}{15}\Rightarrow C\left(\dfrac{14}{3};\dfrac{5}{3}\right)$

(AC) cắt (AB) tại A : $\begin{cases}x-2y+1=0\\ x-y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=7\\ y=4\end{cases}\Leftrightarrow A(7;4)$.

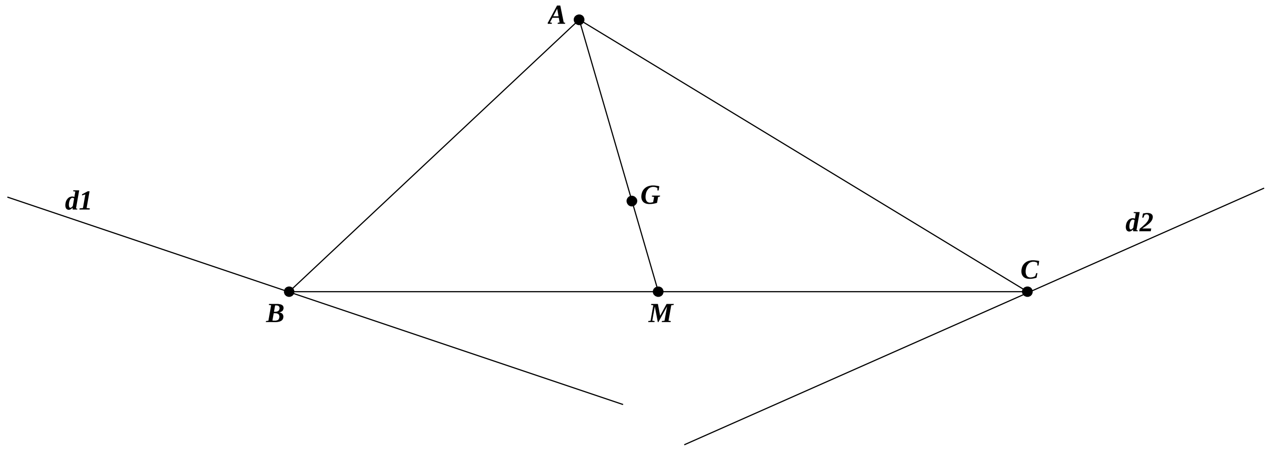
(AD) vuông góc với (AB) đồng thời qua $A(7;4)$ suy ra (AD) : $\begin{cases}x=7+t\\ y=4-2t\end{cases}$

(AD) cắt (BD) tại D : $\begin{cases}x=7+t\\ y=4-2t\\ x-7y+14=0\end{cases}\Rightarrow t=\dfrac{7}{15}\Rightarrow D\left(\dfrac{98}{15};\dfrac{46}{15}\right)$

Trường hợp $AC:17x-31y-3=0$ các em làm tương tự.

BT12. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho tam giác ABC, có điểm $A(2;3)$, trọng tâm $G(2;0)$. Hai đỉnh B và C lần lượt nằm trên hai đường thẳng $d_1: x+y+5=0$ và $d_2: x+2y-7=0$. Viết phương trình đường tròn có tâm C và tiếp xúc với đường thẳng BG

Giải



B thuộc d suy ra B : $\begin{cases} x = t \\ y = -5 - t \end{cases}$, C thuộc d' cho nên C: $\begin{cases} x = 7 - 2m \\ y = m \end{cases}$.

Theo tính chất trọng tâm :

$\Rightarrow x_G = \frac{(t - 2m + 9)}{3} = 2, y_G = \frac{m - t - 2}{3} = 0$

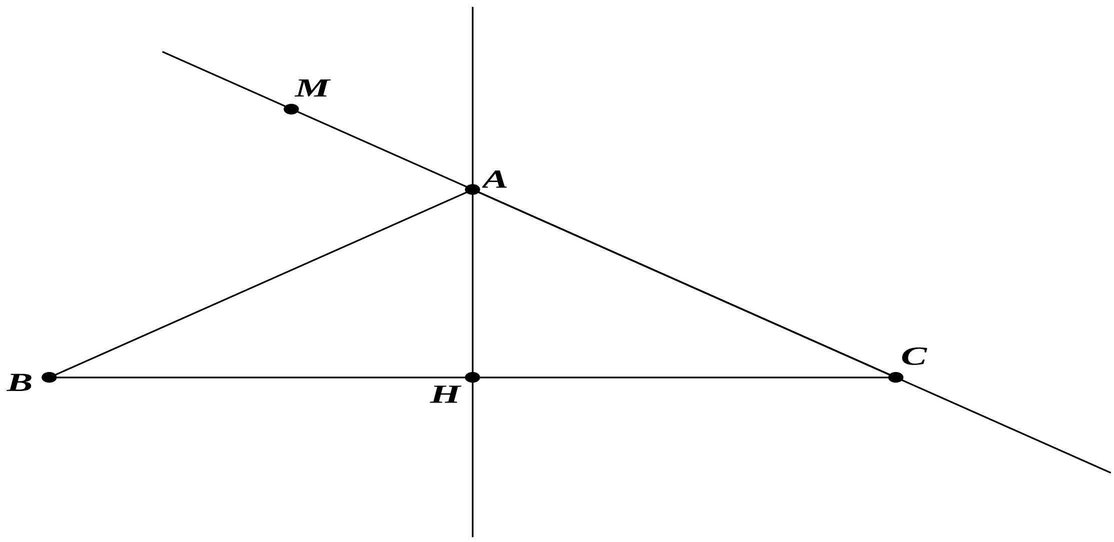
Ta có hệ : $\begin{cases} m - t = 2 \\ t - 2m = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ t = -1 \end{cases}$

Vậy : $B(-1;-4)$ và $C(5;1)$. Đường thẳng (BG) qua $G(2;0)$ có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (3;4)$, cho nên $BG: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{4} \Leftrightarrow 4x - 3y - 8 = 0 \Rightarrow d(C;BG) = \frac{|20 - 15 - 8|}{5} = \frac{13}{5} = R$

Vậy đường tròn có tâm $C(5;1)$ và có bán kính $R = \frac{13}{5} \Rightarrow (C):(x-5)^2 + (y-1)^2 = \frac{169}{25}$

BT13. Tam giác cân ABC có đáy BC nằm trên đường thẳng $2x - 5y + 1 = 0$, cạnh bên AB nằm trên đường thẳng $12x - y - 23 = 0$. Viết phương trình AC biết rằng nó đi qua điểm $M(3;1)$

Giải



Đường (AB) cắt (BC) tại B $\begin{cases} 2x - 5y + 1 = 0 \\ 12x - y - 23 = 0 \end{cases}$

Suy ra : $B(2;-1)$. (AB) có hệ số góc $k = 12$, đường thẳng (BC) có hệ số góc $k' = \frac{2}{5}$, do đó ta có

$\tan B=\left|\dfrac{12-\frac{2}{5}}{1+12.\frac{2}{5}}\right|=2$. Gọi (AC) có hệ số góc là m thì ta có : $\tan C=\left|\dfrac{\frac{2}{5}-m}{1+\frac{2m}{5}}\right|=\left|\dfrac{2-5m}{5+2m}\right|$. Vì tam giác ABC cân tại A cho nên $\tan B=\tan C$, hay ta có :

$$\left|\frac{2-5m}{5+2m}\right|=2\Leftrightarrow|2-5m|=2|2m+5|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-5m=4m+10\\2-5m=-4m-10\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-\frac{8}{9}\\m=12\end{array}\right.$$

Trường hợp : $m=-\frac{9}{8}\Rightarrow(AC):y=-\frac{9}{8}(x-3)+1\Leftrightarrow 9x+8y-35=0$

Trường hợp :
$m=12$ suy ra $(AC):\ y=12(x-3)+1$ hay $(AC):\ 12x-y-25=0$ (loại vì nó //AB).

Vậy $(AC):\ 9x+8y-35=0$.

BT14. Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn :

$$(C_1):(x-5)^2+(y+12)^2=225 \text{ và } (C_2):\ (x-1)^2+(y-2)^2=25$$

Giải : .

Ta có (C) với tâm $I(5;-12)$, $R=15$. (C') có $J(1;2)$ và $R'=5$. Gọi d là tiếp tuyến chung có phương trình : $ax+by+c=0$ ($a^2+b^2\neq 0$).

Khi đó ta có : $h(I,d)=\dfrac{|5a-12b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=15\,(1)$, $h(J,d)=\dfrac{|a+2b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=5\,(2)$

Từ (1) và (2) suy ra : $|5a-12b+c|=3|a+2b+c|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5a-12b+c=3a+6b+3c\\5a-12b+c=-3a-6b-3c\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a-9b=c\\-2a+\frac{3}{2}b=c\end{array}\right.$. Thay vào (1) : $|a+2b+c|=5\sqrt{a^2+b^2}$ ta có hai trường hợp :

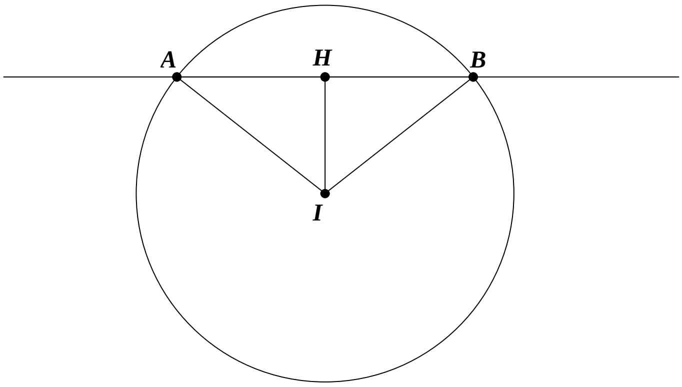
Trường hợp : $c=a-9b$ thay vào (1) : $(2a-7b)^2=25(a^2+b^2)\Leftrightarrow 21a^2+28ab-24b^2=0$

Suy ra : $\left[\begin{array}{l}a=\dfrac{14-10\sqrt{7}}{21}\rightarrow d:\left(\dfrac{14-10\sqrt{7}}{21}\right)x+y-\dfrac{175+10\sqrt{7}}{21}=0\\a=\dfrac{14+10\sqrt{7}}{21}\rightarrow d:\left(\dfrac{14+10\sqrt{7}}{21}\right)x+y-\dfrac{175-10\sqrt{7}}{21}=0\end{array}\right.$

Trường hợp : $c=-2a+\frac{3}{2}b\Rightarrow(1):(7b-2a)^2=100(a^2+b^2)\Leftrightarrow 96a^2+28ab+51b^2=0$. Vô nghiệm. (Phù hợp vì : $IJ=\sqrt{16+196}=\sqrt{212}<R+R'=5+15=20=\sqrt{400}$. Hai đường tròn cắt nhau).

BT15. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn (C) : $x^2+y^2+2x-8y-8=0$. Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng d : $3x+y-2=0$ và cắt đường tròn theo một dây cung có độ dài bằng 6.

Giải



Đường thẳng d' song song với $d: 3x + y + m = 0$

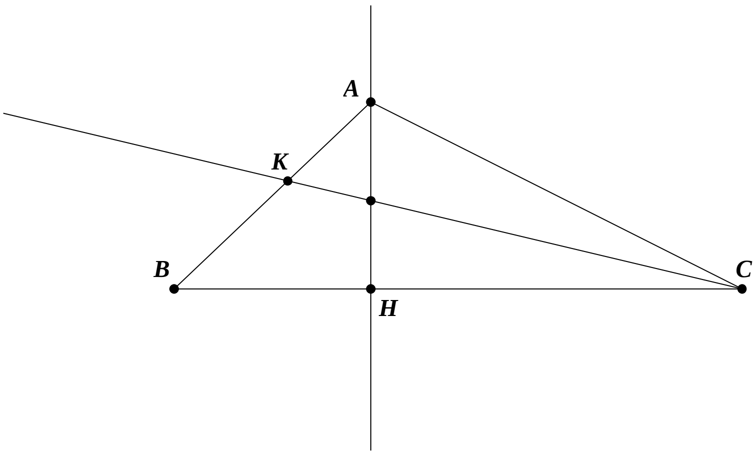
IH là khoảng cách từ I đến d' : $IH = \frac{|-3+4+m|}{5} = \frac{|m+1|}{5}$

Xét tam giác vuông IHB : $IH^2 = IB^2 - \left(\frac{AB^2}{4}\right) = 25 - 9 = 16$

$\Leftrightarrow \frac{(m+1)^2}{25} = 16 \Leftrightarrow |m+1| = 20 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 19 \to d': 3x + y + 19 = 0 \\ m = -21 \to d': 3x + y - 21 = 0 \end{array}\right.$

BT16. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC biết $B(2;-1)$, đường cao và đường phân giác trong qua đỉnh A, C lần lượt là (d_1): $3x - 4y + 27 = 0$ và (d_2): $x + 2y - 5 = 0$

Giải



Đường thẳng (BC) qua $B(2;-1)$ và vuông góc với (AH) suy ra BC: $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 - 4t \end{cases}$, hay :

$\Leftrightarrow \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-4} \Leftrightarrow 4x + 3y - 7 = 0 \perp \vec{n} = (4;3)$

(BC) cắt (CK) tại C : $\Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 - 4t \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \to t = -1 \Leftrightarrow C(-1;3)$

(AC) qua $C(-1;3)$ có véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (a;b)$

Suy ra (AC): $a(x+1) + b(y-3) = 0$ (*).

Gọi $\varphi = \widehat{KCB} = \widehat{KCA} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{4+6}{\sqrt{5}\sqrt{16+9}} = \frac{10}{5\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Tương tự : $\cos\varphi = \frac{|a+2b|}{\sqrt{5}\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow \frac{|a+2b|}{\sqrt{5}\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow (a+2b)^2 = 4(a^2+b^2)$

$\Leftrightarrow 3a^2 - 4ab = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \Rightarrow b(y-3)=0 \leftrightarrow y-3=0 \\ a=\frac{4b}{3} \Rightarrow \frac{4}{3}(x+1)+(y-3)=0 \leftrightarrow 4x+3y-5=0 \end{array}\right.$

(AC) cắt (AH) tại A : $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y-3=0 \\ 3x-4y+27=0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x+3y-5=0 \\ 3x-4y+27=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=3 \\ x=-5 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\frac{31}{25} \\ y=\frac{582}{25} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow A_1(-5;3),\ A_2\left(-\frac{31}{25};\frac{582}{25}\right)$

Lập (AB) qua $B(2;-1)$ và 2 điểm A tìm được ở trên. (học sinh tự lập).

BT17. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đècác vuông góc Oxy, xét tam giác ABC vuông tại A, phương trình đường thẳng BC là : $\sqrt{3}.x - y - \sqrt{3} = 0$, các đỉnh A và B thuộc trục hoành và bán kính đường tròn nội tiếptam giác ABC bằng 2. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

Giải

Đường thẳng (BC) cắt Ox tại B : Cho $y=0$ suy ra $x=1$, $B(1;0)$. Gọi $A(a;0)$ thuộc Ox là đỉnh của góc vuông (a khác 1). Đường thẳng $x=a$ cắt (BC) tại C : $\left(a;\sqrt{3}(a-1)\right)$.

Độ dài các cạnh $AB = |a-1|, AC = \sqrt{3}|a-1| \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC = 2|a-1|$

Chu vi tam giác : $2p = |a-1| + \sqrt{3}|a-1| + 2|a-1| = (3+\sqrt{3})|a-1| \Leftrightarrow p = \frac{(3+\sqrt{3})|a-1|}{2}$

Ta có : $S = pr$ suy ra $P = \frac{S}{r}$.(*) Nhưng $S = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}|a-1|\sqrt{3}|a-1| = \frac{\sqrt{3}}{2}(a-1)^2$. Cho nên

(*) trở thành : $\frac{1}{2}\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)|a-1| = \frac{\sqrt{3}}{4}(a-1)^2 \Rightarrow |a-1| = 2(\sqrt{3}+1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3+2\sqrt{3} \\ a=-1-2\sqrt{3} \end{array}\right.$

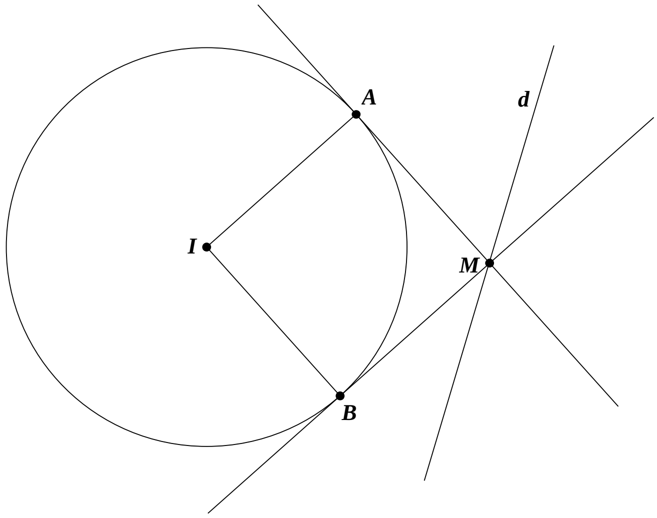
Trọng tâm G :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{2a+1}{3} \\ y_G = \frac{\sqrt{3}(a-1)}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{2(3+2\sqrt{3})+1}{3} = \frac{7+4\sqrt{3}}{3} \\ y_G = \frac{\sqrt{3}(2+2\sqrt{3})}{3} = \frac{2\sqrt{3}+6}{3} \end{cases} \Leftrightarrow G_1\left(\frac{7+4\sqrt{3}}{3};\frac{2\sqrt{3}+6}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{2a+1}{3} \\ y_G = \frac{\sqrt{3}(a-1)}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{2(-1-2\sqrt{3})+1}{3} = -\frac{1+4\sqrt{3}}{3} \\ y_G = \frac{\sqrt{3}(-2-2\sqrt{3})}{3} = -\frac{2\sqrt{3}+6}{3} \end{cases} \Rightarrow G_2\left(-\frac{1+4\sqrt{3}}{3};-\frac{2\sqrt{3}+6}{3}\right)$$

BT18. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4x-2y-1=0$ và đường thẳng $d: x+y+1=0$. Tìm những điểm M thuộc đường thẳng d sao cho từ điểm M kẻ được đến (C) hai tiếp tuyến hợp với nhau góc 90^0.

Giải



M thuộc d suy ra $M(t;-1-t)$. Nếu 2 tiếp tuyến vuông góc với nhau thì MAIB là hình vuông (A, B là 2 tiếp điểm). Do đó $AB = MI = IA\sqrt{2} = R\sqrt{2} = \sqrt{6}\sqrt{2} = 2\sqrt{3}$.

Ta có : $MI = \sqrt{(2-t)^2 + (2+t)^2} = \sqrt{2t^2+8} = 2\sqrt{3}$

Do đó : $2t^2+8=12 \Leftrightarrow t^2=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\sqrt{2} \to M_1\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}-1\right) \\ t=\sqrt{2} \to M_2\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}-1\right) \end{array}\right.$.

*** Chú ý :** Ta còn cách khác

Gọi d' là đường thẳng qua M có hệ số góc k suy ra d' có phương trình: $y=k(x-t)-t-1$, hay : $kx-y-kt-t-1=0$ (1).

Nếu d' là tiếp tuyến của (C) kẻ từ M thì $d(I;d')=R \Rightarrow \dfrac{|2k-kt-t-2|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{6}$

$\Leftrightarrow \left[(2-t)k-t-2\right]^2 = 6\left(1+k^2\right) \Leftrightarrow \left(t^2-4t-2\right)k^2 + 2(t+2)(2-t)k + \left(t^2+4t-2\right)=0$

Từ giả thiết ta có điều kiện : $\Leftrightarrow \begin{cases} t^2-4t-2 \neq 0 \\ \Delta' = \left(4-t^2\right) - \left(t^2-2-4t\right)\left(t^2-2+4t\right) > 0 \\ \dfrac{t^2+4t-2}{t^2-4t-2} = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t \neq 2 \pm \sqrt{6} \\ \Delta' = t^2\left(19-t^2\right) > 0 \Rightarrow t = \pm\sqrt{2} \\ t^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1+k_2 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ k_1k_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow k_1;k_2 \Leftrightarrow M$

BT19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(1;1)$ và đường thẳng $\Delta: 2x+3y+4=0$

Tìm tọa độ điểm B thuộc đường thẳng Δ sao cho đường thẳng AB và Δ hợp với nhau góc 45^0.

Giải

Gọi d là đường thẳng qua $A(1;1)$ có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(a;b)$ thì d có phương trình dạng $a(x-1)+b(y-1)=0$ (*). Ta có $\overrightarrow{n_\Delta}=(2;3)$.

Theo giả thiết : $\cos(d,\Delta)=\left|\dfrac{2a+3b}{\sqrt{13}\sqrt{a^2+b^2}}\right|=\cos 45^0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow 2(2a+3b)^2=13\left(a^2+b^2\right)$

$$\Leftrightarrow 5a^2-24ab-5b^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a=-\frac{1}{5}b\to d:-\frac{1}{5}(x-1)+(y-1)=0\leftrightarrow x-5y+4=0\\ a=5b\to d:5(x-1)+(y-1)=0\leftrightarrow 5x+y-6=0\end{array}\right.$$

Vậy B là giao của d với Δ cho nên :

$$\Rightarrow B_1\begin{cases}x-5y+4=0\\2x+3y+4=0\end{cases}\Leftrightarrow B_1\left(-\frac{32}{13};\frac{4}{13}\right),B_2:\begin{cases}5x+y-6=0\\2x+3y+4=0\end{cases}\Rightarrow B_2\left(\frac{22}{13};-\frac{32}{13}\right)$$

BT20. Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ *Oxy* cho cho hai đường thẳng $d_1:2x-y+5=0$. $d_2:\ 3x+6y-7=0$. Lập phương trình đường thẳng đi qua điểm $P(\ 2;-1)$ sao cho đường thẳng đó cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 tạo ra một tam giác cân có đỉnh là giao điểm của hai đường thẳng d_1, d_2.

Giải

Trước hết lập phương trình 2 đường phân giác tạo bởi 2 đường thẳng cắt nhau :

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{3x+6y-7}{3\sqrt{5}}=-\dfrac{2x-y+5}{\sqrt{5}}\\ \dfrac{3x+6y-7}{3\sqrt{5}}=\dfrac{2x-y+5}{\sqrt{5}}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}9x+3y+8=0\\3x-9y+22=0\end{array}\right.$$

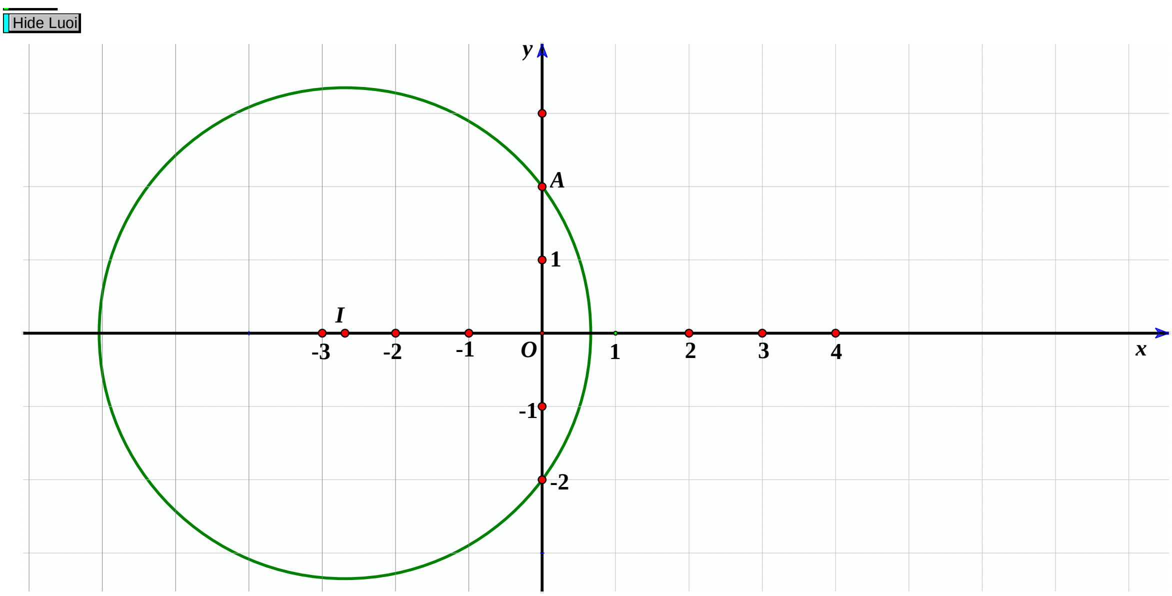
Lập đường thẳng Δ_1 qua $P(2;-1)$ và vuông góc với tiếp tuyến : $9x+3y+8=0$.

$$\Rightarrow\Delta_1:\frac{x-2}{9}=\frac{y+1}{3}\Leftrightarrow x-3y-5=0$$

Lập Δ_2 qua $P(2;-1)$ và vuông góc với : $3x-9y+22=0\Leftrightarrow\Delta_2:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-9}\Leftrightarrow 3x+y-5=0$

BT21. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy*, cho đường tròn (C) có phương trình: $x^2+y^2+4\sqrt{3}x-4=0$ Tia Oy cắt (C) tại A. Lập phương trình đường tròn (C’), bán kính $R’=2$ và tiếp xúc ngoài với (C) tại A.

Giải



(C) có $I\left(-2\sqrt{3};0\right)$, $R=4$. Gọi J là tâm đường tròn cần tìm :

$J(a;b)\ \Rightarrow (C'):(x-a)^2+(y-b)^2=4$

Do (C) và (') tiếp xúc ngoài với nhau cho nên khoảng cách $IJ=R+R'$

$\Rightarrow \sqrt{\left(a+2\sqrt{3}\right)^2+b^2}=4+2=6 \Leftrightarrow a^2+4\sqrt{3}a+b^2=28$

Vì $A(0;2)$ là tiếp điểm cho nên : $(0-a)^2+(2-b)^2=4\ (2)$

Do đó ta có hệ : $\begin{cases}\left(a+2\sqrt{3}\right)^2+b^2=36\\ a^2+(2-b)^2=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2+4\sqrt{3}a+b^2=24\\ a^2-4b+b^2=0\end{cases}$

Giải hệ tìm được : $b=3$ và $a=\sqrt{3}\Rightarrow (C'):\left(x-\sqrt{3}\right)^2+(y-3)^2=4$.

<u>Chú ý:</u> Ta có cách giải khác .

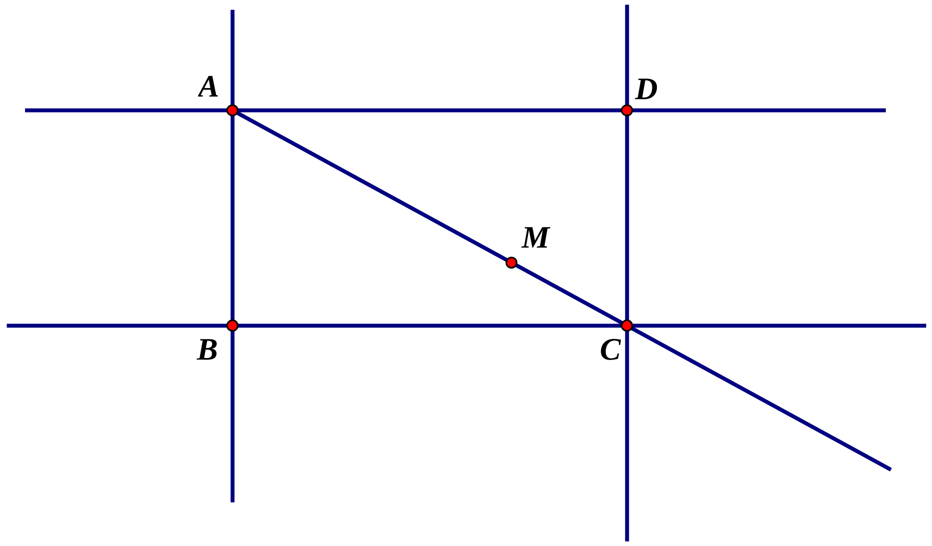
Gọi H là hình chiếu vuông góc của J trên Ox suy ra OH bằng a và JH bằng b

Xét các tam giác đồng dạng : IOA và IHJ suy ra : $\frac{IA}{IJ}=\frac{IO}{IH}=\frac{OA}{HJ}\Leftrightarrow \frac{4}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{a+2\sqrt{3}}=\frac{2}{b}$

Từ tỷ số trên ta tìm được : $b=3$ và $a=\sqrt{3}$.

BT22. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có cạnh $AB:\ x-2y-1=0$, đường chéo $BD:\ x-7y+14=0$ và đường chéo AC đi qua điểm $M(2;1)$. Tìm toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật.

Giải



Hình vẽ : (Như bài 12).

Tìm tọa độ B là nghiệm của hệ : $\begin{cases}x-2y-1=0\\ x-7y+14=0\end{cases}\Rightarrow B(7;3)$.

Đường thẳng (BC) qua $B(7;3)$ và $\perp(AB)\Rightarrow \overrightarrow{u_{BC}}=(1;-2)\Leftrightarrow (BC):\begin{cases}x=7+t\\ y=3-2t\end{cases}$

$\Leftrightarrow 2x+y-17=0\rightarrow k_{BC}=-\frac{1}{2}$. Mặt khác : $k_{BD}=\frac{1}{7}, k_{AB}=\frac{1}{2}\Rightarrow \tan\varphi=\left|\frac{\frac{1}{7}-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{7}\frac{1}{2}}\right|=\frac{1}{3}$

Gọi (AC) có hệ số góc là $k \Rightarrow \tan 2\varphi = \left|\dfrac{k-\frac{1}{7}}{1+\frac{k}{7}}\right| = \left|\dfrac{7k-1}{7+k}\right| = \dfrac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi} = \dfrac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \dfrac{3}{4}$

Do đó : $4|7k-1| = 3|k+7| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 28k-4=-3k-21 \\ 28k-4=3k+21 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=-\frac{17}{31} \\ k=1 \end{array}\right.$

Trường hợp : $k=1$ suy ra $(AC): y=(x-2)+1$, hay : $x-y-1=0$.

C là giao của (BC) với (AC) : $\Leftrightarrow \begin{cases} x=7+t \\ y=3-2t \\ x-y-1=0 \end{cases} \rightarrow t=-1, C(6;5)$

A là giao của (AC) với (AB) : $\Leftrightarrow \begin{cases} x=7+t \\ y=3-2t \\ x-2y-1=0 \end{cases} \rightarrow t=0, A(1;0)$

(AD) || (BC) suy ra (AD) có dạng : $2x+y+m=0$ (*) , do qua $A(1;0)$: $m=-2$. Cho nên (AD) có phương trình : $2x+y-2=0$.

D là giao của (AD) với (BD) : $\begin{cases} 2x+y-2=0 \\ x-7y+14=0 \end{cases} \Rightarrow D(0;2)$

Trường hợp : $k=-\frac{17}{31}$ cách giải tương tự (Học sinh tự làm).

BT23. Trong mp (Oxy) cho đường thẳng (Δ) có phương trình: $x-2y-2=0$ và hai điểm $A(-1;2)$; $B(3;4)$. Tìm điểm $M \in \Delta$ sao cho $2MA^2 + MB^2$ có giá trị nhỏ nhất

Giải

M thuộc Δ suy ra $M(2t+2;t)$

Ta có : $MA^2 = (2t+3)^2 + (t-2)^2 = 5t^2+8t+13 \Rightarrow 2MA^2 = 10t^2+16t+26$

Tương tự : $MB^2 = (2t-1)^2 + (t-4)^2 = 5t^2-12t+17$

Do đó : $f(t) = 15t^2+4t+43 \Rightarrow f'(t) = 30t+4=0 \rightarrow t=-\frac{2}{15}$.

Lập bảng biến thiên suy ra $\min f(t) = \frac{641}{15}$ đạt được tại $t=-\frac{2}{15} \Rightarrow M\left(\frac{26}{15};-\frac{2}{15}\right)$

Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-6y+6=0$ và điểm $M(2;4)$

BT24. Viết phương trình đường thẳng đi qua M cắt đường tròn tại 2 điểm A và B sao cho M là trung điểm của AB

Giải

Đường tròn (C) : $(x-1)^2+(y-3)^2=4 \Rightarrow I(1;3)$, $R=2, P_{M/(C)} = 1+1-4=-2<0 \Rightarrow M$ nằm trong hình tròn (C) .

Gọi d là đường thẳng qua $M(2;4)$ có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b) \Rightarrow d: \begin{cases} x=2+at \\ y=4+bt \end{cases}$

Nếu d cắt (C) tại A,B thì : $(at+1)^2+(bt+1)^2=4 \Leftrightarrow (a^2+b^2)t^2+2(a+b)t-2=0(1)$ (có 2 nghiệm t) . Vì vậy điều kiện : $\Delta'=(a+b)^2+2(a^2+b^2)=3a^2+2ab+3b^2>0(*)$

Gọi $A(2+at_1;4+bt_1)$, $B(2+at_2;4+bt_2) \Rightarrow$ M là trung điểm AB thì ta có hệ :

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4+a(t_1+t_2)=4 \\ 8+b(t_1+t_2)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(t_1+t_2)=0 \\ b(t_1+t_2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow t_1+t_2=0$. Thay vào (1) khi áp dụng vi ét ta được :

$\Leftrightarrow t_1+t_2=-\frac{2(a+b)}{a^2+b^2}=0 \Leftrightarrow a+b=0 \Leftrightarrow a=-b \Rightarrow d:\frac{x-2}{-1}=\frac{y-4}{1} \Leftrightarrow d:x+y-6=0$

BT25. Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):x^2+y^2-2x-2my+m^2-24=0$ có tâm I và đường thẳng Δ: $mx+4y=0$. Tìm m biết đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn diện tích tam giác IAB bằng 12.

Giải

(C) : $(x-1)^2+(y-m)^2=25 \quad \Rightarrow I(1;m), R=5$.

Nếu $d:mx+4y=0$ cắt (C) tại 2 điểm A,B thì $\begin{cases} y=-\frac{m}{4}x \\ \left(\frac{m^2+16}{16}\right)x^2-2\left(\frac{4+m^2}{4}\right)x+m^2-24=0(1) \end{cases}$

Điều kiện : $\Delta'=m^2+25>0 \Leftrightarrow m\in R$. Khi đó gọi $A\left(x_1;-\frac{m}{4}x_1\right)$, $B\left(x_2;-\frac{m}{4}x_2\right)$

$\Rightarrow AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+\frac{m^2}{16}(x_2-x_1)^2}=|x_2-x_1|\frac{\sqrt{m^2+16}}{4}=8\frac{\sqrt{m^2+25}}{\sqrt{m^2+16}}$

Khoảng cách từ I đến $d=\frac{|m+4m|}{\sqrt{m^2+16}}=\frac{|5m|}{\sqrt{m^2+16}}$

Từ giả thiết : $S=\frac{1}{2}AB.d=\frac{1}{2}.8\frac{\sqrt{m^2+25}}{\sqrt{m^2+16}}.\frac{|5m|}{\sqrt{m^2+16}}=4|5m|\frac{\sqrt{m^2+25}}{m^2+16}=12$

$\Leftrightarrow |5m|\frac{\sqrt{m^2+25}}{m^2+16}=3 \Leftrightarrow 25m^2(m^2+25)=9(m^2+16)^2$

Ta có một phương trình trùng phương , học sinh giải tiếp .

BT26. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình cạnh $AB:x-y-2=0$, phương trình cạnh AC: $x+2y-5=0$. Biết trọng tâm của tam giác $G(3;2)$. Viết phương trình cạnh BC

Giải

(AB) cắt (AC) tại A : $\Rightarrow \begin{cases} x-y-2=0 \\ x+2y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow A(3;1)$

B nằm trên (AB) suy ra $B(t;t-2)$, C nằm trên (AC) suy ra $C(5-2m;m)$

Theo tính chất trọng tâm : $\begin{cases} x_G=\frac{t-2m+8}{3}=3 \\ y_G=\frac{t+m-1}{3}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-2m=1 \\ t+m=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \to C(1;2) \\ t=5 \to B(5;3) \end{cases}$

BT27. Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm $A(2;5)$, $B(4;1)$ và tiếp xúc với đường thẳng có phương trình $3x-y+9=0$.

Giải

Gọi M là trung điểm AB suy ra $M(3;3)$. d' là đường trung trực của AB thì d' có phương trình : $1(x-3)-2(y-3)=0$, hay : $x-2y+3=0$.

Tâm I của (C) nằm trên đường thẳng d' cho nên $I(2t-3;t)$ (*)

Nếu (C) tiếp xúc với d thì $h(I,d)=R \Leftrightarrow \dfrac{|3(2t-3)-t+9|}{\sqrt{10}}=\dfrac{|5t|}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}|t|=R$. (1)

Mặt khác : $R=IA=\sqrt{(5-2t)^2+(5-t)^2}$. (2).

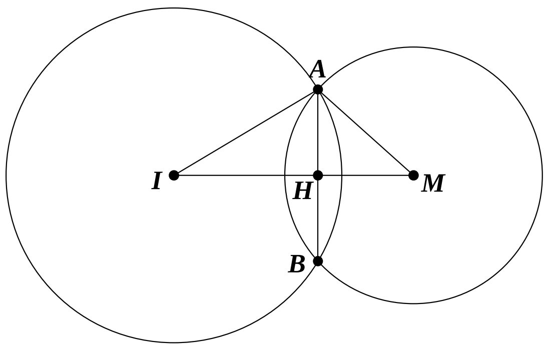
Thay (2) vào (1) : $\sqrt{(5-2t)^2+(5-t)^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}|t| \Leftrightarrow 4(5t^2-30t+50)=10t^2$

$\Leftrightarrow t^2-12t+2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=6-\sqrt{34} \\ t=6+\sqrt{34} \end{array}\right.$. Thay các giá trị t vào (*) và (1) ta tìm được tọa độ tâm I và bán kính R của (C) .

<u>Chú ý :</u> Ta có thể sử dụng phương trình (C) : $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ (có 3 ẩn a,b,c)
Cho qua A, B ta tạo ra 2 phương trình. Còn phương trình thứ 3 sử dụng điều kiện tiếp xúc của (C) và d : khoảng cách từ tâm tới d bằng bán kính R .

BT28. Cho đường tròn (C): $x^2+y^2-2x+4y+2=0$. Viết phương trình đường tròn (C') tâm $M(5;1)$ biết (C') cắt (C) tại các điểm A, B sao cho $AB=\sqrt{3}$.

Giải



Đường tròn (C) : $(x-1)^2+(y+2)^2=3 \Rightarrow I(1;-2), R=\sqrt{3}$.

Gọi H là giao của AB với (IM). Do đường tròn (C') tâm M có bán kính $R'=MA$.

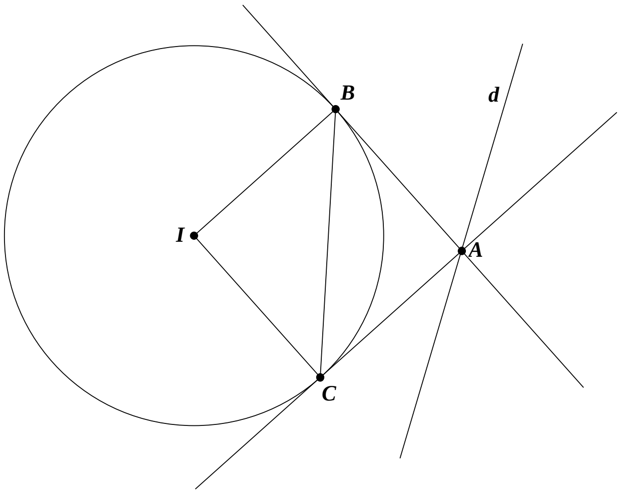
Nếu $AB=\sqrt{3}=IA=R$, thì tam giác IAB là tam giác đều , cho nên $IH=\dfrac{\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3}{2}$ (đường cao tam giác đều) . Mặt khác : $IM=5$ suy ra $HM=5-\dfrac{3}{2}=\dfrac{7}{2}$.

Trong tam giác vuông HAM ta có $MA^2=IH^2+\dfrac{AB^2}{4}=\dfrac{49}{4}+\dfrac{3}{4}=13=R'^2$

Vậy (C') : $(x-5)^2+(y-1)^2=13$.

BT29. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $(x-1)^2+(y+2)^2=9$ và đường thẳng $d: x+y+m=0$. Tìm m để trên đường thẳng d có duy nhất một điểm A mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (C) (B, C là hai tiếp điểm) sao cho tam giác ABC vuông.

Giải



(C) có $I(1;-2)$ và bán kính $R=3$. Nếu tam giác ABC vuông góc tại A (có nghĩa là từ A kẻ được 2 tiếp tuyến tới (C) và 2 tiếp tuyến vuông góc với nhau) khi đó ABIC là hình vuông. Theo tính chất hình vuông ta có $IA=IB=\sqrt{2}$ (1) .

Nếu A nằm trên d thì $A(t;-m-t)$ suy ra :

$IA=\sqrt{(t-1)^2+(t-2+m)^2}$. Thay vào (1) :

$\Rightarrow \sqrt{(t-1)^2+(t-2+m)^2}=3\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 2t^2-2(m-1)t+m^2-4m-13=0(2)$.

Để trên d có đúng 1 điểm A thì (2) có đúng 1 nghiệm t, từ đó ta có điều kiện :

$\Delta=-(m^2+10m+25)=0 \Leftrightarrow -(m+5)^2=0 \Rightarrow m=-5$. Khi đó (2) có nghiệm kép là :

$t_1=t_2=t_0=\dfrac{m-1}{2}=\dfrac{-5-1}{2}=-3 \Rightarrow A(-3;8)$

BT30. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai đường thẳng (d_1): $4x-3y-12=0$ và (d_2): $4x+3y-12=0$. Tìm toạ độ tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác có 3 cạnh nằm trên (d_1), (d_2), trục Oy.

Giải

Gọi A là giao của $d_1,d_2 \Rightarrow A:\begin{cases}4x-3y-12=0\\4x+3y-12=0\end{cases} \Leftrightarrow A(3;0)\in Ox$

Vì (BC) thuộc Oy cho nên gọi B là giao của d_1 với Oy : cho $x=0$ suy ra $y=-4$, $B(0;-4)$ và C là giao của d_2 với Oy: $\mathrm{C}(0;4)$. Chứng tỏ B, C đối xứng nhau qua Ox, mặt khác A nằm trên Ox vì vậy tam giác ABC là tam giác cân đỉnh A. Do đó tâm I đường tròn nội tiếp tam giác thuộc Ox suy ra $\mathrm{I}(a;0)$.

Theo tính chất phân giác trong : $\dfrac{IA}{IO}=\dfrac{AC}{AO}=\dfrac{5}{4} \Rightarrow \dfrac{IA+IO}{IO}=\dfrac{5+4}{4} \Leftrightarrow \dfrac{OA}{IO}=\dfrac{9}{4}$

$\Rightarrow IO=\dfrac{4OA}{9}=\dfrac{4.3}{9}=\dfrac{4}{3}$. Có nghĩa là $I\left(\dfrac{4}{3};0\right)$

Tính r bằng cách : $S=\frac{1}{2}BC.OA=\frac{1}{2}.5.3=\frac{15}{2}=\frac{1}{2}\frac{(AB+BC+CA)}{r}=\frac{1}{2}\frac{(5+8+5)}{r}\Rightarrow r=\frac{18}{15}=\frac{6}{5}$.

BT31. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm $C(2;-5)$ và đường thẳng $\Delta: 3x-4y+4=0$. Tìm trên Δ hai điểm A và B đối xứng nhau qua $I\left(2;\frac{5}{2}\right)$ sao cho diện tích tam giác ABC bằng15

Giải

Nhận xét I thuộc Δ, suy ra A thuộc $\Delta \Rightarrow A(4t;1+3t)$. Nếu B đối xứng với A qua I thì B có tọa độ $B(4-4t;4+3t) \Rightarrow AB=\sqrt{16(1-2t)^2+9(1-2t)^2}=5|1-2t|$

Khoảng cách từ $C(2;-5)$ đến Δ bằng chiều cao của tam giác ABC : $=\frac{|6+20+4|}{5}=6$

Từ giả thiết : $S=\frac{1}{2}AB.h=\frac{1}{2}5.|1-2t|.6=15 \Leftrightarrow |1-2t|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \rightarrow A(0;1),B(4;4) \\ t=1 \rightarrow A(4;4),B(0;1)\end{array}\right.$

BT32. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC biết $A(2;-3)$, $B(3;-2)$, có diện tích bằng $\frac{3}{2}$ và trọng tâm thuộc đường thẳng Δ: $3x-y-8=0$. Tìm tọa độ đỉnh C.

Giải

Do G thuộc Δ suy ra $G(t;3t-8)$. (AB) qua $A(2;-3)$ có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(1;1)$, cho nên (AB) : $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{1} \Leftrightarrow x-y-5=0$. Gọi M là trung điểm của AB : $M\left(\frac{5}{2};-\frac{5}{2}\right)$.

Ta có : $\overrightarrow{GM}=\left(\frac{5}{2}-t;-\frac{5}{2}-3t+8\right)=\left(\frac{5}{2}-t;\frac{11}{2}-3t\right)$. Giả sử $C(x_0;y_0)$, theo tính chất trọng tâm ta có : $\overrightarrow{GC}=-2\overrightarrow{GM} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0-t=-2\left(\frac{5}{2}-t\right) \\ y_0-3t+8=-2\left(\frac{11}{2}-3t\right)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-5+2t \\ y_0=9t-19\end{cases} \Rightarrow C(2t-5;9t-19)(1)$

Ngoài ra ta còn có $AB=\sqrt{2}$, $h(C,\Delta)=\frac{|3(2t-5)-(9t-19)-8|}{\sqrt{10}}=\frac{|4-3t|}{\sqrt{10}}$

Theo giả thiết : $S=\frac{1}{2}AB.h(C,\Delta)=\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{|4-3t|}{\sqrt{10}}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}|4-3t|=3\sqrt{10}$

$\Leftrightarrow 2(4-3t)^2=90 \Leftrightarrow 9t^2-24t-29=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{4-3\sqrt{5}}{3} \Rightarrow C\left(-\frac{7+6\sqrt{5}}{3};-7-9\sqrt{5}\right) \\ t=\frac{4+3\sqrt{5}}{3} \Rightarrow C=\left(\frac{6\sqrt{5}-7}{3};9\sqrt{5}-7\right)\end{array}\right.$

BT33. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có tâm $I\left(\frac{1}{2};0\right)$. Đường thẳng AB có phương trình: $x-2y+2=0$, $AB=2AD$ và hoành độ điểm A âm. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật đó

Giải

Do A thuộc (AB) suy ra $A(2t-2;t)$ (do A có hoành độ âm cho nên $t<1$)

Do ABCD là hình chữ nhật suy ra C đối xứng với A qua I : $C(3-2t;-t)$.

Gọi d' là đường thẳng qua I và vuông góc với (AB), cắt (AB) tại H thì : $d':\begin{cases} x=\frac{1}{2}+t \\ y=-2t \end{cases}$, và H có tọa độ là $H(0;1)$. Mặt khác B đối xứng với A qua H suy ra $B(2-2t;2-t)$.

Từ giả thiết : $AB=2AD$ suy ra $AH=AD$, hay $AH=2IH$ $\Rightarrow \sqrt{(2-2t)^2+(1-t)^2}=2\sqrt{1+\frac{1}{4}}$

$\Leftrightarrow 5t^2-10t+5=4.\frac{5}{4} \Leftrightarrow (t-1)^2=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t-1=-1 \\ t-1=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=2>1 \end{array}\right.$

Vậy khi $t=\frac{1}{2} \Rightarrow A(-2;0)$, $B(2;2)$, $C(3;0)$, $D(-1;-2)$.

<u>* Chú ý:</u> Ta còn có cách giải khác nhanh hơn

Tính $h(I;AB)=\frac{\left|\frac{1}{2}-0+2\right|}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$, suy ra $AD=2\,h(I,AB)=\sqrt{5}$

Mặt khác : $IA^2=IH^2+\frac{(AB)^2}{4}=IH^2+\frac{(2AD)^2}{4}=IH^2+AD^2=\frac{5}{4}+5=\frac{25}{4} \Rightarrow IA=IB=\frac{5}{2}$

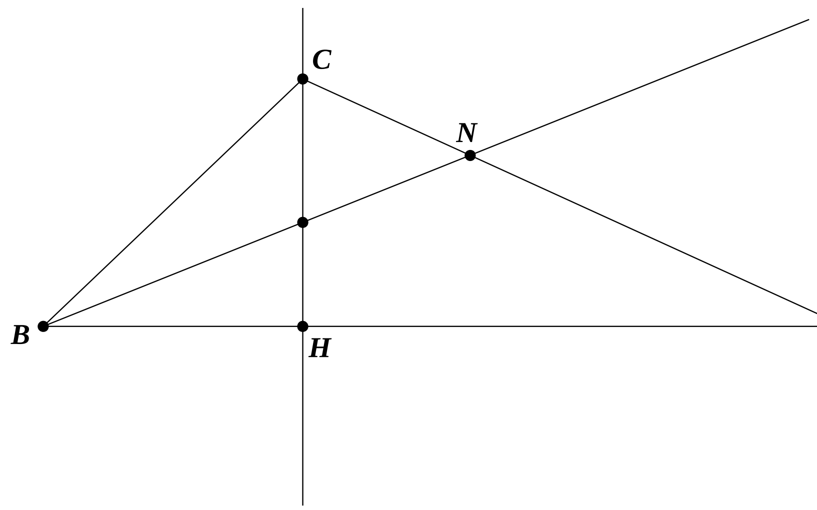
Do đó A, B là giao của (C) tâm I bán kính IA cắt (AB). Vậy A, B có tọa độ là nghiệm của hệ :

$\begin{cases} x-2y+2=0 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow A(-2;0)$, $B(2;2)$ (Do A có hoành độ âm)

Theo tính chất hình chữ nhật suy ra tọa độ của các đỉnh còn lại : $C(3;0)$ và $D(-1;-2)$

BT34. Trong mặt phẳng *Oxy* cho tam giác *ABC* với $A(1;-2)$, đường cao $CH: x-y+1=0$, phân giác trong $BN: 2x+y+5=0$. Tìm toạ độ các đỉnh B, C và tính diện tích tam giác *ABC*

Giải



Đường (AB) qua $A(1;-2)$ và vuông góc với (CH) suy ra (AB): $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2-t \end{cases}$.

(AB) cắt (BN) tại B: $\Leftrightarrow \begin{cases} x=1+t \\ y=-2-t \\ 2x+y+5=0 \end{cases} \rightarrow t=-5$

Do đó $B(-4;3)$. Ta có : $k_{AB}=-1, k_{BN}=-2 \Rightarrow \tan\varphi = \left|\dfrac{-1+2}{1+2}\right| = \dfrac{1}{3}$

Gọi A' đối xứng với A qua phân giác (BN) thì A' nằm trên (AB). Khi đó A' nằm trên d vuông góc với (BN) $\Rightarrow d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2+t \end{cases}$

d cắt (BN) tại H : $\Rightarrow H: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2+t \\ 2x+y+5=0 \end{cases} \rightarrow t=-1 \Leftrightarrow H(-1;-3)$.

A' đối xứng với A qua H suy ra $A'(-3;-4)$. (BC) qua B, A' suy ra : $\vec{u}=(1;-7)$

$\Rightarrow (BC): \begin{cases} x=-4+t \\ y=3-7t \end{cases}$. (BC) cắt (CH) tại C: $\Rightarrow \begin{cases} x=-4+t \\ y=3-7t \\ x-y+1=0 \end{cases} \rightarrow t=\dfrac{3}{4} \Leftrightarrow C\left(-\dfrac{13}{4};-\dfrac{9}{4}\right)$

Tính diện tích tam giác ABC :

Ta có : $\begin{cases} AB=2\sqrt{5} \\ h(C,AB)=\dfrac{9}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB.h(C,AB)=\dfrac{1}{2}.2\sqrt{5}\dfrac{9}{2\sqrt{2}}=\dfrac{9\sqrt{10}}{4}$

BT35. Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ *Oxy* cho hình chữ nhật *ABCD*, có diện tích bằng 12, tâm I là giao điểm của đường thẳng $d_1: x-y-3=0$ và $d_2: x+y-6=0$. Trung điểm của một cạnh là giao điểm của d_1 với trục *Ox*. Tìm toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật

Giải

Theo giả thiết, tọa độ tâm I $\Leftrightarrow \begin{cases} x-y-3=0 \\ x+y-6=0 \end{cases} \Rightarrow I\left(\dfrac{9}{2};\dfrac{3}{2}\right)$. Gọi M là trung điểm của AD thì M có tọa độ là giao của : $x-y-3=0$ với Ox suy ra $M(3;0)$. Nhận xét rằng IM || AB và DC , nói một cách khác AB và CD nằm trên 2 đường thẳng song song với d_1 có $\vec{n}=(1;-1)$.

A, D nằm trên đường thẳng d vuông góc với d_1 $\Rightarrow d: \begin{cases} x=3+t \\ y=-t \end{cases}$.

Giả sử $A(3+t;-t)$ (1), thì do D đối xứng với A qua M suy ra $D(3-t;t)$ (2) .

C đối xứng với A qua I cho nên $C(6-t;3+t)$ (3). B đối xứng với D qua I suy ra $B(12+t;3-t)$.(4)

Gọi J là trung điểm của BC thì J đối xứng với M qua I cho nên J(6;3).

Do đó ta có kết quả là : : $MJ = AB = AD = 3\sqrt{2}$.

Khoảng cách từ A tới d_1: $h(A,d_1)=\dfrac{|2t|}{\sqrt{2}} \Rightarrow S_{ABCD}=2h(A,d_1).MJ$

$\Leftrightarrow S_{ABCD}=2\frac{|2t|}{\sqrt{2}}3\sqrt{2}=12|t|=12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=1 \end{array}\right.$. Thay các giá trị của t vào (1),(2),(3),(4) ta tìm được các đỉnh của hình chữ nhật : $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \to A(3;1),\ D(4;-1),\ C(7;2),\ B(11;4) \\ t=1 \to A(4;-1),\ D(2;1),\ C(5;4),\ B(13;2) \end{array}\right.$

BT36. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $x+2y-3=0$ và hai điểm $\mathrm{A}(1;0)$, $\mathrm{B}(3;-4)$. Hãy tìm trên đường thẳng Δ một điểm M sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|$ là nhỏ nhất

Giải

$D,M\in\Delta \Rightarrow M(3-2t;t)$ có nên ta có : $\overrightarrow{MA}=(2t-2;-t)$, $3\overrightarrow{MB}=(6t;-3t-12)$. Suy ra tọa độ của $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=(8t;-4t-14) \Rightarrow \left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|=\sqrt{(8t)^2+(4t+14)^2}$.

Vậy $f(t)=\sqrt{(8t)^2+(4t+14)^2}=\sqrt{80t^2+112t+196}$.

Xét $g(t)=80t^2+112t+196$,

tính đạo hàm $g'(t)=160t+112$.

$g'(t)=0$ khi $t=-\frac{112}{80}=-\frac{51}{80} \Leftrightarrow g\left(-\frac{51}{80}\right)=\frac{15.169}{80}=196$

Vậy min $\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|=\sqrt{196}=14$, đạt được khi $t=-\frac{51}{80}$ và $M\left(-\frac{131}{40};-\frac{51}{80}\right)$

BT37. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường tròn : $(C_1): x^2+y^2=13$ và $(C_2):(x-6)^2+y^2=25$ cắt nhau tại $\mathrm{A}(2;3)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua A và cắt $(C_1),(C_2)$ theo hai dây cung có độ dài bằng nhau.

Giải

Từ giả thiết : $(C_1): I=(0;0),\ R=\sqrt{13}.\ (C_2): J(6;0),\ R'=5$

Gọi đường thẳng d qua $\mathrm{A}(2;3)$ có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b) \Rightarrow d:\begin{cases} x=2+at \\ y=3+bt \end{cases}$

d cắt (C_1) tại A, B : $\Leftrightarrow \begin{cases} x=2+at \\ y=3+bt \\ x^2+y^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \left[(a^2+b^2)t^2+2(2a+3b)t\right]=0 \to t=-\frac{2a+3b}{a^2+b^2}$

$\Leftrightarrow B\left(\frac{b(2b-3a)}{a^2+b^2};\frac{a(3a-2b)}{a^2+b^2}\right)$. Tương tự d cắt (C_2) tại A, C thì tọa độ của A, C là nghiệm của hệ : $\Leftrightarrow \begin{cases} x=2+at \\ y=3+bt \\ (x-6)^2+y^2=25 \end{cases} \to t=\frac{2(4a-3b)}{a^2+b^2} \Leftrightarrow C\left(\frac{10a^2-6ab+2b^2}{a^2+b^2};\frac{3a^2+8ab-3b^2}{a^2+b^2}\right)$

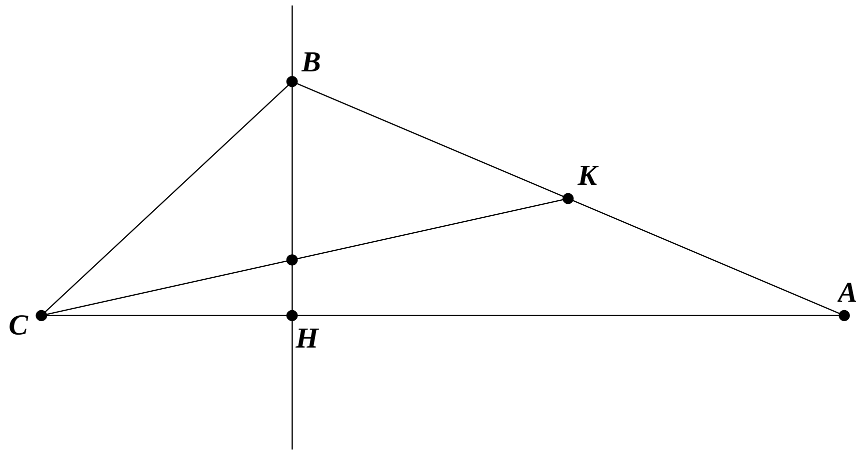
Nếu 2 dây cung bằng nhau thì A là trung điểm của A, C. Từ đó ta có phương trình :

$$\Leftrightarrow \frac{\left(2b^2-3ab\right)}{a^2+b^2}+\frac{10a^2-6ab+2b^2}{a^2+b^2}=4 \Leftrightarrow 6a^2-9ab=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \to d:\begin{cases} x=2 \\ y=3+t \end{cases} \\ a=\frac{3}{2}b \to \vec{u}=\left(\frac{3}{2}b;b\right) \,||\, \vec{u'}=(3;2) \end{array}\right.$$

Suy ra : $d:\begin{cases} x=2+3t \\ y=3+2t \end{cases}$. Vậy có 2 đường thẳng d: $x-2=0$ và d': $2x-3y+5=0$

BT38. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC biết $A(3;0)$, đường cao từ đỉnh B có phương trình $x+y+1=0$ trung tuyến từ đỉnh C có phương trình $2x-y-2=0$. Viết phường trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Giải



Đường thẳng d qua A(3;0) và vuông góc với (BH) cho nên có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1)$ do đó d : $\begin{cases} x=3+t \\ y=t \end{cases}$. Đường thẳng d cắt (CK) tại C : $\begin{cases} x=3+t \\ y=t \\ 2x-y-2=0 \end{cases} \Rightarrow t=-4 \Leftrightarrow C(-1;-4)$

Vì K thuộc (CK) $\Rightarrow K(t;2t-2)$ và K là trung điểm của AB cho nên B đối xứng với A qua K suy ra $B(2t-3;4t-4)$. Mặt khác K lại thuộc (BH) cho nên : $(2t-3)+(4t-4)+1=0$ suy ra $t=1$ và tọa độ $B(-1;0)$.

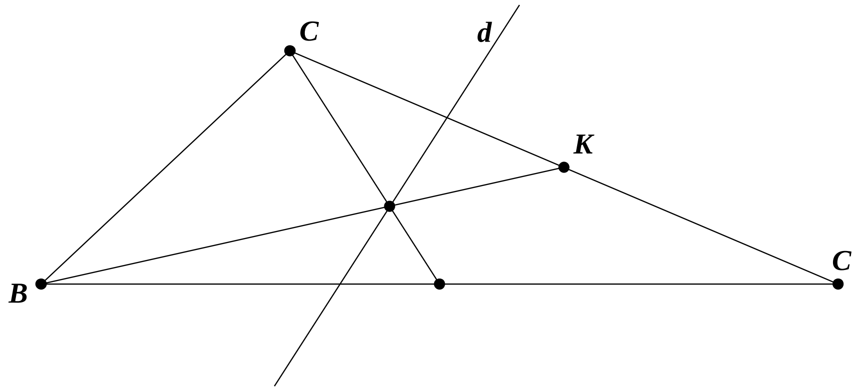
(C): $x^2+y^2-2ax-2by+c=0\left(a^2+b^2-c=R^2>0\right)$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Cho (C) qua lần lượt A,B,C ta được hệ : $\begin{cases} 9-6a+c=0 \\ 4+4a+c=0 \\ 5+2a+8b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=0 \\ c=-6 \end{cases}$

Vậy $(C):\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{25}{4}$

BT39. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC biết $A(1;-1)$, $B(2;1)$, diện tích bằng $\frac{11}{2}$ và trọng tâm G thuộc đường thẳng $d:3x+y-4=0$. Tìm tọa độ đỉnh C ?

Giải



Nếu G thuộc d thì $G(t;4-3t)$. Gọi $C(x_0;y_0)$.

Theo tính chất trọng tâm : $\begin{cases} t=\dfrac{1+2+x_0}{3} \\ 4-3t=\dfrac{y_0}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=3t-3 \\ y_0=12-9t \end{cases}$

Do đó $C(3t-3;12-9t)$.

Ta có :

$\overrightarrow{AB}=(1;2)\Rightarrow \begin{cases} (AB):\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}\Rightarrow 2x-y-3=0 \\ AB=\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5} \end{cases}$

h(C,AB)= $\dfrac{|2(3t-3)-(12-9t)-3|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|15t-21|}{\sqrt{5}}$. Do đó : $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB.h(C,AB)\Rightarrow$

$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{5}\dfrac{|15t-21|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|15t-21|}{2}=\dfrac{11}{2}\Leftrightarrow |15t-21|=11\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{32}{15} \\ t=\dfrac{20}{15} \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{32}{15}\to C=\left(\dfrac{17}{5};-\dfrac{26}{5}\right) \\ t=\dfrac{4}{3}\to C(1;0) \end{array}\right.$

BT40. Trong mặt phẳng Oxy , cho hình vuông có đỉnh $(-4;5)$ và một đường chéo có phương trình $7x-y+8=0$. Viết phương trình chính tắc các cạnh hình vuông

Giải

Gọi $A(-4;8)$ thì đường chéo (BD): $7x-y+8=0$. Giả sử $B(t;7t+8)$ thuộc (BD).

Đường chéo (AC) qua $A(-4;8)$ và vuông góc với (BD) cho nên có véc tơ chỉ phương

$\vec{u}=(7;-1)\Rightarrow (AC):\begin{cases} x=-4+7t \\ y=5-t \end{cases}\Leftrightarrow \dfrac{x+4}{7}=\dfrac{y-5}{-1}\Leftrightarrow x+7y-39=0$. Gọi I là giao của (AC) và (BD) thì tọa độ của I là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x=-4+7t \\ y=5-t \\ 7x-y+8=0 \end{cases}\to t=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow I\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{2}\right)\Leftrightarrow C(3;4)$

Từ $B(t;7t+8)$ suy ra : $\overrightarrow{BA}=(t+4;7t+3)$, $\overrightarrow{BC}=(t-3;7t+4)$. Để là hình vuông thì $BA=BC$

BA vuông góc với BC $\Leftrightarrow (t+4)(t-3)+(7t+3)(7t+4)=0\Leftrightarrow 50t^2+50t=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \to B(0;8) \\ t=-1 \to B(-1;1) \end{array}\right.$. Tìm tọa độ của D đối xứng với B qua I $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} B(0;8) \to D(-1;1) \\ B(-1;1) \to D(0;8) \end{array}\right.$

Từ đó : (AB) qua $A(-4;5)$ có $\overrightarrow{u_{AB}}=(4;3) \to (AB): \dfrac{x+4}{4}=\dfrac{y-5}{3}$

(AD) qua $A(-4;5)$ có $\overrightarrow{u_{AD}}=(3;-4) \to (AB): \dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y-5}{-4}$

(BC) qua $B(0;8)$ có $\overrightarrow{u_{BC}}=(3;-4) \Rightarrow (BC): \dfrac{x}{3}=\dfrac{y-8}{-4}$

(DC) qua $D(-1;1)$ có $\overrightarrow{u_{DC}}=(4;3) \Rightarrow (DC): \dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-1}{3}$

<u>Chú ý :</u> Ta còn cách giải khác

(BD) : $y=7x+8$, (AC) có hệ số góc $k=-\dfrac{1}{7}$ và qua $A(-4;5)$ suy ra $AC: y=\dfrac{x}{7}+\dfrac{31}{7}$.

Gọi I là tâm hình vuông : $\Rightarrow \begin{cases} x_A+x_C=2x_I \\ y_A+y_C=2y_I \\ y_I=7x_I+8 \\ y_C=-\dfrac{x_C}{7}+\dfrac{31}{7} \end{cases} \Rightarrow C(3;4)$

Gọi (AD) có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b),(BD): \vec{v}=(1;7) \Rightarrow a+7b=\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos 45^0$

$\Leftrightarrow a+7b=5\sqrt{a^2+b^2}$. Chọn $a=1$, suy ra $b=\dfrac{3}{4} \Rightarrow (AD): y=\dfrac{3}{4}(x+4)+5=\dfrac{3}{4}x+8$

Tương tự : $(AB): y=-\dfrac{4}{3}(x+4)+5=-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{1}{3}$, $(BC): y=\dfrac{3}{4}(x-3)+4=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{7}{4}$ và đường thẳng (DC): $y=-\dfrac{4}{3}(x-3)+4=-\dfrac{4}{3}x+8$

BT41. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $E(-1;0)$ và đường tròn (C): $x^2+y^2-8x-4y-16=0$. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm E cắt (C) theo dây cung MN có độ dài ngắn nhất.

Giải

$(C):(x-4)^2+(y-2)^2=36 \Rightarrow I(4;2), R=6$

Nhận xét : $EI<R$ suy ra E nằm trong (C)

Gọi d là đường thẳng qua $E(-1;0)$ có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b) \Rightarrow d: \begin{cases} x=-1+at \\ y=bt \end{cases}$

Đường thẳng d cắt (C) tại 2 điểm M, N có tọa độ là nghiệm của hệ :

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1+at \\ y=bt \\ (x-4)^2+(y-2)^2=36 \end{cases} \to (a^2+b^2)t^2-2(5a+2b)t-7=0$. (1)

Gọi $M\left(-1+at;bt\right)$, $N\left(-1+at';bt'\right)$ với t và t' là 2 nghiệm của (1). Khi đó độ dài của dây cung

$$MN=\sqrt{a^2\left(t-t'\right)^2+b^2\left(t-t'\right)^2}=\left|t-t'\right|\sqrt{a^2+b^2}=\frac{2\sqrt{\Delta'}}{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2}=\frac{2\sqrt{18a^2+20ab+11b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{18+20\left(\frac{b}{a}\right)+11\left(\frac{b}{a}\right)^2}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}}\Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{18+20t+11t^2}{1+t^2}}\left(t=\frac{b}{a}\right)$$. Xét hàm số $f\left(t\right)=\frac{18+20t+11t^2}{1+t^2}$

Tính đạo hàm $f'\left(t\right)$ cho bằng 0, lập bảng biến thiên suy ra GTLN của t, từ đó suy ra t (tức là suy ra tỷ số $\frac{a}{b}$). Tuy nhiên cách này dài

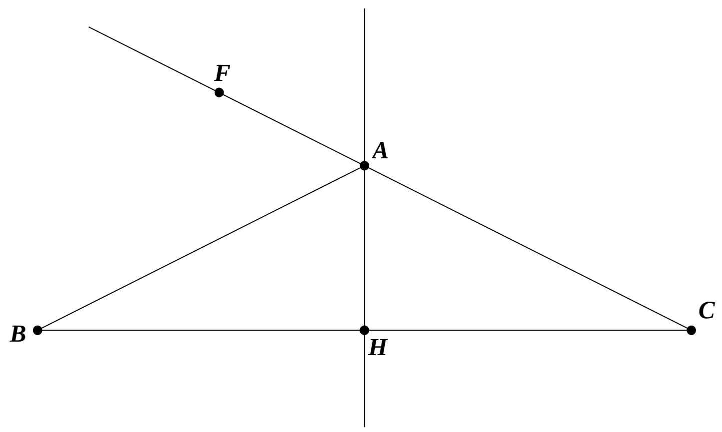
<u>Chú ý:</u> Ta sử dụng tính chất dây cung ở lớp 9 : Khoảng cách từ tâm đến dây cung càng nhỏ thì dây cung càng lớn

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên đường thẳng d bất kỳ qua E(-1;0). Xét tam giác vuông HIE (I là đỉnh) ta luôn có : $IH^2=IE^2-HE^2\le IE^2\Rightarrow IH\le IE$. Do đó IH lớn nhất khi $HE=0$ có nghĩa là H trùng với E. Khi đó d cắt (C) theo dây cung nhỏ nhất . Lúc này d là đường thẳng qua E và vuông góc với IE cho nên d có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=\overrightarrow{IE}=\left(5;2\right)$,

do vậy $d:\ 5\left(x+1\right)+2y=0$ hay $5x+2y+5=0$.

BT42. Cho tam giác ABC cân tại A, biết phương trình đường thẳng AB, BC lần lượt là: $x+2y-5=0$ và $3x-y+7=0$. Viết phương trình đường thẳng AC, biết rằng AC đi qua điểm $\mathrm{F}\left(1;-3\right)$.

Giải



Ta thấy B là giao của (AB) và (BC) cho nên tọa độ B là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases}x+2y-5=0\\3x-y+7=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{9}{7}\\y=-\dfrac{22}{7}\end{cases}$$

$\Leftrightarrow B\left(-\frac{9}{7};-\frac{22}{7}\right)$. Đường thẳng d' qua A vuông góc với (BC) có

$\vec{u}=(3;-1)\Rightarrow \vec{n}=(1;3)\Leftrightarrow k=-\frac{1}{3}$. (AB) có $k_{AB}=-\frac{1}{2}$. Gọi (AC) có hệ số góc là k ta có phương

trình : $\left|\dfrac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\frac{1}{3}}\right|=\left|\dfrac{k+\frac{1}{3}}{1-\frac{k}{3}}\right|\Leftrightarrow \frac{1}{5}=\frac{|3k+1|}{|3-k|}\Leftrightarrow |15k+5|=|3-k|\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}15k+5=3-k\\15k+5=k-3\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}k=-\frac{1}{8}\\k=-\frac{4}{7}\end{array}\right.$

Với $k=-\frac{1}{8}\Rightarrow (AC): y=-\frac{1}{8}(x-1)-3\Leftrightarrow x+8y+23=0$

Với $k=\frac{4}{7}\Rightarrow (AC): y=-\frac{4}{7}(x+1)-3\Leftrightarrow 4x+7y+25=0$

BT43. Trong mặt phẳng Oxy, hãy xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC vuông cân tại A. Biết rằng cạnh huyền nằm trên đường thẳng $d:\ x+7y-31=0$, điểm $N(7;7)$ thuộc đường thẳng AC, điểm $M(2;-3)$ thuộc AB và nằm ngoài đoạn AB

Giải

Gọi $A(x_0;y_0)\Rightarrow \overrightarrow{MA}=(x_0-2;y_0+3),\ \overrightarrow{NA}=(x_0-7;y_0-7)$.

Do A là đỉnh của tam giác vuông cân cho nên AM vuông góc với AN hay ta có :

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{NA}=0\Leftrightarrow (x_0-2)(x_0-7)+(y_0+3)(y_0-7)=0\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2-9x_0-4y_0-7=0$

Do đó A nằm trên đường tròn $(C):(x_0-3)^2+(y_0-2)^2=20$

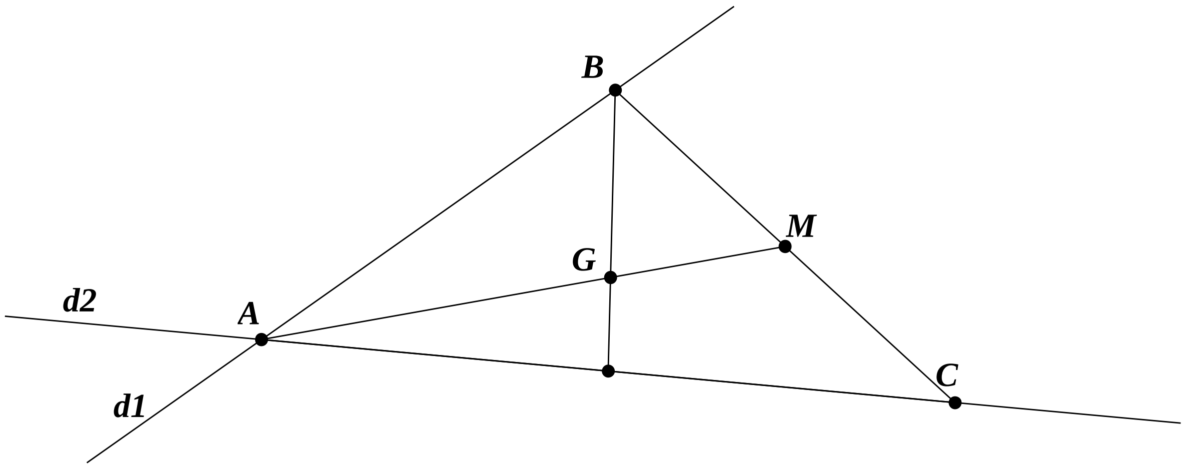
Đường tròn (C) cắt d tại 2 điểm B,C có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình :

$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)^2+(y-2)^2=20\\x+7y-31=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=31-7y\\(28-7y)^2+(y-2)^2=20\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=31-7y\\50y^2-396y+768=0\end{cases}$

Do đó ta tìm được $y=\frac{198-2\sqrt{201}}{50}=\frac{99-\sqrt{201}}{25};y=\frac{99+\sqrt{201}}{25}$, tương ứng ta tìm được các giá trị của x : $x=\frac{82+7\sqrt{201}}{25};x=\frac{82-7\sqrt{201}}{25}$. Vậy $A\left(\frac{82+7\sqrt{201}}{25};\frac{99-\sqrt{201}}{25}\right)$ và tọa độ của điểm $A\left(\frac{82-7\sqrt{201}}{25};\frac{99+\sqrt{201}}{25}\right)$

BT44. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai đường thẳng $d_1:\ 2x+y+5=0,\ d_2:\ 3x+2y-1=0$ và điểm $G(1;3)$. Tìm tọa độ các điểm B thuộc d_1 và C thuộc d_2 sao cho tam giác ABC nhận điểm G làm trọng tâm. Biết A là giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2

Giải



Tìm tọa độ A là nghiệm của hệ : $\begin{cases}2x+y+5=0\\3x+2y-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-11\\y=17\end{cases} \Rightarrow A(-11;17)$

Nếu C thuộc $d_1 \Rightarrow C(t;-2t-5)$, $B\in d_2 \Rightarrow B(1+2m;-1-3m)$

Theo tính chất trọng tâm của tam giác ABC khi G là trọng tâm thì :

$$\begin{cases}\dfrac{t+2m-10}{3}=1\\\dfrac{11-2t-3m}{3}=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t+2m=13\\2t+3m=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}t=13-2m\\2(13-2m)+3m=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=13-2m\\m=24\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}t=-35\\m=24\end{cases}$$

Vậy ta tìm được $C(-35;65)$ và $B(49;-53)$.

BT45. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C): $x^2+y^2-6x+2y-15=0$. Tìm tọa độ điểm M trên đường thẳng d: $3x-22y-6=0$, sao cho từ điểm M kẻ được tới (C) hai tiếp tuyến MA, MB (A, B là các tiếp điểm) mà đường thẳng AB đi qua điểm $C(0;1)$.

Giải

(C) : $(x-3)^2+(y+1)^2=25$, có $I(3;-1)$ và $R=5$.

Gọi $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ là 2 tiếp điểm của 2 tiếp tuyến kẻ từ M.

Gọi $M(x_0;y_0)\in d \Rightarrow 3x_0-22y_0-6=0$ (*)

Hai tiếp tuyến của (C) tại A, B có phương trình là :

$(x_1-3)(x-3)+(y_1+1)(y+1)=25 \quad (1)$ và : $(x_2-3)(x-3)+(y_2+1)(y+1)=25 \quad (2)$

Để 2 tiếp tuyến trở thành 2 tiếp tuyến kẻ từ M thì 2 tiếp tuyến phải đi qua M

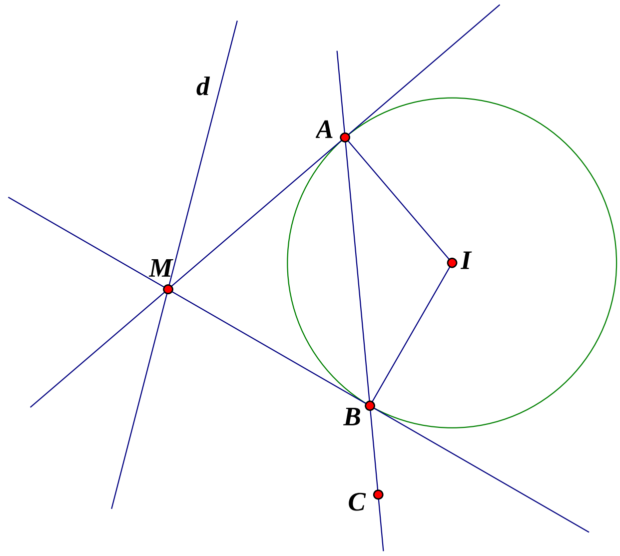
$(x_1-3)(x_0-3)+(y_1+1)(y_0+1)=25 \quad (3)$ và $(x_2-3)(x_0-3)+(y_2+1)(y_0+1)=25 \quad (4)$

Từ (3) và (4) chứng tỏ (AB) có phương trình là : $(x_0-3)(x-3)+(y_0+1)(y+1)=25 \quad (5)$

Theo giả thiết thì (AB) qua $C(0;1)$ suy ra :

$-3(x_0-3)+2(y_0+1)=25 \Leftrightarrow -3x_0+2y_0-14=0(6)$

Kết hợp với (*) ta có hệ : $\begin{cases}3x_0-22y_0-6=0\\-3x_0+2y_0-14=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y_0=-1\\x_0=-\dfrac{16}{3}\end{cases} \Leftrightarrow M\left(-\dfrac{16}{3};-1\right)$



BT46. Trong mặt phẳng Oxy : Cho hai điểm $A(2;1)$, $B(-1;-3)$ và hai đường thẳng $d_1: x+y+3=0;\ d_2: x-5y-16=0$. Tìm tọa độ các điểm C, D lần lượt thuộc d_1 và d_2 sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành.

Giải

Trường hợp : Nếu AB là một đường chéo

Gọi $I\left(\frac{1}{2};-1\right)$, đường thẳng qua I có hệ số góc k suy ra $d: y=k\left(x-\frac{1}{2}\right)-1$

Đường thẳng d cắt d_1 tại C $\Leftrightarrow \begin{cases} y=k\left(x-\frac{1}{2}\right)-1 \\ x+y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{k-4}{2(k+1)} \\ y=-\frac{7k+2}{2(k+1)} \end{cases}$

$\Leftrightarrow C\left(\frac{k-4}{2(k+1)};-\frac{7k+2}{2(k+1)}\right)$. Tương tự d cắt d_2 tại B : $\begin{cases} y=k\left(x-\frac{1}{2}\right)-1 \\ x-5y-16=0 \end{cases}$

Từ đó suy ra tọa độ của B. Để ABCD là hình bình hành thì : $AB=CD$. Sẽ tìm được k

*** Cách khác:**

Gọi $C(t;-t-3)$ thuộc d_1, tìm B đối xứng với C qua I suy ra $D(1-t;t+1)$

Để thỏa mãn ABCD là hình bình hành thì D phải thuộc d_2 : $\Leftrightarrow 1-t-5(t+1)-16=0$

Suy ra $t=-\frac{10}{3}$ và D$\left(\frac{13}{3};-\frac{7}{3}\right)$ và C$\left(-\frac{10}{3};\frac{1}{3}\right)$

Trường hợp AB là một cạnh của hình bình hành .

Chọn $C(t;-t-3)$ thuộc d_1 và $D(5m+16;m)$ thuộc d_2

Để ABCD là hình bình hành thì : $\begin{cases} AC=BD \\ AB \parallel CD \end{cases}$

Ta có

$$:\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(2-t)^2+(t+4)^2}=\sqrt{(5m+17)^2+(m+3)^2} \\ \frac{5m-t+16}{3}=\frac{m+t+3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-t)^2+(t+4)^2=(5m+17)^2+(m+3)^2 \\ 17m-7t+55=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2+2t=13m^2+88m+89=0 \\ t=\dfrac{17m+55}{7} \end{cases}$. Giải hệ này ta tìm được m và t, thay vào tọa độ của C và D

BT47. Trong mặt phẳng tọa độ độ Oxy, cho tam giác ABC có $C(1;2)$, hai đường cao xuất phát từ A và B lần lượt có phương trình là $x+y=0$ và $2x-y+1=0$. Tính diện tích tam giác ABC.

Giải

(AC) qua $C(1;2)$ và vuông góc với đường cao BK cho nên có :

$\vec{u}=(2;-1)\Rightarrow(AC):\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}\Leftrightarrow x+2y-5=0$

(AC) cắt (AH) tại A : $\begin{cases}2x-y+1=0\\x+2y-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{5}\\y=\dfrac{11}{5}\end{cases}\Leftrightarrow A\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{11}{5}\right)\Rightarrow AC=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

(BC) qua và vuông góc với (AH) suy ra $\overrightarrow{u_{BC}}=(1;1)\Rightarrow(BC):\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\end{cases}$

(BC) cắt đường cao (AH) tại B $\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\x+y=0\end{cases}\rightarrow t=-\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow B\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$

Khoảng cách từ B đến $AC:\dfrac{\left|-\dfrac{1}{2}+1-5\right|}{\sqrt{5}}=\dfrac{9}{2\sqrt{5}}\Rightarrow S=\dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{5}}{5}.\dfrac{9}{2\sqrt{5}}=\dfrac{9}{20}$

BT48. Trong mp Oxy, cho đường tròn (C): $x^2+y^2-6x+2y+6=0$ và điểm $P(1;3)$.

a) Viết phương trình các tiếp tuyến PE, PF của đường tròn (C), với E, F là các tiếp điểm.

b) Tính diện tích tam giác PEF.

Giải

(C): $(x-3)^2+(y+1)^2=4\Rightarrow I(3;-1),R=2$

Giả sử đường thẳng qua P có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(a;b)\Rightarrow d:a(x-1)+b(y-3)=0$

Hay : $ax+by-(a+3b)=0$ (*).

Để d là tiếp tuyến của (C) thì khoảng cách từ tâm I đến d bằng bán kính :

$\Leftrightarrow\dfrac{|3a-b-a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\Leftrightarrow\dfrac{|2a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2$

$\Leftrightarrow(a-2b)^2=a^2+b^2\Leftrightarrow 4ab-3b^2=0$

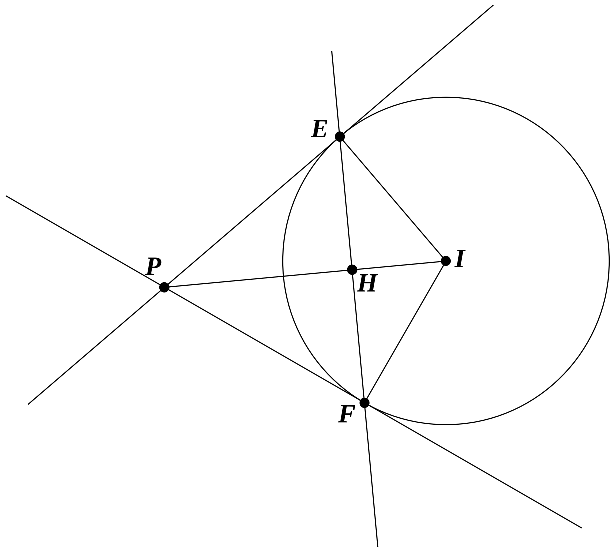
$\Leftrightarrow b(4a-3b)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\rightarrow a(x-1)=0\leftrightarrow x-1=0\\b=\dfrac{4}{3}a\rightarrow a(x-1)+\dfrac{4}{3}a(y-3)=0\leftrightarrow 3x+4y-6=0\end{array}\right.$

Ta có : $PI=2\sqrt{5}$, $PE=PF=\sqrt{PI^2-R^2}=\sqrt{20-4}=4$.

Tam giác IEP đồng dạng với IHF suy ra :

$$\frac{\mathrm{IF}}{\mathrm{IH}}=\frac{EP}{EH}=\frac{IP}{IE}=\frac{2\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}\Rightarrow IH=\frac{\mathrm{IF}}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}, EH=\frac{EP}{\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow PH=PI-IH=2\sqrt{5}-\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{8}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow S_{EPF}=\frac{1}{2}\mathrm{EF.PH}=\frac{1}{2}\frac{8}{\sqrt{5}}\frac{8}{\sqrt{5}}=\frac{32}{5}$$



BT49. Trong mpOxy, cho 2 đường thẳng $d_1:\ 2x+y-1=0,\ d_2: 2x-y+2=0$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm nằm trên trục Ox đồng thời tiếp xúc với d_1 và d_2.

Giải

Gọi $\mathrm{I}(a;0)$ thuộc Ox. Nếu (C) tiếp xúc với 2 đường thẳng thì : $\begin{cases} h(I,d_1)=h(I,d_2) \\ h(I,d_1)=R \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|2a-1|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|2a+2|}{\sqrt{5}} (1) \\ R=\dfrac{|2a-1|}{\sqrt{5}} \quad (2) \end{cases}$. Từ (1) $\Rightarrow$ $a=\frac{1}{4}$, thay vào (2) : $R=\frac{\sqrt{5}}{10}\Leftrightarrow (C):\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+y^2=\frac{5}{100}$

BT50. Trong mp Oxy, cho 2 đường thẳng $d_1:\ 2x-3y+1=0,\ d_2:\ 4x+y-5=0$. Gọi A là giao điểm của d_1 và d_2. Tìm điểm B trên d_1 và điểm C trên d_2 sao cho ΔABC có trọng tâm $\mathrm{G}(3;5)$.

Giải

Tọa độ A là nghiệm của hệ : $\begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ 4x+y-5=0 \end{cases}\Rightarrow A\left(\frac{7}{8};\frac{3}{2}\right)$

$B\in d_1\Rightarrow B(1+2t;1-3t), C\in d_2\Rightarrow C(m;5-4m)$.

Tam giác ABC nhận $\mathrm{G}(3;5)$ làm trọng tâm : $\Leftrightarrow \begin{cases} 1+2t+m+\frac{7}{8}=9 \\ 1-3t+5-4m+\frac{3}{2}=15 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} 2t+m=\frac{57}{8} \\ 3t+4m=-\frac{15}{2} \end{cases}$

Giải hệ trên suy ra : $\begin{cases} t = \dfrac{31}{5} \to B\left(\dfrac{67}{5}; -\dfrac{88}{5}\right) \\ m = -\dfrac{207}{40} \to C\left(-\dfrac{207}{40}; \dfrac{257}{10}\right) \end{cases}$

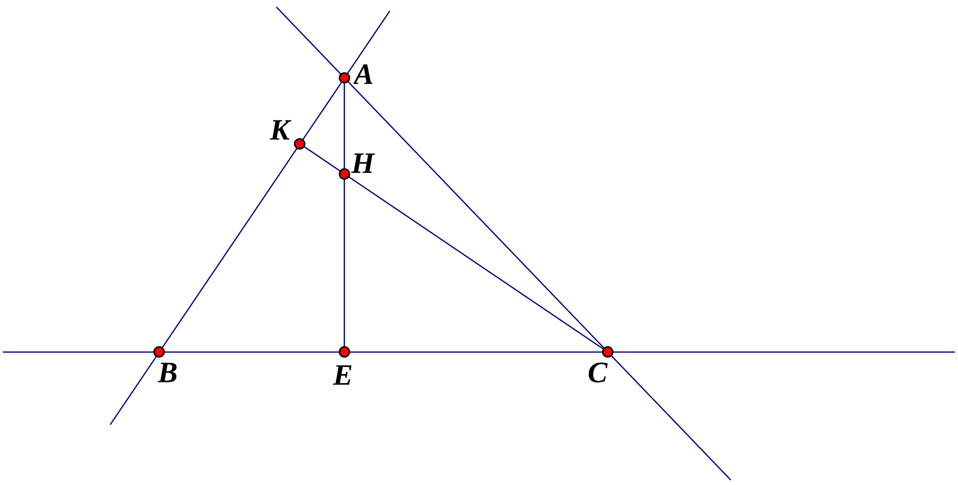
BT51. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$. Lập pt đường tròn (C’) đối xứng với (C) qua đường thẳng Δ: $x - 2 = 0$

Giải

Ta có $(C):(x-1)^2 + (y-2)^2 = 2 \leftrightarrow I(1;2), R = \sqrt{2}$

Gọi J là tâm của (C') thì I và J đối xứng nhau qua $d: x = 2$ suy ra $J(3;2)$ và (C) có cùng bán kính R . Vậy $(C'):(x-3)^2 + (y-2)^2 = 2$ đối xứng với (C) qua d .

BT52. Trong mpOxy, cho ΔABC có trực tâm $H\left(\dfrac{13}{5}; \dfrac{13}{5}\right)$, phương trình các đường thẳng AB và AC lần lượt là $4x - y - 3 = 0$, $x + y - 7 = 0$. Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh BC.



Giải:

Tọa độ A là nghiệm của hệ : $\begin{cases} 4x - y - 3 = 0 \\ x + y - 7 = 0 \end{cases}$

Suy ra : $A(2;5)$. $\Rightarrow \overrightarrow{HA} = \left(-\dfrac{3}{5}; \dfrac{12}{5}\right) \| \vec{u} = (1;-4)$. Suy ra (AH) có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (1;-4)$.

(BC) vuông góc với (AH) cho nên (BC) có $\vec{n} = \vec{u} = (1;-4)$ suy ra (BC): $x - 4y + m = 0$ (*).

C thuộc (AC) suy ra $C(t;7-t)$ và $\overrightarrow{CH} = \left(\dfrac{13}{5} - t; t - \dfrac{22}{5}\right) \Rightarrow \overrightarrow{u_{AB}} = (1;4) \perp \overrightarrow{CH}$. Cho nên ta có :

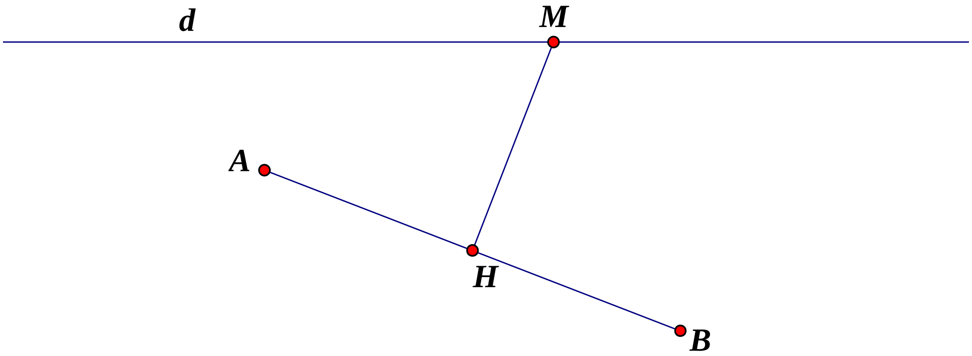
$\dfrac{13}{5} - t + 4\left(t - \dfrac{22}{5}\right) = 0 \to t = 5 \Leftrightarrow C(5;2)$.

Vậy (BC) qua $C(5;2)$ có véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;-4) \Rightarrow (BC):(x-5) - 4(y-2) = 0$

(BC): $\Leftrightarrow x - 4y + 3 = 0$

BT53. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng d: $x + y - 3 = 0$ và 2 điểm $A(1;1)$, $B(-3;4)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng AB bằng 1.

Giải



M thuộc d suy ra $M(t;3-t)$. Đường thẳng (AB) qua $A(1;1)$ và có véc tơ chỉ phương

$\vec{u}=(4;-3)\Rightarrow(AB):\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-1}{-3}\Leftrightarrow 3x+4y-4=0$

Theo đầu bài : $\dfrac{|3t+4(3-t)-4|}{5}=1\Leftrightarrow|-t+8|=5$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\to M(3;0)\\ t=13\to M(13;-10)\end{array}\right.$

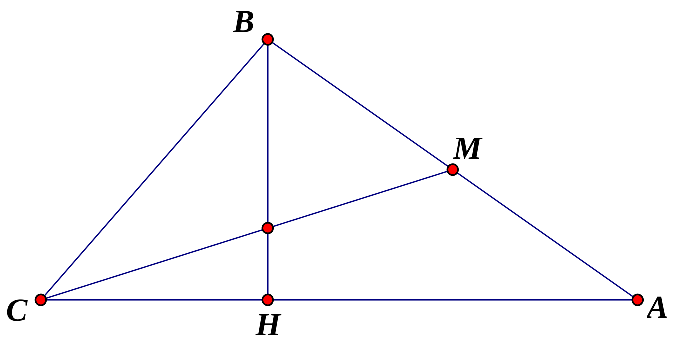
<u>* Chú ý :</u>

Đường thẳng d' song song với (AB) có dạng : $3x+4y+m=0$. Nếu d' cách (AB) một khoảng bằng 1 thì $h(A,d')=1\Leftrightarrow\dfrac{|3+4+m|}{5}=1$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2\to d':3x+4y-2=0\\ m=-12\to d':3x+4y-12=0\end{array}\right.$. Tìm giao của d' với d ta tìm được M .

BT54. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có đỉnh $A(4;3)$, đường cao BH và trung tuyến CM có pt lần lượt là: $3x-y+11=0,\ x+y-1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C

Giải



Đường thẳng (AC) qua $A(4;3)$ và vuông góc với (BH) suy ra (AC) : $\begin{cases}x=4+3t\\ y=3-t\end{cases}$

(AC) cắt trung tuyến (CM) tại C : $\begin{cases}x=4+3t\\ y=3-t\\ x+y-1=0\end{cases}\to 2t+6=0\to t=-3\Leftrightarrow C(-5;6)$

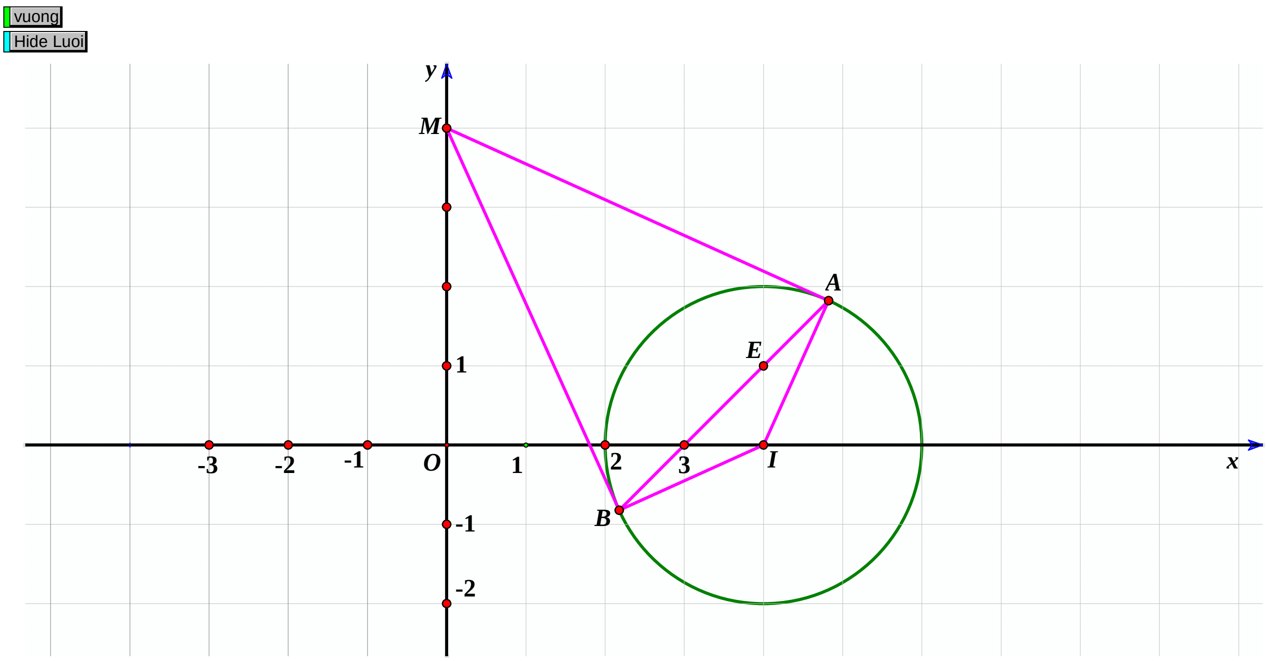
B thuộc (BH) suy ra $B(t;3t+11)$. Do (CM) là trung tuyến cho nên M là trung điểm của AB , đồng thời M thuộc (CM) . $\Rightarrow M\left(\frac{t+4}{2};\frac{3t+14}{2}\right)$

$M\in(CM)\Rightarrow\frac{t+4}{2}+\frac{3t+14}{2}-1=0\Rightarrow t=-4$.

Do đó tọa độ của $B(-4;-1)$ và $M(0;1)$.

BT55. Trong hệ trục 0xy, cho đường tròn (C): $x^2+y^2-8x+12=0$ và điểm $E(4;1)$. Tìm toạ độ điểm M trên trục tung sao cho từ M kẻ được 2 tiếp tuyến MA, MB đến (C), với A, B là các tiếp điểm sao cho E thuộc đường thẳng AB

Giải



Đường tròn (C) : $(x-4)^2+y^2=4\Rightarrow I(4;0)$, $R=2$

Gọi $M(0;a)$ thuộc Oy . Gọi $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)\in(C)$

Tiếp tuyến tại A và B có phương trình là : $(x_1-4)(x-4)+y_1y=4$, $(x_2-4)(x-4)+y_2y=4$

Để thỏa mãn 2 tiếp tuyến này cùng qua M(0;a)

$\Leftrightarrow(x_1-4)(0-4)+y_1a=4$, $(x_2-4)(0-4)+y_1a=4$.

Chứng tỏ (AB) có phương trình : $-4(x-4)+ay=4$

Nếu (AB) qua E(4;1) : $-4(0)+a.1=4$ suy ra : $a=4$

Vậy trên Oy có $M(0;4)$ thỏa mãn .

BT56. Cho tam giác ABC có diện tích $S=\frac{3}{2}$, hai đỉnh $A(2;-3)$, $B(3;-2)$ và trọng tâm G của tam giác thuộc đt $3x-y-8=0$. Tìm tọa độ đỉnh C

Giải

Vì G thuộc d suy ra $G(t;3t-8) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{GA} = (2-t;5-3t) \\ \overrightarrow{GM} = (x_0-t;y_0+8-3t) \end{cases}$. Theo tính chất trọng tâm của tam giác : $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GM} \Rightarrow \begin{cases} 2-t=-2x_0+2t \\ 5-3t=-2y_0-16+6t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0=3t-2 \\ 2y_0=9t-21 \end{cases}$. Theo tính chất trung điểm ta có tọa độ của $C(3t-5;9t-19)$.

(AB) qua $A(2;-3)$ có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1) \Rightarrow (AB): \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+2}{1} \Leftrightarrow x-y-4=0$.

Đồng thời : $AB=\sqrt{2}$. Khoảng cách từ C đến (AB) : $=\dfrac{|3t-5-9t+19-4|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|10-6t|}{\sqrt{2}}$

Theo giả thiết :

$$S=\frac{1}{2}AB.h=\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{|10-6t|}{\sqrt{2}}=|5-3t|=\frac{3}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 10-6t=-3 \\ 10-6t=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{13}{6} \to C\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{11}{2}\right) \\ t=\dfrac{7}{6} \to C\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{7}{2}\right) \end{array}\right.$$

BT57. Viết phương trình đường tròn (C) có bán kính $R=2$ tiếp xúc với trục hoành và có tâm I nằm trên đường thẳng (d): $x+y-3=0$.

Giải

Tâm I nằm trên d suy ra $I(t;3-t)$. Nếu (C) tiếp xúc với Ox thì khoảng cách từ I đến Ox bằng bán kính $R=2$ thì $|3-t|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-t=-2 \\ 3-t=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=5 \to I_1=(5;-2) \\ t=1 \to I_2=(1;2) \end{array}\right.$

Như vậy có 2 đường tròn : $(C_1):(x-5)^2+(y+2)^2=4$, $(C_2):(x-1)^2+(y-2)^2=4$.

BT58. Trong Oxy cho đường tròn (C) có phương trình : $x^2+y^2-2x-6y+6=0$.

a) Viết phương trình đường thẳng đi qua $M(2;4)$ cắt đường tròn (C) tại 2 điểm A, B sao cho M là trung điểm đoạn AB.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) sao cho tiếp tuyến ấy song song với đường thẳng có phương trình: $2x+2y-7=0$.

c) Chứng tỏ đường tròn (C) và đường tròn (C'): $x^2+y^2-4x-6y+4=0$ tiếp xúc nhau. Viết phương trình tiếp tuyến chung của chúng tại tiếp điểm

Giải

(C) : $(x-1)^2+(y-3)^2=4 \Rightarrow I(1;3)$, $R=2$.

a. Gọi $A(x;y)$ thuộc (C) suy ra $(x-1)^2+(y-3)^2=4$(1), B đối xứng với A qua M suy ra $B(4-x;8-y)$. Để đảm bảo yêu cầu bài toán thì B thuộc (C) : $(3-x)^2+(5-y)^2=4$(2).

Từ (1) và (2) ta có hệ : $\begin{cases} (x-1)^2+(y-3)^2=4 \\ (3-x)^2+(5-y)^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2x-6y+6=0 \quad (3) \\ x^2+y^2-6x-10y+30=0 (4) \end{cases}$

Lấy (3) – (4) ta có phương trình : $4x+4y-24=0$, hay : $x+y-6=0$. Đó chính là đường thẳng cần tìm.

b. Gọi d' là đường thẳng song song với d nên nó có dạng : $2x+2y+m=0$ (*) . Để d' là tiếp tuyến của (C) thì : $\Rightarrow h(I,d')=\dfrac{|2+6+m|}{\sqrt{8}}=2 \Leftrightarrow |m+8|=4\sqrt{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=4\sqrt{2}-8 \\ m=-4\sqrt{2}-8 \end{array}\right.$

c. (C'): $(x-2)^2+(y-3)^2=9 \Rightarrow I'(2;3), R'=3$

Ta có : $II'=1$, $R'-R=1$. Chứng tỏ hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau .

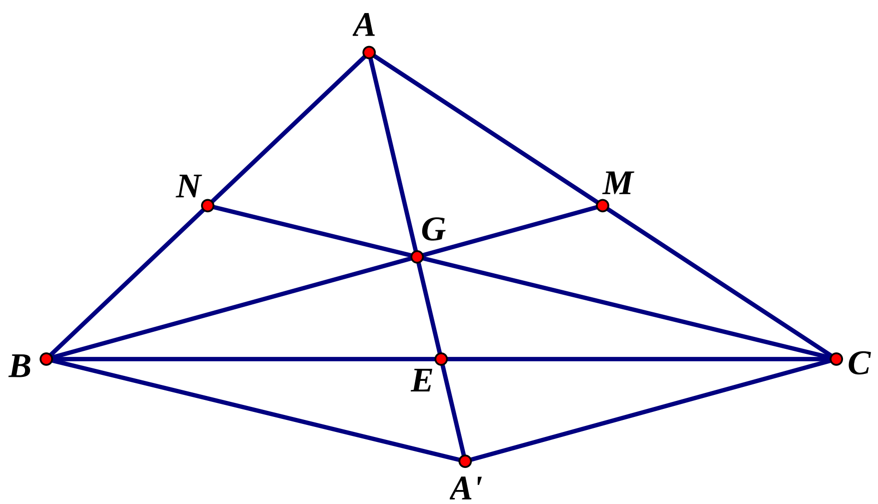
Tìm tọa độ tiếp điểm

$:\begin{cases}(x-1)^2+(y-3)^2=4 \\ (x-2)^2+(y-3)^2=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2-2x-6y+6=0 \\ x^2+y^2-4x-6y+4=0\end{cases} \Rightarrow 2x+2=0 \Leftrightarrow x=-1$. Thay vào phương trình đầu của hệ : $y^2-6y+9=0 \Leftrightarrow (y-3)^2=0 \to y=3 \Leftrightarrow M(1;3)$.

Tiếp tuyến chung qua M và vuông góc với IJ suy ra $d':1(x-1)=0$ hay $x-1=0$.

BT59. Lập phương trình các cạnh của ΔABC, biết đỉnh $A(1;3)$ và hai đường trung tuyến xuất phát từ B và C có phương trình là $x-2y+1=0$ và $y-1=0$.

Giải



Gọi G là trọng tâm tam giác thì tọa độ G là nghiệm của hệ $\begin{cases}x-2y+1=0 \\ y-1=0\end{cases} \Rightarrow G(1;1)$.

$E(x;y)$ thuộc (BC), theo tính chất trọng tâm ta có :

$\overrightarrow{GA}=(0;2), \overrightarrow{GE}=(x-1;y-1) \Rightarrow \overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{GE} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}0=-2(x-1) \\ 2=-2(y-1)\end{cases} \Rightarrow E(1;0)$. C thuộc (CN) cho nên $C(t;1)$, B thuộc (BM) cho nên $B(2m-1;m)$

Do B, C đối xứng nhau qua E cho nên ta có hệ phương trình :

$\begin{cases}2m+t-1=2 \\ m+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=5 \\ m=-1\end{cases} \Rightarrow B(5;1),\ C(-3;-1)$. Vậy (BC) qua $E(1;0)$ có véc tơ chỉ phương

$\overrightarrow{BC}(-8;-2) \parallel \vec{u}=(4;1) \Rightarrow (BC): \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{1} \Leftrightarrow x-4y-1=0$. Tương tự :

(AB) qua A(1;3) có $\overrightarrow{AB}=(4;-2) \parallel \vec{u}=(2;-1) \Rightarrow (AB): \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-1} \Leftrightarrow x+2y-7=0$.

(AC) qua A(1;3) có $\overrightarrow{AC}=(-4;-4)\,||\,\vec{u}=(1;1)\Rightarrow(AC):\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{1}\Leftrightarrow x-y+2=0$

<u>* Chý ý:</u> Hoặc gọi A' đối xứng với A qua G suy ra $A'(1;-1)$ thì BGCA' là hình bình hành, từ đó ta tìm được tọa độ của 2 đỉnh B, C và cách lập các cạnh như trên.

BT60. Cho ΔABC có đỉnh $A(2;-1)$ và hai đường phân giác trong của góc B, góc C có phương trình lần lượt là $(d_B): x-2y+1=0$ và $(d_C): x+y+3=0$. Lập phương trình của BC.

Giải

Gọi A' đối xứng với A qua d_B và A" đối xứng với A qua d_C thì A' và A" nằm trên BC .

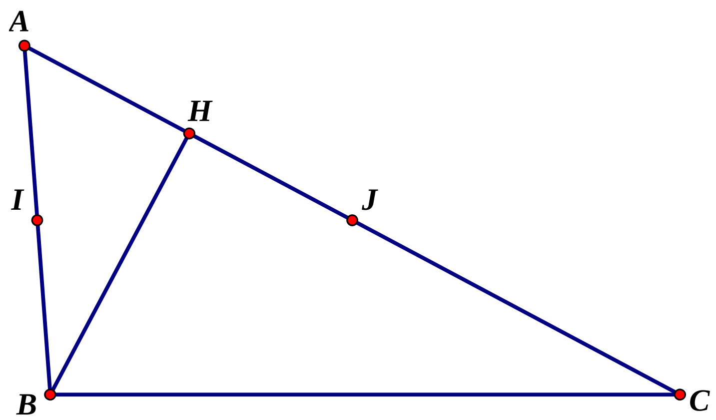
Tìm tọa độ A' (x;y): $\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AA'}\vec{u}=0\\ I\in d_B\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(x-2)+1(y+1)=0\\ \dfrac{x+2}{2}-2\left(\dfrac{y-1}{2}\right)+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=3\\ x-2y=-6\end{cases}\Rightarrow A'(0;3)$

Tìm tọa độ A" (x;y) : $\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AA''}\vec{u}=0\\ I\in d_B\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)-1(y+1)=0\\ \dfrac{x+2}{2}+\left(\dfrac{y-1}{2}\right)+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=3\\ x+y=-7\end{cases}\Rightarrow A''(-2;-5)$

(BC) qua A'(0;3) có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{A'A''}=(-2;-8)\,||\,\vec{u}=(1;4)\Rightarrow(BC):\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-3}{4}$

BT61. Cho tam giác ABC có trung điểm AB là $I(1;3)$, trung điểm AC là $J(-3;1)$. Điểm A thuộc Oy và đường thẳng BC đi qua gốc tọa độ O. Tìm tọa độ điểm A, phương trình đường thẳng BC và đường cao vẽ từ B?

Giải



Do A thuộc Oy cho nên $A(0;m)$. (BC) qua gốc tọa độ O cho nên $(BC): ax+by=0$ (1).

Vì IJ là 2 trung điểm của (AB) và (AC) cho nên IJ || BC suy ra (BC) có véc tơ chỉ phương :

$\Leftrightarrow\overrightarrow{IJ}=(-4;-2)\,||\,\vec{u}=(2;1)\Rightarrow(BC): x-2y=0$.

B thuộc (BC) suy ra $B(2t;t)$ và $A(2-2t;6-t)$. Nhưng A thuộc Oy cho nên $2-2t=0\Rightarrow t=1$ và $A(0;5)$. Tương tự $C(-6;-3)$, $B(0;1)$.

Đường cao BH qua $B(0;1)$ và vuông góc với AC cho nên có

$\overrightarrow{AC}=(-6;-8)\,||\,\vec{u}=(3;4)\Rightarrow(BH):\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-1}{4}\Leftrightarrow 4x-3y+3=0$.

BT62. Cho hai điểm $A(1;1)$, $B(4;-3)$ và đường thẳng $d: x-2y-1=0$

.

a. Tìm tọa độ điểm C trên d sao cho khoảng cách từ C đến đường thẳng $AB = 6$ (ĐHKB-04)
b. Tìm tọa độ trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB? (ĐHKA-2004)

Giải

a/ (AB) qua $A(1;1)$ có $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (3;-4) \Rightarrow (AB): \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-4} \Leftrightarrow 4x+3y-7=0$

C thuộc $x-2y-1=0$ suy ra $C(2t+1;t)$ do đó : $6 = \frac{|4(2t+1)+3t-7|}{5} \Leftrightarrow |11t-3| = 30$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \to C_1(7;3) \\ t=-\frac{27}{11} \to C_2\left(-\frac{43}{11};-\frac{27}{11}\right) \end{array}\right.$$

b/ Đường thẳng qua O vuông góc với AB có phương trình $3x-4y=0$.
Đường thẳng qua B và vuông góc với OA có phương trình $(x-4)+(y+3)=0$.
Đường thẳng qua A và vuông góc với OB có phương trình $4(x-1)-3(y-1)=0$
hay $4x-3y-1=0$
Vậy tọa độ trực tâm H là nghiệm :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4y=0 \\ x+y-1=0 \\ 4x-3y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4(1-x)=0 \\ y=1-x \\ 4x-3y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{4}{7} \\ y=\frac{3}{7} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{4}{7};\frac{3}{7}\right)$$

Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác $(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0$
(C) qua $O(0;0)$ suy ra $c=0$ (1)
(C) qua $A(1;1)$ suy ra : $2-2a-2b=0$, hay : $a+b=1$ (2)
(C) qua $B(4;-3)$ suy ra : $25-8a+6b=0$, hay : $8a-6b=25$ (3)

Từ (2) và (3) ta có hệ : $\begin{cases} a+b=1 \\ 8a-6b=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-a \\ 8a-6(1-a)=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-\frac{31}{14} \\ a=\frac{31}{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-\frac{17}{14} \\ a=\frac{31}{14} \end{cases}$

Vậy (C) : $x^2+y^2-\frac{31}{7}x+\frac{17}{4}y=0$

BT63. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $d: x+2y-3=0$ và hai điểm $A(1;0)$, $B(3;-4)$. Hãy tìm trên d điểm M sao cho : $\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất.

Giải

Trên d có $M(3-2t;t)$ suy ra : $\overrightarrow{MA} = (2-2t;t)$, $\overrightarrow{MB} = (-2t;t+4) \Rightarrow 3\overrightarrow{MB} = (-6t+3t+12)$

Do vậy : $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB} = (2-8t;4t+12) \Rightarrow \left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right| = \sqrt{(2-8t)^2+(4t+12)^2}$

Hay : $f(t) = \left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right| = \sqrt{80t^2+64t+148} = \sqrt{80\left(t+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{676}{5}} \geq \frac{26}{\sqrt{5}}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $t=-\frac{2}{5} \Rightarrow M\left(\frac{19}{5};-\frac{2}{5}\right)$. Khi đó $\min f(t) = \frac{26}{\sqrt{5}}$.

BT64. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(2;-1)$ và đường tròn $(C_1): x^2+y^2=9$ (1) .Hãy viết phương trình đường tròn (C_2) có bán kính bằng 4 và cắt đường tròn (C_1) theo dây cung qua M có độ dài nhỏ nhất.

Giải

Gọi (C_2) có tâm $I'(a;b)$ suy ra :

$(C_2):(x-a)^2+(y-b)^2=16 \quad \Leftrightarrow x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-16=0\,(1)$

Lấy (1) -(2) ta được : $2ax+2by-(a^2+b^2)+7=0$ (chính là đường thẳng trục đẳng phương)

Dây cung của hai đường tròn nằm trên đường thẳng này .

Ví dây cung qua $M(2;-1)$ lên ta có : $4a-2b-(a^2+b^2)+7=0 \Leftrightarrow (a-2)^2+(b+1)^2=12$

BT65. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $A(2;5)$, $B(5;1)$. Viết phương trình đường thẳng d qua A sao cho khoảng cách từ B đến d bằng 3.

Giải

Đường thẳng d qua $A(2;5)$ có $\vec{n}=(a;b) \Rightarrow d: a(x-2)+b(y-5)=0 \quad (1)$

Theo giả thiết : $h(B,d)=\dfrac{|a(5-2)+b(1-5)|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3 \Leftrightarrow (3a-4b)^2=9(a^2+b^2)$

$$\Leftrightarrow 7b^2-24ab=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \to d: a(x-2)=0 \leftrightarrow x-2=0 \\ b=\dfrac{24a}{7} \to (x-2)+\dfrac{24}{7}(y-5)=0 \leftrightarrow 7x+24y-114=0 \end{array}\right.$$

BT66. Trong (Oxy) cho $A(2;5)$ và đường thẳng $d:\ 2x+3y+4=0$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d' qua A và tạo với d một góc bằng 45^0.

Giải

Đường thẳng d' qua $A(2;5)$ có $\vec{n}=(a;b) \Rightarrow d: a(x-2)+b(y-5)=0 \quad (1)$

Đường thẳng d có véc tơ pháp tuyến $\vec{n'}=(2;3)$. Theo giả thiết thì :

$$\cos 45^0=\frac{2a+3b}{\sqrt{13}\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2(2a+3b)^2=13(a^2+b^2) \Leftrightarrow 5b^2+24ab-5a^2=0$$

Ta có : $\Delta'_b=169a^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=-5a \to d':(x-2)-5(y-5)=0 \leftrightarrow x-5y+23=0 \\ b=\dfrac{a}{5} \leftrightarrow a=5b \to d':5(x-2)+(y-5)=0 \leftrightarrow 5x+y-15=0 \end{array}\right.$

BT67. Trong (Oxy) cho hình chữ nhật ABCD, biết phương trình chứa 2 đường chéo là $d_1: 7x+y-4=0$ và $d_2: x-y+2=0$. Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh hình chữ nhật, biết đường thẳng đó đi qua điểm $M(-3;5)$.

Giải

Tâm của hình chữ nhật có tọa độ là nghiệm của hệ : $\begin{cases} 7x+y-4=0 \\ x-y+2=0 \end{cases} \Rightarrow I\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{9}{4}\right)$

Gọi d là đường thẳng qua $M(-3;5)$ có véc tơ pháp tuyến : $\vec{n}=(a;b)$. Khi đó

$\Rightarrow d: a(x+3)+b(y-5)=0(1)$. Gọi cạnh hình vuông (AB) qua M thì theo tính chất hình chữ nhật : $\frac{\left|\vec{n}\vec{n_1}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\vec{n_1}\right|}=\frac{\left|\vec{n}\vec{n_2}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\vec{n_2}\right|} \Leftrightarrow \frac{|7a+b|}{\sqrt{50}\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|a-b|}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow |7a+b|=5|a-b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-3b \\ b=3a \end{array}\right.$

Do đó : $\left[\begin{array}{l} a=-3b \rightarrow d:-3(x+3)+(y-5)=0 \leftrightarrow 3x-y+14=0 \\ b=3a \leftrightarrow (x+3)+3(y-5)=0 \leftrightarrow x+3y-12=0 \end{array}\right.$

BT68. Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy* cho tam giác *ABC*, với $A(1;1)$, $B(-2;5)$, đỉnh *C* nằm trên đường thẳng $x-4=0$, và trọng tâm *G* của tam giác nằm trên đường thẳng $2x-3y+6=0$. Tính diện tích tam giác *ABC*.

HD

Ta có $C(4;y_C)$. Khi đó tọa độ *G* là $x_G=\frac{1-2+4}{3}=1$, $y_G=\frac{1+5+y_C}{3}=2+\frac{y_C}{3}$. Điểm G nằm trên đường thẳng $2x-3y+6=0$ nên $2-6-y_C+6=0$, vậy $y_C=2$, tức là: $C(4;2)$

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;4)$, $\overrightarrow{AC}=(3;1)$, vậy $AB=5$, $AC=\sqrt{10}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-5$.

Diện tích tam giác *ABC* là $S=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2-\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{25.10-25}=\frac{15}{2}$

BT69. Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy* cho tam giác *ABC*, với $A(2;-1)$, $B(1;-2)$, trọng tâm *G* của tam giác nằm trên đường thẳng $x+y-2=0$. Tìm tọa độ đỉnh C biết diện tích tam giác *ABC* bằng $\frac{27}{2}$.

HD

Vì G nằm trên đường thẳng $x+y-2=0$ nên G có tọa độ $G(t;2-t)$. Khi đó $\overrightarrow{AG}=(t-2;3-t)$, $\overrightarrow{AB}=(-1;-1)$. Vậy diện tích tam giác *ABG* là

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{AG^2.AB^2-\left(\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AB}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2\left[(t-2)^2+(3-t)^2\right]-1}=\frac{|2t-3|}{2}$$

Nếu diện tích tam giác *ABC* bằng $\frac{27}{2}$ thì diện tích tam giác *ABG* bằng $\frac{9}{2}$. Vậy $\frac{|2t-3|}{2}=\frac{9}{2}$, suy ra $t=6$ hoặc $t=-3$. Vậy có hai điểm *G* : $G_1(6;-4)$, $G_2(-3;-1)$. Vì *G* là trọng tâm tam giác *ABC* nên $x_C=3x_G-(x_a+x_B)$ và $y_C=3y_G-(y_a+y_B)$.

Với $G_1(6;-4)$ ta có $C_1(15;-9)$, với $G_2(-3;-1)$ ta có $C_2(-12;18)$

BT70. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy* cho hai đường thẳng $\Delta: x+3y+8=0$, $\Delta': 3x-4y+10=0$ và điểm $A(-2;1)$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc đường thẳng Δ, đi qua điểm *A* và tiếp xúc với đường thẳng Δ'.

HD

Tâm I của đường tròn thuộc Δ nên $I(-3t-8;t)$

Theo yêu cầu thì khoảng từ I đến Δ' bằng khoảng cách IA nên ta có

$$\frac{|3(-3t-8)-4t+10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\sqrt{(-3t-8+2)^2+(t-1)^2}$$

Giải tiếp được $t=-3$

Khi đó $I(1;-3)$, $R=5$ và phương trình cần tìm: $(x-1)^2+(y+3)^2=25$.

BT71. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho đường tròn hai đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-2y+1=0$, $(C'): x^2+y^2+4x-5=0$ cùng đi qua $M(1;0)$. Viết phương trình đường thẳng qua *M* cắt hai đường tròn $(C), (C')$ lần lượt tại *A, B* sao cho *MA= 2MB.*

HD

Gọi tâm và bán kính của (*C*), (*C'*) lần lượt là $I(1;1)$, $I'(-2;0)$ và $R=1$, $R'=3$, đường thẳng (*d*) qua *M* có phương trình $a(x-1)+b(y-0)=0 \Leftrightarrow ax+by-a=0, (a^2+b^2\neq 0)(*)$.

Gọi *H, H'* lần lượt là trung điểm của *AM, BM.*

Khi đó ta có: $MA=2MB \Leftrightarrow \sqrt{IA^2-IH^2}=2\sqrt{I'A^2-I'H'^2}$

$\Leftrightarrow 1-\left[d(I,d)\right]^2=4\left[9-\left(d(I',d)\right)^2\right]$,

$IA>IH$.

$\Leftrightarrow 4\left[d(I',d)\right]^2-\left[d(I,d)\right]^2=35 \Leftrightarrow 4.\dfrac{9a^2}{a^2+b^2}-\dfrac{b^2}{a^2+b^2}=35 \Leftrightarrow \dfrac{36a^2-b^2}{a^2+b^2}=35 \Leftrightarrow a^2=36b^2$

Dễ thấy $b\neq 0$ nên chọn $b=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=-6 \\ a=6 \end{array}\right.$.

Kiểm tra điều kiện $IA>IH$ rồi thay vào (*) ta có hai đường thẳng thoả mãn.

BT72. Tam giác cân ABC có đáy BC nằm trên đường thẳng $2x-5y+1=0$, cạnh bên AB nằm trên đường thẳng $12x-y-23=0$. Viết phương trình đường thẳng AC biết rằng nó đi qua điểm (3;1)

HD

Đường thẳng AC đi qua điểm $(3;1)$ nên có phương trình : $a(x-3)+b(y-1)=0$ $(a^2+b^2\neq 0)$

Góc của nó tạo với BC bằng góc của AB tạo với BC

nên : $\dfrac{|2a-5b|}{\sqrt{2^2+5^2}.\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|2.12+5.1|}{\sqrt{2^2+5^2}.\sqrt{12^2+1^2}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{|2a-5b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{\sqrt{29}}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow 5(2a-5b)^2=29\left(a^2+b^2\right) \Leftrightarrow 9a^2+100ab-96b^2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=-12b \\ a=\dfrac{8}{9}b \end{array}\right.$

Nghiệm $a=-12b$ cho ta đường thẳng song song với AB (vì điểm $(3;1)$ không thuộc AB) nên không phải là cạnh tam giác. Vậy còn lại : $9a=8b$ hay $a=8$ và $b=9$

Phương trình cần tìm là $8x+9y-33=0$

BT73. Trong mp (Oxy) cho đường thẳng Δ có phương trình $x-2y-2=0$ và hai điểm $A(-1;2)$; $B(3;4)$. Tìm điểm $M\in(\Delta)$ sao cho $2MA^2+MB^2$ có giá trị nhỏ nhất

HD

$M\in\Delta \Rightarrow M(2t+2;t)$, $\overrightarrow{AM}=(2t+3;t-2)$, $\overrightarrow{BM}=(2t-1;t-4)$

$2AM^2+BM^2=15t^2+4t+43=f(t)$

$\min f(t) = f\left(-\frac{2}{15}\right) \Rightarrow M\left(\frac{26}{15}; -\frac{2}{15}\right)$

BT74. Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 2my + m^2 - 24 = 0$ có tâm I và đường thẳng $\Delta: mx + 4y = 0$. Tìm m biết đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn diện tích tam giác IAB bằng 12.

HD

Đường tròn (C) có tâm $\mathrm{I}(1;\mathrm{m})$, bán kính $R = 5$

Gọi H là trung điểm của dây cung AB.

Ta có IH là đường cao của tam giác IAB.

$$IH = d(I,\Delta) = \frac{|m + 4m|}{\sqrt{m^2 + 16}} = \frac{|5m|}{\sqrt{m^2 + 16}}$$

$$AH = \sqrt{IA^2 - IH^2} = \sqrt{25 - \frac{(5m)^2}{m^2 + 16}} = \frac{20}{\sqrt{m^2 + 16}}$$

Diện tích tam giác IAB là $S_{\Delta IAB} = 12 \Leftrightarrow 2S_{\Delta IAH} = 12 \Leftrightarrow d(I,\Delta).AH = 12$

$$\Leftrightarrow 25|m| = 3(m^2 + 16) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \pm 3 \\ m = \pm \frac{16}{3} \end{array}\right.$$

BT75. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C') tâm $M(5,1)$ biết (C') cắt (C) tại các điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{3}$.

HD

Phương trình đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$ có tâm $I(1,-2)$, $R = \sqrt{3}$

Đường tròn (C') tâm M cắt đường tròn (C) tại A, B nên AB ⊥ IM tại trung điểm H của đoạn AB.

Ta có $AH = BH = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Có 2 vị trí cho AB đối xứng qua tâm I.

Gọi A'B' là vị trí thứ 2 của AB, Gọi H' là trung điểm của A'B'

Ta có: $IH' = IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{3 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}$, $MI = \sqrt{(5-1)^2 + (1+2)^2} = 5$

Vậy có 2 đường tròn (C') thỏa ycbt là: $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 13$

hay $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 43$

BT76. Trong mặt phẳng Oxy cho ba đường thẳng $d_1: 4x + y - 9 = 0$, $d_2: 2x - y + 6 = 0$, $d_3: x - y + 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi ABCD, biết hình thoi ABCD có diện tích bằng 15, các đỉnh A, C thuộc d_3, B thuộc d_1 và D thuộc d_2.

HD

Đường chéo (BD) vuông góc với (AC) cho nên BD có dạng : $x + y + m = 0$

(BD) cắt d_1 tại B có tọa độ là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x + y + m = 0 \\ 4x + y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{m+9}{3}; -\frac{4m+9}{3}\right)$

(BD) cắt d_2 tại D có tọa độ là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x + y + m = 0 \\ 2x - y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow D\left(-\frac{m+6}{3}; \frac{-2m+6}{3}\right)$

Trung điểm I của BD là tâm hình thoi có tọa độ là : $I\left(\frac{1}{2};-\frac{2m+1}{2}\right)$

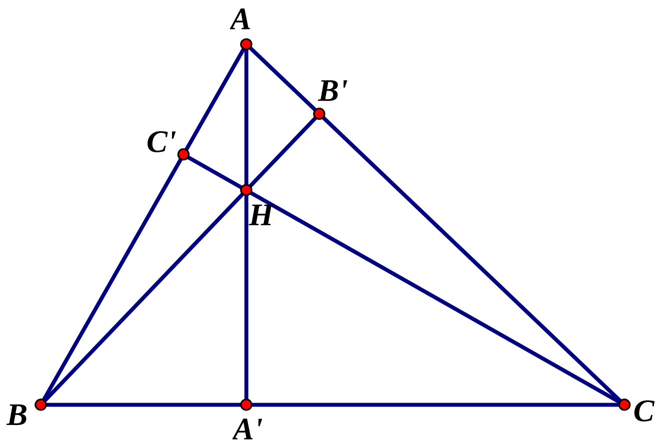
Theo giả thiết I thuộc $AC:\frac{1}{2}+\frac{2m+1}{2}+2=0\Rightarrow m=-3\Leftrightarrow (BD):x+y-3=0$ và tọa độ các điểm $B(2;1)$, $D(-1;4)$ và $I\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$. Gọi $A(t;t+2)$ thuộc (AC).

Suy ra : $h(A,(AC))=\frac{|t+t+2-3|}{\sqrt{2}}$

$=\frac{|2t-1|}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow S=2\frac{1}{2}BD.h(A,AC)=3\sqrt{2}\frac{|2t-1|}{\sqrt{2}}=15\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\to A(3;5)\leftrightarrow C(-2;0)\\ t=-2\to A(-2;0)\leftrightarrow C(3;5)\end{array}\right.$

BT77. Trong (Oxy) cho tam giác ABC, biết ba chân đường cao tương ứng với 3 đỉnh A, B, C là $A'(1;1)$, $B'(-2;3)$, $C'(2;4)$. Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh (BC).

Giải



Do là các đường cao cho nên tứ giác AC'IB' là từ giác nội tiếp trong đường tròn có đường kính là AI, C'B' là một dây cung vì vậy AA' vuông góc với C'B'. Vậy (BC) qua $A'(1;1)$ và có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{C'B'}=(-4;-1)\,||\,\vec{n}=(4;1)\Rightarrow (BC):4(x-1)+y-1=0$

$\Leftrightarrow 4x+y-5=0$.

Tương tự như lập luận trên ta tìm ra phương trình các cạnh của tam giác ABC :

$(AB):\ 3x-2y+2=0$

BT78. Trong (Oxy) cho hai điểm $A(2\sqrt{3};2)$, $B(2\sqrt{3};-2)$

a) Chứng tỏ tam giác OAB là tam giác đều

b) Chứng minh rằng tập hợp các điểm M sao cho: $MO^2+MA^2+MB^2=32$ là đường tròn (C).

c) Chứng tỏ (C) là đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB.

Giải

a/ Ta có : $OA=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=4, OB=4, AB=4$. Chứng tỏ OAB là tam giác đều .

b/ Gọi $M(x;y)$ thì đẳng thức giả thiết cho tương đương với biểu thức :

Ta có : $MO^2=x^2+y^2, MA^2=x^2+y^2-4\sqrt{3}x-4y+16,\ MB^2=x^2+y^2-4\sqrt{3}x+4y+16$

$\Rightarrow MO^2+MA^2+MB^2=32\Leftrightarrow 3x^2+3y^2-8\sqrt{3}x+32=32\Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{8\sqrt{3}}{3}x=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2+y^2=\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2$. Chứng tỏ là đường tròn (C) có tâm $I\left(\frac{4\sqrt{3}}{3};0\right)$, $R=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

c/ Thay tọa độ O, A, B vào (1) ta thấy thỏa mãn, chứng tỏ (C) là đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB.

BT79. Viết phương trình các cạnh hình vuông ABCD biết AB, CD lần lượt đi qua các điểm $\mathrm{P}(2;1)$ và $\mathrm{Q}(3;5)$, còn BC và AD qua các điểm $\mathrm{R}(0;1)$ và $\mathrm{S}(-3;-1)$

Giải

Gọi (AB) có dạng $y=kx+b$ và (AD): $y=-\frac{1}{k}x+b'$.

Cho AB và AD qua các điểm tương ứng ta có : $2k+b=1$ (1) và $\frac{3}{k}+b'=-1 \quad (2)$

Ta có : $h(Q,AB)=\frac{|3k-5+b|}{\sqrt{k^2+1}};h(R,AD)=\frac{|0+k-kb'|}{\sqrt{k^2+1}}$. Theo tính chất hình vuông :

$h(Q,AB)=h(R,AD)\Leftrightarrow \frac{|3k-5+b|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|0+k-kb'|}{\sqrt{k^2+1}}\Leftrightarrow |3k-5+b|=|k-kb'|$

Từ đó ta có hệ : $\begin{cases}2k+b=1\\ k+kb'=-3\\ |3k-5+b|=|k-kb'|\end{cases}\Rightarrow \left(k=\frac{1}{3},b=\frac{1}{3},b'=-10\right),\left(k=-7,b=15,b'=-\frac{4}{7}\right)$

Do đó : $AB:x-3y+1=0, AD:3x+y+10=0, CD:x-3y+12=0, BC:3x+y-1=0$

Hoặc : $AB:7x+y-15=0, AD:x-7y-4=0, CD:7x+y-26=0, BC:x-7y+7=0$