Dạng 4. Ba đường cônic

I. Elip.

1. ***Định nghĩa***: Cho hai điểm cố định F_1, F_2 với $F_1F_2 = 2c(c > 0)$ và hằng số $a > c$. Elip (E) là tập hợp các điểm M thỏa mãn $MF_1 + MF_2 = 2a$.

   Các điểm F_1, F_2 là tiêu điểm của (E). Khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ là tiêu cự của (E). MF_1, MF_2 được gọi là bán kính qua tiêu.

2. ***Phương trình chính tắc của elip:***

   Với $F_1(-c;0), F_2(c;0)$: $M(x;y) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (1) trong đó $b^2 = a^2 - c^2$.

   Thì (1) được gọi là phương trình chính tắc của (E)

3. ***Hình dạng và tính chất của elip:***

   Elip có phương trình (1) nhận các trục tọa độ là trục đối xứng và gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

+ Tiêu điểm: Tiêu điểm trái $F_1(-c;0)$, tiêu điểm phải $F_2(c;0)$
+ Các đỉnh : $A_1(-a;0), A_2(a;0), B_1(0;-b), B_2(0;b)$
+ Trục lớn : $A_1A_2 = 2a$, nằm trên trục Ox; trục nhỏ : $B_1B_2 = 2b$, nằm trên trục Oy
+ Hình chữ nhật tạo bởi các đường thẳng $x = \pm a, y = \pm b$ gọi là *hình chữ nhật cơ sở*
+ Tâm sai : $e = \frac{c}{a} < 1$
+ Bán kính qua tiêu điểm của điểm $M(x_M; y_M)$ thuộc (E) là:

  $MF_1 = a + ex_M = a + \frac{c}{a}x_M$, $MF_2 = a - ex_M = a - \frac{c}{a}x_M$

II. Hypebol

1. ***Định nghĩa:*** Cho hai điểm cố định F_1, F_2 với $F_1F_2 = 2c(c > 0)$ và hằng số $a < c$. Hypebol là tập hợp các điểm M thỏa mãn $|MF_1 - MF_2| = 2a$. Kí hiệu (H).

   Ta gọi : F_1, F_2 là *tiêu điểm* của (H). Khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ là *tiêu cự* của (H).

2. ***Phương trình chính tắc của hypebol:***

   Với $F_1(-c;0), F_2(c;0)$: $M(x;y) \in (H) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $b^2 = c^2 - a^2$ (2)

   Phương trình (2) được gọi là phương trình chính tắc của hypebol

3. ***Hình dạng và tính chất của (H):***

+ Tiêu điểm: Tiêu điểm trái $F_1(-c;0)$, tiêu điểm phải $F_2(c;0)$
+ Các đỉnh : $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$
+ Trục Ox gọi là *trục thực*, Trục Oy gọi là *trục ảo* của hypebol. Khoảng cách $2a$ giữa hai đỉnh gọi là *độ dài trục thực*, $2b$ gọi là *độ dài trục ảo*.
+ Hypebol gồm hai phần nằm hai bên trục ảo, mỗi phần gọi là *nhánh* của hypebol
+ Hình chữ nhật tạo bởi các đường thẳng $x=\pm a, y=\pm b$ gọi là *hình chữ nhật cơ sở*. Hai đường thẳng chứa hai đường chéo của hình chữ nhật cơ sở gọi là hai *đường tiệm cận* của hypebol và có phương trình là $y=\pm\frac{b}{a}x$
+ Tâm sai : $e=\frac{c}{a}>1$
+ $M(x_M;y_M)$ thuộc (H) thì: $MF_1=|a+ex_M|=\left|a+\frac{c}{a}x_M\right|$, $MF_2=|a-ex_M|=\left|a-\frac{c}{a}x_M\right|$

III. Parabol

1. ***Định nghĩa:*** Cho điểm cố định F và đường thẳng cố định Δ không đi qua F. *Parabol(P)* là tập hợp các điểm M cách đều điểm F và đường thẳng Δ. Điểm F gọi là *tiêu điểm* của parabol.
   Đường thẳng Δ được gọi là *đường chuẩn* của parabol
   $p=d(F;\Delta)$ được gọi là *tham số tiêu* của parabol.
2. ***Phương trình chính tắc của parabol:***
   Với $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ và $\Delta: x=-\frac{p}{2}\ (p>0)$
   $M(x;y)\in(P)\Leftrightarrow y^2=2px\quad(3)$
   (3) được gọi là phương trình chính tắc của parabol
3. ***Hình dạng và tính chất của parabol:***

+ Tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2};0\right)$
+ Phương trình đường chuẩn: $\Delta: x=-\frac{p}{2}$
+ Gốc tọa độ O được gọi là đỉnh của parabol
+ Ox được gọi là trục đối xứng
+ $M(x_M;y_M)$ thuộc (P) thì: $MF=d(M;\Delta)=x_M+\frac{p}{2}$

Ví dụ 1
1. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, hãy viết phương trình chính tắc của elíp (E) biết rằng (E) có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$ và hình chữ nhật cơ sở của (E) có chu vi bằng 20.
2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, lập phương trình chính tắc của elíp (E) biết nó có một đỉnh và 2 tiêu điểm của (E) tạo thành một tam giác đều và chu vi của hình chữ nhật cơ sở của (E) là $12\left(2+\sqrt{3}\right)$.

Lời giải

1. Gọi phương trình chính tắc của elíp (E) là: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, với $a>b>0$.

Từ giả thiết ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}\\ 2(2a+2b)=20\\ c^2=a^2-b^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=3\\ b=2\end{cases}$.

Phương trình chính tắc của (E) cần tìm là: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

2. Gọi phương trình chính tắc của elíp (E) là : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$

Do các đỉnh trên trục lớn và F_1, F_2 thẳng hàng nên F_1, F_2 cùng với đỉnh $B(0;b)$ trên trục nhỏ tạo thành một tam giác đều.

ΔBF_1F_2 đều $\Leftrightarrow \begin{cases}BF_2=F_1F_2\\ BF_1=BF_2\end{cases} \Leftrightarrow c^2+b^2=4c^2 \Leftrightarrow b^2=3c^2=3\left(a^2-b^2\right) \Leftrightarrow 3a^2=4b^2$

Hình chữ nhật cơ sở có chu vi $2(2a+2b)=12\left(2+\sqrt{3}\right) \Leftrightarrow a+b=6+3\sqrt{3}$

Ta có hệ: $\begin{cases}3a^2=4b^2\\ a+b=6+3\sqrt{3}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=6\\ b=3\sqrt{3}\end{cases} \Rightarrow (E): \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$

Ví dụ 2 Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, cho elip $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$. Giả sử (d): $2x+15y-10=0$ cắt elip tại 2 điểm phân biệt A $(x_A>0)$ và B. Tìm trên elip điểm C sao cho ΔABC cân tại A .

Lời giải

Tọa độ điểm A và B là nghiệm hệ:

$$\begin{cases} 2x+15y-10=0 \\ \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{10-15y}{2} \\ 4x^2+25y^2=100 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0, x=5 \\ y=\dfrac{6}{5}, x=-4 \end{array}\right.$$

Theo đề bài, ta có: $A(5;0)$ và $B\left(-4;\dfrac{6}{5}\right)$.

Gọi $C(x_C;y_C)$ là tọa độ cần tìm.

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{x_C^2}{25}+\dfrac{y_C^2}{4}=1 \\ AC=AB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_C^2}{25}+\dfrac{y_C^2}{4}=1 \\ (x_C-5)^2+y_C^2=\left(\dfrac{3\sqrt{229}}{5}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow x=-4, y=\pm\dfrac{6}{5}$

Vậy, $C\left(-4;-\dfrac{6}{5}\right)$ là tọa độ cần tìm.

Ví dụ 3 Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, cho điểm $C(2;0)$ và elip $(E): \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$. Tìm tọa độ các điểm A, B thuộc (E). Biết rằng A, B đối xứng nhau qua trục hoành và tam giác ABC là tam giác đều.

Lời giải

Gọi $A(x_0;y_0)$, do A, B đối xứng nhau qua trục hoành nên $B(x_0;-y_0)$.

Suy ra $AB^2=4y_0^2$, $AC^2=(2-x_0)^2+y_0^2$.

Vì $A\in(E)\Rightarrow \dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{1}=1\Leftrightarrow y_0^2=\dfrac{4-x_0^2}{4}$ $\quad(1)$

ΔABC đều nên $AB=AC\Leftrightarrow 4y_0^2=(x_0-2)^2+y_0^2$ $\quad(2)$

Từ (1) và (2) ta có : $7x_0^2-16x_0+4=0\Leftrightarrow x_0=2$ hoặc $x_0=\dfrac{2}{7}$.

- Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow A \equiv C$ loại.

- Với $x_0 = \frac{2}{7}$ thay vào (1) ta được ${y_0}^2 = \frac{48}{49} \Leftrightarrow x_0 = \mp\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

Vậy, $A\left(\frac{2}{7};\frac{4\sqrt{3}}{7}\right), B\left(\frac{2}{7};\frac{-4\sqrt{3}}{7}\right)$ hoặc $A\left(\frac{2}{7};\frac{-4\sqrt{3}}{7}\right), B\left(\frac{2}{7};\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$.

Ví dụ 4 Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, cho hypebol $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{6} = 1$.

Tìm điểm M trên hypebol sao cho tổng khoảng cách từ M đến 2 đường tiệm cận bằng $\frac{24\sqrt{2}}{5}$.

Lời giải

Phương trình hai tiệm cận là : $d_1 : y = \frac{\sqrt{6}}{3}x,\ d_2 : y = -\frac{\sqrt{6}}{3}x$.

Giả sử $M(x_M; y_M) \in (H)$ suy ra $\frac{x_M^2}{9} - \frac{y_M^2}{6} = 1$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{6}x_M - 3y_M\right)\left(\sqrt{6}x_M + 3y_M\right) = 54\ (1)$

Tổng khoảng cách từ $M(x_M; y_M)$ đến hai đường tiệm cận bằng $\frac{24\sqrt{2}}{5}$:

$$\frac{\left|\frac{\sqrt{6}}{3}x_M - y_M\right|}{\sqrt{1+\frac{2}{3}}} + \frac{\left|\frac{\sqrt{6}}{3}x_M + y_M\right|}{\sqrt{1+\frac{2}{3}}} = \frac{24\sqrt{2}}{5} \Leftrightarrow \left|\sqrt{6}x_M - 3y_M\right| + \left|\sqrt{6}x_M + 3y_M\right| = \frac{24\sqrt{30}}{5} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\left|\sqrt{6}x_M - 3y_M + \sqrt{6}x_M + 3y_M\right| = \frac{24\sqrt{30}}{5}$

$\Leftrightarrow x_M = \pm\frac{12}{\sqrt{5}} \Rightarrow y_M = \pm\frac{\sqrt{330}}{5}$

Vậy, có bốn điểm $M_1\left(\frac{12}{\sqrt{5}};\frac{\sqrt{330}}{5}\right), M_2\left(\frac{12}{\sqrt{5}};-\frac{\sqrt{330}}{5}\right),\ M_3\left(-\frac{12}{\sqrt{5}};\frac{\sqrt{330}}{5}\right)$,

và $M_4\left(-\frac{12}{\sqrt{5}};-\frac{\sqrt{330}}{5}\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán .

Ví dụ 5

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1$ và đường thẳng $d: x+y+2013=0$. Lập phương trình đường thẳng Δ vuông góc với d và cắt (E) tại hai điểm M, N sao cho $MN=\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

2. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, cho elíp $(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ và điểm $I(1;2)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua I biết rằng đường thẳng đó cắt elip tại hai điểm A, B mà I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Lời giải

1. (Δ) có phương trình $y=x+b, b\in\mathbb{R}$. Phương trình giao điểm của (Δ) và (E)

là : $\begin{cases} y=x+b \\ \frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+b \\ 3x^2+bx+2b^2-10=0 \quad (1) \end{cases}$

$MN=\frac{4\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow MN^2=\frac{32}{3} \Leftrightarrow (y_M-y_N)^2+(x_M-x_N)^2=\frac{32}{3} \quad \Leftrightarrow (x_M-x_N)^2=\frac{16}{3}$

hay $(x_M+x_N)^2-4x_M.x_N=\frac{16}{3} \quad (2)$

Áp dụng định lý Vi - et cho phương trình (1): $\begin{cases} x_M+x_N=-\frac{4b}{3} \\ x_M.x_N=\frac{2b^2-10}{3} \end{cases} \quad (3)$

Từ (2) và (3) suy ra: $\left(-\frac{4b}{3}\right)^2-4\frac{2b^2-10}{3}=\frac{16}{3} \Leftrightarrow b^2=9 \Rightarrow b=-3$ hoặc $b=3$.

Vậy, có hai đường thẳng thỏa mãn yêu cầu đề bài là $y=x+3$, $y=x-3$

2. Cách 1: Đường thẳng Δ đi qua I nhận $\vec{u}(a;b)\neq\vec{0}$ làm vectơ chỉ phương có dạng:

$\begin{cases} x=1+at \\ y=2+bt \end{cases}$

Do $A, B\in\Delta$ suy ra $A(1+at_1;2+bt_1)$, $B(1+at_2;2+bt_2)$.

I là trung điểm của AB khi $\begin{cases} 2x_I = x_A + x_B \\ 2x_I = x_A + x_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(t_1 + t_2) = 0 \\ b(t_1 + t_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t_1 + t_2 = 0 \quad (1)$

$A, B \in (E)$ nên t_1, t_2 là nghiệm của phương trình

$$\frac{(1+at)^2}{16} + \frac{(2+bt)^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \left(9a^2 + 16b^2\right)t^2 + 2(9a + 32b)t - 139 = 0$$

Theo định lý Viet ta có $t_1 + t_2 = 0 \Leftrightarrow 9a + 32b = 0$

Ta có thể chọn $b = -9$ và $a = 32$.

Vậy, đường thẳng d có phương trình : $9x + 32y - 73 = 0$.

Cách 2: Vì I thuộc miền trong của elip (E) nên lấy tùy ý điểm $A(x;y) \in (E)$ thì đường thẳng IM luôn cắt (E) tại điểm thứ hai là $B(x';y')$.

I là trung điểm điểm AB khi và chỉ khi
$\begin{cases} 2x_I = x_A + x_B \\ 2x_I = x_A + x_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = 4 - y \end{cases} \Rightarrow M'(2 - x; 4 - y)$

Vì $M, M' \in (E) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ \dfrac{(2-x)^2}{16} + \dfrac{(4-y)^2}{9} = 1 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{4-4x}{16} + \dfrac{16-8y}{9} = 0$ hay $9x + 32y - 73 = 0$

$(*)$

Tọa độ điểm M, I thỏa mãn phương trình $(*)$ nên đường thẳng cần tìm là :

$9x + 32y - 73 = 0$.

Ví dụ 6 Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, cho parabol $y^2 = 8x$. Tìm điểm M nằm trên parabol và một điểm N nằm trên đường thẳng $\Delta : 4x - 3y + 5 = 0$ sao cho đoạn MN ngắn nhất .

Lời giải

Với mọi điểm $M \in (P)$, $N \in \Delta$ ta luôn có $MN \ge d(M;\Delta)$

$M \in (P) \Rightarrow M\left(\dfrac{m^2}{8}; m\right)$ với $m \ge 0$, khi đó $d(M;\Delta)=\dfrac{\left|4.\dfrac{m^2}{8}-3.m+5\right|}{5}=\dfrac{(m-3)^2+1}{10}\ge\dfrac{1}{10}$

MN nhỏ nhất khi và chỉ khi $M\left(\dfrac{9}{8};3\right)$ và N là hình chiếu của M lên Δ

Đường thẳng đi qua M vuông góc với Δ nhận $\vec{u}(3;4)$ làm vectơ pháp tuyến, có phương trình là $3\left(x-\dfrac{9}{8}\right)+4(y-3)=0$ hay $24x+32y-123=0$

Tọa độ điểm N là nghiệm của hệ $\begin{cases}4x-3y+5=0\\24x+32y-123=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{209}{200}\\y=\dfrac{153}{50}\end{cases}$

Vậy , $M\left(\dfrac{9}{8};3\right)$, $N\left(\dfrac{209}{200};\dfrac{153}{50}\right)$ là tọa độ cần tìm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập tự luyện

Bài tập 1. Viết phương trình chính tắc của elip trong mỗi trường hợp:

a. Có tâm sai bằng $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ và hình chữ nhật cơ sở của (E) có chu vi bằng 20;

b. Đi qua $M\left(\dfrac{3\sqrt{14}}{4};-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$, tam giác MF_1F_2 vuông tại M.

Bài tập 2. Viết phương trình chính tắc của hypebol trong mỗi trường hợp:

a. (H) có hai đường tiệm cận $y=\pm2x$ và có hai tiêu điểm là hai tiêu điểm của elip;

b. (H) đi qua hai điểm $M\left(\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$ và $N\left(-1;-\sqrt{3}\right)$.

Bài tập 3. Viết phương trình chính tắc của hypebol trong mỗi trường hợp:

a. Đi qua $M(-2;1)$ và góc giữa hai đường tiệm cận bằng 60^0;

b. Khoảng cách giữa các đường chuẩn là $\dfrac{32}{\sqrt{7}}$ và phương trình 2 đường tiệm cận là $3x\pm4y=0$.

Bài tập 4. Viết phương trình chính tắc của parabol trong trường hợp:

a. Khoảng cách từ tiêu điểm F đến đường thẳng $\Delta: x+y-12=0$ là $2\sqrt{2}$;

b. (P) cắt đường thẳng $\Delta: 3x-y=0$ tại 2 điểm A, B sao cho $AB=4\sqrt{2}$.

Bài tập 5. Trong mặt phẳng Oxy, cho elip: $9x^2+25y^2=225$.Tìm các điểm M trên (E) sao cho diện tích tứ giác $OHMK$ lớn nhất với H, K là hình chiếu của điểm M lên hai trục tọa độ.

Bài tập 6. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc $0xy$, cho hypebol (H):

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{6}=1$ có tiêu điểm F_1 và F_2. Tìm điểm M trên (H) trong trường hợp sau:

a. Điểm M nhìn hai tiêu điểm của (H) dưới một góc vuông;

b. Khoảng cách hai điểm M và F_1 bằng 3;

c. Tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận bằng $\frac{24\sqrt{2}}{5}$.

Bài tập 7. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc $0xy$,

a. Cho điểm $A\left(2;\sqrt{3}\right)$ và elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$. Gọi F_1 và F_2 là các tiêu điểm của (E) (F_1 có hoành độ âm), M là giao điểm có tung độ dương của đường thẳng AF_1 với (E), N là điểm đối xứng của F_2 qua M. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF_2.

b. Cho elíp $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ và hai điểm $A(3;-2)$, $B(-3;2)$. Tìm trên (E) điểm C có hoành độ và tung độ dương sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Bài tập 8. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc $0xy$, cho hypebol (H): $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{4}=1$ và $A(3;2)$, $B(0;1)$. Tìm các điểm $C\in(H)$ sao cho ΔABC có diện tích nhỏ nhất.

Bài tập 9. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc $0xy$,

a. Cho parabol $(P): y^2 = 4x$ và điểm $I(0;1)$.Tìm A, B trên (P) sao cho: $\overrightarrow{IA} = 4\overrightarrow{IB}$.

b. Cho parabol (P): $y^2 = x$ và điểm $I(0;2)$. Tìm toạ độ hai điểm M, N thuộc (P) sao cho $\overrightarrow{IM} = 4\overrightarrow{IN}$.

Bài tập 10. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc $0xy$, cho đường thẳng $\Delta: x - y + 5 = 0$ và hai elip $(E_1): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, $(E_2): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ có cùng tiêu điểm. Biết rằng (E_2) đi qua điểm M thuộc Δ. Lập phương trình (E_2), biết (E_2) có độ dài trục lớn nhỏ nhất.

Bài tập 11. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc $0xy$, cho parabol $(P): y^2 = x$ và hai điểm $A(9;3)$, $B(1;-1)$ thuộc (P). Gọi M là điểm thuộc cung AB của (P) (phần của (P) bị chắn bởi dây AB). Xác định tọa độ điểm M nằm trên cung AB sao cho tam giác MAB có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Bài tập 1.a. (E) có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$ suy ra $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ hay $4a^2 = 9b^2$ (1)

Hình chữ nhật cơ sở của (E) có chu vi bằng 20 suy ra $4(a + b) = 20$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a = 3, b = 2 \Rightarrow (E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

b. $M \in (E) \Rightarrow \frac{63}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 8$, tam giác MF_1F_2 vuông tại M $\Rightarrow \overrightarrow{F_1M}.\overrightarrow{F_2M} = 0$

$\Leftrightarrow c^2 = 8 = a^2 - b^2 \Rightarrow a^2 = 9, b^2 = 1 \Rightarrow (E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$

Bài tập 2. a. Giả sử hypebol (H) có dạng : $\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1$

Vì (H) có hai tiệm cận $y = \pm 2x$ nên ta có: $\frac{n}{m} = 2 \Rightarrow n = 2m$.

Đối với elip ta có: $c^2 = a^2 - b^2 = 12 - 10 = 2.$

Theo giả thiết thì tiêu điểm của Hypebol cũng là của elip nên:

$$c^2 = m^2 + n^2 \Leftrightarrow 10 = m^2 + (2m)^2 = 5m^2 \Leftrightarrow m^2 = 2, n^2 = 8$$

Phương trình hypebol (H) là: $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} = 1$.

b. Do (H) đi qua hai điểm $M\left(\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$ và $N\left(-1; -\sqrt{3}\right)$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} \frac{2}{a^2} - \frac{8}{b^2} = 1 \\ \frac{1}{a^2} - \frac{3}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{2}{5} \\ b^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow (H): \frac{x^2}{\frac{2}{5}} - \frac{y^2}{2} = 1.$$

Bài tập 3. a. $M(-2;1) \in (H)$ nên $\frac{4}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \quad (*)$

Phương trình hai đường tiệm cận là:

$\Delta_1 : y = \frac{b}{a}x$ hay $bx - ay = 0$; $\Delta_2 : y = -\frac{b}{a}x$ hay $bx + ay = 0$

Vì góc giữa hai đường tiệm cận bằng 60^0 nên $\cos 60^0 = \frac{\left|b^2 - a^2\right|}{b^2 + a^2}$

Hay $\frac{1}{2} = \frac{\left|b^2 - a^2\right|}{b^2 + a^2} \Leftrightarrow 2\left|b^2 - a^2\right| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow b^2 = 3a^2$ hoặc $a^2 = 3b^2$.

+ Với $b^2 = 3a^2$ thay vào $(*)$ suy ra hypebol là $\frac{x^2}{\frac{11}{3}} - \frac{y^2}{11} = 1$

+ Với $a^2 = 3b^2$ thay vào $(*)$ suy ra hypebol là $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$

Vậy, có hai hypebol thỏa mãn : $\frac{x^2}{\frac{11}{3}} - \frac{y^2}{11} = 1$ và $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$

Bài tập 4. a. Ta có tọa độ tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$

Khoảng cách từ F đến đường thẳng Δ bằng $2\sqrt{2}$ nên:

$$d\left(F;\Delta\right)=\frac{\left|\frac{p}{2}-12\right|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$ suy ra $p=16$ hoặc $p=32$.

Vậy, phương trình của (P): $y^2=32x$ hoặc $y^2=64x$

b. Ta thấy (P) luôn cắt đường thẳng Δ tại gốc tạo độ, giả sử $B\equiv O$ và

$A\in\Delta\Rightarrow A\left(a;3a\right)$.

Mặt khác: $AB=4\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{a^2+9a^2}=4\sqrt{2}\Leftrightarrow a^2=\frac{16}{5}\Rightarrow a=\pm\frac{4}{\sqrt{5}}$

Nếu $a=\frac{4}{\sqrt{5}}\Rightarrow\left(3.\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2=2p\frac{4}{\sqrt{5}}\Rightarrow p=\frac{18}{\sqrt{5}}\Rightarrow(P):y^2=\frac{36}{\sqrt{5}}x$

Nếu $a=-\frac{4}{\sqrt{5}}$ (loại).

Bài tập 5. $S_{OHMK}=\left|x_My_M\right|$. Theo BĐT Cauchy ta có :

$9x_M^2+25y_M^2=225\ge2\sqrt{9x_M^2.25y_M^2}=30\sqrt{x_My_M}\Rightarrow x_My_M\le\frac{15}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $9x_M^2=25y_M^2\Rightarrow x_M=\pm\frac{5}{\sqrt{2}},\ y_M=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$

Bài tập 6. Gọi $M\left(x_M;y_M\right)\in(E)\Rightarrow\frac{x_M^2}{9}-\frac{y_M^2}{6}=1\ \ (1)$

Từ phương trình (H) có $a^2=9,\ b^2=6$ nên $a=3,\ b=\sqrt{6},c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{15}$

Suy ra $F_1\left(-\sqrt{15};0\right),F_2\left(\sqrt{15};0\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{F_1M}=\left(x_M+\sqrt{15};y_M\right),\overrightarrow{F_2M}=\left(x_M-\sqrt{15};y_M\right)$

a. Điểm M nhìn hai tiêu điểm của (H) dưới một góc vuông nên

$\overrightarrow{F_1M}.\overrightarrow{F_2M}=0\Leftrightarrow\left(x_M+\sqrt{15}\right)\left(x_M-\sqrt{15}\right)+y_M^2=0\Leftrightarrow y_M^2=15-x_M^2$ thế vào (1) ta

được $\frac{{x_M}^2}{9}-\frac{15-{x_M}^2}{6}=1\Leftrightarrow x_M=\pm\sqrt{\frac{63}{5}}$ suy ra $y_M=\pm\sqrt{\frac{12}{5}}$

Vậy có bốn điểm thỏa mãn là

$M_1\left(\sqrt{\frac{63}{5}};\sqrt{\frac{12}{5}}\right)$, $M_2\left(-\sqrt{\frac{63}{5}};\sqrt{\frac{12}{5}}\right)$, $M_3\left(\sqrt{\frac{63}{5}};-\sqrt{\frac{12}{5}}\right)$ và $M_4\left(-\sqrt{\frac{63}{5}};-\sqrt{\frac{12}{5}}\right)$.

b. Ta có $MF_1=\left|a+\frac{c}{a}x_M\right|$ nên $3=\left|3+\frac{\sqrt{15}}{3}x_M\right| \Rightarrow x_M=-\frac{18}{\sqrt{15}} \Rightarrow y_M=\pm\frac{\sqrt{210}}{5}$

Vậy, có 2 điểm: $M_1\left(-\frac{18}{\sqrt{15}};\frac{\sqrt{210}}{5}\right)$ và $M_2\left(-\frac{18}{\sqrt{15}};-\frac{\sqrt{210}}{5}\right)$

c. Phương trình hai tiệm cận là : $d_1: y=\frac{\sqrt{6}}{3}x,\ d_2: y=-\frac{\sqrt{6}}{3}x$.

Tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận bằng $\frac{24\sqrt{2}}{5}$ suy ra

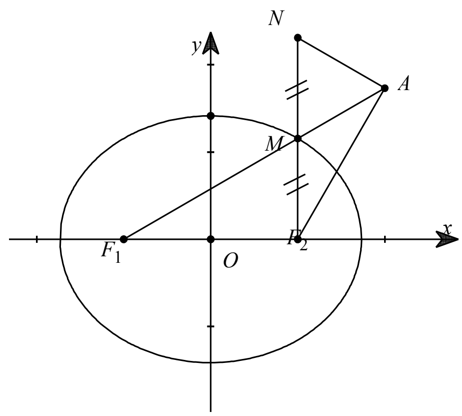
$$\frac{\left|\frac{\sqrt{6}}{3}x_M-y_M\right|}{\sqrt{1+\frac{2}{3}}}+\frac{\left|\frac{\sqrt{6}}{3}x_M+y_M\right|}{\sqrt{1+\frac{2}{3}}}=\frac{24\sqrt{2}}{5} \Leftrightarrow \left|\sqrt{6}x_M-3y_M\right|+\left|\sqrt{6}x_M+3y_M\right|=\frac{24\sqrt{30}}{5} \quad (2).$$

Mặt khác $(1) \Leftrightarrow \left(\sqrt{6}x_M-3y_M\right)\left(\sqrt{6}x_M+3y_M\right)=54$ suy ra (2)

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{6}x_M-3y_M+\sqrt{6}x_M+3y_M\right|=\frac{24\sqrt{30}}{5} \Leftrightarrow x_M=\pm\frac{12}{\sqrt{5}} \Rightarrow y_M=\pm\frac{\sqrt{330}}{5}$$

Vậy, có bốn điểm $M_1\left(\frac{12}{\sqrt{5}};\frac{\sqrt{330}}{5}\right)$, $M_2\left(\frac{12}{\sqrt{5}};-\frac{\sqrt{330}}{5}\right)$, $M_3\left(-\frac{12}{\sqrt{5}};\frac{\sqrt{330}}{5}\right)$ và $M_4\left(-\frac{12}{\sqrt{5}};-\frac{\sqrt{330}}{5}\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 7.



a. Ta có: $F_1\left(-1;0\right)$, $F_2\left(1;0\right)$.

Đường thẳng $AF_1: \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{\sqrt{3}}$

Từ đó ta tìm được $M\left(1;\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

$\Rightarrow AM=MF_2=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Do N đối xứng với F_2 qua M nên ta có $MN=MF_2$

$\Rightarrow MA=MF_2=MN$

Suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF_2 có tâm là điểm M, bán kính $R=MA=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ nên có phương trình : $\left(x-1\right)^2+\left(y-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=\dfrac{4}{3}$.

b. Ta có phương trình đường thẳng $AB: 2x+3y=0$

Gọi $C\left(x;y\right)$ với $x>0,y>0$. Khi đó ta có $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ và diện tích tam giác ABC là

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.d\left(C,AB\right)=\frac{\sqrt{85}}{2\sqrt{13}}\left|2x+3y\right|=3\sqrt{\frac{85}{13}}\left|\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right|$$

$$\le 3\sqrt{\frac{85}{13}}\sqrt{2\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\right)}=3\sqrt{\frac{170}{13}}$$

Dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1\\ \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ y=\sqrt{2}\end{cases}$. Vậy $C\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2};\sqrt{2}\right)$.

Bài tập 8. $AB: x-y+1=0$; $AB=3\sqrt{2}$, $C\left(x_0;y_0\right)\in\left(H\right)\Rightarrow\dfrac{x_0^2}{7}-\dfrac{y_0^2}{4}=1$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.d\left(C;AB\right)=\frac{3}{2}\left|x_0-y_0-1\right|$$

Đặt $P=x_0-y_0-1$, suy ra hệ : $\begin{cases}\dfrac{x^2}{7}-\dfrac{y^2}{4}=1\\ P=x-y-1\end{cases}$ có nghiệm với tham số P.

Từ đây suy ra $P \ge \sqrt{3}-1$ hoặc $P \le -\sqrt{3}-1$ do đó $|P| \ge \sqrt{3}-1$

Vậy $C\left(\frac{7}{\sqrt{3}};\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$ thì ΔABC có diện tích nhỏ nhất.

Bài tập 9. a. Vì $A, B \in (P) \Rightarrow A\left(\frac{a^2}{4};a\right), B\left(\frac{b^2}{4};b\right), \overrightarrow{IA}\left(\frac{a^2}{4};a-1\right), \overrightarrow{IB}\left(\frac{b^2}{4};b-1\right)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IA} = 4\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2}{4} = b^2 \\ a-1 = 4(b-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=\frac{1}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a=3 \\ b=\frac{3}{2} \end{cases}.$$

b. Vì $M, N \in (P)$ nên ta có $M\left(m^2;m\right), N\left(n^2;n\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{IM} = \left(m^2;m-2\right), \overrightarrow{IN} = \left(n^2;n-2\right)$.

Do đó: $\overrightarrow{IM} = 4\overrightarrow{IN} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 4n^2 \\ m-2 = 4(n-2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 4n-2 \\ (2n-1)^2 = n^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=1 \\ m=2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} n=\frac{1}{3} \\ m=-\frac{2}{3} \end{cases}.$$

Vậy có hai cặp điểm thỏa yêu cầu bài toán là:

$M(4;2), N(1;1)$ hoặc $M\left(\frac{4}{9};-\frac{2}{3}\right), N\left(\frac{1}{9};\frac{1}{3}\right)$.

Bài tập 10. Vì hai E líp có cùng tiêu điểm nên ta có: $a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$

Gọi $M(m;m+5) \in \Delta$, do M thuộc (E_1) nên: $\frac{m^2}{a^2} + \frac{(m+5)^2}{b^2} = 1$

$$\Leftrightarrow m^2\left(a^2-9\right) + (m+5)^2 a^2 = a^2\left(a^2-9\right) \Leftrightarrow a^4 - 2\left(m^2+5m+17\right)a^2 + 9m^2 = 0$$

$$a^2 = m^2+5m+17+\sqrt{\left(m^2+8m+17\right)\left(m^2+2m+17\right)} = f(m)$$

- Nếu $m^2+5m \ge 0 \Rightarrow f(m) > 17$
- Với $m \in (-5;0)$, ta có:

$$f(m)=\frac{(m^2+8m+17)(m^2+2m+17)-(m^2+5m)^2}{\sqrt{(m^2+8m+17)(m^2+2m+17)}-(m^2+5m)}+17$$

$$=\frac{(5m+17)^2}{\sqrt{(m^2+8m+17)(m^2+2m+17)}-(m^2+5m)}+17\geq 17$$

Đẳng thức xảy ra khi $m=-\frac{17}{5}$. Khi đó $a^2=17, b^2=8$.

Vậy, phương trình $(E_2):\frac{x^2}{17}+\frac{y^2}{8}=1$.

Bài tập 11. Phương trình $AB: x-2y-3=0$

Vì $M\in(P)\Rightarrow M(t^2;t)$ từ giả thiết suy ra $-1<t<3$

tam giác MAB có diện tích lớn nhất $\Leftrightarrow d(M,AB)$ lớn nhất

Mà $d(M;AB)=\frac{|t^2-2t-3|}{\sqrt{5}}$, với $t\in(-1;3)$.

Suy ra $\max d(M,AB)=\frac{4}{\sqrt{5}}$ đạt được khi $t=1\Rightarrow M(1;1)$.