LỜI NÓI ĐẦU:

Phương trình là một mảng kiến thức quan trọng trong chương trình Toán phổ thông. Giải phương trình là bài toán có nhiều dạng và giải rất linh hoạt, với nhiều học sinh kể cả học sinh khá giỏi nhiều khi còn lúng túng trước việc giải một phương trình, đặc biệt là phương trình vô tỷ.

Trong những năm gần đây, phương trình vô tỷ thường xuyên xuất hiện ở câu II trong các đề thi tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng. Vì vậy, việc trang bị cho học sinh những kiến thức liên quan đến phương trình vô tỷ kèm với phương pháp giải chúng là rất quan trọng. Như chúng ta đã biết phương trình vô tỷ có nhiều dạng và nhiều phương pháp giải khác nhau. Trong bài tập lớn này, tôi xin trình bày ***"một số phương pháp giải phương trình vô tỷ"****, mỗi phương pháp đều có bài tập minh họa được giải rõ ràng, dễ hiểu; sau mỗi phương pháp đều có bài tập áp dụng giúp học sinh có thể thực hành giải toán và nắm vững cái cốt lõi của mỗi phương pháp.*

Hy vọng nó sẽ góp phần giúp cho học sinh có thêm những kĩ năng cần thiết để giải phương trình chứa căn thức nói riêng và các dạng phương trình nói chung.

A. BÀI TOÁN MỞ ĐẦU:

Giải phương trình: $1+\frac{2}{3}\sqrt{x-x^2}=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\quad (*)$

(ĐHQG HN, khối A-2000)

Giải:

Điều kiện: $0\le x\le 1$

➢ **Cách 1:**

$(*)\Leftrightarrow\left(1+\frac{2}{3}\sqrt{x-x^2}\right)^2=\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\right)^2$

$\Leftrightarrow 1+\frac{4}{3}\sqrt{x-x^2}+\frac{4}{9}(x-x^2)=1+2\sqrt{x(1-x)}$

$\Leftrightarrow 4(x-x^2)-6\sqrt{x-x^2}=0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-x^2}(2\sqrt{x-x^2}-3)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-x^2}=0\\ \sqrt{x-x^2}=\frac{3}{2}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-x=0\\ x^2-x+\frac{9}{4}=0(PTVN)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\end{array}\right.$ *(thỏa điều kiện)*

Vậy nghiệm của phương trình là $x=0; x=1$.

➢ **Cách 2:**

Nhận xét: $\sqrt{x-x^2}$ *được biểu diễn qua* $\sqrt{x}$ *và* $\sqrt{1-x}$ *nhờ vào đẳng thức:*

$\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\right)^2=1+2\sqrt{x-x^2}$.

Đặt $t=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\quad (t\ge 0)$.

$\Rightarrow\sqrt{x-x^2}=\frac{t^2-1}{2}$.

Phương trình (*) trở thành:

$1+\frac{t^2-1}{3}=t\Leftrightarrow t^2-3t+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=2\end{array}\right.$

Với $t=1$ *ta có phương trình:*

$\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=1\Leftrightarrow 2\sqrt{x-x^2}=0\Leftrightarrow x-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\end{array}\right.$ *(thỏa điều kiện).*

Với $t=2$ *ta có phương trình:*

$\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-x^2}=3 \Leftrightarrow x-x^2=\frac{9}{4} \Leftrightarrow x^2-x+\frac{9}{4}=0(PTVN)$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=0; x=1$.

➢ ***Cách 3:***

Nhận xét: $\sqrt{x}$ *và* $\sqrt{1-x}$ *có mối quan hệ đặc biệt, cụ thể* $\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{1-x}\right)^2=1$.

$(*) \Leftrightarrow 2\sqrt{x}.\sqrt{1-x}-3\sqrt{1-x}=3\sqrt{x}-3$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x}\left(2\sqrt{x}-3\right)=3\sqrt{x}-3 \ \ (1)$.

$x=\frac{9}{4}$ *không thỏa mãn phương trình (1).*

Do đó, $(1) \Leftrightarrow \sqrt{1-x}=\frac{3\sqrt{x}-3}{2\sqrt{x}-3} \ \ (2)$.

Đặt $t=\sqrt{x}\ (t\geq 0),\ (2) \Rightarrow \sqrt{1-x}=\frac{3t-3}{2t-3}$.

Ta có: $\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{1-x}\right)^2=1$

$\Rightarrow t^2+\left(\frac{3t-3}{2t-3}\right)^2=1$

$\Leftrightarrow t^2(4t^2-12t+9)+9t^2-18t+9=4t^2-12t+9$

$\Leftrightarrow 4t^4-12t^3+14t^2-6t=0$

$\Leftrightarrow t(2t^3-6t^2+7t-3)=0$

$\Leftrightarrow t(t-1)(2t^2-4t+3)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=1 \end{array}\right.$.

Với $t=0$ *ta có* $\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0$ *(thỏa điều kiện).*

Với $t=1$ *ta có* $\sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1$ *(thỏa điều kiện).*

Vậy nghiệm của phương trình là $x=0; x=1$.

➢ ***Cách 4:***

Nhận xét: $\sqrt{x}$ *và* $\sqrt{1-x}$ *có mối quan hệ đặc biệt, cụ thể* $\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{1-x}\right)^2=1$.

Đặt $a=\sqrt{x}\ (a\geq 0);\ b=\sqrt{1-x}\ (b\geq 0)$.

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 1+\frac{2}{3}ab=a+b \\ a^2+b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+2ab=3(a+b) \\ (a+b)^2-2ab=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ab=3(a+b)-3 \\ (a+b)^2-3(a+b)+2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2ab = 3(a+b)-3 \\ \left[\begin{array}{l} a+b=1 \\ a+b=2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+b=1 \\ ab=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a+b=2 \\ ab=\dfrac{3}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow$ *a, b là 2 nghiệm của phương trình* $X^2 - X = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases} \end{array}\right.$.

(Trường hợp $\begin{cases} a+b=2 \\ ab=\dfrac{3}{2} \end{cases}$ *loại vì* $2^2 - 4.\dfrac{3}{2} \le 0$*).*

Với $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$ *ta có* $\begin{cases} \sqrt{x}=1 \\ \sqrt{1-x}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$ *(thỏa điều kiện).*

Với $\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$ *ta có* $\begin{cases} \sqrt{x}=0 \\ \sqrt{1-x}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=0$ *(thỏa điều kiện).*

Vậy nghiệm của phương trình là $x=0; x=1$.

➢ ***Cách 5:***

Nhận xét: Từ $\left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\sqrt{1-x}\right)^2 = 1$*, ta nghĩ đến đẳng thức:* $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$.

Đặt $\sqrt{x} = \sin a,\ 0 \le a \le \dfrac{\pi}{2}$.

Phương trình (*) trở thành: $1 + \dfrac{2}{3}\sin a.\sqrt{1-\sin^2 a} = \sin a + \sqrt{1-\sin^2 a}$

$\Leftrightarrow 3 + 2\sin a.\cos a = 3\sin a + 3\cos a$ (vì $\cos a \ge 0$)

$\Leftrightarrow (\sin a + \cos a)^2 - 3(\sin a + \cos a) + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin a + \cos a = 1 \\ \sin a + \cos a = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin a + \cos a = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(a + \dfrac{\pi}{4}) = 1$

$$\Leftrightarrow \sin(a+\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ a + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = k2\pi \\ a = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right. (\text{vì } 0 \le a \le \frac{\pi}{2})$$

Với $a = 0$ *ta có* $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *(thỏa điều kiện).*

Với $a=1$ ta có $\sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1$ (thỏa điều kiện).
Vậy nghiệm của phương trình là $x=0; x=1$.

Qua bài toán mở đầu, ta thấy có nhiều cách khác nhau để giải một phương trình vô tỷ. Tuy nhiên, các cách đó đều dựa trên cơ sở là phá bỏ căn thức và đưa về phương trình đơn giản hơn mà ta đã biết cách giải. Sau đây, tôi xin trình bày một số phương pháp cụ thể để giải phương trình vô tỷ.

B. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

I. PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

- *Hai phương trình được gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm.*
- *Một số phép biến đổi tương đương:*
  - *Cộng, trừ hai vế của phương trình với cùng biểu thức mà không làm thay đổi tập nghiệm của phương trình.*
  - *Nhân, chia hai vế của phương trình với cùng biểu thức khác 0 mà không làm thay đổi điều kiện của phương trình.*
  - *Lũy thừa bậc lẻ hai vế, khai căn bậc lẻ hai vế của phương trình.*
  - *Lũy thừa bậc chẵn hai vế, khai căn bậc chẵn hai vế khi hai vế của phương trình cùng dương.*

1. <u>Lũy thừa hai vế của phương trình:</u>

- $\sqrt[2k+1]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g^{2k+1}(x)$.
- $\sqrt[2k]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^{2k}(x) \end{cases}$.
- $\sqrt[2k+1]{f(x)} = \sqrt[2k+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.
- $\sqrt[2k]{f(x)} = \sqrt[2k]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$.
- *Thông thường nếu ta gặp phương trình dạng : $\sqrt{A}+\sqrt{B}=\sqrt{C}+\sqrt{D}$, ta thường bình phương 2 vế, điều đó nhiều khi cũng sẽ gặp khó khăn.*
- *Với phương trình dạng: $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=\sqrt[3]{C}$ và ta thường lập phương hai vế để đưa phương trình về dạng: $A+B+3\sqrt[3]{A.B}\left(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\right)=C$ và ta sử dụng phép thế : $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=\sqrt[3]{C}$ ta được phương trình hệ quả:*
  $A+B+3\sqrt[3]{A.B.C}=C$

***<u>Bài 1:</u>* Giải phương trình:** $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+10}=\sqrt{x+2}+\sqrt{x+5}$ (*)

<u>Giải:</u>

Điều kiện: $x \geq -1$.

$(*) \Leftrightarrow 2x+11+2\sqrt{x^2+11x+10} = 2x+7+2\sqrt{x^2+7x+10}$
$\Leftrightarrow 2+\sqrt{x^2+11x+10} = \sqrt{x^2+7x+10}$
$\Leftrightarrow x^2+11x+14+4\sqrt{x^2+11x+10} = x^2+7x+10$
$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+11x+10} = -x-1$
$\Leftrightarrow \begin{cases} -x-1 \ge 0 \\ x^2+11x+10 = x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -1 \\ 9x = -9 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$ *(thỏa điều kiện).*
Vậy nghiệm của phương trình là: $x = -1$.

Bài 2: **Giải phương trình:** $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} = 0$ (*)
Giải:
$(*) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} = -\sqrt[3]{x+3}$
$\Leftrightarrow 2x+3+3\sqrt[3]{(x+1)(x+2)}(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}) = -x-3$
$\Leftrightarrow x+2+\sqrt[3]{(x+1)(x+2)}(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}) = 0$
$\Rightarrow x+2+\sqrt[3]{(x+1)(x+2)}\left(-\sqrt[3]{x+3}\right) = 0$
$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+1)(x+2)(x+3)} = x+2$
$\Leftrightarrow x^3+6x^2+11x+6 = x^3+6x^2+12x+8$
$\Leftrightarrow x = -2$
Thử lại, $x=-2$ *thỏa mãn phương trình (*).*
Vậy nghiệm của phương trình là: $x = -2$.

Bài 3: **Giải phương trình:** $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 2\sqrt{x} + \sqrt{2x+2}$
Giải:
Điều kiện: $x \ge 0$
Bình phương 2 vế không âm của phương trình ta được:
$1+\sqrt{(x+3)(3x+1)} = x+2\sqrt{x(2x+1)}$*, để giải phương trình này dĩ nhiên là không khó nhưng hơi phức tạp một chút .*
Phương trình giải sẽ rất đơn giản nếu ta chuyển vế phương trình :
$\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x+2} = \sqrt{4x} - \sqrt{x+3}$
Bình phương hai vế ta được phương trình hệ quả :
$\sqrt{6x^2+8x+2} = \sqrt{4x^2+12x}$
$\Leftrightarrow 2(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
Thử lại, $x=1$ *thỏa mãn phương trình.*
Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 1$.

➢ ***Nhận xét :*** *Nếu phương trình :* $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)} + \sqrt{k(x)}$

Mà có : $f(x)+h(x)=g(x)+k(x)$, thì ta biến đổi phương trình về dạng :
$\sqrt{f(x)}-\sqrt{h(x)}=\sqrt{k(x)}-\sqrt{g(x)}$ *sau đó bình phương hai vế, giải phương trình hệ quả và thử lại nghiệm.*

<u>Bài 4:</u> Giải phương trình : $\sqrt{\dfrac{x^3+1}{x+3}}+\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x+3}$ (1)

<u>Giải:</u>
Điều kiện : $x\ge -1$
Bình phương 2 vế phương trình ?
Nếu chuyển vế thì chuyển như thế nào?
Ta có nhận xét : $\sqrt{\dfrac{x^3+1}{x+3}}.\sqrt{x+3}=\sqrt{x^2-x+1}.\sqrt{x+1}$*, từ nhận xét này ta có lời giải như sau :*

$$(1)\Leftrightarrow\sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}}-\sqrt{x+3}=\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x+1}$$

Bình phương 2 vế ta được phương trình hệ quả:

$$\frac{x^3+1}{x+3}=x^2-x-1\Leftrightarrow x^2-2x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1-\sqrt{3}\\x=1+\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Thử lại : $x=1-\sqrt{3}, x=1+\sqrt{3}$ *là nghiệm của phương trình.*

➢ ***<u>Nhận xét :</u>*** *Nếu phương trình :* $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)}+\sqrt{k(x)}$
Mà có : $f(x).h(x)=k(x).g(x)$ *thì ta biến đổi phương trình về dạng:*
$\sqrt{f(x)}-\sqrt{h(x)}=\sqrt{k(x)}-\sqrt{g(x)}$ *sau đó bình phương hai vế, giải phương trình hệ quả và thử lại nghiệm.*

<u>Bài tập áp dụng:</u>
Giải các phương trình sau:
1. $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x^2+4x+1}$.
2. $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+4}=1$.
3. $\sqrt{1-x}=\sqrt{6-x}-\sqrt{-5-2x}$.
4. $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4$.
5. $\sqrt[3]{12-x}+\sqrt[3]{14+x}=2$.
6. $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-1}$.

2. <u>Trục căn thức:</u>
<u>2.1 Trục căn thức để xuất hiện nhân tử chung:</u>
Một số phương trình vô tỉ ta có thể nhẩm được nghiệm x_0*. Như vậy, phương trình luôn đưa về được dạng tích* $(x-x_0)A(x)=0$ *ta có thể giải phương trình*

$A(x)=0$ *hoặc chứng minh* $A(x)=0$ *vô nghiệm ,* ***chú ý điều kiện của nghiệm của phương trình để ta có thể đánh giá*** $A(x)=0$ ***vô nghiệm.***

***Bài 1:* Giải phương trình:**

$$\sqrt{3x^2-5x+1}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3\left(x^2-x-1\right)}-\sqrt{x^2-3x+4}$$

Giải:

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} x\le -\sqrt{2} \\ x\ge \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.

Ta nhận thấy : $\left(3x^2-5x+1\right)-\left(3x^2-3x-3\right)=-2\left(x-2\right)$ *và*

$\left(x^2-2\right)-\left(x^2-3x+4\right)=3\left(x-2\right)$.

$$pt\Leftrightarrow \sqrt{3x^2-5x+1}-\sqrt{3\left(x^2-x-1\right)}=\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2-3x+4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2(x-2)}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3\left(x^2-x+1\right)}}=\frac{3(x-2)}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}.$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{3}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}+\frac{2}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3\left(x^2-x+1\right)}}\right)=0.$$

$\Leftrightarrow x=2$ *(thỏa).*

Dễ dàng chứng minh được phương trình

$$\frac{3}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}+\frac{2}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3\left(x^2-x+1\right)}}=0$$ *vô nghiệm vì*

$VT>0,\ \forall x\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right]\cup\left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$.

Vậy $x=2$ *là nghiệm của phương trình.*

***Bài 2:* Giải phương trình:** $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5}$

Giải:

Để phương trình có nghiệm thì : $\sqrt{x^2+12}-\sqrt{x^2+5}=3x-5\ge 0\Leftrightarrow x\ge \dfrac{5}{3}$

Ta nhận thấy : x=2 là nghiệm của phương trình , như vậy phương trình có thể phân tích về dạng

$\left(x-2\right)A\left(x\right)=0$*, để thực hiện được điều đó ta phải nhóm , tách như sau :*

$$pt\Leftrightarrow \sqrt{x^2+12}-4=3x-6+\sqrt{x^2+5}-3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+12}+4}=3(x-2)+\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=2$$

Dễ dàng chứng minh được : $\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-3<0,\ \forall x\geq\dfrac{5}{3}.$

Vậy $x=2$ *là nghiệm của phương trình.*

<u>Bài 3:</u> Giải phương trình : $\sqrt[3]{x^2-1}+x=\sqrt{x^3-2}$

<u>Giải:</u>

Điều kiện: $x\geq\sqrt[3]{2}$

Nhận thấy $x=3$ *là nghiệm của phương trình , nên ta biến đổi phương trình:*

$$pt\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2-1}-2+x-3=\sqrt{x^3-2}-5$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[1+\frac{x+3}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}\right]=\frac{(x-3)\left(x^2+3x+9\right)}{\sqrt{x^3-2}+5}$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[1+\frac{x+3}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}-\frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ 1+\dfrac{x+3}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}=\dfrac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5}\quad (*)\end{array}\right.$$

Phương trình (*) vô nghiệm vì:

$$1+\frac{x+3}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}=1+\frac{x+3}{\left(\sqrt[3]{x^2-1}+1\right)^2+3}<2<\frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

<u>2.2. Đưa về "hệ tạm":</u>

Nếu phương trình vô tỉ có dạng $\sqrt{A}+\sqrt{B}=C$ *, mà :* $A-B=\alpha C$ *ở đây C có thể là hằng số, có thể là biểu thức của* x.

Ta có thể giải như sau :

$\dfrac{A-B}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}=C\Rightarrow\sqrt{A}-\sqrt{B}=\alpha$, *khi đó ta có hệ:* $\begin{cases}\sqrt{A}+\sqrt{B}=C\\ \sqrt{A}-\sqrt{B}=\alpha\end{cases}\Rightarrow 2\sqrt{A}=C+\alpha$

Bài 1: **Giải phương trình sau :** $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4$

Giải:

Ta thấy: $\left(2x^2+x+9\right)-\left(2x^2-x+1\right)=2\left(x+4\right)$

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow x+4\geq 0\Leftrightarrow x\geq -4$

$x=-4$ *không phải là nghiệm của phương trình.*

Xét $x>-4$ *trục căn thức ta có :*

$$\frac{2x+8}{\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}}=x+4\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}=2$$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}=2\\ \sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4\end{cases}\Rightarrow 2\sqrt{2x^2+x+9}=x+6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\dfrac{8}{7}\end{array}\right.$$

Thử lại thỏa; vậy phương trình có 2 nghiệm : x=0; $x=\dfrac{8}{7}$.

Bài tập áp dụng:

Giải các phương trình sau :

1. $x^2+3x+1=\left(x+3\right)\sqrt{x^2+1}$
2. $\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}}=x-2$
3. $\sqrt[3]{x^2+4}=\sqrt{x-1}+2x-3$
4. $\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt{3x^3-2}=3x-2$
5. $2x^2-11x+21-3\sqrt[3]{4x-4}=0$
6. $\sqrt{2x^2+16x+18}+\sqrt{x^2-1}=2x+4$
7. $\sqrt{x^2+15}=3x-2+\sqrt{x^2+8}$
8. $2\sqrt{\left(2-x\right)\left(5-x\right)}=x+\sqrt{\left(2-x\right)\left(10-x\right)}$

2.3. Phương trình biến đổi về tích:

2.3.1 Sử dụng đẳng thức:

$u+v=1+uv\Leftrightarrow\left(u-1\right)\left(v-1\right)=0$

$au+bv=ab+vu\Leftrightarrow\left(u-b\right)\left(v-a\right)=0$

$A^2=B^2$

Bài 1: **Giải phương trình :** $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}=1+\sqrt[3]{x^2+3x+2}$

Giải:

$PT\Leftrightarrow\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}=1+\sqrt[3]{x+1}.\sqrt[3]{x+2}$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)\left(\sqrt[3]{x+2}-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-1\end{array}\right.$