Trường Đại Học Bách Khoa Hà Nội
Viện Cơ Khí
Bộ Môn Cơ Học Vật Liệu
---------****---------

Bài Giảng

Phương Pháp Phần Tử Hữu Hạn

Người soạn: TS. Lê Minh Quý

Thời lượng: 30 Tiết

Hà Nội-2010

Chương 1 Giới Thiệu Chung

1.1 Phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH) là gì?

Phương pháp số dùng để phân tích các bài toán về kết cấu & môi trường liên tục.

Được sử dụng để giải các bài toán sau:

- Bài toán về kết cấu (tĩnh học/ động lực học, ứng xử tuyến tính/phi tuyến);
- Bài toán về truyền nhiệt;
- Bài toán về cơ học chất lỏng;
- Bài toán về truyền âm;
- Bài toán về điện từ trường;
- ...

Được ứng dụng rộng rãi trong nhiều ngành kỹ thuật: cơ khí, hàng không, xây dựng, ô tô,...

Các kiến thức liên quan:

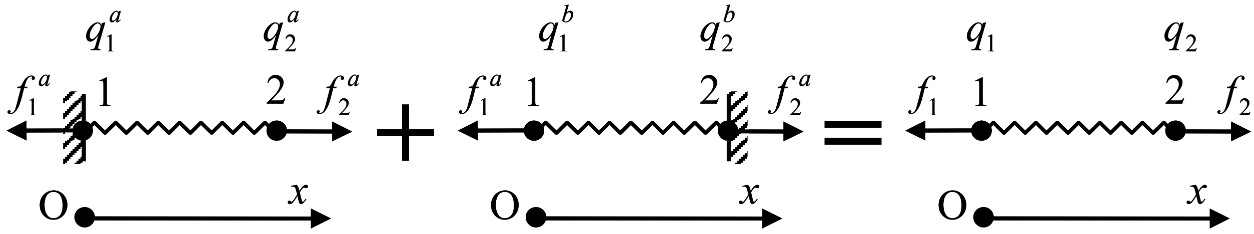
- Cơ học môi trường liên tục, sức bền vật liệu, lý thuyết đàn hồi,...
- Đại số tuyến tính, phương pháp số.
- Ngôn ngữ lập trình, cấu trúc dữ liệu...

Một số phần mềm về PTHH: ANSYS, MARC, ABAQUS...

- http://www.ansys.com
- http://www.mscsoftware.com
- http://www.abaqus.com

1.2 Bài toán lò xo

1.2.1 Hệ có một lò xo



Hình 1.1 Hệ có một lò xo

Xét một lò xo có độ cứng *C*, toàn bộ lò xo được gọi là một *phần tử* có hai đầu được đánh số là 1 và 2 được gọi là chỉ số ***nút***. Giả sử ta cần tìm quan hệ giữa ***chuyển vị*** q_1, & q_2 tại các nút 1 và 2 (được gọi là ***chuyển vị nút***) với các ***lực*** tập trung f_1 và f_2 tại các nút đó (được gọi là ***lực nút***).

Trường hợp *a*: lò xo cố định tại nút 1.

$$\begin{aligned} f_1^a &= -f_2^a \\ f_2^a &= Cq_2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Trường hợp *b*: lò xo cố định tại nút 2.

$$\begin{aligned} f_1^b &= -f_2^b \\ f_1^b &= Cq_1 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Áp dụng nguyên lý chồng chất lực, lời giải của bài toán lò xo chịu tác dụng của các lực nút f_1 và f_2 là tổ hợp của trường hợp *a* và *b*.

$$\begin{aligned} f_1 &= f_1^a + f_1^b = C(q_1 - q_2) \\ f_2 &= f_2^a + f_2^b = C(-q_1 + q_2) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Quan hệ giữa *lực nút* và *chuyển vị nút* được viết dưới dạng *ma trận* như sau:

$$C\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \tag{1.4}$$

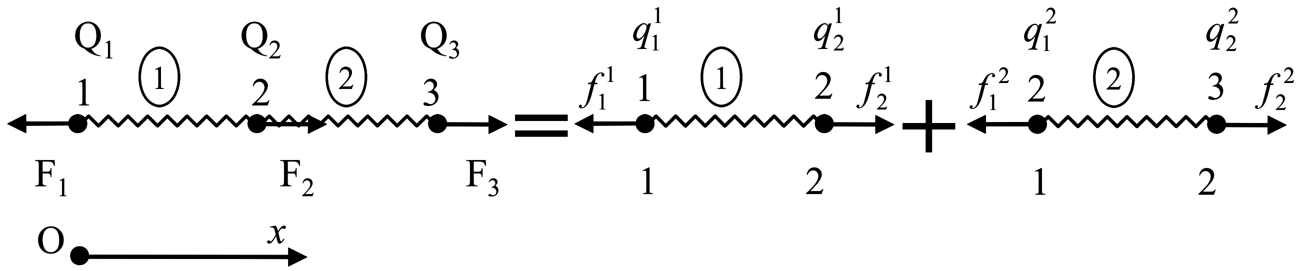
với $[k^e] = C\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (1.5)

$[k^e]$ là *ma trận độ cứng* của phần tử lò xo.

$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$ là véc tơ chuyển vị nút.

$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$ là véc tơ lực nút của lò xo.

1.2.2 Hệ gồm nhiều lò xo



Hình 1.2 Hệ gồm hai lò xo

Xét hệ gồm hai lò xo có độ cứng C_1 và C_2 chịu lực như hình vẽ 1.2. Lò xo 1 được gọi là *phần tử* 1, lò xo 2 được gọi là *phần tử* 2. Mỗi phần tử có 2 nút.

<u>Ký hiệu tổng thể cho cả hệ:</u>

3 nút đánh số 1, 2, 3.
Véc tơ chuyển vị nút: $\{Q\}=\{Q_1, Q_2, Q_3\}^T$
Véc tơ lực nút: $\{F\}=\{F_1, F_2, F_3\}^T$

<u>Ký hiệu địa phương cho mỗi phần tử:</u>

Mỗi phần tử có 2 nút đánh số nút 1 và nút 2.
Véc tơ chuyển vị nút của phần tử thứ *e* là: $\{q^e\}=\begin{Bmatrix} q_1^e \\ q_2^e \end{Bmatrix}$

Véc tơ lực nút của phần tử thứ *e* là: $\{f^e\}=\begin{Bmatrix} f_1^e \\ f_2^e \end{Bmatrix}$

Quan hệ véc tơ chuyển vị nút và lực nút trong phần tử 1(áp dụng kết quả trong mục 1.2.1):

$$C_1\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \end{Bmatrix} \tag{1.6}$$

Chú ý $Q_1 = q_1^1$ và $Q_2 = q_2^1$, và viết lại hệ phương trình trên dưới dạng sau:

$$C_1\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{1.7}$$

Quan hệ véc tơ chuyển vị nút và lực nút trong phần tử 2 (áp dụng kết quả trong mục 1.2.1):

$$C_2\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}q_1^2\\ q_2^2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}f_1^2\\ f_2^2\end{Bmatrix} \qquad (1.8)$$

Chú ý $Q_2 = q_1^2$ và $Q_3 = q_2^2$, và viết lại hệ phương trình trên dưới dạng sau:

$$C_2\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}Q_1\\ Q_2\\ Q_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ f_1^2\\ f_2^2\end{Bmatrix} \qquad (1.9)$$

Kết hợp (1.7) và (1.9) ta có:

$$\begin{bmatrix}C_1 & -C_1 & 0\\ -C_1 & C_1+C_2 & -C_2\\ 0 & -C_2 & C_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}Q_1\\ Q_2\\ Q_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}f_1^1\\ f_2^1+f_1^2\\ f_2^2\end{Bmatrix} \qquad (1.10)$$

Chú ý: $\{F\}=\begin{Bmatrix}F_1\\ F_2\\ F_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}f_1^1\\ f_2^1+f_1^2\\ f_2^2\end{Bmatrix}$ và $\{Q\}=\begin{Bmatrix}Q_1\\ Q_2\\ Q_3\end{Bmatrix}$, ta có phương trình cân bằng của cả hệ (quan hệ giữa véc tơ lực nút và chuyển vị nút):

$$[K]\{Q\}=\{F\}$$

$$[K]=\begin{bmatrix}K_{11} & K_{12} & K_{13}\\ K_{21} & K_{22} & K_{23}\\ K_{31} & K_{32} & K_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_1 & -C_1 & 0\\ -C_1 & C_1+C_2 & -C_2\\ 0 & -C_2 & C_2\end{bmatrix} \qquad (1.11)$$

[K] là ma trận độ cứng của cả hệ được xây dựng từ ma trận độ cứng của các phần tử. Trong thực hành tính toán, ma trận [K] được xây đựng dựa vào bảng *ghép nối phần tử*.

Bảng ghép nối phần tử

Phần tử	Chỉ số chuyển vị nút địa phương	
	1	2
	Chỉ số chuyển vị nút tổng thể	
(1)	1	2
(2)	2	3

⇒ Từ bảng ghép nối trên, ma trận $[k^1]$ (2 hàng 2 cột) được mở rộng thành ma trận $[K^1]$ (3 hàng 3 cột) như sau:

$$\left[k^1\right]=\begin{bmatrix}k_{11}^1 & k_{12}^1\\ k_{21}^1 & k_{22}^1\end{bmatrix}\Rightarrow\left[K^1\right]=\begin{bmatrix}k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0\\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad (1.12)$$

Ma trận $[k^2]$ (2 hàng 2 cột) được mở rộng thành ma trận $[K^2]$ (3 hàng 3 cột) như sau:

$$\left[k^2\right]=\begin{bmatrix} k_{11}^2 & k_{12}^2 \\ k_{21}^2 & k_{22}^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[K^2\right]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{11}^2 & k_{12}^2 \\ 0 & k_{21}^2 & k_{22}^2 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

$$[K]=\left[K^1\right]+\left[K^2\right]$$

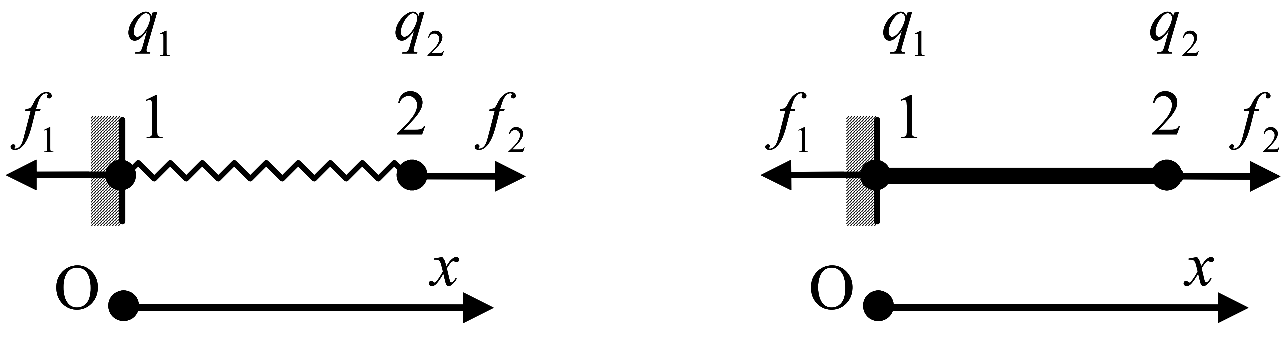
$$K_{11}=k_{11}^1; \quad K_{12}=k_{12}^1; \quad K_{13}=0;$$

$$K_{21}=k_{21}^1; \quad K_{22}=k_{22}^1+k_{11}^2; \quad K_{23}=k_{12}^2;$$

$$K_{31}=0; \quad K_{32}=k_{21}^2; \quad K_{33}=k_{22}^2;$$

Áp dụng phương pháp trên ta có thể thiết lập mối quan hệ giữa lực nút và chuyển vị nút, và tính ma trận độ cứng cho hệ gồm nhiều lò xo.

1.3 Bài toán thanh chịu kéo hoặc nén



Hình 1.3 Thanh được coi như lò xo có độ cứng *C=AE/L*

Xét kết cấu gồm thanh có mô đun đàn hồi *E*, tiết diện ngang *A*, chiều dài *L* chịu lực như hình 1.3. Kết cấu gồm một phần tử có hai nút.

Ứng suất trong thanh là: $\sigma=\dfrac{f_2}{A}$ (1.14)

Quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị: $\varepsilon=\dfrac{q_2}{L}$ (1.15)

Quan hệ ứng suất và biến dạng: $\sigma=E\varepsilon$ (1.16)

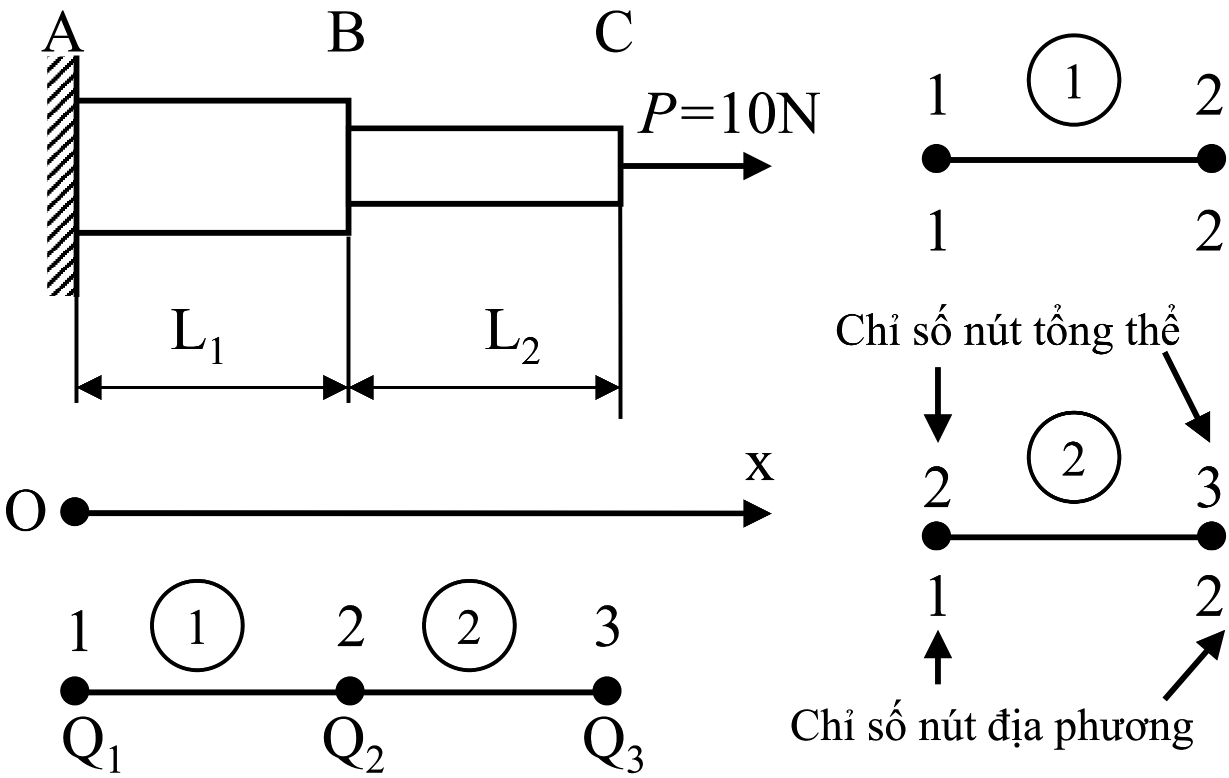
Từ (1.14), (1.15), và (1.16) suy ra quan hệ giữa lực nút tại nút 2 và chuyển vị tại nút đó là:

$$f_2=A\sigma=AE\varepsilon=\frac{AE}{L}q_2 \quad (1.17)$$

Đối chiếu với mô hình lò xo, ta có thể coi thanh là lò xo có độ cứng *C=AE/L*. Từ (1.5) suy ra ma trận độ cứng của phần tử thanh:

$$\left[k^e\right]=\frac{AE}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \tag{1.18}$$

Ví dụ 1.1



Hình 1.4 Tính trục bậc nhờ PTHH

Cho trục bậc có kết cấu & chịu lực như hình 1.4. Biết: A_1=20mm^2; A_2=10mm^2; L_1=L_2=100mm; E=200GPa. Tính chuyển vị tại các nút, ứng suất và biến dạng trong từng phần tử, và phản lực liên kết.

Bước 1: *Rời rạc hoá kết cấu*

Chia kết cấu thành 2 phần tử được đánh số nút và số phần tử như hình 1.4.

Bước 2: *Tính ma trận độ cứng của phần tử*

$$\left[k^1\right]=\frac{A_1E_1}{L_1}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -4\\ -4 & 4\end{bmatrix}\times10^4\,N/mm$$

$$\left[k^2\right]=\frac{A_2E_2}{L_2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{bmatrix}\times10^4\,N/mm$$

<u>Bước 3</u>: *Ghép phần tử & tính ma trận độ cứng của kết cấu [K]*

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}$$

Bảng ghép nối phần tử

<table>
<tr><td rowspan="3">Phần tử</td><td colspan="2">Chỉ số chuyển vị nút địa phương</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Chỉ số chuyển vị nút tổng thể</td></tr>
<tr><td>(1)</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>2</td><td>3</td></tr>
</table>

Từ bảng ghép nối trên ta có

$$K_{11} = k_{11}^1; \quad K_{12} = k_{12}^1; \quad K_{13} = 0;$$

$$K_{21} = k_{21}^1; \quad K_{22} = k_{22}^1 + k_{11}^2; \quad K_{23} = k_{12}^2;$$

$$K_{31} = 0; \quad K_{32} = k_{21}^2; \quad K_{33} = k_{22}^2;$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \times 10^4 N/mm$$

<u>Bước 4</u>: *Quy đổi ngoại lực về nút*

$\Rightarrow$ R_1 là phản lực tại ngàm ở nút 1.

$\{F\}=[R_1 \quad 0 \quad 10]^T$

<u>Bước 5</u>: *Hệ phương trình PTHH*

$$10^4 \times \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ 0 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

<u>Bước 6</u>: *Áp dụng điều kiện biên Q_1=0, ta loại bỏ dòng 1 cột 1 của hệ trên ta có hệ 2 phương trình 2 ẩn số*:

$$10^4 \times \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

<u>Kết Quả</u>

Chuyển vị:

Q_1=0; Q_2=0,25x10^{-3}mm; Q_3=0,75x10^{-3}mm.

Phản lực liên kết tại ngàm (nút 1)

$$R_1 = \sum_{j=1}^{m} K_{1j} Q_j = K_{12} Q_2 = -10N$$

Biến dạng trong mỗi phần tử

$$\varepsilon^1 = \frac{-q_1^1 + q_2^1}{L_1} = \frac{-Q^1 + Q^2}{L} = 2,5 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon^2 = \frac{-q_1^2 + q_2^2}{L_2} = \frac{-Q^2 + Q^3}{L} = 5 \times 10^{-6};$$

Ứng suất trong mỗi phần tử

$$\sigma^1 = E\varepsilon^1 = 0,5N/mm^2; \quad \sigma^2 = E\varepsilon^2 = 1N/mm^2;$$

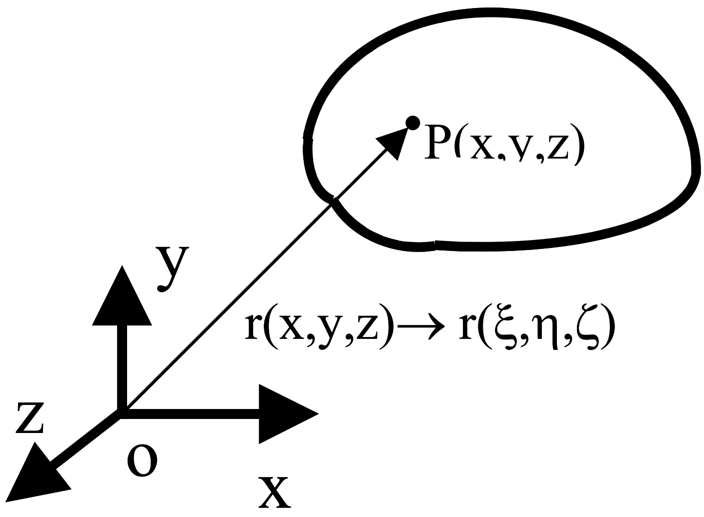
Lời giải theo phương pháp PTHH trùng với lời giải chính xác theo phương pháp của sức bền vật liệu.

<u>Chú ý:</u>

- Tương tự như cách thiết lập ma trận độ cứng của phần tử lò xo và phần tử thanh, ta có thể thiết lập ma trận độ cứng của phần tử trục chịu xoắn và dầm chịu uốn (xem như bài tập).
- Ma trận độ cứng phần tử của *lò xo*, *thanh* chịu kéo nén, trục chịu xoắn, và *dầm* chịu uốn được thiết lập dựa trên điều kiện *cân bằng về lực* và *liên tục về chuyển vị*.
- Phương pháp trên không áp dụng được cho các bài toán phức tạp hơn. Khi đó, ma trận độ cứng phần tử được xây dựng trên các khái niệm về *hàm dạng*, *hàm nội suy* và *nguyên lý di chuyển khả dĩ*.

1.4 Hàm dạng và hàm nội suy

1.4.1 Hàm dạng



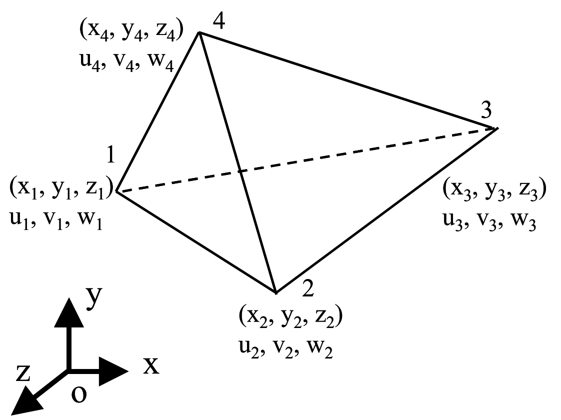
Hình 1.5 Vị trí một điểm được xác định bởi véc tơ định vị

<u>Biểu diễn hình học</u>: Véc tơ định vị $\{r\}=[x, y, z]^T$ của một điểm bất kỳ của phần tử V^e được xác định là hàm của các tham số η, ξ và ζ qua việc đổi biến như sau:

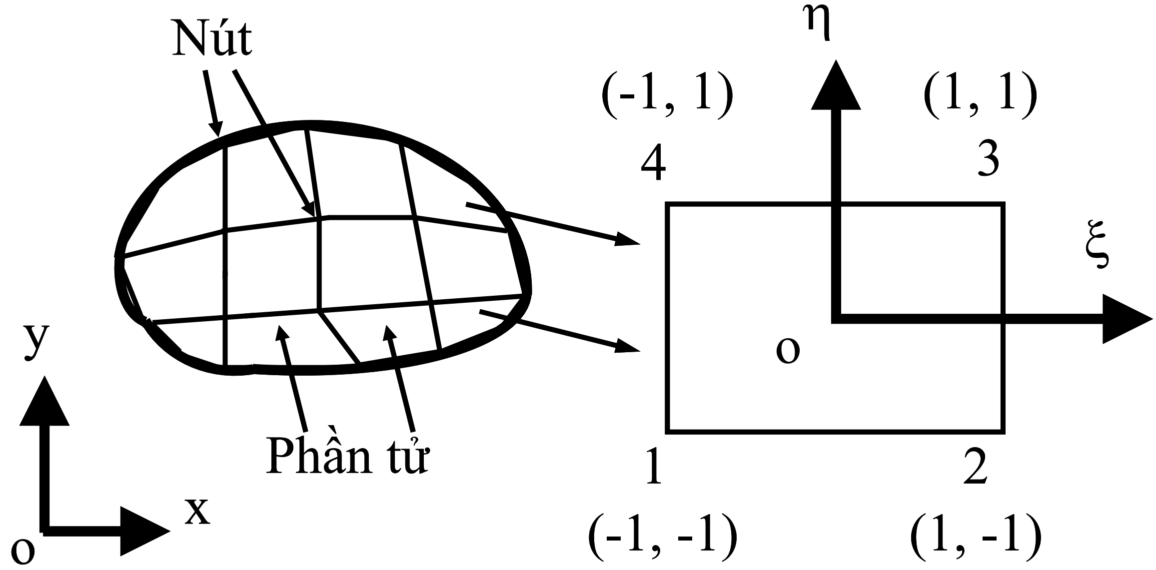
$$\{r\}=\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} x(\xi,\eta,\zeta) \\ y(\xi,\eta,\zeta) \\ z(\xi,\eta,\zeta) \end{Bmatrix}$$

<u>Xấp xỉ hình học:</u> Toạ độ (x,y,z) của một điểm bất kỳ được xác định bởi các **toạ độ nút** (x_i, y_i, z_i) và các **hàm dạng** $\overline{N}_i(\xi,\eta,\zeta)$:

$$x=\sum_{i=1}^{n}\overline{N}_i x_i\,; \quad y=\sum_{i=1}^{n}\overline{N}_i y_i\,; \quad z=\sum_{i=1}^{n}\overline{N}_i z_i$$

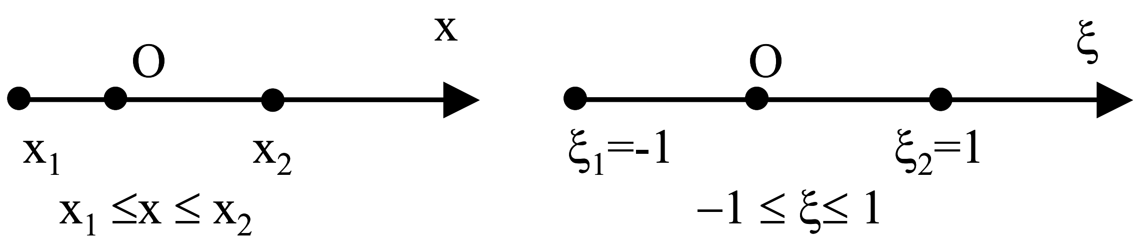


Hình 1.6 Phần tử tứ diện 4 nút trong bài toán 3 chiều



Hình 1.7 Phần tử thực & phần tử quy chiếu hình chữ nhật 4 nút.

Hệ toạ độ $O\eta\xi\zeta$ được gọi là hệ toạ độ quy chiếu. Bằng phép biến đổi nói trên, mọi phép tính toán trên **phần tử thực** V^e được tiến hành trên **phần tử quy chiếu** V^r trong hệ toạ độ $O\xi\eta\zeta$.



Hình 1.8 Phần tử thực & phần tử quy chiếu một chiều 2 nút

<u>Ví dụ 1.2</u>: Tìm hàm dạng của phần tử quy chiếu một chiều 2 nút như trên hình 1.8.

Toạ độ là x của phần tử một chiều được biểu diễn bởi các toạ độ x_1 của nút 1 và x_2 tại nút 2 như sau.

$$x = \sum_{i=1}^{n} \overline{N}_i(\xi)\, x_i$$

n là tổng số nút của phần tử (n=2).

Giả sử hàm dạng $\overline{N}_i(\xi)$ là hàm bậc nhất của ξ thì ta có:

$$x = \alpha_1\xi + \alpha_2$$

α_1 và α_2 là hằng số cần tìm. Tại các nút 1 và nút 2 ta có:

$$\alpha_1\xi_1 + \alpha_2 = x_1$$
$$\alpha_1\xi_2 + \alpha_2 = x_2$$

Suy ra: $\alpha_1 = \dfrac{x_2 - x_1}{\xi_2 - \xi_1}; \quad \alpha_2 = \dfrac{x_1\xi_2 - x_2\xi_1}{\xi_2 - \xi_1}$

Thay các biểu thức của α_1 và α_2 vào biểu thức của *x* ta có:

$$x = \frac{1}{\xi_2 - \xi_1}\left[(\xi_2 - \xi)x_1 + (\xi - \xi_1)x_2\right]$$

Thay ξ_1=-1; ξ_2=1 ta có: $\overline{N}_1(\xi) = \dfrac{1-\xi}{2}; \quad \overline{N}_2(\xi) = \dfrac{1+\xi}{2}$

1.4.2 Hàm nội suy

Xấp xỉ chuyển vị: Véc tơ **chuyển vị** {q}=[*u*, *v*, *w*]^T tại một điểm bất kỳ của mỗi phần tử được xác định bởi các **chuyển vị nút** (u_i, v_i, w_i) và các **hàm nội suy** N_i.

$$u = \sum_{i=1}^{n} N_i u_i; \quad v = \sum_{i=1}^{n} N_i v_i; \quad w = \sum_{i=1}^{n} N_i w_i$$

Các hàm nội suy là các đa thức chọn trước mà biến là các toạ độ x, y, z sao cho:

- Đạo hàm bậc nhất phải hữu hạn.
- Chuyển vị phải liên tục trên biên của các phần tử khi xét từ phần tử này qua phần tử khác.

Bằng việc dùng hệ toạ độ quy chiếu, nên x,y,z biểu diễn theo η, ξ *và* ζ, do đó các hàm nội suy N_i được chọn là hàm của η, ξ *và* ζ.

Dùng phần tử đẳng thông số ($\overline{N}_i \equiv N_i$), xấp xỉ hình học & xấp xỉ chuyển vị được viết như sau:

$$x = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta,\zeta)x_i; \quad y = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta,\zeta)y_i; \quad z = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta,\zeta)z_i$$
$$u = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta,\zeta)u_i; \quad v = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta,\zeta)v_i; \quad w = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta,\zeta)w_i$$

Các hàm dạng và hàm nội suy là các đa thức của η, ξ, ζ có các đặc tính sau: $N_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i) = 1; \quad N_i(\xi_j,\eta_j,\zeta_j) = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} N_i = 1; \quad (i \neq j);$

Ví dụ 1.3: Tìm hàm dạng của phần tử quy chiếu một chiều 2 nút như trên hình 1.8 bằng cách áp dụng tính chất của hàm dạng.

Toạ độ là x của phần tử một chiều được biểu diễn bởi các toạ độ x_1 của nút 1 và x_2 tại nút 2 như sau.

$$x = \overline{N}_1(\xi)x_1 + \overline{N}_2(\xi)x_2$$

Giả sử hàm dạng $\overline{N}_i(\xi)$ là hàm bậc nhất của ξ thì ta có:

$$\overline{N}_i(\xi) = a_i\xi + b_i\,; \quad i = 1,2.$$

Ta có hệ các phương trình sau:

$$\overline{N}_1(\xi_1) = 1 \;\Rightarrow\; -a_1 + b_1 = 1$$

$$\overline{N}_1(\xi_2) = 0 \;\Rightarrow\; a_1 + b_1 = 0$$

$$\overline{N}_2(\xi_1) = 0 \;\Rightarrow\; -a_2 + b_2 = 0$$

$$\overline{N}_2(\xi_2) = 1 \;\Rightarrow\; a_2 + b_2 = 1$$

Giải 4 phương trình trên ta có:

$$a_1 = -\frac{1}{2} \;;\; b_1 = \frac{1}{2} \;;\; a_2 = \frac{1}{2} \;;\; b_2 = \frac{1}{2}$$

Suy ra: $\overline{N}_1(\xi) = \dfrac{1-\xi}{2};\quad \overline{N}_2(\xi) = \dfrac{1+\xi}{2}$

Viết hàm dạng $\overline{N}_i(\xi)$ dưới dạng sau:

$$\overline{N}_i(\xi) = \frac{1+\xi_i\xi}{2};\quad i = 1,2.$$

1.5 Nguyên lý di chuyển khả dĩ

- Trong mọi di chuyển khả dĩ công của ngoại lực, δW_{ext}, bằng tổng thế năng biến dạng, δW_{int}, và công của lực quán tính, δW_{dyn} (bỏ qua lực cản nhớt).

$$\delta W_{ext} = \delta W_{\mathrm{int}} + \delta W_{dyn}$$

- Trong các bài toán tĩnh học $\delta W_{\mathrm{dyn}}=0$.

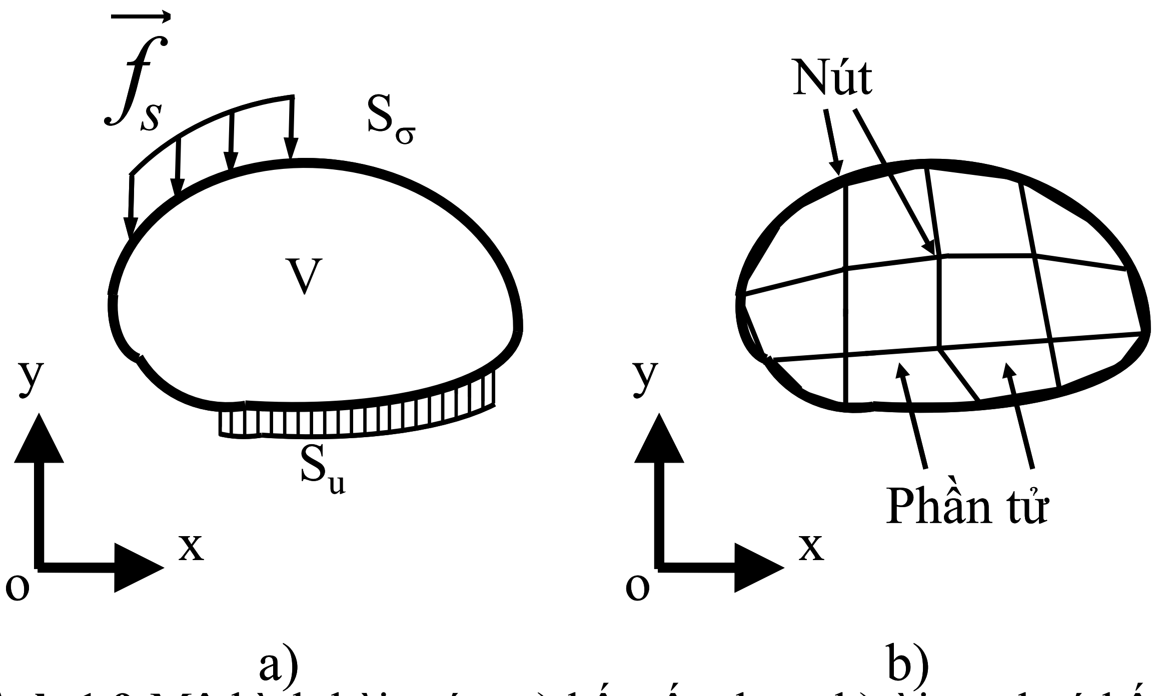
1.6 Mô hình bài toán đàn hồi tĩnh

Cho kết cấu được mô tả bởi miền V có biên là S có điều kiện biên:

- Chuyển vị đã biết trên biên S_u.
- Ứng suất đã biết trên biên S_σ:

$$[\sigma]\{n\}=\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}n_x\\ n_y\\ n_z\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}f_{sx}\\ f_{sy}\\ f_{sz}\end{Bmatrix}$$

$\{f_s\}=[f_{sx}, f_{sy}, f_{sz}]^T$ là véc tơ lực mặt tác dụng lên biên S_σ.
$\{n\}=[n_x, n_y, n_z]^T$ là véc tơ đơn vị pháp tuyến ngoài của biên S_σ.
$S = S_u \cup S_\sigma$ & $S_u \cap S_\sigma = \varnothing$
$\Rightarrow$ Chịu tác dụng của lực thể tích $\{f_v\}=[f_{vx}, f_{vy}, f_{vz}]^T$



Hình 1.9 Mô hình bài toán: a) kết cấu thực; b)rời rạc hoá kết cấu bằng phần tử hữu hạn

1.7 Sơ lược về giải bài toán kết cấu bằng phương pháp PTHH

Bài toán đặt ra là tìm chuyển vị, biến dạng, ứng suất tại mọi điểm của kết cấu mô tả ở hình 1.9.
Lời giải tìm được nếu biết chuyển vị tại mọi điểm của kết cấu (bài toán có vô hạn ẩn hay vô hạn số bậc tự do).
Cách giải theo phương pháp PTHH được tóm tắt như sau:

- Chia kết cấu thành một số hữu hạn các ***miền con*** được gọi là các ***phần tử***.
- Các phần tử được kết nối với nhau bởi một số hữu hạn các ***nút***.
- **<u>Trong mỗi phần tử:</u>**

- Chuyển vị tại một điểm bất kỳ được biểu diễn thông qua chuyển vị tại các nút và các hàm nội suy N_i đã chọn trước.
- Biểu diễn biến dạng và ứng suất qua các chuyển vị nút.
- Thiết lập ma trận độ cứng & ma trận khối lượng (với bài toán động lực học) cho mỗi phần tử.
- Quy đổi ngoại lực về các nút.

- Ghép nối các phần tử và xây dựng phương trình cân bằng cho cả kết cấu dưới dạng:

$$[M]\{\ddot{Q}\}+[K]\{Q\}=\{F\}$$

[K] & [M] thứ tự là ma trận độ cứng ma trận khối lượng tổng thể của kết cấu.
{Q}: véc tơ chuyển vị nút của kết cấu cần tìm.
{F}: véc tơ lực nút của kết cấu.

Bài toán đàn hồi tĩnh (δW_{dyn}=0):

$$[K]\{Q\}=\{F\}$$

Bài toán tìm tần số riêng trong dao động tự do:

$$[M]\{\ddot{Q}\}+[K]\{Q\}=\{0\}$$

- Áp dụng điều kiện biên để giải hệ phương trình trên.

Bài Tập

1.1. Tính chuyển vị tại nút 2 và 3 của hệ gồm 2 lò xo trình bày trong mục 1.2.2 biết: Q_1=0; C_1=C; C_2=2C; F_2=F; F_3=2F.
1.2. Áp dụng phương pháp xây dựng ma trận độ cứng cho phần tử lò xo và thanh chịu kéo hãy thiết lập ma trận độ cứng của phần tử trục chịu xoắn.
1.3. Áp dụng phương pháp xây dựng ma trận độ cứng cho phần tử lò xo và thanh chịu kéo hãy thiết lập ma trận độ cứng của phần tử dầm chịu uốn.
1.4. Tìm hàm dạng của phần tử quy chiếu một chiều 3 nút: ξ_1=-1, ξ_1=0, ξ_1=1.

1.5. Tìm hàm dạng của phần tử quy chiếu hình tam giác có các nút như sau: nút1 (ξ_1=0, η_1=0), nút 2 (ξ_2=1, η_2=0), nút 3 (ξ_3=0, η_3=1).

1.6. Tìm hàm dạng của phần tử quy chiếu hình chữ nhật 4 nút như hình vẽ 1.7.

Phụ Lục Chương I

1.P.1 Quan hệ biến dạng-chuyển vị

- u, v, w: chuyển vị tại một điểm nào đó thuộc kết cấu tương ứng theo các phương Ox, Oy, Oz của hệ trục tạo độ Đề Các Oxyz.
- Véc tơ chuyển vị tại một điểm:
  $\{q\} = [u \quad v \quad w]^T$
- Ten sơ biến dạng:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

- Vì ten sơ biến dạng đối xứng nên chỉ có 6 thành phần độc lập do đó trong phương pháp PTHH dùng véc tơ biến dạng $\{\varepsilon\}$
- Biểu diễn véc tơ biến dạng $\{\varepsilon\}$ qua chuyển vị:

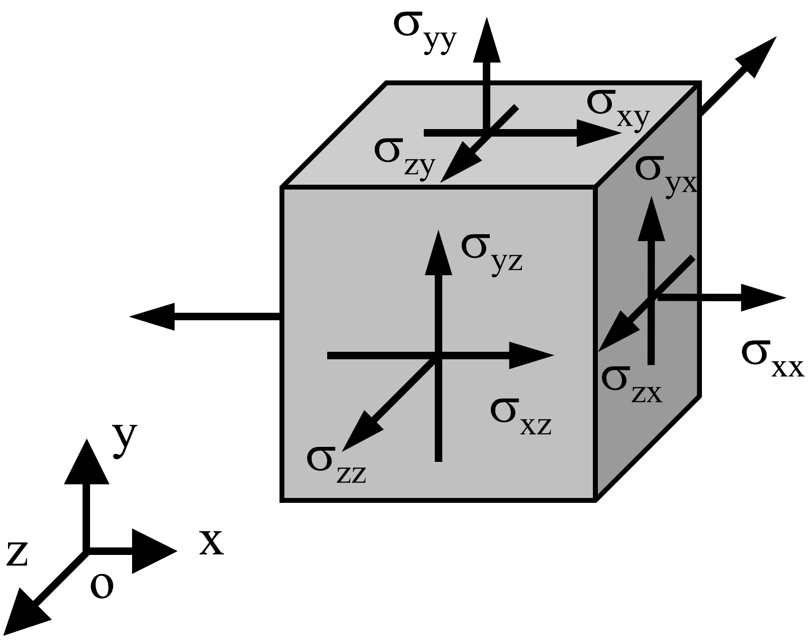
$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u/\partial x \\ \partial v/\partial y \\ \partial w/\partial z \\ \partial u/\partial y + \partial v/\partial x \\ \partial v/\partial z + \partial w/\partial y \\ \partial u/\partial z + \partial w/\partial x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

Đặt $$[D_\varepsilon] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix}$$

- Quan hệ biến dạng-chuyển vị dưới dạng ma trận

$$\{\varepsilon\} = [D_\varepsilon]\{q\}$$

1.P.2 Quan hệ ứng suất–biến dạng



Hình 1.10 Các thành phần ứng suất

- Ten sơ ứng suất $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$
- Vì ten sơ ứng suất đối xứng nên chỉ có 6 thành phần độc lập do đó trong phương pháp PTHH dùng véc tơ ứng suất:
  $\{\sigma\} = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{zx}]^T$
- Quan hệ ứng suất –biến dạng dưới dạng ma trận cho vật liệu đàn hồi tuyến tính:
  $\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}$
- Đối với vật liệu đàn hồi tuyến tính, đồng nhất, & đẳng hướng, ma trận độ cứng $[C]$ có dạng:

$$[C] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu \end{bmatrix}$$

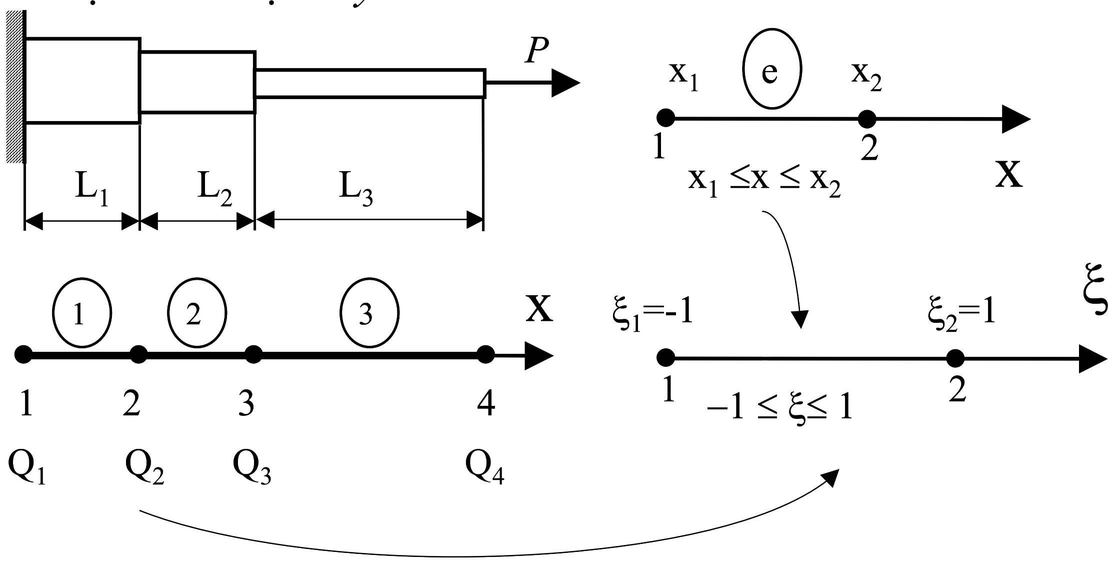
E, ν thứ tự là mô đun đàn hồi & hệ số Poisson của vật liệu.

Chương 2 PTHH Trong Bài Toán Thanh

Bài toán thanh đã được đề cập đến trong chương I, trong chương này ma trận độ cứng phần tử thanh được xây dựng nhờ nguyên lý di chuyển khả dĩ.

2.1 Ma trận độ cứng của phần tử thanh hai nút

2.1.1 Chọn hàm nội suy



Hình 2.1 Mô hình PTHH của bài toán thanh với phần tử thực & phần tử quy chiếu một chiều

Chọn trục *Ox* trùng với trục của thanh, trong bài toán thanh lực tác dụng có phương trùng với trục của thanh.

Chia thanh thành các phần tử được đánh số nút (1, 2, 3,..., *m*) và số phần tử (1, 2, 3,..., *m*-1) như hình 2.1. Các chỉ số này gọi là các chỉ số trong **hệ tổng thể** hay **chỉ số toàn cục.**

Có *m* nút và *m*-1 phần tử.

Mỗi phần tử có 2 nút đánh số là 1 và 2 được gọi là **chỉ số nút địa phương**. Toạ độ tại nút 1 và 2 trong hệ toạ độ địa phương tương ứng là x_1 và x_2.

Véc tơ chuyển vị nút của phần tử: $\left\{q^e\right\} = \left[q_1^e \quad q_2^e\right]^T = \left[u_1 \quad u_2\right]^T$

$\{Q\}$ là véc tơ chuyển vị nút của cả kết cấu: $\{Q\} = [Q_1 \quad Q_2 \quad \dots \quad Q_m]^T$

Thông số của mỗi phần tử:

- chiều dài $L_e = x_2 - x_1$.
- tiết diện ngang A_e.
- mô đun đàn hồi E_e.

Chọn phần tử quy chiếu có 2 nút như trên hình 2.1. Chọn hàm nội suy như sau (phần tử đẳng thông số):

$$N_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2}; \quad N_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2}$$

Toạ độ x tại một điểm được biểu diễn bởi các toạ độ x_1 tại nút 1 và x_2 tại nút 2 như sau:

$$x = \sum_{i=1}^{2} N_i(\xi) = \frac{1}{2}\left[(1-\xi)x_1 + (1+\xi)x_2\right]$$

Chuyển vị tại một điểm được biểu diễn bởi các chuyển vị nút u_1 tại nút 1 và u_2 tại nút 2 như sau:

$$u = \sum_{i=1}^{2} N_i(\xi)u_i = \frac{1}{2}\left[(1-\xi)u_1 + (1+\xi)u_2\right]$$

Gọi $[N] = [N_1 \quad N_2]$;

Biểu diễn véc tơ chuyển vị {q}={u} tại một điểm bất kỳ qua chuyển vị nút và hàm nội suy dưới dạng ma trận:

$$\{q\} = [N_1 \quad N_2]\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [N_1 \quad N_2]\begin{Bmatrix} q_1^e \\ q_2^e \end{Bmatrix} = [N]\{q^e\}$$

2.2.2 Biểu diễn biến dạng qua chuyển vị nút

$\Rightarrow$ Quan hệ biến dạng-chuyển vị dưới dạng ma trận:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx}\} = \left\{\frac{\partial u}{\partial \mathrm{x}}\right\} = \left\{\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \mathrm{x}}\right\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{-q_1^e + q_2^e}{2}; \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{2}{x_2 - x_1} = \frac{2}{L_e} \Rightarrow \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-q_1^e + q_2^e}{L_e}$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx}\} = \left\{\frac{\partial u}{\partial \mathrm{x}}\right\} = \frac{1}{L_e}[-1 \quad 1]\begin{Bmatrix} q_1^e \\ q_2^e \end{Bmatrix}$$

Đặt $[B] = \dfrac{1}{L_e}[-1 \quad 1]$

[B]: ma trận biến dạng chuyển vị.

$$\Rightarrow \quad \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx}\} = \left\{\frac{\partial u}{\partial \mathrm{x}}\right\} = [B]\{q^e\}$$

2.2.3 Biểu diễn ứng suất qua chuyển vị nút

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} = [C][B]\{q^e\}$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{xx}\} = \{E\varepsilon_{\mathrm{xx}}\} = E[B]\{q^e\}$$

2.2.3 Biểu thức ma trận độ cứng phần tử

$\Rightarrow$ Gọi $\{\delta q^e\}$ là véc tơ chuyển vị nút khả dĩ của phần tử.

$$\{\delta q^e\} = \begin{bmatrix}\delta q_1^e & \delta q_2^e\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}\delta u_1 & \delta u_2\end{bmatrix}^T$$

$\Rightarrow$ Thế năng biến dạng của một phần tử trong di chuyển khả dĩ:

$$\delta W_{\mathrm{int}}^e = \int_{V_e} \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV$$

mà $\{\varepsilon\} = [B]\{q^e\} \Rightarrow \{\delta\varepsilon\}^T = \{\delta q^e\}^T [B]^T \quad \Rightarrow \quad \delta W_{\mathrm{int}}^e = \int_{V_e} \{\delta q^e\}^T [B]^T [C][B]\{q^e\} dV$

$$\delta W_{\mathrm{int}}^e = \{\delta q^e\}^T \left(\int_{V_e} [B]^T [C][B] dV\right)\{q^e\}$$

Đặt $[k^e] = E\int_{V_e} [B]^T [B] dV$

$$\Rightarrow \delta W_{\mathrm{int}}^e = \{\delta q^e\}^T [k^e]\{q^e\}$$

$\Rightarrow$ $[k^e]$ là ma trận độ cứng của phần tử:

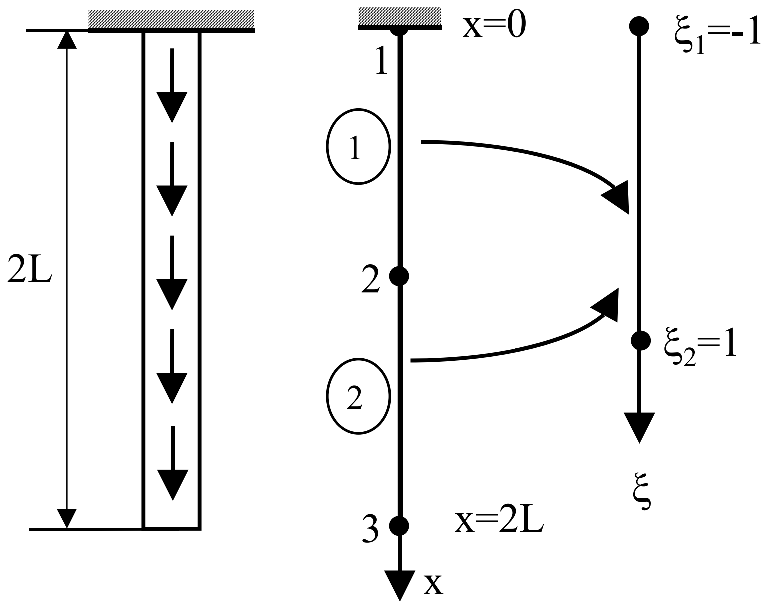
- $[k^e]$ phụ thuộc vào bản chất vật liệu & hình dạng hình học của phần tử.
- $[k^e]$ là ma trận vuông đối xứng có 2 hàng và 2 cột.
- $[k^e]$ là ma trận suy biến: $\det[k^e]=0$.

mà $dx = \dfrac{x_2 - x_1}{2} d\xi = \dfrac{L_e}{2} d\xi \Rightarrow dV = A_e dx = \dfrac{A_e L_e}{2} d\xi$

$$\Rightarrow [k^e] = E\int_{V_e} [B]^T [B] dV = E_e \frac{1}{L_e^2} \frac{A_e L_e}{2} \int_{-1}^{1} \begin{bmatrix}-1 \\ 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix} d\xi$$

$$\left[k^e\right] = \frac{A_e E_e}{L_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Ví dụ 2.1</u>



Hình 2.3 Mô hình hoá PTHH thanh chịu tác dụng của trọng lượng bản thân với phần tử thực & phần tử quy chiếu

Cho trục có kết cấu như hình 2.3 chịu tác dụng của trọng lực bản thân. Cho: Tiết diện A, chiều dài $2L$, mô đun đàn hồi E, khối lượng riêng ρ. Lực thể tích [N/m^3]: $f=\rho g$ (g: gia tốc trọng trường)

<u>Bước 1</u>: *Rời rạc hoá kết cấu*

Chia kết cấu thành 2 phần tử, mỗi phần tử có 2 nút, được đánh số nút và số phần tử như hình 2.3.

<u>Bước 2</u>: *Tính ma trận độ cứng của phần tử*

$$\left[k^1\right] = \left[k^2\right] = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bước 3: *Ghép phần tử & tính ma trận độ cứng của kết cấu [K].*

Bảng ghép nối phần tử

Phần tử	Chỉ số chuyển vị nút địa phương	
	1	2
	Chỉ số chuyển vị nút tổng thể	
(1)	1	2
(2)	2	3

$$K_{11} = k_{11}^{1}; \quad K_{12} = k_{12}^{1}; \quad K_{13} = 0;$$
$$K_{21} = k_{21}^{1}; \quad K_{22} = k_{22}^{1} + k_{11}^{2}; \quad K_{23} = k_{12}^{2};$$
$$K_{31} = 0; \quad K_{32} = k_{21}^{2}; \quad K_{33} = k_{22}^{2};$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bước 4: *Quy đổi ngoại lực về nút*

Lực thể tích tác dụng lên trục là: $f=\rho g$.

Véc tơ lực nút của phần tử do lực thể tích gây ra là:

$$\{f_v^e\} = \int_{V^e} [N]^T \{f_v\} dV = \rho g \int_{V^e} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} dV$$

mà $dx = \frac{x_2 - x_1}{2} d\xi = \frac{L_e}{2} d\xi \Rightarrow \quad dV = A_e dx = \frac{A_e L_e}{2} d\xi$

do đó: $\{f_v^e\} = \int_{V^e} [N]^T \{f_v\} dV = \rho g \frac{AL}{4} \int_{-1}^{1} \begin{Bmatrix} 1-\xi \\ 1+\xi \end{Bmatrix} d\xi = \rho g \frac{AL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

Với e=1, 2.

Gọi R_1 là phản lực tại ngàm ở nút 1.

Véc tơ lực nút của cả kết cấu là:

$$\{F\} = \rho g \frac{AL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho g AL/2 + R_1 \\ \rho g AL \\ \rho g AL/2 \end{Bmatrix}$$

Bước 5: *Hệ phương trình PTHH*

$$\frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \rho gAL/2+R_1 \\ \rho gAL \\ \rho gAL/2 \end{Bmatrix}$$

Bước 6: *Áp dụng điều kiện biên Q_1=0, ta loại bỏ dòng 1 cột 1 của hệ trên ta có hệ 2 phương trình 2 ẩn số.*

$$\frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix}=\frac{\rho gAL}{2}\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Kết Quả

⇒ Chuyển vị:

$$Q_1=0;\quad Q_2=\frac{3\rho gL^2}{2E};\quad Q_2=\frac{2\rho gL^2}{E}$$

⇒ Phản lực liên kết tại ngàm (nút 1):

$$R_1=\sum_{j=1}^{m}K_{1j}Q_j=K_{12}Q_2-\frac{\rho gAL}{2}=-\frac{AE}{L}\frac{3\rho gL^2}{2E}-\frac{\rho gAL}{2}\Rightarrow R_1=-2\rho gAL$$

⇒ Biến dạng trong mỗi phần tử:

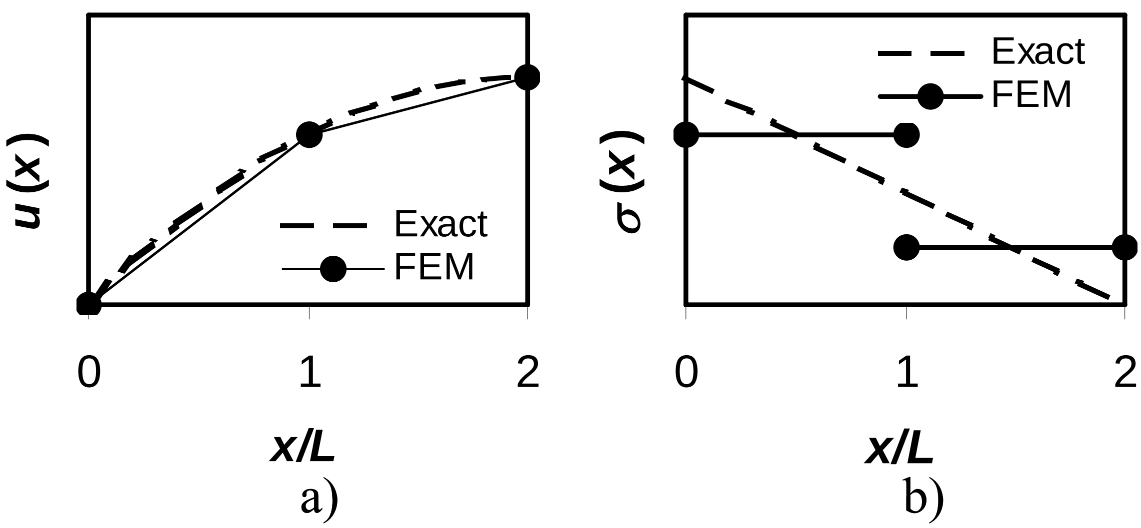
$$\varepsilon^1=\frac{-q_1^1+q_2^1}{L_1}=\frac{-Q_1+Q_2}{L}=\frac{3\rho gL}{2E};\quad \varepsilon^2=\frac{-q_1^2+q_2^2}{L_2}=\frac{-Q_2+Q_3}{L}=\frac{\rho gL}{2E}$$

⇒ Ứng suất trong mỗi phần tử:

$$\sigma^1=E\varepsilon^1=\frac{3\rho gL}{2};\quad \sigma^2=E\varepsilon^2=\frac{\rho gL}{2}$$

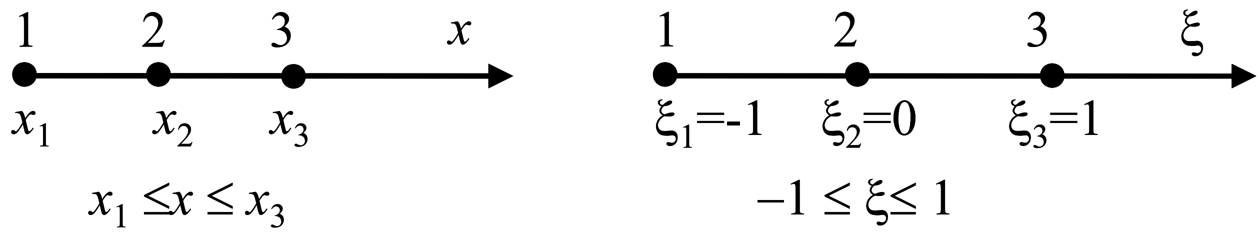
⇒ So sánh với kết quả của lời giải theo Sức Bền Vật liệu:

$$\mathrm{u}(\mathrm{x})=\frac{2\rho \mathrm{gL}}{\mathrm{E}}\mathrm{x}\left(1-\frac{\mathrm{x}}{4\mathrm{L}}\right)\quad ;\quad \sigma_{\mathrm{xx}}(\mathrm{x})=2\rho\mathrm{gL}\left(1-\frac{\mathrm{x}}{2\mathrm{L}}\right)$$



Hình 2.4 Chuyển vị a) & ứng suất b) tính theo FEM & Sức Bền Vật Liệu

2.2 Ma trận độ cứng của phần tử thanh ba nút



Hình 2.5 Phần tử thực và phần tử quy chiếu một chiều 3 nút

Phần tử thanh 2 nút chỉ cho kết quả chính xác trong trường hợp thanh chịu tác dụng của lực tập trung. Trong trường hợp lực phân bố ta nên dùng phần tử thanh 3 nút.
Xây dựng ma trận độ cứng của phần tử thanh có ba nút được coi như bài tập.

Bài Tập

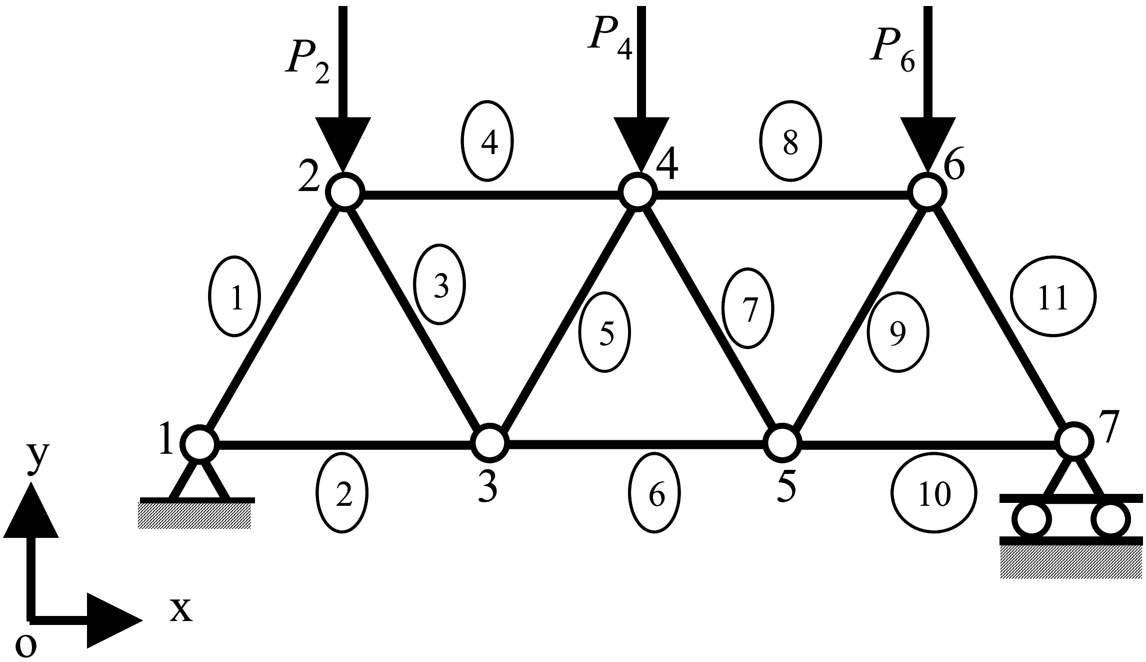
2.1. Xây dựng ma trận độ cứng của phần tử thanh ba nút như hình 2.5.

2.2. Quy đổi lực phân bố có cường độ f tác dụng dọc theo trục thanh về các nút.

2.3. Giải ví dụ 2.1 dùng 1 phần tử thanh ba nút. So sánh với kết quả khi dùng 2 phần tử 2 nút.

Chương 3 PTHH Trong Hệ Thanh Phẳng

3.1 Mô hình PTHH cho hệ thanh phẳng



Hình 3.1 Mô hình hệ thanh phẳng bằng PTHH

⇒ Hệ thanh phẳng:

- Các thanh nằm trong cùng một mặt phẳng.
- Các thanh liên kết với nhau bởi các khớp quay (bỏ qua ma sát tại các khớp).
- Tải trọng & phản lực liên kết đặt tại các khớp nối.
- Các thanh chỉ chịu kéo hoặc nén.

⇒ Mỗi thanh là một phần tử.

⇒ Trong hệ *Oxyz*, nút *i* có 2 chuyển vị u_i & v_i theo 2 phương *Ox* & *Oy* ký hiệu theo cách ghi chỉ số tổng thể:

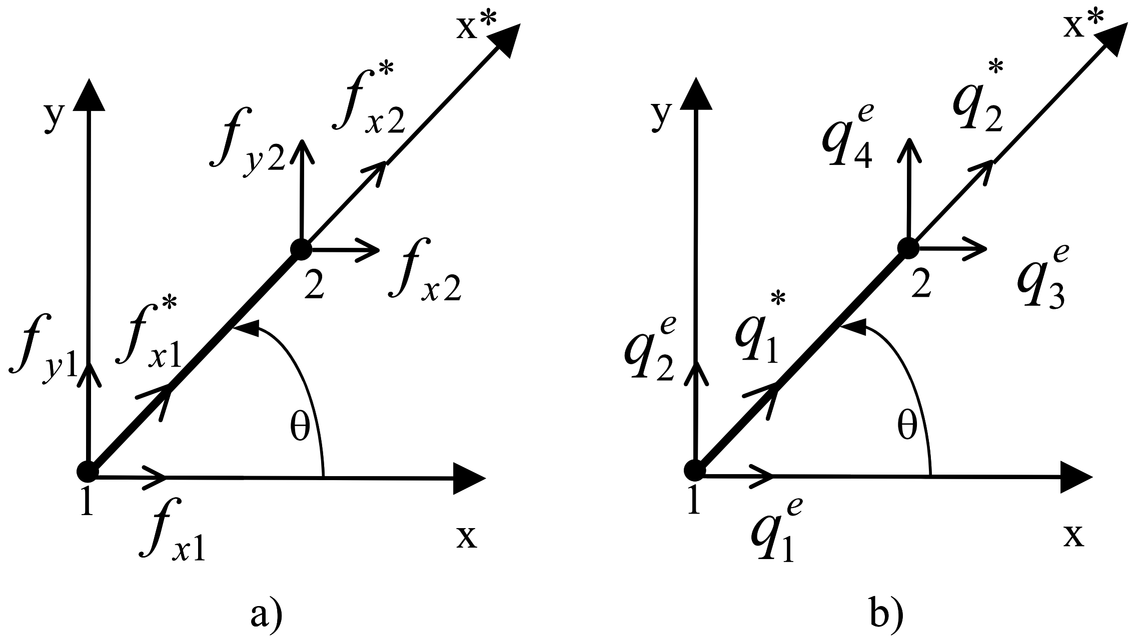
$Q_{2i-1} = u_i \quad ; \quad Q_{2i} = v_i$

⇒ Véc tơ chuyển vị nút của cả kết cấu là:

$\{Q\} = [Q_1 \quad Q_2 \quad \dots \quad Q_m]^T$

⇒ Hệ toạ độ *Oxy* cố định không phụ thuộc vào phương của các thanh trong hệ thanh.

⇒ Hệ toạ độ *O*x** trùng với trục của thanh. Các đại lượng trong hệ toạ độ *O*x** được đánh dấu *.



Hình 3.2 Lực nút a) và chuyển vị nút b) được biểu diễn trong các hệ toạ độ

⇒ Mỗi thanh là một phần tử có 2 nút là nút 1 & 2 theo cách ghi chỉ số địa phương.

⇒ Chuyển vị tại nút 1 & 2 của phần tử trong hệ toạ độ O^*x^* được ký hiệu thứ tự là q_1^* & q_2^*.

⇒ Véc tơ chuyển vị nút của phần tử trong hệ O^*x^* là:

$$\{q^*\} = \begin{Bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \end{Bmatrix}$$

⇒ Trong hệ *Oxy*, mỗi phần tử có 4 bậc tự do, véc tơ chuyển vị nút của phần tử là

$$\{q^e\} = \begin{bmatrix} q_1^e & q_2^e & q_3^e & q_4^e \end{bmatrix}^T$$

- q_1^e & q_2^e là chuyển vị của nút 1 thứ tự theo các phương *Ox* và *Oy*.
- q_3^e & q_4^e là chuyển vị của nút 2 thứ tự theo các phương *Ox* và *Oy*.

⇒ Gọi θ là góc lệch của thanh (phương O^*x^*) so với trục *Ox*.

⇒ Đặt $c = \cos\theta$ & $\mathrm{s} = \sin\theta$. Ta có:

$$q_1^* = q_1^e\,\mathrm{c} + q_2^e\,\mathrm{s} \quad ; \quad q_2^* = q_3^e\,\mathrm{c} + q_4^e\,\mathrm{s}$$

$$\Rightarrow \{q^*\} = \begin{Bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1^e \\ q_2^e \\ q_3^e \\ q_4^e \end{Bmatrix}$$

Đặt $[T]=\begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix} \Rightarrow \{q^*\}=[T]\{q^e\}$

⇒ Quan hệ biến dạng & chuyển vị nút:

$$\varepsilon=\frac{q_2^*-q_1^*}{L_e}=\frac{1}{L_e}\left[\left(q_3^e c+q_4^e \mathrm{s}\right)-\left(q_1^e c+q_2^e \mathrm{s}\right)\right]=\frac{1}{L_e}\left[\left(q_3^e-q_1^e\right)c+\left(q_4^e-q_2^e\right)s\right]$$

⇒ Quan hệ ứng suất & chuyển vị nút:

$$\sigma=E\varepsilon=\frac{E}{L_e}\left[\left(q_3^e-q_1^e\right)c+\left(q_4^e-q_2^e\right)s\right]$$

3.2 Ma trận độ cứng phần tử

⇒ Ma trận độ cứng phần tử trong hệ toạ độ *O*x**:

$$\left[k^*\right]=\frac{A_eE_e}{L_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

⇒ Gọi $\{\delta q^*\}$ & $\{\delta q^e\}$ thứ tự là véc tơ chuyển vị nút khả dĩ của phần tử trong hệ toạ độ *O*x** & *Oxy*.

$$\{\delta q^*\}=[T]\{\delta q^e\}$$

⇒ Năng lượng biến dạng của phần tử trong di chuyển khả dĩ:

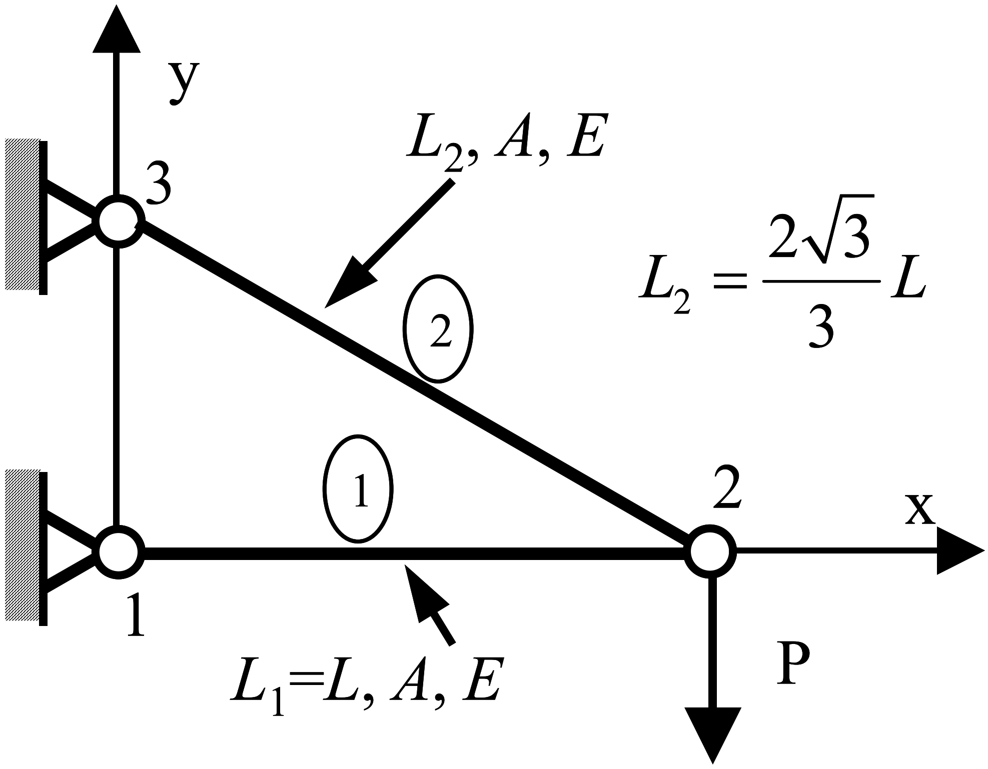
$$\delta W_{\text{int}}^e=\{\delta q^*\}^T\left[k^*\right]\{q^*\}=\{\delta q^e\}^T[T]^T\left[k^*\right][T]\{q^e\}$$

⇒ $\left[k^e\right]$: ma trận độ cứng của phần tử trong hệ *Oxy*.

⇒ $\left[k^e\right]=[T]^T\left[k^*\right][T]$

$$\left[k^e\right]=\frac{A_eE_e}{L_e}\begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 3.1



Hình 3.3 Tính chuyển vị của hệ thanh phẳng gồm hai thanh

⇒ Cho hệ thanh phẳng gồm hai thanh có kết cấu & chịu lực như hình 3.3. Các thanh có tiết diện A và mô đun đàn hồi E, chiều dài L_1 & L_2.

Bước 1: *Rời rạc hoá kết cấu & chọn hàm nội suy*

⇒ Chia kết cấu thành 2 phần tử (mỗi thanh là một phần tử) được đánh số nút và số phần tử như hình 3.3.

⇒ Mỗi phần tử có 4 bậc tự do trong hệ toạ độ *Oxy*, véc tơ chuyển vị nút của phần tử là

$$\{q^e\} = \begin{bmatrix} q_1^e & q_2^e & q_3^e & q_4^e \end{bmatrix}^T$$

⇒ Số bậc tự do của cả hệ là 6, véc tơ chuyển vị nút của cả hệ là:

$$\{Q\} = [Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad Q_5 \quad Q_6]^T$$

⇒ Đã biết $Q_1 = Q_2 = Q_5 = Q_6 = 0$, tìm Q_3 & Q_4.

<u>Bước 2</u>: *Tính ma trận độ cứng của phần tử*

$\Rightarrow$ Phần tử 1: $\theta = 0^0 \quad \Rightarrow \quad c = \cos\theta = 1 \quad ; \quad s = \sin\theta = 0$

$$\left[k^1\right] = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Phần tử 2: $\theta = 150^0 \quad \Rightarrow \quad c = \cos\theta = -\sqrt{3}/2 \quad ; \quad \mathrm{s} = \sin\theta = 1/2$

$$\left[k^2\right] = \frac{AE}{L_2}\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \end{bmatrix}$$

<u>Bước 3</u>: *Ghép phần tử & tính ma trận độ cứng của kết cấu [K]*

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ & & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ & & & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ & & & & K_{55} & K_{56} \\ Sym & & & & & K_{66} \end{bmatrix}$$

Bảng ghép nối phần tử

Phần tử	Chỉ số chuyển vị nút địa phương			
	1	2	3	4
	Chỉ số chuyển vị nút tổng thể			
(1)	1	2	3	4
(2)	3	4	5	6

$K_{11} = k_{11}^1;\quad K_{12} = k_{12}^1\quad K_{13} = k_{13}^1;\quad K_{14} = k_{14}^1;\quad K_{15} = 0;\quad K_{16} = 0;$

$K_{22} = k_{22}^1;\quad K_{23} = k_{23}^1;\quad K_{24} = k_{24}^1;\quad K_{25} = 0;\quad K_{26} = 0;$

$K_{33} = k_{33}^1 + k_{11}^2;\quad K_{34} = k_{34}^1 + k_{12}^2;\quad K_{35} = k_{13}^2;\quad K_{36} = k_{14}^2;$

$K_{44} = k_{44}^1 + k_{22}^2;\quad K_{45} = k_{23}^2;\quad K_{46} = k_{24}^2;$

$K_{55} = k_{33}^2;\quad K_{56} = k_{34}^2;$

$K_{66} = k_{44}^2;$

<u>Bước 4</u>: *Quy đổi ngoại lực về nút*

⇒ R_1 & R_2 thứ tự là phản lực theo phương *Ox* & *Oy* tại nút 1.

⇒ Tại nút 2 ngoại lực tác dụng theo phương *Ox* bằng 0, theo phương *Oy* là *–P*.

⇒ R_5 & R_6 thứ tự là phản lực theo phương *Ox* & *Oy* tại nút 3.

⇒ Véc tơ lực nút của hệ là:

$$\{F\} = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & 0 & -P & R_5 & R_6 \end{bmatrix}^T$$

<u>Bước 5</u>: *Hệ phương trình PTHH*

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1+\frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} \\ 0 & 0 & -\frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ 0 \\ -P \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix}$$

<u>Bước 6</u>: *Áp dụng điều kiện biên* $Q_1 = Q_2 = Q_5 = Q_6 = 0$.

⇒ Loại bỏ dòng 1, 2, 5,và 6 và cột 1, 2, 5,và 6 của hệ trên ta có hệ 2 phương trình 2 ẩn số.

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1+\frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \end{Bmatrix}$$

<u>Kết Quả</u>

⇒ Chuyển vị: $Q_3 = -\sqrt{3}\dfrac{PL}{EA}$; $Q_4 = -\sqrt{3}\left(\dfrac{8}{3}+\sqrt{3}\right)\dfrac{PL}{EA}$

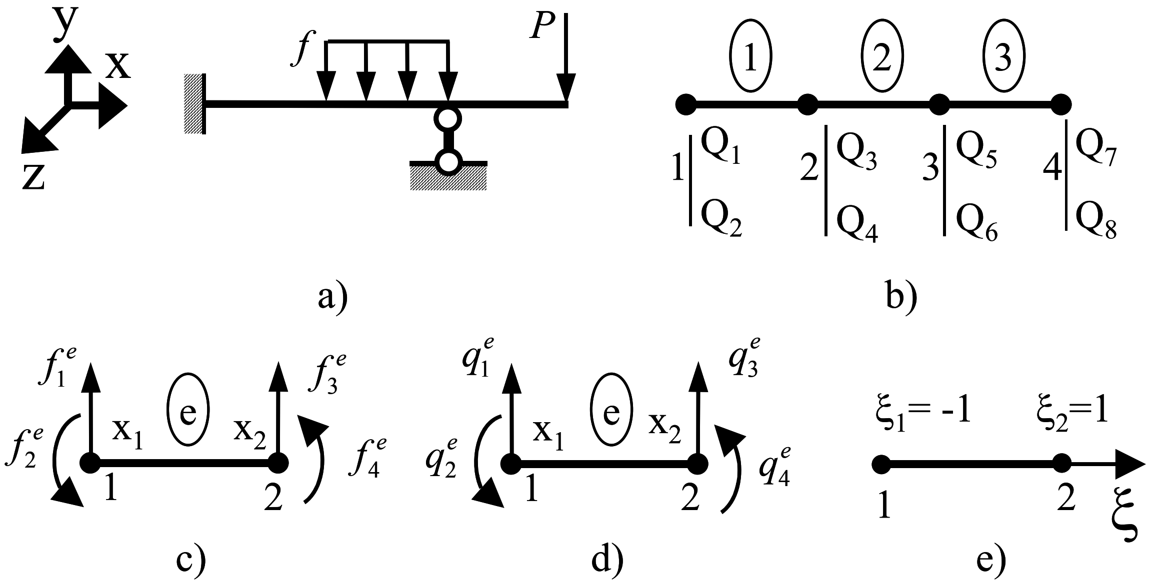
⇒ Phản lực liên kết tại các gối tựa:

$R_1 = \sqrt{3}P$; $R_2 = 0$; $R_5 = -\sqrt{3}P$; $R_6 = P$

⇒ Lời giải theo phương pháp PTHH trùng với lời giải chính xác của Sức Bền Vật Liệu.

Chương 4 PTHH Trong Bài Toán Dầm

4.1 Rời rạc hoá kết cấu & chọn hàm nội suy



Hình 4.1 a) Kết cấu dầm; b) Mô hình PTHH; c) Biểu diễn lực nút của phần tử; d) Biểu diễn chuyển vị nút của phần tử; e)Phần tử quy chiếu

⇒ Chỉ xét dầm có mặt cắt ngang đối xứng với mặt phẳng tải trọng. Bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt.

⇒ Chia dầm thành các phần tử, mỗi phần tử có 2 nút gồm 4 bậc tự do, dùng phần tử quy chiếu 2 nút như trên hình 4.1.

⇒ Toạ độ x tại một điểm được biểu diễn bởi các toạ độ x_1 tại nút 1 và x_2 tại nút 2 và các ***hàm dạng*** $\overline{N}_1(\xi)$ & $\overline{N}_2(\xi)$ như sau:

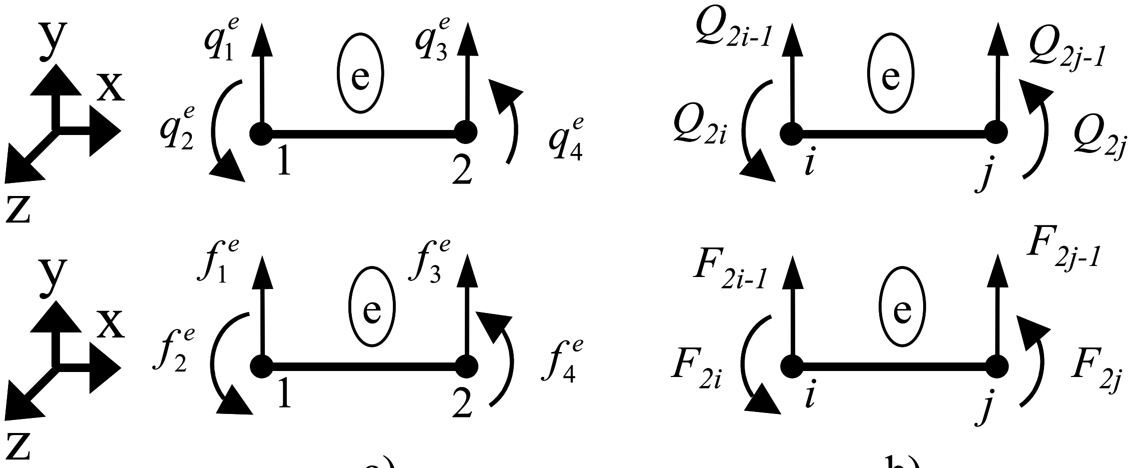
$$x = \overline{N}_1(\xi)x_1 + \overline{N}_2(\xi)x_2 \text{ với } \overline{N}_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2}; \quad \overline{N}_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2}$$

⇒ Véc tơ chuyển vị nút của phần tử là $\left\{q^e\right\} = \left[q_1^e \quad q_2^e \quad q_3^e \quad q_4^e\right]^T$

- $q_1^e = u_1$ & $q_2^e = \varphi_1$ thứ tự là độ võng của trục dầm và góc xoay của mặt cắt ngang của dầm tại nút 1.
- $q_3^e = u_2$ & $q_4^e = \varphi_2$ thứ tự là độ võng của trục dầm và góc xoay của mặt cắt ngang của dầm tại nút 2.

⇒ Véc tơ lực nút của phần tử là: $\left\{f^e\right\} = \left[f_1^e \quad f_2^e \quad f_3^e \quad f_4^e\right]^T$

- f_1^e & f_3^e thứ tự là lực nút theo phương Oy tại nút 1 và nút 2.
- f_2^e & f_4^e thứ tự là mô men đối với trục Oz tại nút 1 và nút 2.



Hình 4.2 Lực nút và chuyển vị nút biểu diễn trong: a) hệ địa phương của phần tử và b) hệ tổng thể của kết cấu

⇒ Véc tơ chuyển vị nút của cả kết cấu:

$$\{Q\} = [Q_1 \quad Q_2 \quad \dots \quad Q_m]^T$$

⇒ Trong hệ tổng thể, chuyển vị tại nút *i* gồm:

- Q_{2i-1} là độ võng của trục dầm;
- Q_{2i} là góc xoay của mặt cắt ngang của dầm.

⇒ Véc tơ lực nút của cả kết cấu:

$$\{F\} = [F_1 \quad F_2 \quad \dots \quad F_m]^T$$

⇒ Trong hệ tổng thể, lực nút tại nút *i* gồm:

- F_{2i-1} là lực tác dụng theo phương *Oy*.
- F_{2i} là mô men đối với trục *Oz*.

⇒ *m* là tổng số chuyển vị nút của kết cấu. (số bậc tự do của kết cấu). Số phần tử là *m*/2-1; số nút *m*/2.

⇒ Độ võng của trục dầm được xác định từ các chuyển vị nút & ***hàm nội suy*** $N_i(\xi)$ như sau:

$$v(\xi) = N_1 v_1 + N_2 \varphi_1 + N_3 v_2 + N_4 \varphi_2 = N_1 q_1^e + N_2 q_2^e + N_3 q_3^e + N_4 q_4^e = \sum_{i=1}^{4} N_i q_i^e$$

Đặt $[N] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]$

⇒ Dưới dạng ma trận: $v(\xi) = [N]\{q^e\}$

⇒ Từ đó xác định được góc xoay của mặt cắt ngang của dầm:

$$\varphi(\xi) = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L_e}\sum_{i=1}^{4} q_i^e \frac{dN_i}{d\xi}$$

⇒ Độ võng tại nút 1 (ξ_1=-1):

$$v_1 = v(-1) = N_1(-1)v_1 + N_2(-1)\varphi_1 + N_3(-1)v_2 + N_4(-1)\varphi_2$$

⇒ $N_1(-1) = 1; \quad N_2(-1) = 0; \quad N_3(-1) = 0; \quad N_4(-1) = 0;$

⇒ Tương tự đối với góc xoay tại nút 1 ta có:

$$\varphi_1 = \varphi(-1) = \frac{2}{L_e}\left[v_1 N_1'(-1) + \varphi_1 N_2'(-1) + v_2 N_3'(-1) + \varphi_2 N_4'(-1)\right]$$

⇒ $N_1'(-1) = 0; \quad N_2'(-1) = L_e/2; \quad N_3'(-1) = 0; \quad N_4'(-1) = 0;$

⇒ Tổ hợp điều kiện về độ võng và góc xoay tại các nút ta có các điều kiện sau đối với các hàm nội suy $N_i(\xi)$

	N_1	N_1'	N_2	N_2'	N_3	N_3'	N_4	N_4'
$\xi_1=-1$	1	0	0	$L_e/2$	0	0	0	0
$\xi_2=1$	0	0	0	0	1	0	0	$L_e/2$

⇒ Với mỗi hàm nội suy $N_i(\xi)$ có 4 phương trình để xác định các hệ số của nó, do đó ta tìm $N_i(\xi)$ dưới dạng đa thức bậc 3 như sau:

$$N_i = a_i + b_i\xi + c_i\xi^2 + d_i\xi^3$$

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi) = \frac{1}{4}\left(2 - 3\xi + \xi^3\right)$$

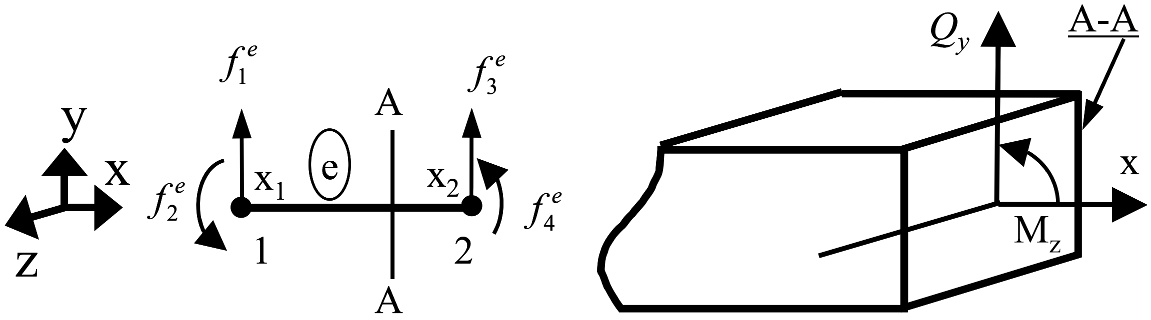
$$N_2 = \frac{L_e}{8}\left(1-\xi^2\right)(1-\xi) = \frac{L_e}{8}\left(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3\right)$$

⇒ $$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi) = \frac{1}{4}\left(2 + 3\xi - \xi^3\right)$$

$$N_4 = \frac{L_e}{8}\left(-1+\xi^2\right)(1+\xi) = \frac{L_e}{8}\left(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3\right)$$

4.2 Ma trận độ cứng của phần tử

4.2.1 Biểu diễn ứng suất qua chuyển vị nút



Hình 4.3 Mặt cắt ngang của dầm trong hệ Oxyz và các thành phần nội lực

$\Rightarrow$Theo Sức Bền Vật Liệu: $\sigma_{xx} = -\dfrac{M_z}{J} y \quad \& \quad \dfrac{d^2 v}{dx^2} = \dfrac{M_z}{EJ}$

$$\Rightarrow \sigma_{xx} = -yE\frac{d^2 v}{dx^2} = -yE\frac{d\varphi}{dx}$$

mà $\varphi(\xi) = \dfrac{dv}{dx} = \dfrac{dv}{d\xi}\dfrac{d\xi}{dx} = \dfrac{2}{L_e}\sum_{i=1}^{4} q_i^e \dfrac{dN_i}{d\xi}$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = -yE\frac{4}{L_e^2}\sum_{i=1}^{4} q_i^e \frac{d^2 N_i}{d\xi^2}$$

Do đó $\sigma_{xx} = -yE\dfrac{4}{L_e^2}\sum_{i=1}^{4} q_i^e \dfrac{d^2 N_i}{d\xi^2}$

Ký hiệu: $\left[N''\right] = \left[\dfrac{d^2 N_1}{d\xi^2} \quad \dfrac{d^2 N_2}{d\xi^2} \quad \dfrac{d^2 N_3}{d\xi^2} \quad \dfrac{d^2 N_4}{d\xi^2}\right]$

$$\left[N''\right] = \frac{1}{2}\left[3\xi \qquad \frac{L_e}{2}(3\xi - 1) \qquad -3\xi \qquad \frac{L_e}{2}(3\xi + 1)\right]$$

$$\Rightarrow \{\sigma\} = \{\sigma_{xx}\} = -\frac{4Ey}{L_e^2}\left[N''\right]\{q^e\}$$

4.2.2 Biểu diễn biến dạng qua chuyển vị nút

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx}\} = \frac{1}{E}\{\sigma_{xx}\} = -\frac{4y}{L_e^2}\left[N''\right]\{q^e\}$$

4.2.3 Biểu thức ma trận độ cứng phần tử

⇒ Gọi $\{\delta q^e\}$ là véc tơ chuyển vị nút khả dĩ của phần tử.

$$\{\delta q^e\} = \begin{bmatrix} \delta q_1^e & \delta q_2^e & \delta q_3^e & \delta q_4^e \end{bmatrix}^T$$

⇒ Năng lượng biến dạng của phần tử trong di chuyển khả dĩ:

$$\delta W_{\text{int}}^e = \int_{V_e} \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV$$

mà $\{\delta\varepsilon\}^T = -\dfrac{4y}{L_e^2}\{\delta q^e\}^T \left[N''\right]^T$

$$\Rightarrow \delta W_{\text{int}}^e = \frac{16E}{L_e^4}\int_{V_e} y^2 \{\delta q^e\}^T \left[N''\right]^T \left[N''\right]\{q^e\} dV = \{\delta q^e\}^T \left(\frac{16E}{L_e^4}\int_{V_e} y^2 \left[N''\right]^T \left[N''\right] dV \right)\{q^e\}$$

$\Rightarrow \left[k^e\right] = \dfrac{16E}{L_e^4}\displaystyle\int_{V_e} y^2 \left[N''\right]^T \left[N''\right] dV$ là ma trận độ cứng của phần tử.

$J = \displaystyle\int_{A_e} y^2 dA$ là mô men diện tích của tiết diện ngang của dầm đối với trục Oz.

và $dx = \dfrac{L_e}{2} d\xi$

$$\Rightarrow \left[k^e\right] = \frac{16E}{L_e^4}\int_{A_e} y^2 dA \int_{x_1}^{x_2} \left[N''\right]^T \left[N''\right] dx = \frac{8EJ}{L_e^3}\int_{-1}^{1} \left[N''\right]^T \left[N''\right] d\xi$$

$$\left[k^e\right] = \frac{8EJ}{L_e^3}\int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} \frac{9}{4}\xi^2 & \frac{3L_e}{8}\xi(3\xi-1) & -\frac{9}{4}\xi^2 & \frac{3L_e}{8}\xi(3\xi+1) \\ & \frac{L_e^2}{4}(1-3\xi) & -\frac{3L_e}{8}\xi(3\xi-1) & \frac{L_e^2}{16}(9\xi^2-1) \\ & & \frac{9}{4}\xi^2 & -\frac{3L_e}{8}\xi(3\xi+1) \\ Sym & & & \frac{L_e^2}{16}(3\xi+1)^2 \end{bmatrix} d\xi$$

$$\Rightarrow \left[k^e\right] = \frac{EJ}{L_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L_e & -12 & 6L_e \\ 6L_e & 4L_e^2 & -6L_e & 2L_e^2 \\ -12 & -6L_e & 12 & -6L_e \\ 6L_e & 2L_e^2 & -6L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix}$$

4.3 Quy đổi ngoại lực về lực nút

⇒ Giải phóng liên kết của kết cấu (như ngàm, gối tựa...), và coi lực liên kết như ngoại lực tác dụng.

⇒ Để quy đổi ngoại lực về lực nút ta cần tính công của ngoại lực trong di chuyển khả dĩ.

4.3.1 Quy đổi lực và mô men tập trung

⇒ Khi chia phần tử, chọn điểm đặt lực hoặc mômen tập trung làm nút.

⇒ Nút thứ *i* của kết cấu có lực tập trung P_{2i-1} (tương ứng với độ võng Q_{2i-1}) và mô men tập trung M_{2i} (tương ứng với góc xoay Q_{2i}).

⇒ $\{\delta Q\}$ là véc tơ chuyển vị nút khả dĩ của kết cấu:

$$\{\delta Q\} = [\delta Q_1 \quad \delta Q_2 \quad \ldots \quad \delta Q_m]^T$$

⇒ Công của ngoại lực & momen tập trung trong di chuyển khả dĩ:

$$\delta W_{ext}^{P} = \sum_{i=1}^{m} \delta Q_i P_i = \{\delta Q\}^T \{P\}$$

⇒ Với $\{P\}$ là véc tơ lực nút chứa tất cả các thành phần ngoại lực tập trung & momen tập trung tác dụng lên các nút của kết cấu:

$$\{P\} = [P_1 \quad P_2 \quad \ldots \quad P_m]^T$$

⇒ **<u>Khi thực hành tính toán</u>**, tại nút có lực hoặc mô men tập trung, ta cộng thêm giá trị của lực hoặc giá trị của mô men tập trung vào thành phần véc tơ lực nút tổng thể tương ứng với nút đó.

4.3.2 Quy đổi lực phân bố

⇒ Phần tử dầm chịu lực phân bố đều có cường độ f. Công của lực phân bố trong di chuyển khả dĩ là:

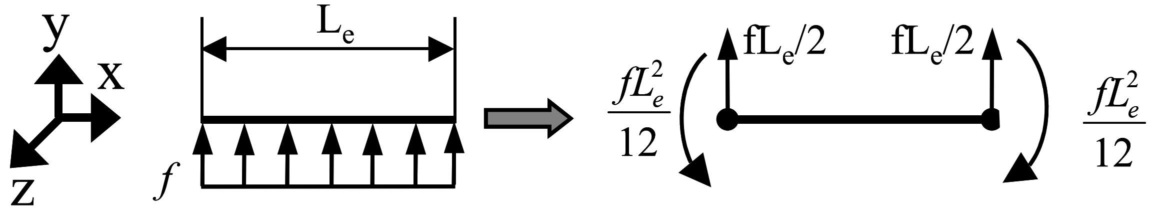
$$\delta W_{ext}^{ef} = \int_{x_1}^{x_2} f.\delta v.dx = \frac{L_e}{2}\int_{-1}^{1} f.\delta v.d\xi = \frac{L_e f}{2}\int_{-1}^{1} \delta v d\xi$$

mà $v = [N]\{q^e\} \Rightarrow \delta v = \{\delta q^e\}^T [N]^T$

$$\Rightarrow \quad \delta W_{ext}^{ef} = \frac{L_e f}{2}\int_{-1}^{1}\{\delta q^e\}^T [N]^T d\xi = \{q^e\}^T \frac{L_e f}{2}\left(\int_{-1}^{1}[N]^T d\xi\right)$$

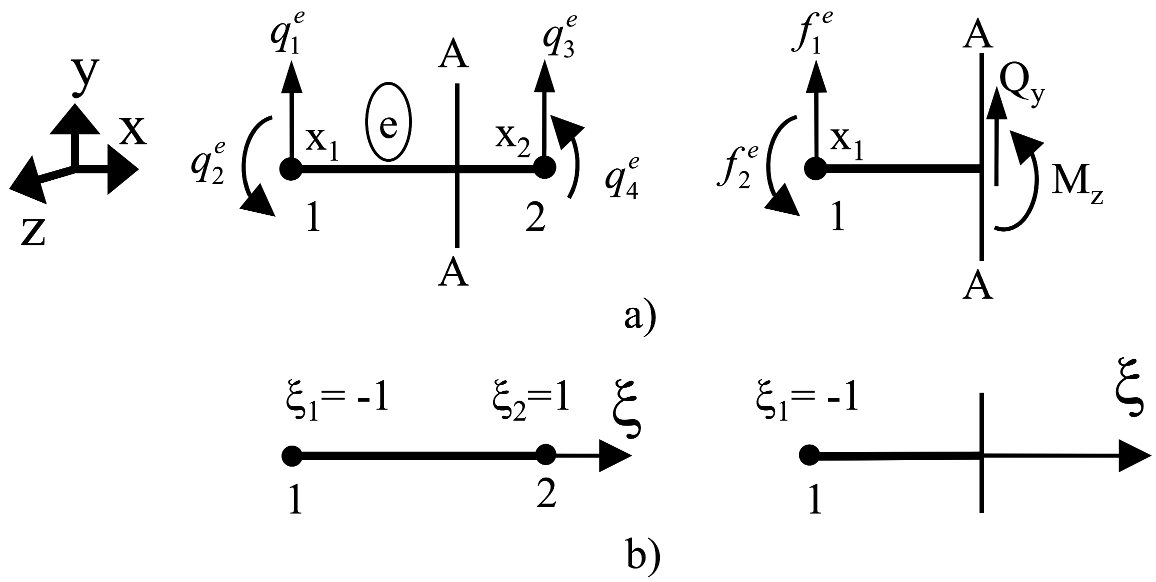
$\Rightarrow$ Véc tơ lực nút $\{f^e\}$ của phần tử do lực phân bố gây ra:

$$\{f^e\} = \frac{fL_e}{2}\left(\int_{-1}^{1}[N]^T d\xi\right) = \begin{bmatrix} \frac{fL_e}{2} & \frac{fL_e^2}{12} & \frac{fL_e}{2} & -\frac{fL_e^2}{12} \end{bmatrix}^T$$



Hình 4.4 Quy đổi lực phân bố về lực nút

4.4 Tính nội lực



Hình 4.5 Mặt cắt ngang của dầm để tính nội lực trong: a) phần tử thực và b) phần tử quy chiếu

$\Rightarrow$ Tính mô men uốn:

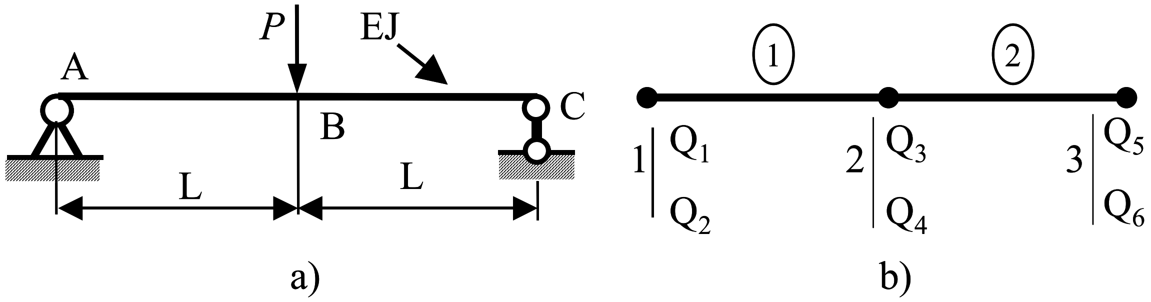
$$M_z = EJ\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{EJ}{L_e^2}\left[6\xi q_1^e + (3\xi - 1)L_e q_2^e - 6\xi q_3^e + (3\xi + 1)L_e q_4^e\right]$$

$\Rightarrow$ Tính lực cắt:

$$Q_y = -\frac{dM}{dx} = \frac{6EJ}{L_e^3}\left[-2q_1^e - L_e q_2^e + 2q_3^e - L_e q_4^e\right]$$

4.5 Ví dụ

4.5.1 Ví dụ 4.1



Hình 4.6 Dầm chịu lực tập trung: a) Kết cấu thực & b) mô hình PTHH

Cho dầm có kết cấu & chịu lực như hình 4.6. Tính độ võng tại giữa dầm và góc xoay của mặt cắt ngang tại vị trí gối tựa.

<u>Lời giải</u>: Chia dầm thành 2 phần tử như hình 4.6.

⇒Ma trận độ cứng của phần tử 1 & 2 là:

$$\left[k^1\right]=\left[k^2\right]=\frac{EJ}{L^3}\begin{bmatrix}12 & 6L & -12 & 6L\\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2\\ -12 & -6L & 12 & -6L\\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2\end{bmatrix}$$

⇒Véc tơ chuyển vị nút của kết cấu là: $\{Q\}=[Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad Q_5 \quad Q_6]^T$

⇒Gọi R_1 & R_5 thứ tự là phản lực gối tựa tại nút 1 & nút 3. Véc tơ lực nút của kết cấu là: $\{F\}=[R_1 \quad 0 \quad -P \quad 0 \quad R_5 \quad 0]^T$

⇒Hệ phương trình của cả kết cấu:

$$\begin{bmatrix}K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16}\\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26}\\ & & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36}\\ & & & K_{44} & K_{45} & K_{46}\\ & & & & K_{55} & K_{56}\\ Sym & & & & & K_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}Q_1\\Q_2\\Q_3\\Q_4\\Q_5\\Q_6\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}R_1\\0\\-P\\0\\R_5\\0\end{Bmatrix}$$

⇒Hệ phương trình PTHH sau khi đã tính đến điều kiện biên $Q_1=Q_5=0$.

$$\frac{EJ}{L^3}\begin{bmatrix}K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{26}\\ & K_{33} & K_{34} & K_{36}\\ & & K_{44} & K_{46}\\ Sym & & & K_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}Q_2\\Q_3\\Q_4\\Q_6\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\-P\\0\\0\end{Bmatrix}$$

Bảng ghép nối các phần tử

Phần tử	Chỉ số chuyển vị nút địa phương			
	1	2	3	4
	Chỉ số chuyển vị nút tổng thể			
(1)	1	2	3	4
(2)	3	4	5	6

$$\Rightarrow \begin{array}{llll} K_{22}=k_{22}^1; & K_{23}=k_{23}^1; & K_{24}=k_{24}^1; & K_{26}=0; \\ & K_{33}=k_{33}^1+k_{11}^2; & K_{34}=k_{34}^1+k_{12}^2; & K_{36}=k_{14}^2; \\ & & K_{44}=k_{44}^1+k_{22}^2; & K_{46}=k_{24}^2; \\ & & & K_{66}=k_{44}^2; \end{array}$$

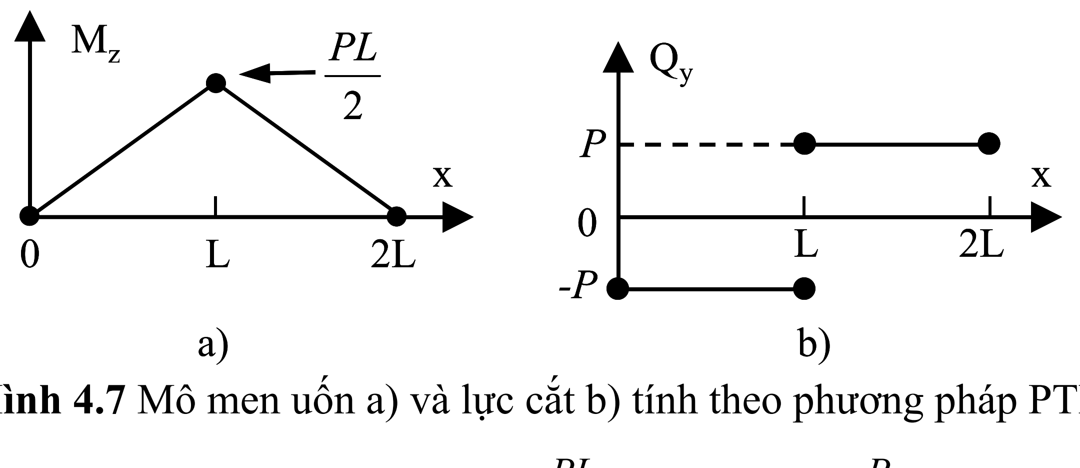
$$\Rightarrow \frac{EJ}{L^3}\begin{bmatrix} 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ & 24 & 0 & 6L \\ & & 8L^2 & 2L^2 \\ Sym & & & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Chú ý do kết cấu có tính đối xứng nên Q_2=-Q_6. Giải ra ta có:

$$Q_1=0 \quad ; \quad Q_2=-\frac{PL^2}{4EJ} \quad ; \quad Q_3=-\frac{PL^3}{6EJ} \quad ; \quad Q_4=0 \quad ; \quad Q_5=0 \quad ; \quad Q_6=\frac{PL^2}{4EJ}$$

$\Rightarrow$ Để tính phản lực gối tựa (R_1=R_5), ta dùng phương trình thứ nhất của hệ [K]{Q}={F}:

$$R_1=\sum_{i=1}^{6}K_{1i}Q_i = K_{12}Q_2+K_{13}Q_3+K_{16}Q_6=k_{12}^1Q_2+k_{13}^1Q_3+0.Q_6=\frac{P}{2}$$

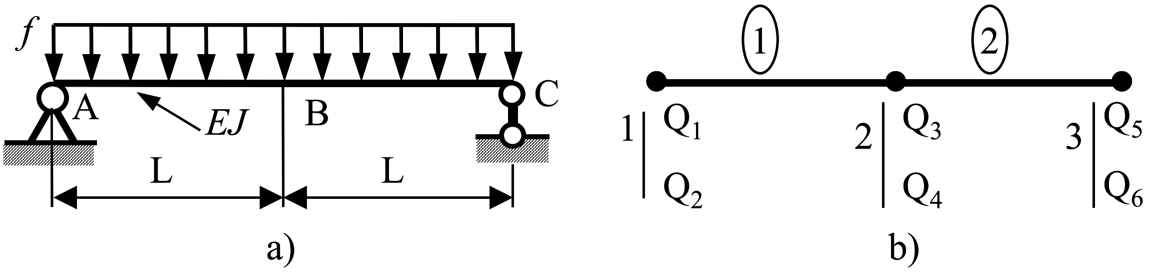


Hình 4.7 Mô men uốn a) và lực cắt b) tính theo phương pháp PTHH

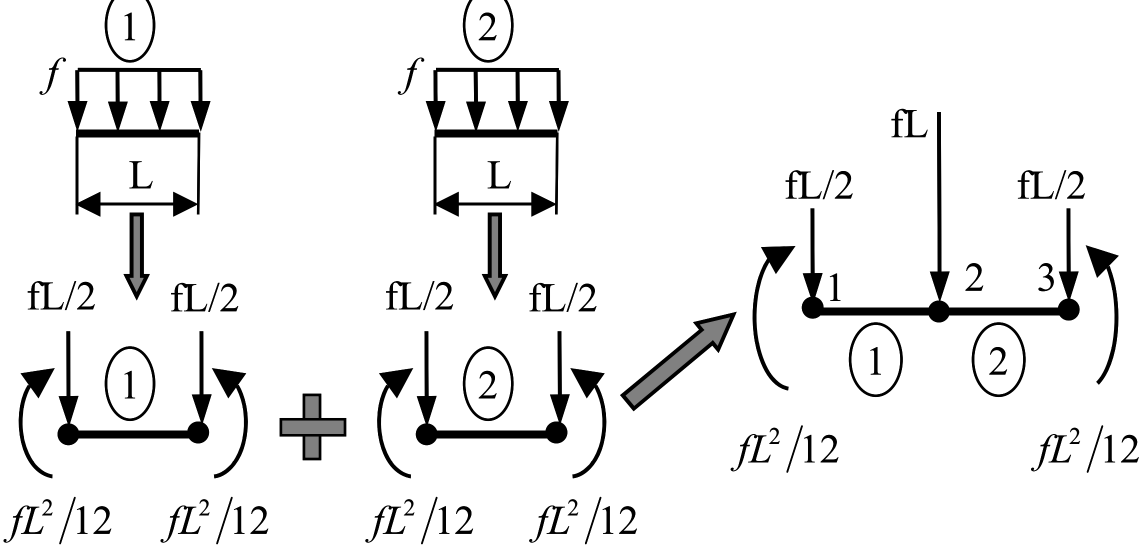
$\Rightarrow$ Nội lực trong phần tử 1: $M_z=\frac{PL}{4}(\xi+1);\quad Q_y=-\frac{P}{2};$

$\Rightarrow$ Nội lực trong phần tử 2: $M_z=\frac{PL}{4}(1-\xi);\quad Q_y=\frac{P}{2};$

4.5.2 Ví dụ 2



Hình 4.8 Dầm chịu lực phân bố: a) Kết cấu thực & b) mô hình PTHH



Hình 4.9 Quy đổi lực nút do lực phân bố gây ra trên toàn kết cấu

Cho dầm có kết cấu & chịu lực như hình 4.8. Tính độ võng tại giữa dầm và góc xoay của mặt cắt ngang tại vị trí gối tựa.

<u>Lời giải</u>: Chia dầm thành 2 phần tử như hình 4.8. Bài toán này chỉ khác ví dụ 4.1 về điều kiện đặt lực. Ta tính véc tơ lực nút của cả hệ, các phần khác hoàn toàn giống ví dụ 4.1.

$\Rightarrow$ Véc tơ lực nút của phần tử 1 & 2 do lực phân bố gây ra là:

$$\left\{f^{*1}\right\} = \left\{f^{*2}\right\} = \left[-\frac{fL}{2} \quad -\frac{fL^2}{12} \quad -\frac{fL}{2} \quad \frac{fL^2}{12}\right]^T$$

$\Rightarrow$ Gọi R_1 & R_5 thứ tự là phản lực gối tựa tại nút 1 & nút 3.

$\Rightarrow$ Véc tơ lực nút của phần tử 1 là:

$$\left\{f^1\right\} = \left[R_1 - \frac{fL}{2} \quad -\frac{fL^2}{12} \quad -\frac{fL}{2} \quad \frac{fL^2}{12}\right]^T$$

$\Rightarrow$ Véc tơ lực nút của phần tử 2 là:

$$\left\{f^2\right\} = \left[-\frac{fL}{2} \quad -\frac{fL^2}{12} \quad R_5 - \frac{fL}{2} \quad \frac{fL^2}{12}\right]^T$$

$\Rightarrow$ Véc tơ lực nút {F} của kết cấu được tính dựa vào bảng ghép nối các phần tử:

$$F_1 = f_1^1 = R_1 - \frac{fL}{2}; \quad F_2 = f_2^1 = -\frac{fL^2}{12}; \qquad F_3 = f_3^1 + f_1^2 = -fL;$$

$$F_4 = f_4^1 + f_2^2 = 0; \qquad F_5 = f_3^2 = R_5 - \frac{fL}{2}; \quad F_6 = f_4^2 = \frac{fL^2}{12};$$

Bảng ghép nối các phần tử

Phần tử	Chỉ số chuyển vị nút địa phương			
	1	2	3	4
	Chỉ số chuyển vị nút tổng thể			
(1)	1	2	3	4
(2)	3	4	5	6

$\Rightarrow$ Véc tơ lực nút của kết cấu là:

$$\{F\} = \begin{bmatrix} R_1 - \frac{fL}{2} & -\frac{fL^2}{12} & -fL & 0 & R_5 - \frac{fL}{2} & \frac{fL^2}{12} \end{bmatrix}^T$$

$\Rightarrow$ Hệ phương trình của cả kết cấu:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ & & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ & & & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ & & & & K_{55} & K_{56} \\ Sym & & & & & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 - fL/2 \\ -fL^2/12 \\ -fL \\ 0 \\ R_5 - fL/2 \\ fL^2/12 \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Hệ phương trình PTHH sau khi đã tính đến điều kiện biên $Q_1 = Q_5 = 0$.

$$\frac{EJ}{L^3} \begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{26} \\ & K_{33} & K_{34} & K_{36} \\ & & K_{44} & K_{46} \\ Sym & & & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_6 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{EJ}{L^3} \begin{bmatrix} 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ & 24 & 0 & 6L \\ & & 8L^2 & 2L^2 \\ Sym & & & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -fL^2/12 \\ -fL \\ 0 \\ fL^2/12 \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Chú ý do kết cấu có tính đối xứng nên Q_2=-Q_6. Giải ra ta có:

$$Q_1 = 0 \;\; ; \;\; Q_2 = -\frac{fL^3}{3EJ} \;\; ; \;\; Q_3 = -\frac{5fL^4}{24EJ} \;\; ; \;\; Q_4 = 0 \;\; ; \;\; Q_5 = 0 \;\; ; \;\; Q_6 = \frac{fL^3}{3EJ}$$

$\Rightarrow$ Để tính phản lực gối tựa (R_1=R_5), ta dùng phương trình thứ nhất của hệ [K]{Q}={F}:

$$R_1 - \frac{fL}{2} = \sum_{i=1}^{6} K_{1i}Q_i = K_{12}Q_2 + K_{13}Q_3 + K_{16}Q_6 = k_{12}^1 Q_2 + k_{13}^1 Q_3 \quad \Rightarrow \quad R_1 = fL$$

$\Rightarrow$ Phần tử 1:

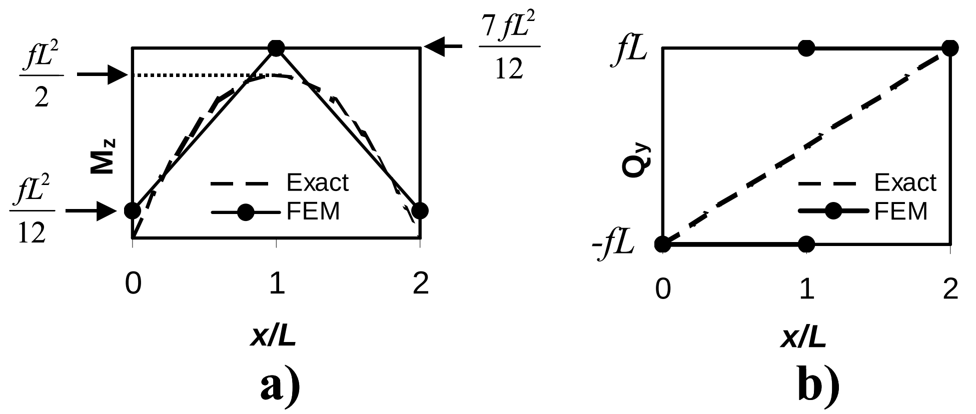
$$v = -\frac{fL^4}{24EJ}\left(-\frac{\xi^3}{4} - \xi^2 + \frac{11}{4}\xi + \frac{7}{2}\right); \qquad M_z = \frac{fL^2}{12}(4+3\xi); \qquad Q_y = -fL;$$

$\Rightarrow$ Phần tử 2:

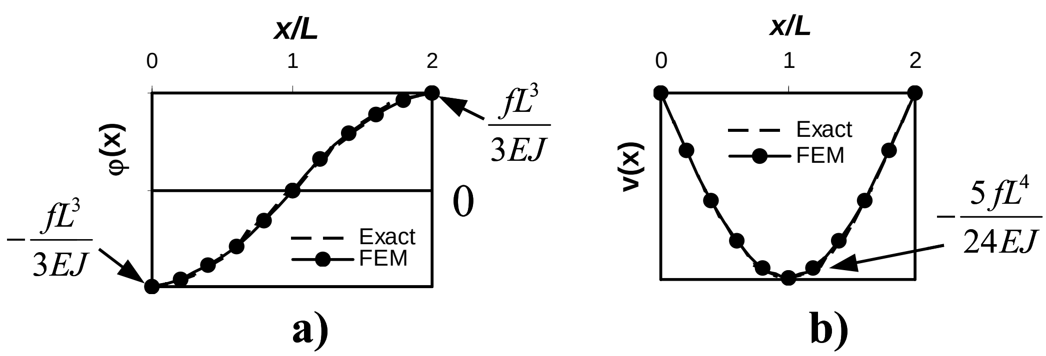
$$v = -\frac{fL^4}{24EJ}\left(\frac{\xi^3}{4} - \xi^2 - \frac{11}{4}\xi + \frac{7}{2}\right); \qquad M_z = \frac{fL^2}{12}(4-3\xi) \qquad Q_y = fL$$

$\Rightarrow$ Kết quả chính xác:

$$v = \frac{f}{3EJ}\left(-\frac{1}{8}x^4 + \frac{L}{2}x^3 - Lx\right); \qquad M_z = fx(L - x/2); \qquad Q_y = f(x-L);$$

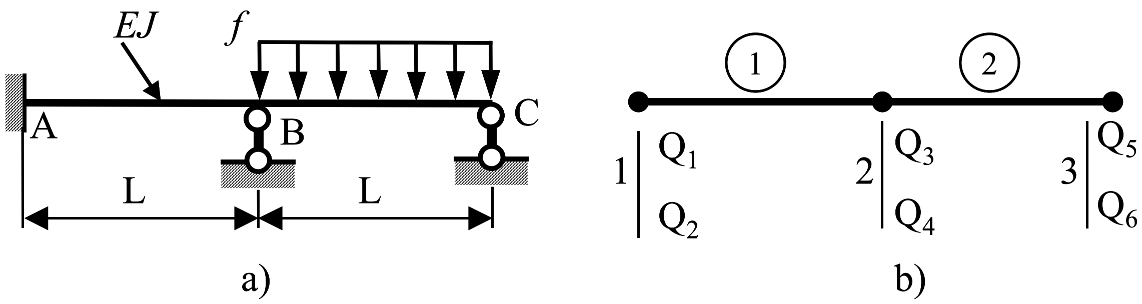


Hình 4.10 Mô men uốn a) và lực cắt b) tính theo phương pháp PTHH và Sức bền Vật Liệu



Hình 4.11 Góc xoay a) và chuyển vị b) tính theo phương pháp PTHH và Sức bền Vật Liệu

4.5.3 Ví dụ 4.3



Hình 4.12 Dầm chịu lực phân bố: a) Kết cấu thực & b) mô hình PTHH

Cho dầm có kết cấu chịu lực như hình 4.12. Tính độ võng tại giữa đoạn BC và góc xoay của mặt cắt ngang tại vị trí gối tựa.

Lời giải: Chia dầm thành 2 phần tử như hình 4.12.

$\Rightarrow$ Ma trận độ cứng của phần tử 1 & 2 là:

$$\left[k^1\right]=\left[k^2\right]=\frac{EJ}{L^3}\begin{bmatrix}12 & 6L & -12 & 6L\\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2\\ -12 & -6L & 12 & -6L\\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Gọi R_1 & R_2 thứ tự là phản lực & mô men liên kết tại ngàm (nút 1). R_3 & R_5 thứ tự là phản lực liên kết tại nút 2 & 3. Véc tơ lực nút do các phản lực liên kết tác dụng lên kết cấu là:

$$\{P\}=\left[R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad 0 \quad R_5 \quad 0\right]^T$$

$\Rightarrow$ Véc tơ lực nút của phần tử 2 do lực phân bố gây ra là:

$$\left\{f^2\right\}=\left[-\frac{fL}{2} \quad -\frac{fL^2}{12} \quad -\frac{fL}{2} \quad \frac{fL^2}{12}\right]^T$$

$\Rightarrow$ Véc tơ lực nút do lực phân bố gây ra trên toàn kết cấu là:

$$\{F^*\}=\left[0 \quad 0 \quad -\frac{fL}{2} \quad -\frac{fL^2}{12} \quad -\frac{fL}{2} \quad \frac{fL^2}{12}\right]^T$$

$\Rightarrow$ Véc tơ lực nút của kết cấu là:

$$\{F\}=\{P\}+\{F^*\}=\left[R_1 \quad R_2 \quad R_3-\frac{fL}{2} \quad -\frac{fL^2}{12} \quad R_5-\frac{fL}{2} \quad \frac{fL^2}{12}\right]^T$$

$\Rightarrow$ Véc tơ chuyển vị nút của kết cấu là:

$$\{Q\}=\left[Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad Q_5 \quad Q_6\right]^T$$

$\Rightarrow$ Hệ phương trình của cả kết cấu:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ & & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ & & & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ & & & & K_{55} & K_{56} \\ Sym & & & & & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - fL/2 \\ -fL^2/12 \\ R_5 - fL/2 \\ fL^2/12 \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Viết hệ phương trình PTHH sau khi đã tính đến điều kiện biên $Q_1=Q_2=Q_3=Q_5=0$.

$$\frac{EJ}{L^3}\begin{bmatrix} K_{44} & K_{46} \\ K_{46} & K_{66} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Q_4 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_4 \\ F_6 \end{Bmatrix}$$

Bảng ghép nối các phần tử

Phần tử	Chỉ số chuyển vị nút địa phương			
	1	2	3	4
	Chỉ số chuyển vị nút tổng thể			
(1)	1	2	3	4
(2)	3	4	5	6

$$\Rightarrow K_{44} = k_{44}^1 + k_{22}^2 \quad ; \quad K_{46} = k_{24}^2 \quad ; \quad K_{66} = k_{44}^2$$

$$\Rightarrow \frac{EJ}{L^3}\begin{bmatrix} 8L^2 & 2L^2 \\ 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Q_4 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -fL^2/12 \\ fL^2/12 \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Giải ra ta có: $Q_4 = -\frac{fL^3}{56EJ}; \quad Q_6 = \frac{5fL^3}{168EJ}$

$\Rightarrow$ Để tính chuyển vị tại điểm giữa đoạn BC, ta quay về phần tử 2:

$$q_1^2 = 0; \quad q_2^2 = Q_4; \quad q_3^2 = 0; \quad q_4^2 = Q_6;$$

$$v(\xi) = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi) q_i^2 = N_2(\xi) Q_4 + N_4(\xi) Q_6$$

Điểm giữa đoạn BC tương ứng với ξ=0, do đó:

$$v(0) = N_2(0) Q_4 + N_4(0) Q_6 = -\frac{L}{8}\frac{fL^3}{56EJ} - \frac{L}{8}\frac{5fL^3}{168EJ} = -\frac{fL^4}{168EJ}$$

$\Rightarrow$ Áp dụng số:

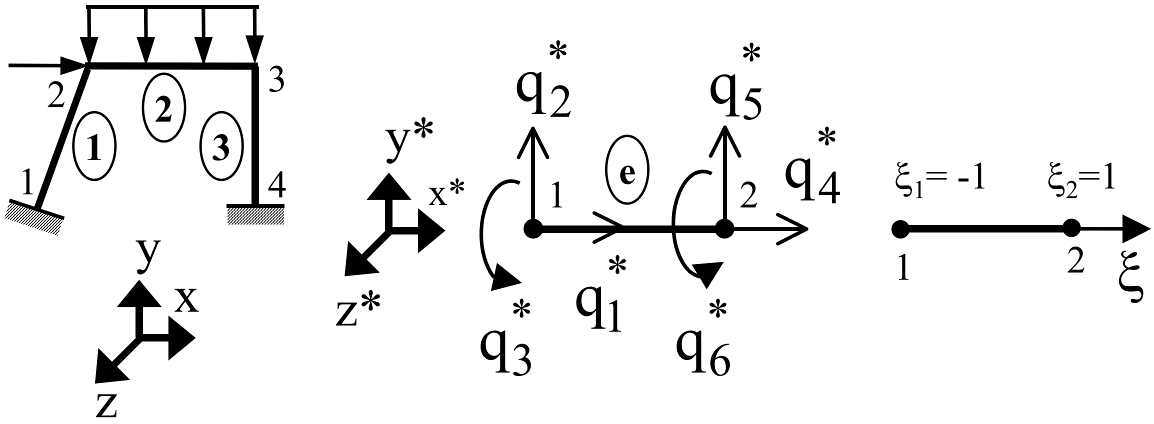
E=200GPa=2.10^5 N/mm^2; J=4.10^6 mm^4;
L=1000 mm f=12 N/mm;

Q_4=-2,679.10^{-4} rad; Q_6=4,464.10^{-4} rad; $v(0)$=-0.0893 mm

Chương 5 PTHH Trong Kết Cấu Khung Phẳng

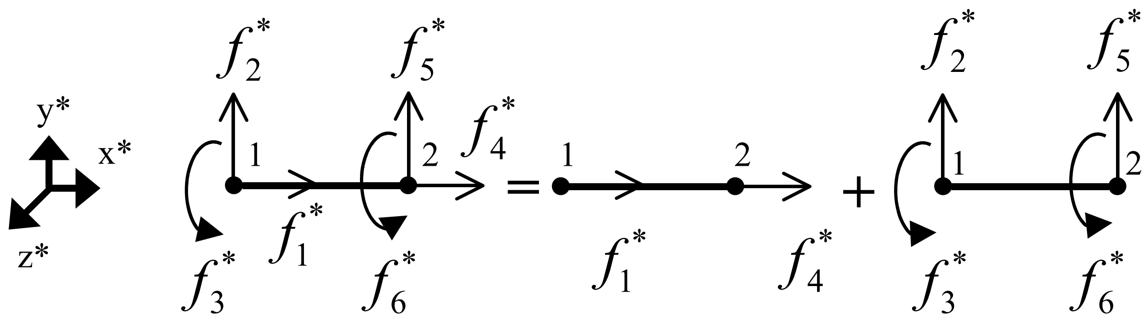
⇒Kết cấu khung phẳng:

- Gồm các thanh liên kết cứng với nhau trong một mặt phẳng;
- Các thanh có thể có phương khác nhau;
- Mỗi một thanh có thể chịu kéo (hoặc nén) và uốn đồng thời.



Hình 5.1 Kết cấu khung phẳng a), b) phần tử thực trong hệ $O^*x^*y^*z^*$ và c) phần tử quy chiếu.

5.1 Ma trận độ cứng của phần tử thanh chịu kéo nén và uốn



Hình 5.2 Thanh chịu kéo (hoặc nén) và uốn đồng thời

⇒Dùng phần tử thực và phần tử quy chiếu 1 chiều 2 nút.

⇒Xét kết cấu gồm 1 phần tử thanh chịu kéo nén và uốn đồng thời. Vì kết cấu làm việc trong miền đàn hồi và biến dạng bé, nên áp dụng nguyên lý độc lập tác dụng của lực, lời giải bài toán sẽ là tổ hợp của lời giải bài toán thanh chịu kéo nén & thanh chịu uốn.

⇒Véc tơ chuyển vị nút của phần tử là:

$$\{q^*\} = [q_1^* \quad q_2^* \quad q_3^* \quad q_4^* \quad q_5^* \quad q_6^*]^T$$

⇒Véc tơ lực nút của phần tử là:

$$\{f^*\} = [f_1^* \quad f_2^* \quad f_3^* \quad f_4^* \quad f_5^* \quad f_6^*]^T$$

⇒Quan hệ giữa chuyển vị nút và lực nút trong **bài toán kéo nén**:

$$\begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1^* \\ q_4^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^* \\ f_4^* \end{Bmatrix}$$

- f_1^* & f_4^* thứ tự là lực nút theo phương O*x* của nút 1 & nút 2.
- q_1^* & q_4^* thứ tự là chuyển vị theo phương O*x* của nút 1 & nút 2.

⇒ Viết lại hệ phương trình của **bài toán kéo nén** dưới dạng sau:

$$\begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1^* \\ 0 \\ 0 \\ q_4^* \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^* \\ 0 \\ 0 \\ f_4^* \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

⇒Quan hệ giữa chuyển vị nút và lực nút trong **bài toán uốn**:

$$\begin{bmatrix} \frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} & -\frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} \\ \frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} \\ -\frac{12EJ}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{12EJ}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} \\ \frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2^* \\ q_3^* \\ q_5^* \\ q_6^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2^* \\ f_3^* \\ f_5^* \\ f_6^* \end{Bmatrix}$$

- f_2^* & f_5^* thứ tự là lực theo phương O*y* của nút 1 & nút 2.
- q_2^* & q_5^* thứ tự là chuyển vị theo phương O*y* của nút 1 & nút 2.
- f_3^* & f_6^* thứ tự là mô men đối với trục O*z* của nút 1 & nút 2.
- q_3^* & q_6^* thứ tự là góc xoay của mặt cắt ngang của thanh của tại nút 1 & nút 2 xung quanh trục O*z*.

⇒Viết lại hệ phương trình của **<u>bài toán uốn</u>** dưới dạng sau:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} & 0 & -\frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} & 0 & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} & 0 & \frac{12EJ}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} & 0 & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ q_2^* \\ q_3^* \\ 0 \\ q_5^* \\ q_6^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_2^* \\ f_3^* \\ 0 \\ f_5^* \\ f_6^* \end{Bmatrix}$$

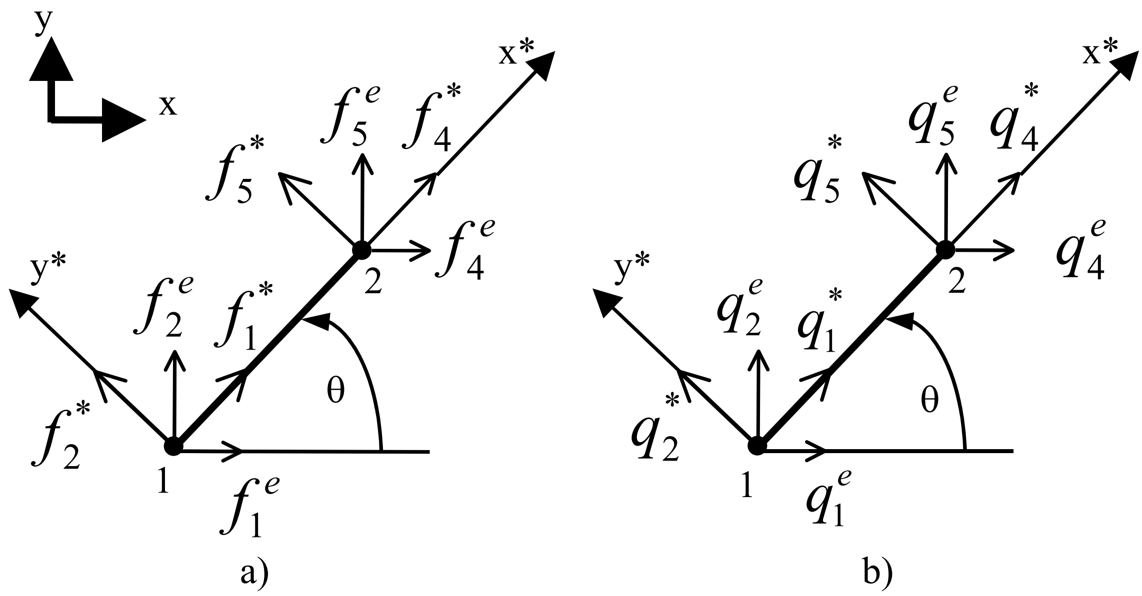
⇒Tổ hợp các hệ phương trình của **<u>bài toán kéo nén</u>** và **<u>bài toán uốn</u>**, và viết lại quan hệ giữa lực nút và chuyển vị nút dưới dạng ma trận ta có:

$$\left[k^*\right]\left\{q^*\right\} = \left\{f^*\right\}$$

⇒ [k*] là ma trận độ cứng của phần tử khung trong hệ O*x*y*z*:

$$\left[k^*\right] = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} & 0 & -\frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} & 0 & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} & 0 & \frac{12EJ}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} & 0 & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} \end{bmatrix}$$

5.2 Ma trận độ cứng trong hệ *Oxy*



Hình 5.3. Lực nút a) và chuyển vị nút b) được biểu diễn trong các hệ toạ độ

⇒ Gọi θ là góc lệch của thanh (phương O^*x^*) so với trục Ox.

⇒ Đặt $c = \cos\theta$ & $s = \sin\theta$.

⇒Áp dụng phép quay hệ trục toạ độ ta có quan hệ chuyển vị nút trong hệ Oxy & O*x*y* là:

$$\begin{Bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \\ q_3^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1^e \\ q_2^e \\ q_3^e \end{Bmatrix} \quad \text{và} \quad \begin{Bmatrix} q_4^* \\ q_5^* \\ q_6^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_4^e \\ q_5^e \\ q_6^e \end{Bmatrix}$$

⇒ Tổ hợp 2 hệ trên ta có:

$$\begin{Bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \\ q_3^* \\ q_4^* \\ q_5^* \\ q_6^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1^e \\ q_2^e \\ q_3^e \\ q_4^e \\ q_5^e \\ q_6^e \end{Bmatrix} \quad \text{Đặt} \quad [T] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

⇒$\{q^*\} = [T]\{q^e\}$

⇒Tương tự ta có: $\{f^*\} = [T]\{f^e\}$

$\Rightarrow$Thay các biểu thức của $\{q^*\}$ & $\{f^*\}$ vào hệ phương trình: $[k^*]\{q^*\} = \{f^*\}$

$\Rightarrow$Ta có: $[k^*][T]\{q^e\} = [T]\{f^e\}$

$\Rightarrow$ $[T]^{-1}[k^*][T]\{q^e\} = \{f^e\}$ Vì $[T]^{-1} = [T]^T$ nên:

$$[T]^T[k^*][T]\{q^e\} = \{f^e\}$$

$\Rightarrow$ Quan hệ giữa lực nút và chuyển vị nút trong hệ Oxy là:

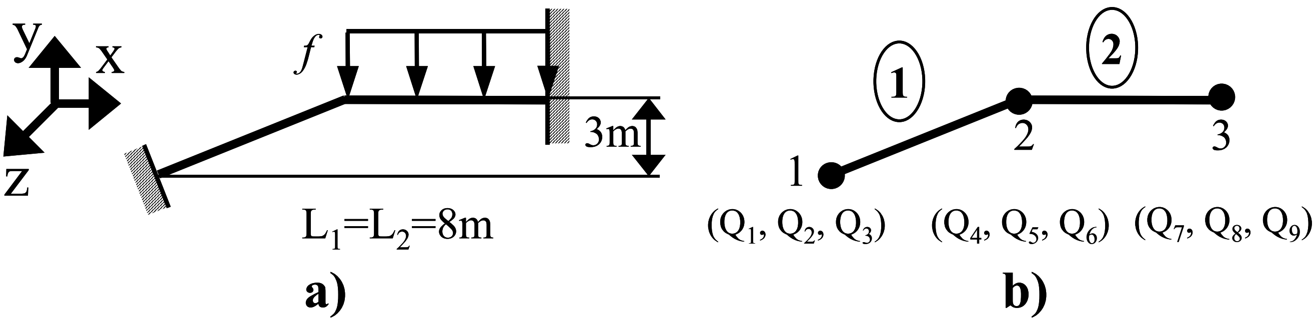
$$[k^e]\{q^e\} = \{f^e\}$$

$\Rightarrow$ Ma trận độ cứng của phần tử trong hệ *Oxy* là:

$$[k^e] = [T]^T[k^*][T]$$

$$[k^e] = \begin{bmatrix}
\frac{AE}{L}c^2 + \frac{12EJ}{L^3}s^2 & \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EJ}{L^3}\right)cs & -\frac{6EJ}{L^2}s & -\left(\frac{AE}{L}c^2 + \frac{12EJ}{L^3}s^2\right) & \left(-\frac{AE}{L} + \frac{12EJ}{L^3}\right)cs & -\frac{6EJ}{L^2}s \\
 & \frac{AE}{L}s^2 + \frac{12EJ}{L^3}c^2 & \frac{6EJ}{L^3}c & \left(-\frac{AE}{L} + \frac{12EJ}{L^3}\right)cs & -\left(\frac{AE}{L}s^2 + \frac{12EJ}{L^3}c^2\right) & \frac{6EJ}{L^2}c \\
 & & \frac{4EJ}{L} & \frac{6EJ}{L^2}s & -\frac{6EJ}{L^2}c & \frac{2EJ}{L} \\
 & & & \frac{AE}{L}c^2 + \frac{12EJ}{L^3}s^2 & \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EJ}{L^3}\right)cs & \frac{6EJ}{L^2}s \\
 & & & & \frac{AE}{L}s^2 + \frac{12EJ}{L^3}c^2 & -\frac{6EJ}{L^2}c \\
 & Sym & & & & \frac{4EJ}{L}
\end{bmatrix}$$

<u>Ví dụ 5.1</u>



Hình 5.4 Khung chịu lực phân bố: a) Kết cấu thực & b) mô hình PTHH

Cho hệ khung phẳng gồm hai thanh có kết cấu & chịu lực như hình 5.4. Cho: A=0,006 m^2; J=0,0002 m^4; E=200 GPa; f= 4 kN/m. Tính chuyển vị tại chỗ gấp khúc.

<u>Bước 1</u>: *Rời rạc hoá kết cấu*

$\Rightarrow$ Chia kết cấu thành 2 phần tử (mỗi thanh là một phần tử) được đánh số nút và số phần tử như hình 5.4.

$\Rightarrow$ Mỗi phần tử có 6 bậc tự do trong hệ toạ độ *Oxy*, véc tơ chuyển vị nút của phần tử là

$$\{q^e\} = \begin{bmatrix} q_1^e & q_2^e & q_3^e & q_4^e & q_5^e & q_6^e \end{bmatrix}^T$$

$\Rightarrow$ Số bậc tự do của cả hệ là 9, véc tơ chuyển vị nút của cả hệ là:

$$\{Q\} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 & Q_5 & Q_6 & Q_7 & Q_8 & Q_9 \end{bmatrix}^T$$

$\Rightarrow$ Đã biết $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_7 = Q_8 = Q_9 = 0$, tìm Q_4, Q_5 & Q_6.

<u>Bước 2</u>: *Tính ma trận độ cứng của phần tử*

$\Rightarrow$ Phần tử 1: $c = \cos\theta = 0,927 \quad ; \quad s = \sin\theta = 0,375$

$$[k^1] = 10^6 \times \begin{bmatrix} 129,066 & 51,790 & -1,405 & -129,066 & -51,790 & -1,405 \\ & 21,871 & 3,477 & -51,790 & -21,871 & 3,477 \\ & & 20 & 1,405 & -3,477 & 10 \\ & & & 129,066 & 51,790 & 1,405 \\ & & & & 21,871 & -3,477 \\ Sym & & & & & 20 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Phần tử 2: $\theta = 0^0 \quad \Rightarrow \quad c = \cos\theta = 1 \quad ; \quad s = \sin\theta = 0$

$$[k^2] = 10^6 \times \begin{bmatrix} 150 & 0 & 0 & -150 & 0 & 0 \\ & 0.9375 & 3,75 & 0 & -0.9375 & 3,75 \\ & & 20 & 0 & -3,75 & 10 \\ & & & 150 & 0 & 0 \\ & & & & 0.9375 & -3,75 \\ Sym & & & & & 20 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ **<u>Bước 3</u>**: *Hệ phương trình PTHH sau khi loại bỏ điều kiện biên*

$$\begin{bmatrix} K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ & K_{55} & K_{56} \\ Sym & & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix}$$

Bảng ghép nối phần tử

Phần tử	Chỉ số chuyển vị nút địa phương					
	1	2	3	4	5	6
	Chỉ số chuyển vị nút tổng thể					
(1)	1	2	3	4	5	6
(2)	4	5	6	7	8	9

$K_{44} = k^1_{44} + k^2_{11};\qquad K_{45} = k^1_{45} + k^2_{12};\qquad K_{46} = k^1_{46} + k^2_{13};$

$K_{55} = k^1_{55} + k^2_{22};\qquad K_{56} = k^1_{56} + k^2_{23};$

$K_{66} = k^1_{66} + k^2_{33};$

$\Rightarrow$ R_1, R_2, R_3 là phản lực tại ngàm ở nút 1, véc tơ lực nút của phần tử 1 là:

$$\{f^1\} = [R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

$\Rightarrow$ R_7, R_8, R_9 là phản lực tại ngàm ở nút 2, véc tơ lực nút của phần tử 2 là:

$$\Rightarrow \{f^2\} = \left[0 \quad -fL/2 \quad -fL^2/12 \quad R_7 \quad R_8 - fL/2 \quad R_9 + fL^2/12\right]^T$$

$$\Rightarrow F_4 = 0 \;;\; F_5 = -fL/2 \;;\; F_6 = -fL^2/12;$$

$\Rightarrow$ Áp dụng số ta có:
$$10^6 \times \begin{bmatrix} 279 & 51,8 & 1,4 \\ 51,8 & 22,8 & 0,27 \\ 1,4 & 0,27 & 40 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -16 \\ -21,33 \end{Bmatrix} \times 10^3$$

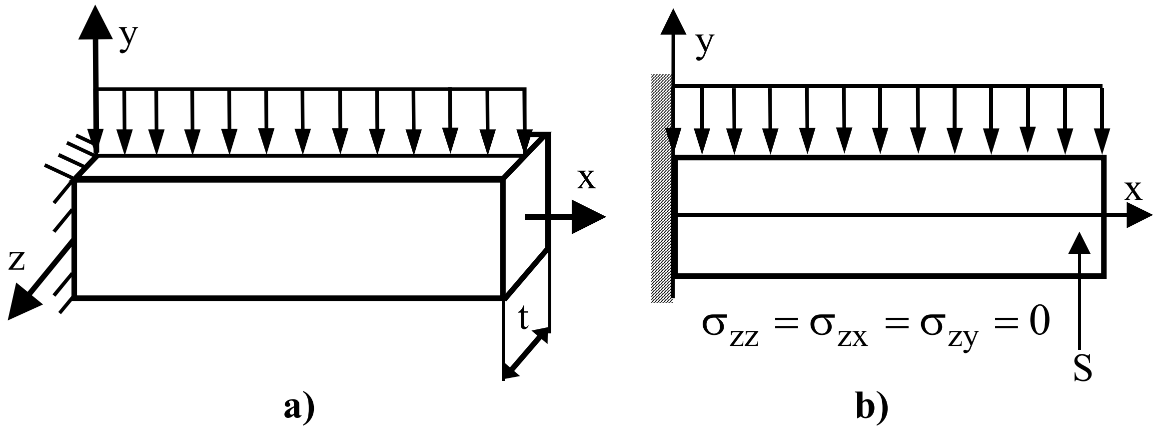
$\Rightarrow$ Sinh viên tự tính kết quả.

Q_4= $\quad .10^{-3}$ m; Q_5= $\quad .10^{-3}$ m; Q_6= $\quad .10^{-3}$ rad;

Chương 6 PTHH Trong Bài Toán Phẳng

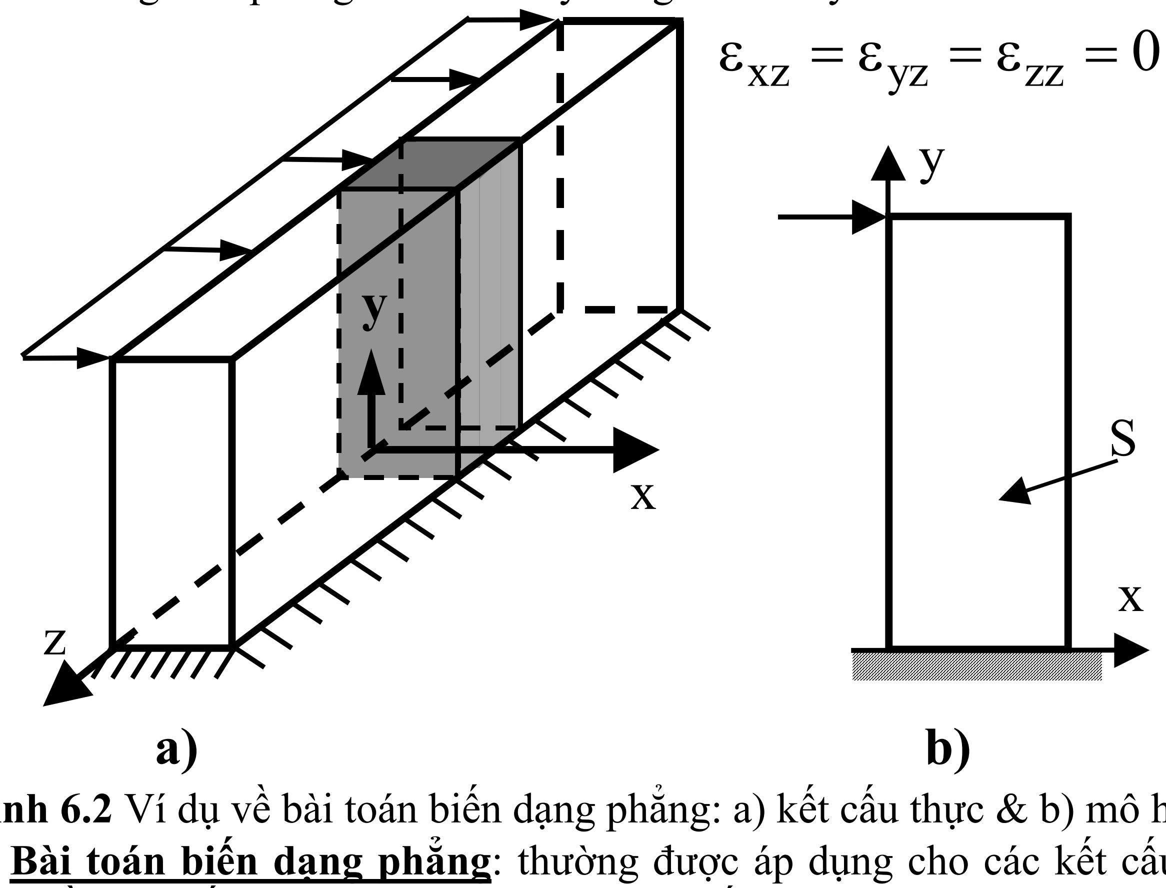
6.1 Quan hệ ứng suất biến dạng

⇒ Kết cấu phẳng, hay còn gọi là kết cấu 2 chiều (kết cấu 2D) được đặc trưng bởi chiều dày *t* và tiết diện *S* của mặt phẳng trung bình (mặt phẳng chia kết cấu làm 2 phần có chiều dày bằng nhau là t/2).



Hình 6.1 Ví dụ về bài toán ứng suất phẳng: a) kết cấu thực & b) mô hình

⇒ **<u>Bài toán ứng suất phẳng</u>** : thường được áp dụng cho các kết cấu có chiều dày nhỏ so với kích thước của tiết diện *S*. PTHH dùng cho bài toán ứng suất phẳng có chiều dày bằng chiều dày *t* của kết cấu.



Hình 6.2 Ví dụ về bài toán biến dạng phẳng: a) kết cấu thực & b) mô hình

⇒ **<u>Bài toán biến dạng phẳng</u>**: thường được áp dụng cho các kết cấu có chiều dày rất lớn so với kích thước của tiết diện *S*. PTHH dùng cho bài toán biến dạng phẳng có chiều dày bằng đơn vị.

$\Rightarrow$ Quan hệ ứng suất và biến dạng trong trường hợp tổng quát:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu+\lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu+\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow$ μ & λ là các hằng số Lamé: $\mu = G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$; $\lambda = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$;

6.1.1 Bài toán ứng suất phẳng

$\Rightarrow$ Trong bài toán ứng suất phẳng ta có : $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ 0 \\ \sigma_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu+\lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu+\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$; $\lambda\varepsilon_{xx} + \lambda\varepsilon_{yy} + (2\mu+\lambda)\varepsilon_{zz} = 0$;

$$\Rightarrow \varepsilon_{zz} = -\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\left(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}\right) = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ 0 \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu+\lambda & \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 2\mu+\lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ -\dfrac{\lambda}{2\mu+\lambda}\left(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}\right) \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Quan hệ ứng suất biến dạng trong bài toán ứng suất phẳng:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{2\mu}{2\mu+\lambda} \begin{bmatrix} 2(\mu+\lambda) & \lambda & 0 \\ \lambda & 2(\mu+\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{2\mu+\lambda}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

hoặc: $$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5-0,5\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

6.1.2 Bài toán biến dạng phẳng

$\Rightarrow$ Trong bài toán biến dạng phẳng ta có: $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zz} = 0$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu+\lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu+\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 0 \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0; \qquad \sigma_{zz} = \lambda\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}\right) = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right)$$

hoặc: $\sigma_{zz} = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}\right) = \nu\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right)$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu+\lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 2\mu+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0,5-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

6.1.3 Quan hệ ứng suất biến dạng trong bài toán phẳng

$\Rightarrow$ Tổ hợp 2 trường hợp ứng suất phẳng & biến dạng phẳng ta có quan hệ ứng suất biến dạng trong bài toán phẳng:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & 0 \\ C_2 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$C_1 = \frac{2G(1-a\nu)}{(1-\nu-a\nu)}; \qquad C_2 = \frac{C_1\nu}{(1-a\nu)}; \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)};$$

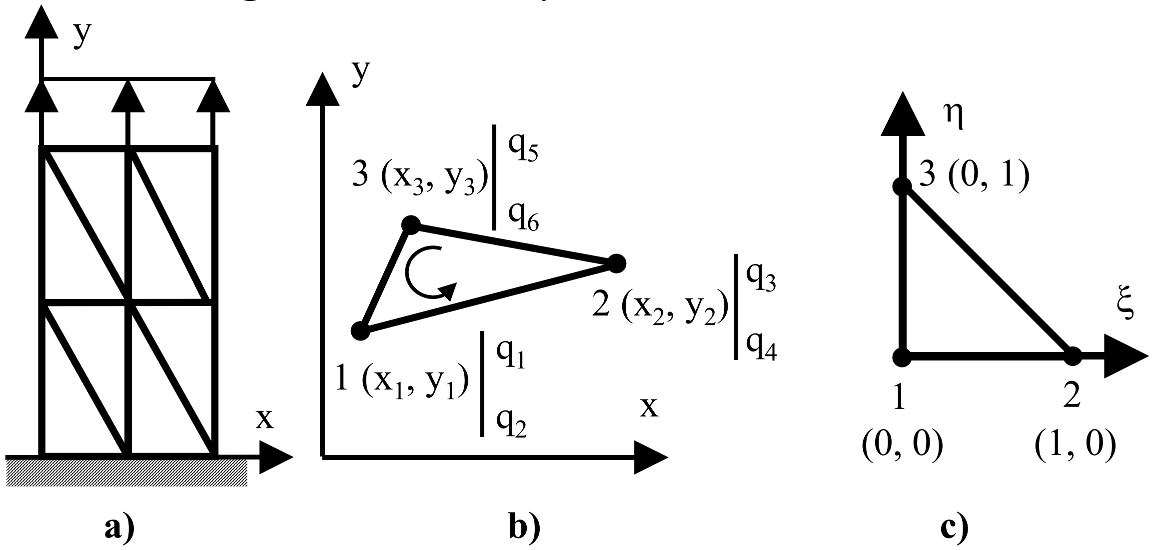
Trong đó : *a*=0 với bài toán ứng suất phẳng & *a*=1 với bài toán biến dạng phẳng.

Đặt: $\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}; \qquad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}; \quad \& \quad [C] = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & 0 \\ C_2 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix};$

$\Rightarrow \{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}$

6.2 Phần tử tam giác ba nút

6.2.1 Hàm dạng và hàm nội suy



Hình 6.3 a) Ví dụ về rời rạc hoá kết cấu bằng phần tử tam giác 3 nút; b) Phần tử thực; c) Phần tử quy chiếu.

⇒ Toạ độ (x,y) của một điểm thuộc phần tử được xác định bởi các **toạ độ nút** (x_i, y_i) & các **hàm dạng** $\overline{N}_i(\xi,\eta)$:

$$x = \overline{N}_1(\xi,\eta)x_1 + \overline{N}_2(\xi,\eta)x_2 + \overline{N}_3(\xi,\eta)x_3$$
$$y = \overline{N}_1(\xi,\eta)y_1 + \overline{N}_2(\xi,\eta)y_2 + \overline{N}_3(\xi,\eta)y_3$$

⇒ Tại nút 1 (ξ_1=η_1=0) ta có:

$$x_1 = \overline{N}_1(0,0)x_1 + \overline{N}_2(0,0)x_2 + \overline{N}_3(0,0)x_3$$

Suy ra: $\overline{N}_1(0,0)=1;$ $\quad \overline{N}_2(0,0)=0;$ $\quad \overline{N}_3(0,0)=0;$

⇒ Kết hợp với các điều kiện tại nút 2 & 3 ta có các điều kiện sau để xác định hàm dạng:

Hàm / Nút	$\overline{N}_1$	$\overline{N}_2$	$\overline{N}_3$
Nút 1 (ξ_1=η_1=0)	1	0	0
Nút 2 (ξ_2=1; η_2=0)	0	1	0
Nút 3 (ξ_3=0; η_3=1)	0	0	1

⇒ Với mỗi hàm dạng $\overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{i}}(\xi)$ có 3 phương trình để xác định các hệ số của nó, do đó ta tìm $\overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{i}}(\xi)$ dưới dạng đa thức bậc nhất của ξ & η như sau:

$$\overline{N}_i = a_i + b_i\xi + c_i\eta$$

⇒ $\overline{N}_1(\xi,\eta)=1-\xi-\eta;$ $\quad \overline{N}_2(\xi,\eta)=\xi;$ $\quad \overline{N}_3(\xi,\eta)=\eta;$

⇒ Dùng phần tử đẳng thông số, hàm nội suy được chọn như hàm dạng: $N_i \equiv \overline{N}_i$.

⇒ *u* & *v* thứ tự là chuyển vị theo các phương Ox & Oy.

q^e_{2i-1} & q^e_{21} thứ tự là chuyển vị tại nút i theo phương Ox & Oy.

⇒Véc tơ **chuyển vị** $\{q\}=[u, v]^T$ tại một điểm của phần tử được xác định bởi các **chuyển vị nút** & các **hàm nội suy** N_i:

$$u = N_1(\xi,\eta)q_1^e + N_2(\xi,\eta)q_3^e + N_3(\xi,\eta)q_5^e = (1-\xi-\eta)q_1^e + \xi q_3^e + \eta q_5^e;$$

$$v = N_1(\xi,\eta)q_2^e + N_2(\xi,\eta)q_4^e + N_3(\xi,\eta)q_6^e = (1-\xi-\eta)q_2^e + \xi q_4^e + \eta q_6^e;$$

⇒Đặt $[N]=\begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$

⇒$\{q^e\}=\begin{bmatrix} q_1^e & q_2^e & q_3^e & q_4^e & q_5^e & q_6^e \end{bmatrix}^T$

⇒$\{q\}=[N]\{q^e\}$

6.2.2 Phép biến đổi Jacobi

⇒Xét đạo hàm của hàm hợp: $f = f(x,y) = f(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}; \qquad \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta};$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

⇒Ký hiệu: $x_{ij} = x_i - x_j$ & $y_{ij} = y_i - y_j$; Chú ý: $x_{ij} = -x_{ji}$ & $y_{ij} = -y_{ji}$

Đặt: $[J]=\begin{bmatrix} \partial x/\partial \xi & \partial y/\partial \xi \\ \partial x/\partial \eta & \partial y/\partial \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{21} & y_{21} \\ x_{31} & y_{31} \end{bmatrix}$

Ta có: $\det[J] = 2A = x_{21}y_{31} - x_{31}y_{21}$; *A*: là diện tích phần tử tam giác.

$$\Rightarrow [J]^{-1} = \frac{1}{\det[J]}\begin{bmatrix} y_{31} & -y_{21} \\ -x_{31} & x_{21} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det[J]}\begin{bmatrix} y_{31} & -y_{21} \\ -x_{31} & x_{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det[J]} \begin{Bmatrix} y_{31}\dfrac{\partial f}{\partial \xi} - y_{21}\dfrac{\partial f}{\partial \eta} \\ -x_{31}\dfrac{\partial f}{\partial \xi} + x_{21}\dfrac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

⇒Vi phân diện tích: $dA = dxdy = \det[J]\,d\xi d\eta$

6.2.3 Biểu diễn biến dạng & ứng suất qua chuyển vị nút

⇒ Áp dụng phép biến đổi Jacobi ta tính được đạo hàm của chuyển vị *u* & *v* theo *x* & *y* như sau:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det[J]} \begin{Bmatrix} y_{31}\dfrac{\partial u}{\partial \xi} - y_{21}\dfrac{\partial u}{\partial \eta} \\ -x_{31}\dfrac{\partial u}{\partial \xi} + x_{21}\dfrac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad \& \quad \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det[J]} \begin{Bmatrix} y_{31}\dfrac{\partial v}{\partial \xi} - y_{21}\dfrac{\partial v}{\partial \eta} \\ -x_{31}\dfrac{\partial v}{\partial \xi} + x_{21}\dfrac{\partial v}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

⇒ Véc tơ biến dạng tại một điểm của phần tử:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det[J]} \begin{Bmatrix} y_{23}q_1 + y_{31}q_3 + y_{12}q_5 \\ x_{32}q_2 + x_{13}q_4 + x_{21}q_6 \\ x_{32}q_1 + y_{23}q_2 + x_{13}q_3 + y_{31}q_1 + x_{21}q_5 + y_{12}q_6 \end{Bmatrix}$$

⇒ Véc tơ chuyển vị nút của phần tử là: $\{q\} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6]^T$

⇒ Đặt $[B] = \dfrac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix}$

⇒ Quan hệ giữa véc tơ biến dạng và véc tơ chuyển vị nút:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{q\}$$

⇒ Quan hệ giữa véc tơ ứng suất và véc tơ chuyển vị nút:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} = [C][B]\{q\}$$

6.2.4 Ma trận độ cứng của phần tử

⇒ Ta có: $\{\delta\varepsilon\}^T = \{\delta q\}^T [B]^T$

⇒ Thế năng biến dạng của một phần tử trong di chuyển khả dĩ:

$$\delta W_{\text{int}}^e = \int_{V_e} \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_{V_e} \{\delta q\}^T [B]^T [C][B]\{q\} dV = \{\delta q\}^T \left(\int_{V_e} [B]^T [C][B] dV \right) \{q\}$$

⇒ Ma trận độ cứng của phần tử: $\left[k^e\right] = \int_{V_e} [B]^T [C][B] dV$

⇒ $\delta W_{\text{int}}^e = \{\delta q\}^T \left[k^e\right] \{q\}$

⇒ Véc tơ lực nút của phần tử là: $\{f\} = [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5 \quad f_6]^T$

⇒ Công do lực nút (ngoại lực được quy đổi về nút) gây ra trong di chuyển khả dĩ là:

$$\delta W_{ext}^{e} = \{\delta q\}^{T}\{f\}$$

⇒ Áp dụng nguyên lý di chuyển khả dĩ, ta có phương trình cân bằng cho kết cấu có một phần tử là:

$$\delta W_{\text{int}} = \delta W_{ext} \Rightarrow \delta W_{\text{int}}^{e} = \delta W_{\text{ext}}^{e} \Rightarrow \{\delta q\}^{T}\left[k^{e}\right]\{q\} = \{\delta q\}^{T}\{f\} \Rightarrow \left[k^{e}\right]\{q\} = \{f\}$$

⇒ Tính ma trận độ cứng của phần tử:

$$\left[k^{e}\right] = \int_{V_e}[B]^{T}[C][B]\,dV = t_e\int_{A_e}[B]^{T}[C][B]\,dA = t_e \det[J]\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-\xi}[B]^{T}[C][B]\,d\xi\, d\eta$$

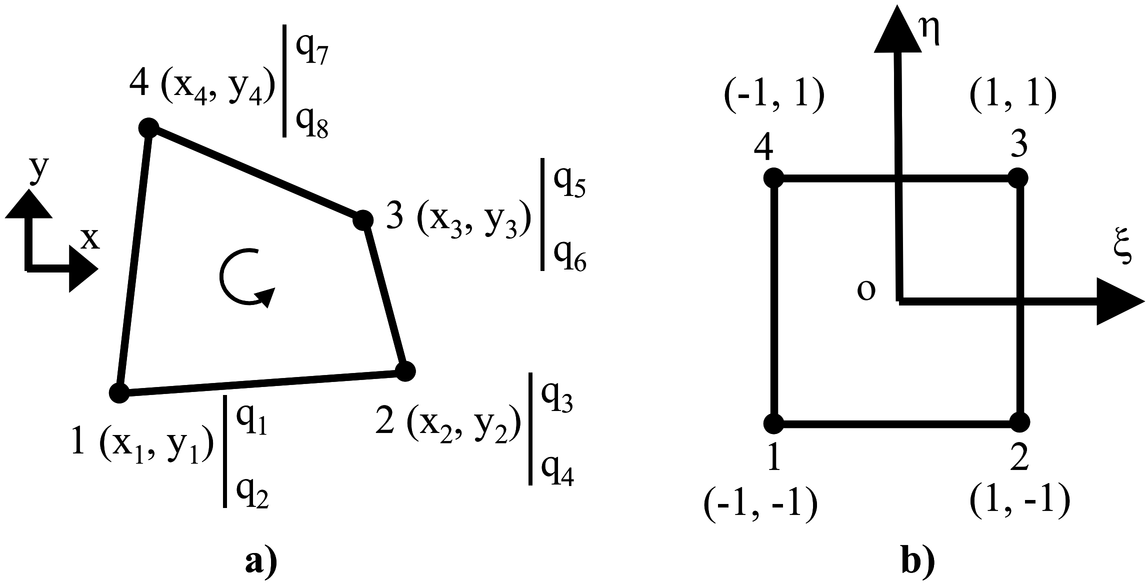
$$\left[k^{e}\right] = \frac{t_e}{4A}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc}
C_1y_{23}^2 + Gx_{23}^2 & C_2x_{32}y_{23} + Gx_{32}y_{23} & C_1y_{31}y_{23} + Gx_{32}x_{13} & C_2x_{13}y_{23} + Gx_{32}y_{31} & C_1y_{12}y_{23} + Gx_{21}x_{32} & C_2x_{21}y_{23} + Gx_{32}y_{12} \\
 & C_1x_{23}^2 + Gy_{23}^2 & C_2x_{32}y_{31} + Gx_{13}y_{23} & C_1x_{13}x_{32} + Gy_{23}y_{31} & C_2x_{32}y_{12} + Gx_{21}y_{23} & C_1x_{21}x_{32} + Gy_{12}y_{23} \\
 & & C_1y_{13}^2 + Gx_{13}^2 & C_2x_{13}y_{31} + Gx_{13}y_{31} & C_1y_{12}y_{31} + Gx_{13}x_{21} & C_2x_{21}y_{31} + Gx_{13}y_{12} \\
 & & & C_1x_{13}^2 + Gy_{13}^2 & C_2x_{13}y_{12} + Gx_{21}y_{31} & C_1x_{13}x_{21} + Gy_{12}y_{31} \\
 & Sym & & & C_1y_{12}^2 + Gx_{12}^2 & C_2x_{21}y_{12} + Gx_{21}y_{12} \\
 & & & & & C_1x_{21}^2 + Gy_{21}^2
\end{array}\right] \end{array}$$

$$C_1 = \frac{2G(1-a\nu)}{(1-\nu-a\nu)}; \qquad C_2 = \frac{C_1\nu}{(1-a\nu)}; \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)};$$

a=0 với bài toán ứng suất phẳng, *a*=1 với bài toán biến dạng phẳng.

6.3 Phần tử tứ giác bốn nút

6.3.1 Hàm dạng và hàm nội suy



Hình 6.4 Phần tử tứ giác bốn nút: a) Phần tử thực, b) Phần tử quy chiếu.

⇒ Toạ độ (x,y) của một điểm thuộc phần tử được xác định bởi các **toạ độ nút** (x_i, y_i) & các **hàm dạng** $\overline{N}_i(\xi,\eta)$:

$$x = \sum_{i=1}^{4} \overline{N}_i(\xi,\eta)x_i; \qquad y = \sum_{i=1}^{4} \overline{N}_i(\xi,\eta)y_i;$$

⇒ Điều kiện để xác định hàm dạng:

Nút \ Hàm	$\overline{N}_1$	$\overline{N}_2$	$\overline{N}_3$	$\overline{N}_4$
1 (ξ_1=-1; η_1=-1)	1	0	0	0
2 (ξ_2=1; η_2=-1)	0	1	0	0
3 (ξ_3=1; η_3=1)	0	0	1	0
4 (ξ_4=-1; η_4=1)	0	0	0	1

⇒ Với mỗi hàm dạng $\overline{N}_i$ có 4 phương trình để xác định các hệ số của nó, do đó ta tìm $\overline{N}_i$ dưới dạng đa thức của ξ & η như sau:

$$\overline{N}_i = a_i + b_i\xi + c_i\eta + d_i\xi\eta$$

$$\Rightarrow \overline{N}_i(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta); \qquad i=\overline{1,4};$$

⇒ Dùng phần tử đẳng thông số, hàm nội suy được chọn như hàm dạng: $N_i \equiv \overline{N}_i$.

⇒ *u* & *v* thứ tự là chuyển vị theo các phương Ox & Oy.

q^e_{2i-1} & q^e_{2i} thứ tự là chuyển vị tại nút i theo phương Ox & Oy.

$\Rightarrow$ Véc tơ **chuyển vị** $\{q\}=[u, v]^T$ tại một điểm của phần tử được xác định bởi các **chuyển vị nút** & các **hàm nội suy** N_i:

$$u = N_1(\xi,\eta)q_1^e + N_2(\xi,\eta)q_3^e + N_3(\xi,\eta)q_5^e + N_4(\xi,\eta)q_7^e$$
$$v = N_1(\xi,\eta)q_2^e + N_2(\xi,\eta)q_4^e + N_3(\xi,\eta)q_6^e + N_4(\xi,\eta)q_8^e$$

$\Rightarrow$Đặt: $[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N4 \end{bmatrix}$

& $\{q^e\} = \begin{bmatrix} q_1^e & q_2^e & q_3^e & q_4^e & q_5^e & q_6^e & q_7^e & q_8^e \end{bmatrix}^T$

$\Rightarrow \{q\} = [N]\{q^e\}$

6.3.2 Phép biến đổi Jacobi

$\Rightarrow$ Xét đạo hàm của hàm hợp: $f = f(x,y) = f(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}; \qquad \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta};$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Ký hiệu: $x_{ij} = x_i - x_j$ & $y_{ij} = y_i - y_j$; Chú ý: $x_{ij} = -x_{ji}$ & $y_{ij} = -y_{ji}$

Đặt: $[J] = \begin{bmatrix} \partial x/\partial \xi & \partial y/\partial \xi \\ \partial x/\partial \eta & \partial y/\partial \eta \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow [J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} x_{21}(1-\eta) + x_{34}(1+\eta) & y_{21}(1-\eta) + y_{34}(1+\eta) \\ x_{41}(1-\xi) + x_{32}(1+\xi) & y_{41}(1-\xi) + y_{32}(1+\xi) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [J]^{-1} = \frac{1}{\det[J]}\begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1}\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det[J]}\begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Vi phân diện tích: $dA = dxdy = \det[J]d\xi d\eta$

6.3.3 Biểu diễn biến dạng và ứng suất qua chuyển vị nút

⇒ Áp dụng phép biến đổi Jacobi ta tính được đạo hàm của chuyển vị *u* & *v* theo *x* & *y* như sau:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det[J]}\begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad \& \quad \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det[J]}\begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

⇒ Véc tơ biến dạng tại một điểm của phần tử:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u/\partial x \\ \partial v/\partial y \\ (\partial u/\partial y + \partial v/\partial x) \end{Bmatrix} = [A]\begin{Bmatrix} \partial u/\partial \xi \\ \partial u/\partial \eta \\ \partial v/\partial \xi \\ \partial v/\partial \eta \end{Bmatrix}$$

Với $[A] = \dfrac{1}{\det[J]}\begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21} & J_{11} \\ -J_{21} & J_{11} & J_{22} & -J_{12} \end{bmatrix}$

mà $\begin{Bmatrix} \partial u/\partial \xi \\ \partial u/\partial \eta \\ \partial v/\partial \xi \\ \partial v/\partial \eta \end{Bmatrix} = [G]\{q^e\}$

Với $[G] = \dfrac{1}{4}\begin{bmatrix} -(1-\eta) & 0 & 1-\eta & 0 & 1+\eta & 0 & -(1+\eta) & 0 \\ -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & 1+\xi & 0 & (1-\xi) & 0 \\ 0 & -(1-\eta) & 0 & 1-\eta & 0 & 1+\eta & 0 & -(1+\eta) \\ 0 & -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & 1+\xi & 0 & 1-\xi \end{bmatrix}$

⇒ Quan hệ giữa véc tơ biến dạng và véc tơ chuyển vị nút:

$$\{\varepsilon\} = [A][G]\{q^e\} = [B]\{q^e\} \qquad (\text{Với } [B] = [A][G])$$

⇒ Quan hệ giữa véc tơ ứng suất và véc tơ chuyển vị nút:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} = [C][B]\{q^e\}$$

6.3.4 Ma trận độ cứng của phần tử

⇒ Ta có: $\{\delta\varepsilon\}^T = \{\delta q\}^T [B]^T$

⇒ Thế năng biến dạng của một phần tử trong di chuyển khả dĩ:

$$\delta W_{int}^{e} = \int_{V_e} \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_{V_e} \{\delta q^e\}^T [B]^T [C][B]\{q^e\} dV = \{\delta q^e\}^T \left(\int_{V_e} [B]^T [C][B] dV \right)\{q^e\}$$

⇒ Véc tơ lực nút của phần tử là:

$$\{f\} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 & f_7 & f_8 \end{bmatrix}^T$$

f_{2i-1} & f_{2i} thứ tự là chuyển vị tại nút i theo phương Ox & Oy.

⇒ Công do lực nút (ngoại lực được quy đổi về nút) gây ra trong di chuyển khả dĩ là:

$$\delta W_{ext}^e = \{\delta q\}^T \{f\}$$

⇒ Áp dụng nguyên lý di chuyển khả dĩ, ta có phương trình cân bằng cho kết cấu có một phần tử là:

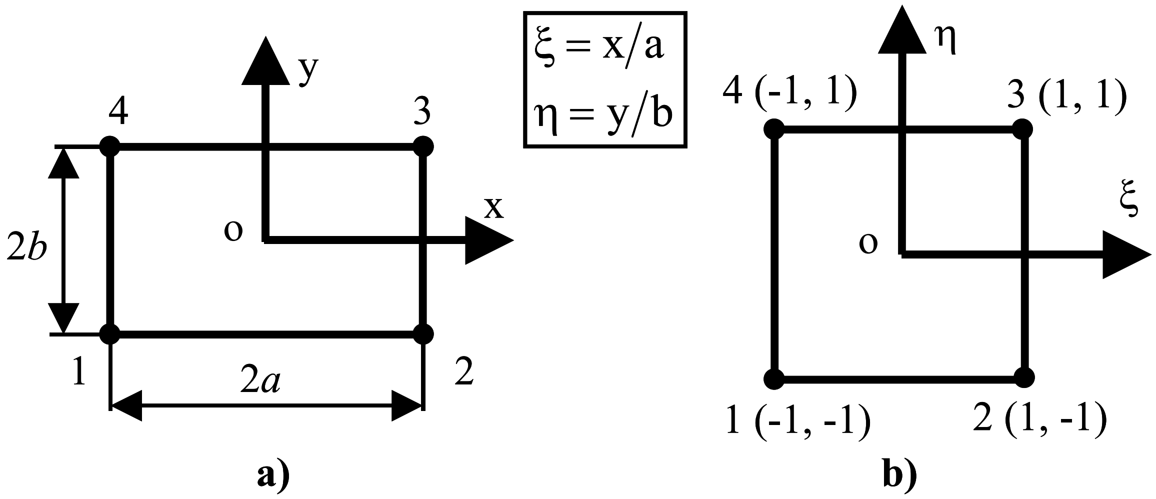
$$\delta W_{\text{int}} = \delta W_{ext} \Rightarrow \delta W_{\text{int}}^e = \delta W_{\text{ext}}^e \Rightarrow \{\delta q^e\}^T \left(\int_{V_e} [B]^T [C][B] dV \right) \{q^e\} = \{\delta q^e\}^T \{f\}$$

$$\Rightarrow \left(\int_{V_e} [B]^T [C][B] dV \right) \{q^e\} = \{f\} \Rightarrow [k^e]\{q^e\} = \{f\}$$

⇒ Ma trận độ cứng của phần tử:

$$[k^e] = \int_{V_e} [B]^T [C][B] dV = t_e \int_{A_e} [B]^T [C][B] dA = t_e \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \det[J][B]^T [C][B] d\xi d\eta$$

6.3.5 Phần tử hình chữ nhật bốn nút



Hình 6.5 Phần tử thực a), phần tử quy chiếu b) của phần tử hình chữ nhật 4 nút 8 bậc tự do

$$[B] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -\frac{1-\eta}{a} & 0 & \frac{1-\eta}{a} & 0 & \frac{1+\eta}{a} & 0 & -\frac{1+\eta}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{1-\xi}{b} & 0 & -\frac{1+\xi}{b} & 0 & \frac{1+\xi}{b} & 0 & \frac{1-\xi}{b} \\ -\frac{1-\xi}{b} & -\frac{1-\eta}{a} & -\frac{1+\xi}{b} & \frac{1-\eta}{a} & \frac{1+\xi}{b} & \frac{1+\eta}{a} & \frac{1-\xi}{b} & -\frac{1+\eta}{a} \end{bmatrix}$$

$$\left[k^e\right]=\frac{t_e ab}{12}.[\ ]$$

$[\ ]=$

$4C_1/a^2 + 4G/b^2$	$\frac{3c}{ab}$	$-4C_1/a^2 + 2G/b^2$	$\frac{3d}{ab}$	$-2C_1/a^2 - 2G/b^2$	$-\frac{3c}{ab}$	$2C_1/a^2 - 4G/b^2$	$-\frac{3d}{ab}$
	$4C_1/b^2 + 4G/a^2$	$-\frac{3d}{ab}$	$2C_1/b^2 - 4G/a^2$	$-\frac{3c}{ab}$	$-2C_1/b^2 - 2G/a^2$	$\frac{3d}{ab}$	$-4C_1/b^2 - 4G/a^2$
		$4C_1/a^2 + 4G/b^2$	$-\frac{3c}{ab}$	$2C_1/a^2 - 4G/b^2$	$\frac{3d}{ab}$	$-2C_1/a^2 - 2G/b^2$	$\frac{3c}{ab}$
			$4C_1/b^2 + 4G/a^2$	$-\frac{3d}{ab}$	$-4C_1/b^2 + 2G/a^2$	$\frac{3c}{ab}$	$-2C_1/b^2 - 2G/a^2$
				$4C_1/a^2 + 4G/b^2$	$\frac{3c}{ab}$	$-4C_1/a^2 + 2G/b^2$	$\frac{3d}{ab}$
					$4C_1/b^2 + 4G/a^2$	$-\frac{3d}{ab}$	$2C_1/b^2 - 4G/a^2$
	Sym					$4C_1/a^2 + 4G/b^2$	$-\frac{3c}{ab}$
							$4C_1/b^2 + 4G/a^2$

$$G=\frac{E}{2(1+\nu)};\qquad C_1=\frac{2G(1-a\nu)}{(1-\nu-a\nu)};\qquad C_2=\frac{C_1\nu}{(1-a\nu)};\qquad c=H_2+G;\qquad d=H_2-G;$$

a=0 với bài toán ứng suất phẳng, a=1 với bài toán biến dạng phẳng.

6.4 Một số vấn đề về phần tử phẳng

6.4.1 Phân loại phần tử phẳng

⇒ **Theo hình học**: phần tử tam giác & tứ giác.

⇒ **Theo bản chất bài toán cơ học**: ứng suất phẳng, biến dạng phẳng, & đối xứng trục.

⇒ **Theo bậc đa thức của hàm dạng**: bậc nhất, bậc 2, bậc 3...

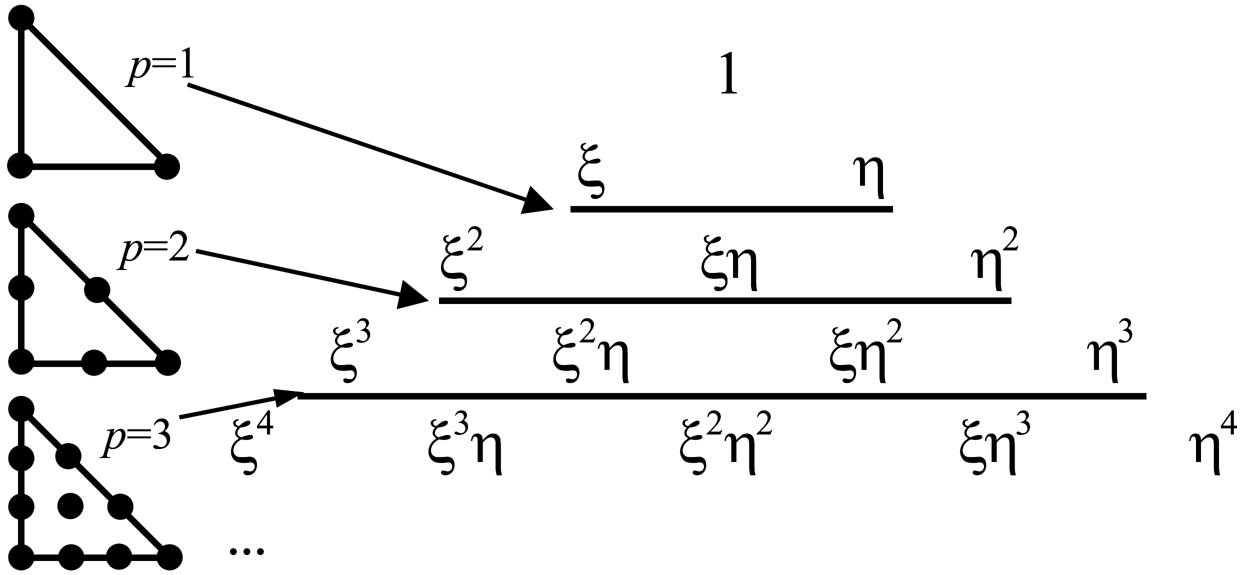
⇒ **Theo loại hàm dạng**: Lagrange, serendipity, & hierarchical.

6.4.2 Hàm dạng của phần tử phẳng

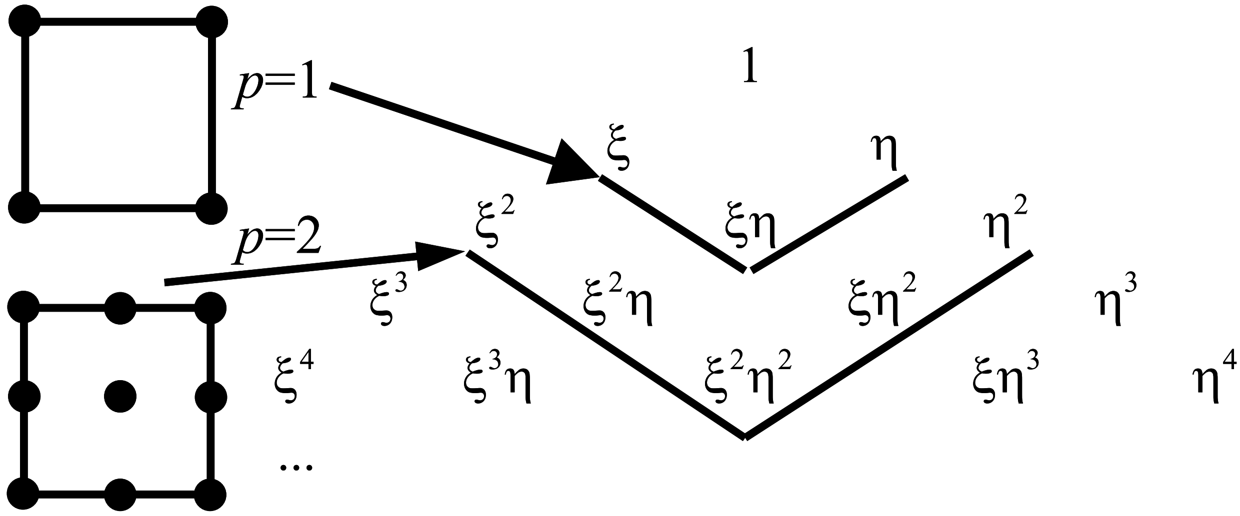
⇒**<u>Hàm dạng kiểu Lagrange</u>**:

$$N(\xi,\eta) = N(\xi)N(\eta) = \left(\sum_{i=0}^{p} \alpha^i \xi^i\right)\left(\sum_{j=0}^{p} \alpha^j \eta^j\right)$$

- $N(\xi) = \sum_{i=0}^{p} \alpha^i \xi^i$ & $N(\eta) = \sum_{j=0}^{p} \alpha^j \eta^j$ là các đa thức Lagrange của ξ & η
- *p* là bậc của đa thức.
- Khai triển các đa thức trên theo tam giác Pascal được hàm dạng của các phần tử quy chiếu hình tam giác và hình vuông.



Hình 6.6 Đa thức Lagrange và phần tử tam giác biểu diễn trên tam giác Pascal

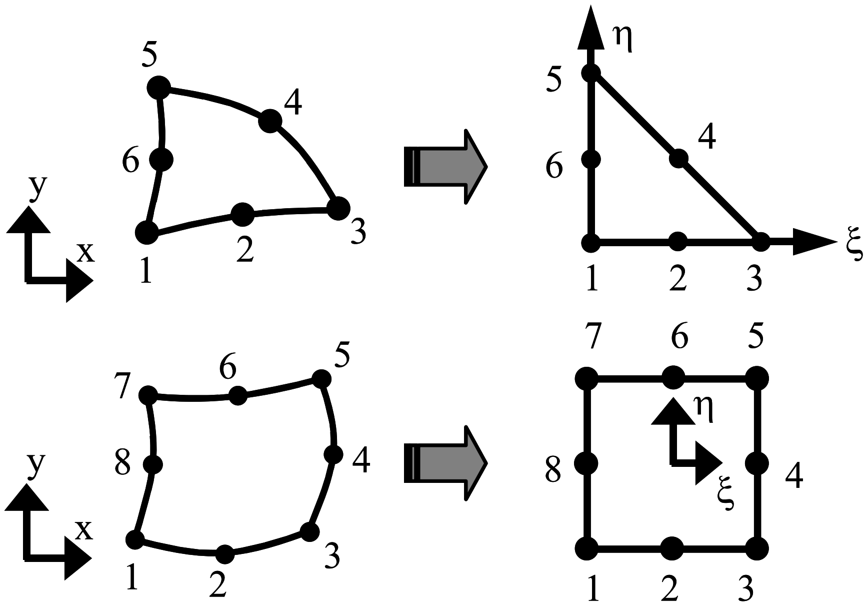


Hình 6.7 Đa thức Lagrange và phần tử hình vuông biểu diễn trên tam giác Pascal

⇒ **Hàm dạng kiểu serendipity**: Cách xây dựng hàm dạng theo đa thức Lagrange không áp dụng được cho một số phần tử, chẳng hạn phần tử chữ nhật 8 nút. Khi đó hàm dạng được thiết lập bằng cách sử dụng tính chất của hàm dạng.

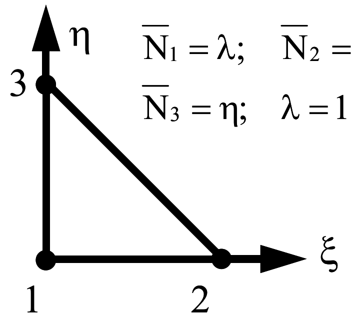
$$N_i\left(\xi_i,\eta_i\right)=1; \quad \& \quad N_i\left(\xi_j,\eta_j\right)=0; \qquad (\mathrm{i}\neq \mathrm{j})$$

⇒ Các **phần tử bậc cao** (p≥2) có thể dùng để rời rạc hoá miền phẳng có **biên là đường cong**.



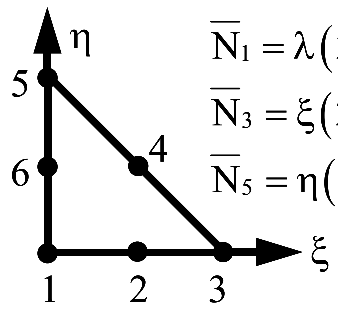
Hình 6.8 Phần tử thực có cạnh là đường cong

6.4.3 Hàm dạng của một số phần tử phẳng thông dụng



$\overline{N}_1=\lambda;\quad \overline{N}_2=\xi$

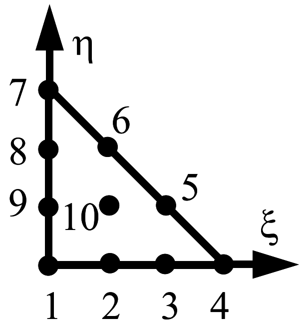
$\overline{N}_3=\eta;\quad \lambda=1-\xi-\eta$



$\overline{N}_1=\lambda\left(2\lambda-1\right);\quad \overline{N}_2=4\xi\lambda$

$\overline{N}_3=\xi\left(2\xi-1\right);\quad \overline{N}_4=4\xi\eta$

$\overline{N}_5=\eta\left(2\eta-1\right);\quad \overline{N}_6=4\eta\lambda$



$\overline{N}_1=\lambda\left(3\lambda-1\right)\left(3\lambda-2\right)/2;\quad \overline{N}_2=9\lambda\xi\left(3\lambda-1\right)/2$

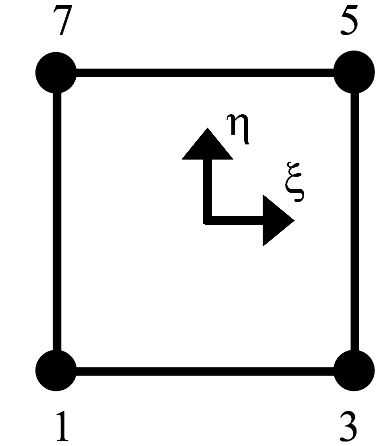
$\overline{N}_3=9\lambda\xi\left(3\xi-1\right)/2;\quad \overline{N}_4=\xi\left(3\xi-1\right)\left(3\xi-2\right)/2$

$\overline{N}_5=9\xi\eta\left(3\xi-1\right)/2;\quad \overline{N}_6=9\xi\eta\left(3\eta-1\right)/2$

$\overline{N}_7=\eta\left(3\eta-1\right)\left(3\eta-2\right)/2;\quad \overline{N}_8=9\eta\lambda\left(3\eta-1\right)/2$

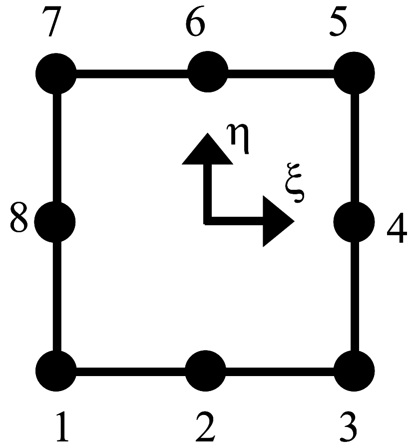
$\overline{N}_9=9\eta\lambda\left(3\lambda-1\right)/2;\quad \overline{N}_{10}=54\xi\eta\lambda/2$

Hình 6.9 Hàm dạng của một số phần tử tam giác



$$\alpha = 1/4 \qquad \beta = 1/2$$

$$\overline{N}_i(\xi,\eta) = \alpha(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta) \qquad i=\overline{1,4}$$



$$\overline{N}_i(\xi,\eta) = \alpha(\xi_i\xi+\eta_i\eta-1)(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)$$

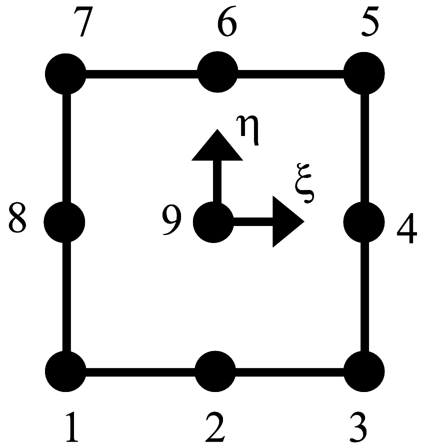
$$(i=1,3,5,7)$$

$$\overline{N}_i(\xi,\eta) = \beta(1-\xi^2)(1+\eta_i\eta)$$

$$(i=2,6)$$

$$\overline{N}_i(\xi,\eta) = \beta(1+\xi_i\xi)(1-\eta^2)$$

$$(i=4,8)$$



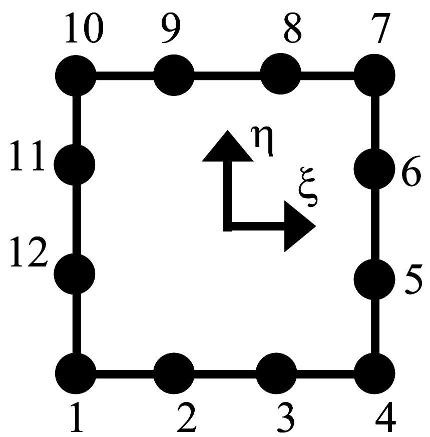
$$\overline{N}_1 = \alpha\xi(1-\xi)\eta(1-\eta); \qquad \overline{N}_2 = -\beta(1-\xi^2)(1-\eta)\eta$$

$$\overline{N}_3 = -\alpha\xi(1+\xi)\eta(1-\eta); \qquad \overline{N}_4 = \beta\xi(1+\xi)(1-\eta^2)$$

$$\overline{N}_5 = \alpha\xi(1+\xi)(1+\eta)\eta; \qquad \overline{N}_6 = \beta(1-\xi^2)(1+\eta)\eta$$

$$\overline{N}_7 = -\alpha\xi(1-\xi)(1+\eta)\eta; \qquad \overline{N}_8 = -\beta\xi(1-\xi)(1-\eta)\eta$$

$$\overline{N}_9 = (1-\xi^2)(1-\eta^2);$$



$$\overline{N}_i = (1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(9\xi^2+9\eta^2-10)/32;$$

$$(i=1,\ 4,\ 7,\ 10)$$

$$\overline{N}_i = 9(1+\xi_i\xi)(1-\eta^2)(1+9\eta_i\eta)/32;$$

$$(i=5,6,11,12)$$

$$\overline{N}_i = 9(1+\eta_i\eta)(1-\xi^2)(1+9\xi_i\xi)/32;$$

$$(i=2,\ 3,\ 8,\ 9)$$

Hình 6.10 Hàm dạng của một số phần tử tứ giác

6.5 Quy đổi lực mặt và lực thể tích về nút

⇒ $\{f_v\}$ & $\{f_s\}$ thứ tự là véc tơ lực thể tích & lực mặt tác dụng lên phần tử phẳng:

$$\{f_v\} = \begin{Bmatrix} f_{vx} \\ f_{vy} \end{Bmatrix}; \qquad \{f_s\} = \begin{Bmatrix} f_{sx} \\ f_{sy} \end{Bmatrix};$$

⇒ Công của lực thể tích và lực mặt trong di chuyển khả dĩ là:

$$\delta W_{ext}^{ef} = \int_{V_e} \{\delta q\}^T \{f_v\} dV + \int_{A_e} \{\delta q\}^T \{f_s\} dA$$

mà $\{q\} = [N]\{q^e\} \Rightarrow \{\delta q\}^T = \{\delta q^e\}^T [N]^T$

$$\delta W_{ext}^{ef} = \int_{V_e} \{\delta q^e\}^T [N]^T \{f_v\} dV + \int_{A_e} \{\delta q^e\}^T [N]^T \{f_s\} dA$$

$$\delta W_{ext}^{ef} = \{\delta q^e\}^T \left(\int_{V_e} [N]^T \{f_v\} dV + \int_{A_e} [N]^T \{f_s\} dA \right)$$

⇒ Gọi $\{f_v^e\}$& $\{f_s^e\}$ thứ tự là véc tơ lực nút do lực thể tích và lực mặt gây ra:

$$\{f_v^e\} = \int_{V_e} [N]^T \{f_v\} dV; \qquad \{f_s^e\} = \int_{A_e} [N]^T \{f_s\} dA$$

$$\Rightarrow \delta W_{ext}^{ef} = \{\delta q^e\}^T \left(\{f_v^e\} + \{f_s^e\} \right) = \{\delta q^e\}^T \{f^e\}$$

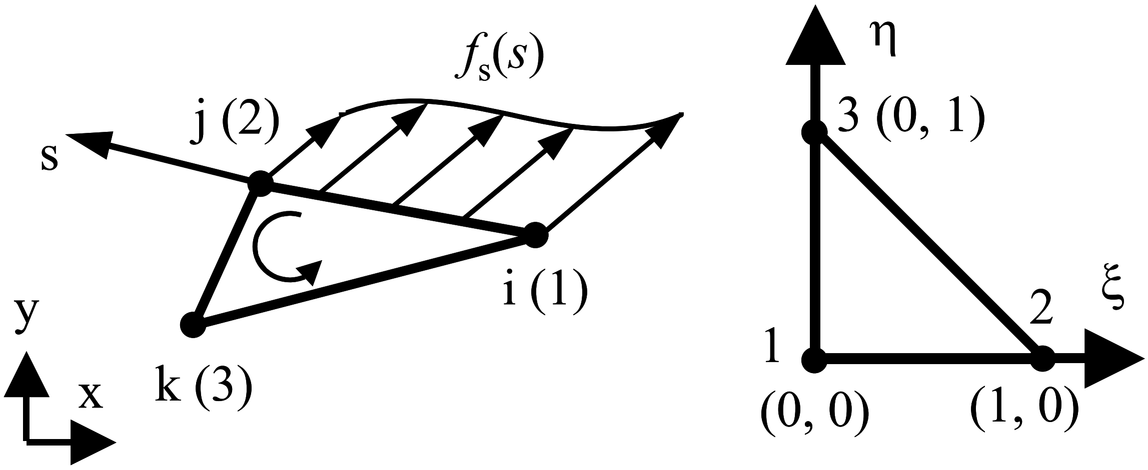
⇒ Trong đó $\{f^e\}$ là véc tơ lực nút do lực thể tích và lực mặt được quy đổi về nút:

$$\{f^e\} = \{f_v^e\} + \{f_s^e\}$$

<u>Ví dụ 6.1:</u> Quy đổi lực tác dụng lên một cạnh của phần tử tam giác 3 nút (lực mặt).

⇒ Phần tử tam giác có các nút i, j, k tương ứng với các nút 1, 2, 3 theo ký hiệu chỉ số địa phương. Ngoại lực tác dụng lên cạnh i-j của phần tử có cường độ phân bố là hàm của *s* (s là toạ độ địa phương trên cạnh i-j).

$$\{f_s\} = \begin{Bmatrix} f_{sx}(s) \\ f_{sy}(s) \end{Bmatrix}$$



Hình 6.11 Lực phân bố tác dụng lên một cạnh của phần tử tam giác

⇒ Vì $\eta = 0$ trên cạnh 1-2 nên ta có:

$$[N] = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\xi & 0 & \xi & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [N]^T \{f_s\} = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 \\ 0 & 1-\xi \\ \xi & 0 \\ 0 & \xi \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{sx}(s) \\ f_{sy}(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (1-\xi) f_{sx}(s) \\ (1-\xi) f_{sy}(s) \\ \xi f_{sx}(s) \\ \xi f_{sy}(s) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{f_s^e\} = \int_{A_e} [N]^T \{f_s\} dA = t\int_0^L [N]^T \{f_s\} ds = tL\int_0^1 [N]^T \{f_s\} d\xi = tL\int_0^1 \begin{Bmatrix} (1-\xi) f_{sx} \\ (1-\xi) f_{sy} \\ \xi f_{sx} \\ \xi f_{sy} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} d\xi$$

⇒ Chỉ 2 nút của cạnh có lực tác dụng mới có lực quy đổi. Nút còn lại lực quy đổi bằng 0.

⇒ Khi $f_{sx}(s) = f_{sx} = const$ & $f_{sy}(s) = f_{sy} = const$ thì ta có:

$$\{f_s^e\} = \frac{Lt}{2} \begin{bmatrix} f_{sx} & f_{sy} & f_{sx} & f_{sy} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

⇒**<u>Ví dụ 6.2:</u>** Quy đổi lực thể tích tác dụng lên toàn bộ phần tử tam giác 3 nút có cường độ phân bố là hàm của *x* & *y*:

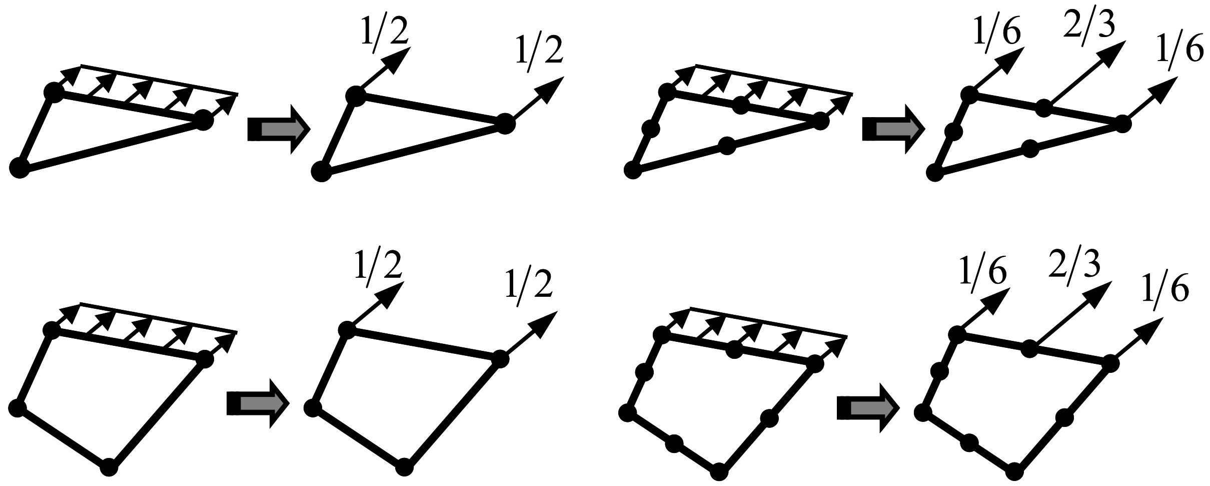
$$\{f_v\} = \begin{Bmatrix} f_{vx}(x,y) \\ f_{vy}(\mathrm{x,y}) \end{Bmatrix}$$

Ta có véc tơ lực nút quy đổi: $\{f_v^e\} = \int\limits_{V_e} [N]^T \{f_v\} dV = 2At\int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-\xi} [N]^T \{f_v\} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta$

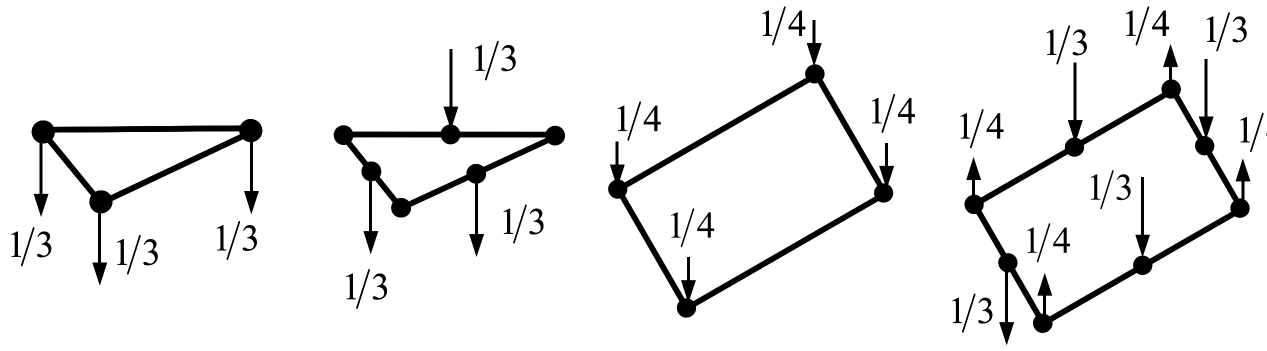
Trong đó: $[N]^T\{f_v\} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{vx}(x,y) \\ f_{vy}(\mathrm{x,y}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1 f_{vx}(x,y) \\ N_1 f_{vy}(x,y) \\ N_2 f_{vx}(x,y) \\ N_2 f_{vy}(x,y) \\ N_3 f_{vx}(x,y) \\ N_3 f_{vy}(x,y) \end{Bmatrix}$

⇒Khi $f_{vx}(x,y) = f_{vx} = const$ & $f_{vy}(\mathrm{x,y}) = f_{vy} = const$ thì ta có:

$$\{f_v^e\} = \frac{At}{3}\begin{bmatrix} f_{vx} & f_{vy} & f_{vx} & f_{vy} & f_{vx} & f_{vy} \end{bmatrix}^T$$



Hình 6.12 Quy đổi lực phân bố đều (có tổng độ lớn bằng 1) trên một cạnh của một số phần tử tam giác và tứ giác về nút.



Hình 6.13 Quy đổi lực thể tích phân bố đều (có tổng độ lớn bằng 1) trên toàn bộ phần tử về nút cho một số phần tử tam giác và hình chữ nhật