

Chương 1: CƠ SỞ LOGIC

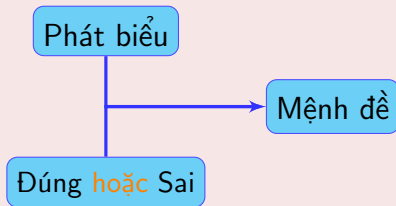
Khoa CNTT

ĐH GTVT TP.HCM

- ➊ Mệnh đề là gì?
- ➋ Các phép toán mệnh đề
- ➌ Các luật logic
- ➍ Biểu thức mệnh đề
- ➎ Vị từ & Lượng từ
- ➏ Các phương pháp suy diễn
- ➐ Thảo luận & Bài tập

Mệnh đề là gì (1/7)

Định nghĩa:



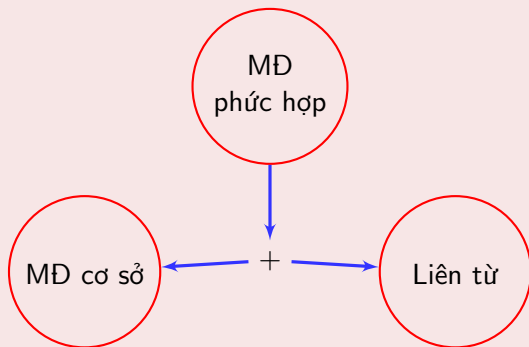
Mệnh đề là gì (2/7)

Các ví dụ:

Phát biểu	Là MD	Chân trị	Không là MD
Tổng các góc trong tam giác bằng 180°	x	true	
Trái đất là trung tâm vũ trụ	x	false	
Đẹp vô cùng, Tổ quốc ta ơi!			x
...			

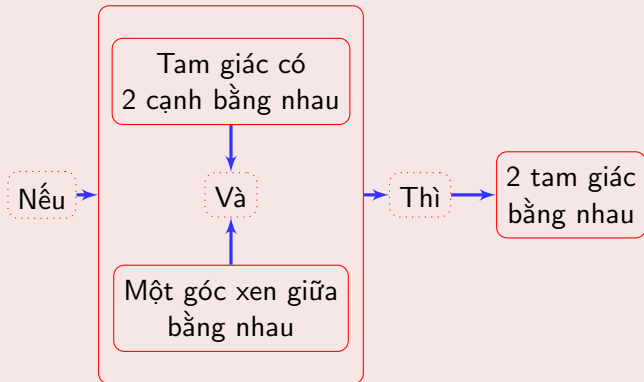
Mệnh đề là gì (3/7)

Phân loại MĐ (1/2):



Mệnh đề là gì (4/7)

Phân loại MD (2/2):



Mệnh đề là gì (5/7)

- * Bảng một số liên từ & trạng từ tương đương:

Liên từ / trạng từ	Từ tương đương
Và	Vừa ... vừa .../ Tuy ... nhưng .../ Chẳng những ... mà còn .../ Tuy nhiên .../ Thế mà ...
Hoặc	
Nếu ... thì ...	Giả sử ... khi đó .../ Điều kiện đủ để ... là ... / Điều kiện cần ... là ...
Không	

Mệnh đề là gì (6/7)

Hằng & Biến mệnh đề:

- * Logic học chỉ quan tâm đến giá trị chân lý của mệnh đề mà không quan tâm đến nội dung cụ thể của nó.
- * Do vậy có thể sử dụng các kí hiệu hình thức để biểu diễn mệnh đề:

	Giải thích	Kí hiệu
Hằng MĐ	Là một mệnh đề cụ thể	Dùng chữ cái in hoa: A, B, C, P, Q, \dots
Biến MĐ	Có thể nhận giá trị là các mệnh đề khác nhau	Dùng chữ cái in thường: p, q, r, t, x, y, \dots

Mệnh đề là gì (7/7)

Chân trị của mệnh đề:

- * Là giá trị chân lí của mệnh đề đó.
- * Sau đây là bảng các kí hiệu chân trị:

Kí hiệu tiếng Việt	Kí hiệu bằng số	Kí hiệu tiếng Anh	Viết tắt
Đúng	1	True / Yes	T / Y
Sai	0	False / No	F / N

Phép toán mệnh đề (1/6)

Bảng các phép toán mệnh đề:

Liên từ/ Trạng từ	Tiếng Anh	Kí hiệu phép toán	Cách đọc
Không	Not	\neg hoặc $-$	Phủ định
Và	And	\wedge	Hội
Hoặc	Or	\vee	Tuyển
Nếu ... thì ...	If ... then ...	\rightarrow	Kéo theo
Khi và chỉ khi	If and only if	\leftrightarrow	Tương đương

Phép toán mệnh đề (2/6)

Phép phủ định:

* Bảng chân trị:

p	\bar{p}
0	1
1	0

* Ví dụ: $\overline{(3 > 4)}$ có chân trị = 1.

Phép toán mệnh đề (3/6)

Phép hội:

* Bảng chân trị:

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

* Ví dụ: $\overline{(3 > 0)} \wedge (4|12)$ có chân trị = 0.

Phép toán mệnh đề (4/6)

Phép tuyển:

* Bảng chân trị:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

* Ví dụ: $(3 < 0) \vee (5|12)$ có chân trị $= 0$.

Phép toán mệnh đề (5/6)

Phép kéo theo:

* Bảng chân trị:

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

* Ví dụ: $(4 = 0) \rightarrow (4|12)$ có chân trị = 1.

Phép toán mệnh đề (6/6)

Phép tương đương (kéo theo 2 chiều):

* Bảng chân trị:

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

* Ví dụ: $(8 = 0) \leftrightarrow (7|12)$ có chân trị = 1.

Các luật logic (1/2):

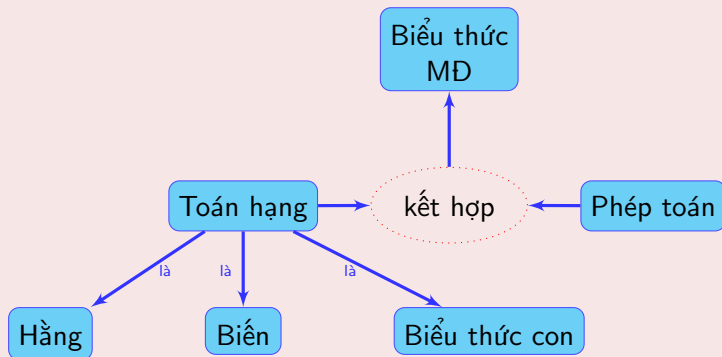
Stt	Biểu thức	Tên luật
1	$p \vee 1 \Leftrightarrow 1$ $p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$	Thống trị (Domination)
2	$p \wedge 1 \Leftrightarrow p$ $p \vee 0 \Leftrightarrow p$	Đồng nhất (Identity)
3	$p \wedge p \Leftrightarrow p$ $p \vee p \Leftrightarrow p$	Lũy đẳng (Idempotent)
4	$\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$	Phủ định kép (Double negation)
5	$p \wedge \overline{p} \Leftrightarrow 0$ $p \vee \overline{p} \Leftrightarrow 1$	Loại trừ (Cancellation)

Các luật logic (2/2):

Stt	Biểu thức	Tên luật
6	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	Giao hoán (Commutative)
7	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Phân phối (Distributive)
8	$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$	Kết hợp (Associative)
9	$\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$ $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$	De Morgan
10	$p \rightarrow q \Leftrightarrow \overline{p} \vee q$	Kéo theo (Implication)

Biểu thức mệnh đề (1/8)

Khái niệm:



* Ví dụ: $E : (p \rightarrow 1) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ là một biểu thức mệnh đề.

Biểu thức mệnh đề (2/8)

Các biểu thức mệnh đề đặc biệt:

- * Hằng đúng (chân lí):

- + $E = 1$ với mọi giá trị của các biến $\Leftrightarrow E$ là hằng đúng.

- + Ví dụ: $E : p \vee \bar{p} \Rightarrow E = 1, \forall p$

- * Hằng sai (mâu thuẫn):

- + $E = 0$ với mọi giá trị của các biến $\Leftrightarrow E$ là hằng sai.

- + Ví dụ: $E : (p \rightarrow q) \wedge \overline{(p \rightarrow q)} \Rightarrow E = 0, \forall p, q$

Biểu thức mệnh đề (3/8)

Quan hệ giữa 2 biểu thức mệnh đề:

* Tương đương (kí hiệu là \Leftrightarrow):

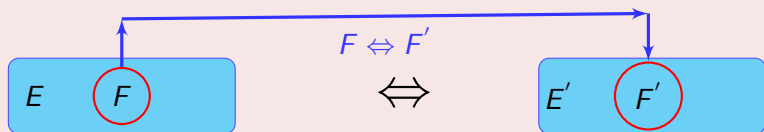
- + E và F được gọi là tương đương với nhau khi và chỉ khi chân trị của E và F trùng nhau (với cùng giá trị tương ứng của các biến).
- + Ví dụ: $E : \bar{p} \vee q \Leftrightarrow p \rightarrow q$

* Hệ quả (kí hiệu là \Rightarrow):

- + F được gọi là hệ quả (logic) của E khi và chỉ khi $E \rightarrow F$ là một hằng đúng. Tức là $E \rightarrow F \Leftrightarrow 1$.
- + Ví dụ: $0 \Rightarrow (p \vee q)$

Biểu thức mệnh đề (4/8)

Quy tắc thay thế tương đương:



Ví dụ:

$$[(p \rightarrow q) \vee r] \Leftrightarrow [(\bar{p} \vee q) \vee r]$$

Biểu thức mệnh đề (5/8)

Quy tắc thay thế trong hằng đúng:

$$E(p, q, \mathbf{r}, \dots) = 1 \xrightarrow{\text{thay biến } r = F(u, v, \dots)} E'(p, q, \mathbf{u, v, ..}) = 1$$

Ví dụ:

$$p \vee \bar{p} = 1 \xrightarrow{\text{thay } p = s \rightarrow t} (s \rightarrow t) \vee \overline{(s \rightarrow t)} = 1$$

Biểu thức mệnh đề (6/8)

Bài toán rút gọn biểu thức:

Biểu thức E

Dùng các luật &
các quy tắc thay thế

$F \Leftrightarrow E$ và gọn hơn E

Biểu thức mệnh đề (7/8)

Bài toán rút gọn biểu thức:

Ví dụ: rút gọn biểu thức $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$

Giải:

$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$	luật kéo theo
$\Leftrightarrow [p \wedge (\bar{p} \vee q)] \rightarrow q$	luật phân phối
$\Leftrightarrow [(p \wedge \bar{p}) \vee (p \wedge q)] \rightarrow q$	luật loại trừ
$\Leftrightarrow [0 \vee (p \wedge q)] \rightarrow q$	luật đồng nhất
$\Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow q$	luật kéo theo
$\Leftrightarrow \overline{p \wedge q} \vee q$	luật De Morgan
$\Leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q}) \vee q$	luật kết hợp
$\Leftrightarrow \bar{p} \vee (\bar{q} \vee q)$	luật loại trừ
$\Leftrightarrow \bar{p} \vee 1$	luật thống trị
$\Leftrightarrow 1$	

Biểu thức mệnh đề (8/8)

Bài toán xác định chân trị của biểu thức E cho trước:

* Cách giải:

- ❶ Bước 1: Rút gọn E . Nếu E là hằng đúng hoặc hằng sai \Rightarrow kết thúc.
- ❷ Bước 2: Lập bảng chân trị của E (đã rút gọn).
(Chú ý: nếu E gồm n biến thì bảng chân trị sẽ có 2^n dòng thể hiện những giá trị khác nhau của n biến đó).

* Ví dụ: xác định chân trị của biểu thức $E = ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \wedge p$

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow p$	E
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Vị từ & Lượng từ (1/4)

* Xét phát biểu sau:

$$p(x) : x^2 - 5x + 6 = 0$$



Phát biểu có
là MĐ không?

Nếu giá trị của x
xác định thì $p(x) = ?$

Ví dụ: $x = 2 \Rightarrow p(2) = ?$

Nếu giá trị của x
bị hạn chế thì $p(x) = ?$

Ví dụ: "**với mọi** x ,
 $x^2 - 5x + 6 = 0$ "

Vị từ & Lượng từ (2/4)

* Nhận xét:

$$p(x) : x^2 - 5x + 6 = 0$$



Phát biểu trên không là MD

Nếu giá trị của x
xác định hoặc bị hạn chế
thì $p(x)$ xác định (là mệnh đề)

Vị từ & Lượng từ (3/4)

Định nghĩa:

- * Vị từ là một phát biểu mà:
 - + Bản thân nó không phải là mệnh đề.
 - + Nhưng nếu hạn chế hoặc gán giá trị cho các biến của nó thì ta thu được một mệnh đề.
- * Logic vị từ sử dụng 2 lượng từ sau:
 - + Lượng từ tồn tại, kí hiệu \exists (Exist).
Ví dụ $p(x) : \forall x \in \mathbb{R}, p(x) : x^2 - 5x + 6 = 0$
 - + Lượng từ phổ dụng (mọi), kí hiệu \forall (All).
Ví dụ $p(x, y) : \exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}, x + y = 5$

Vị từ & Lượng từ (4/4)

Định lý (quy tắc biến đổi lượng từ):

$$* \overline{\forall x, p(x)} \Leftrightarrow \exists x, \overline{p(x)}$$

$$* \overline{\exists x, p(x)} \Leftrightarrow \forall x, \overline{p(x)}$$

Ví dụ:

$$\overline{\forall x, x^2 - 3x + 2 = 0} \Leftrightarrow \exists x, x^2 - 3x + 2 \neq 0$$

Các phương pháp suy diễn (1/10)

Suy diễn là gì?

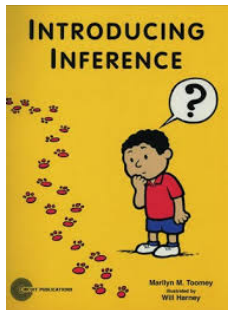
Laptop rẻ thì hiếm

và

Cái gì hiếm thì đắt

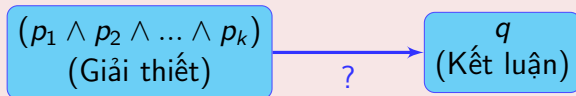
vậy

Laptop rẻ thì đắt!



Các phương pháp suy diễn (2/10)

Mô hình logic của phép suy diễn:



Các phương pháp suy diễn (3/10)

Phương pháp khẳng định:

$p \rightarrow q$	"Nếu An chăm học thì sẽ thi đậu Toán rời rạc"
p	"Mà An chăm học"
$\therefore q$	"Vậy An thi đậu Toán rời rạc"

Các phương pháp suy diễn (4/10)

Phương pháp phủ định:

$p \rightarrow q$	"Nếu An chăm học thì sẽ thi đậu Toán rời rạc"
\bar{q}	"Mà An không đậu Toán rời rạc"
$\therefore \bar{p}$	"Vậy An không chăm học"

Các phương pháp suy diễn (5/10)

Phương pháp tam đoạn luận:

$p \rightarrow q$	"Nếu áp dụng phần mềm thì hiệu quả công việc tăng"
$q \rightarrow r$	"Nếu hiệu quả công việc tăng thì doanh thu của đơn vị tăng"
$\therefore p \rightarrow r$	"Vậy, nếu áp dụng phần mềm thì doanh thu của đơn vị tăng"

Phương pháp tam đoạn luận rời:

- *
$$[(p \vee q) \wedge \bar{p}] \rightarrow q \Leftrightarrow 1$$

- * Giải thích: *chỉ có thể là p hoặc q mà không p nên q!*

Các phương pháp suy diễn (7/10)

Phương pháp phân tích trường hợp:

- *
$$[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow r]$$
- * Ví dụ: chứng minh rằng $E = 1 + (-1)^n(2n - 1)$ luôn chia hết cho 4.
- * Giải:
 - + Trường hợp 1: n chẵn, tức là $n = 2k \Rightarrow E = 4k$, chia hết cho 4.
 - + Trường hợp 2: n lẻ, tức là $n = 2k + 1 \Rightarrow E = -4k$, chia hết cho 4.
 - + Mà n chỉ có thể là chẵn hoặc lẻ. Vậy bài toán được chứng minh.

Các phương pháp suy diễn (8/10)

Phương pháp phản chứng:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_k) \rightarrow q$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_k \wedge \bar{q}) \rightarrow 0$$

Ví dụ:

- * Đặt các số trong $\{1, 2, 3, \dots, 25\}$ trên 1 vòng tròn. Chứng minh rằng luôn tìm được 1 bộ 3 số liên tiếp sao cho tổng của chúng ≥ 39 .
- * Giải: gọi các số trên vòng tròn là $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{25}\}$, ta được 25 bộ 3 số liên tiếp. **Giả sử tổng của tất cả 25 bộ đó đều < 39** , tức là:

$$\begin{array}{ll} a_1 + a_2 + a_3 & < 39 \\ a_2 + a_3 + a_4 & < 39 \\ \dots & < 39 \\ a_{25} + a_1 + a_2 & < 39 \\ \Rightarrow 3(1 + 2 + \dots + 25) & < 25 * 39 \\ \Leftrightarrow 3\left(\frac{25*26}{2}\right) & < 25 * 39 \\ \Leftrightarrow 0 & \text{từ mâu thuẫn} \Rightarrow (\text{đpcm}) \end{array}$$

Các phương pháp suy diễn (9/10)

Phương pháp quy nạp:

$$p(n_0) \wedge (\forall n \geq n_0, p(n) \rightarrow p(n+1))$$



$$\forall n \geq n_0, p(n)$$

* **Giải thích:** Giả sử p đúng tại n_0 . Và, nếu (chứng minh được) p đúng tại n kéo theo p cũng đúng tại $n+1 \forall n \geq n_0$, thì p đúng với mọi $n \geq n_0$.

Các phương pháp suy diễn (10/10)

Phương pháp quy nạp:

- * Ví dụ: chứng minh rằng

$$p(n) : 1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2, \forall n > 0, n \in \mathbb{Z}$$

- * Giải:

- + Bước cơ sở: ta thấy $p(1)$ đúng.
- + Bước quy nạp (với $n > 1$): giả sử $p(n)$ đúng, tức là $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$. Ta sẽ chứng minh $p(n + 1)$ cũng đúng. Thật vậy, ta có:
 $1 + 3 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$ (đpcm).

Thảo luận (1/5)

Hãy lấy những ví dụ để thấy rằng:

- * Xác định chân trị của một mệnh đề là **dễ**
- * Xác định chân trị của một mệnh đề là **khó hoặc rất khó**

Điền vào dấu ??? trong đoạn hội thoại giữa Vua & Nhà thông thái (để ông thoát khỏi cái chết):

- * Vua: Người hãy nói 1 câu, nếu đúng người bị xử chặt đầu, nếu sai sẽ treo cổ người.
- * Nhà thông thái: ???

Vấn đề đặt ra:

- + Câu mà Nhà thông thái sẽ nói có thể là mệnh đề không? Vì sao?

Thảo luận (2/5)

Những suy luận dựa trên giả thiết sai thì:

- * Chúng có luôn đúng không? Vì sao?
- * Chúng có ý nghĩa gì không?

Biểu diễn phép toán này qua phép toán khác:

- * Có thể biểu diễn 5 phép toán (phủ định, hội, tuyển, kéo theo & tương đương) **chỉ bằng 2 phép toán phủ định và tuyển** không? Vì sao?

Thảo luận (3/5)

Logic trong lập trình:

- * Có nên viết câu lệnh: $\text{if}((p \rightarrow q) \vee \overline{(p \rightarrow q)})\{\text{Khởi lệnh}\}$ không? Vì sao?
- * Lập trình viên có "nguy cơ" viết câu lệnh tương tự như vậy không?

Suy diễn trong thực tế:

- * Bạn có "suy diễn" không? Ví dụ?
- * Nó có luôn đúng không? Vì sao?
- * Nó khác gì so với suy diễn logic đã học?
- * Bạn có đề xuất gì để biểu diễn chân trị của những "mệnh đề" không chắc chắn?

Thảo luận (4/5)

Suy diễn trong lập trình:

- * Theo bạn, có thể lập trình cho máy tính "biết" suy diễn không? Giải pháp?

Về phương pháp phản chứng:

- * Bạn đã bao giờ tranh luận theo kiểu:
"Được, cứ cho là anh (chị, cô, bác, ...) đúng đi nhé, thế thì ..., thế thì ..., ... hóa ra **chạch đẻ ngọn đa** à. Đây mâu thuẫn rồi còn gì!".
Nó chính là phản chứng đấy!
- * Vậy lợi ích (trong khoa học & trong thực tế) của phương pháp phản chứng là gì?

Thảo luận (5/5)

Về phương pháp quy nạp:

- * Có khi nào bạn nghi ngờ tính đúng đắn của thuật toán tính tổng

$$S = 1 + 2 + \dots + n$$

Sao không thử chứng minh nó, bằng quy nạp?

- * Hãy tìm mối liên hệ giữa các công thức quy nạp:

$$S = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

với các hình sau:

O	O	O	O
O	O	O	X
O	O	X	X
O	X	X	X
X	X	X	X

X	X	X	X
X	X	X	X
X	X	X	X
X	X	X	X

Các bài tập Chương 1: Cơ sở logic Toán rời rạc - GS. Nguyễn Hữu Anh