BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐÔNG Á

ThS. NGUYỄN HỒNG NHUNG

GIÁO TRÌNH TOÁN ỨNG DỤNG

LƯU HÀNH NỘI BỘ

Đà Nẵng, 2013

CHƯƠNG I HÀM MỘT BIẾN

1 Hàm số một biến số

1.1 Khái niệm hàm số

1.1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1. Cho $X \subset \mathbb{R}, X \neq \varnothing$. Một *hàm số* f từ X vào $\mathbb{R}$ là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với một và chỉ một số thực y.

Kí hiệu

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y$$

hay $y = f(x)$với $x \in X$.

Số x được gọi là *biến số độc lập* và $y = f(x)$ được gọi là *giá trị* của hàm số f tại x.

Tập X được gọi là *tập xác định* của hàm f.

Đặt $Y = f(X)$ với $f(X) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x), x \in X\}$. Khi đó Y được gọi là *tập giá trị* của hàm f.

Đồ thị của hàm f là tập hợp tất cả các điểm $M(x, f(x))$ $(x \in X)$ trong mặt phẳng tọa độ Đềcác vuông góc Oxy.

***Ví dụ* 1.** Cho hàm số $f(x) = x^3 + 1$. Tìm $f(1), f(-2)$.

Giải.

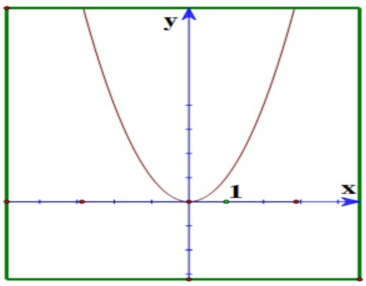
$f(1) = 1^3 + 1 = 2$; $f(-2) = (-2)^3 + 1 = -7$

***Ví dụ* 2.**

Hàm số

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2$$

có tập xác định là $\mathbb{R}$, tập giá trị là $[0; +\infty)$.



Hình 1: $y = x^2$

1.2 Hàm số đơn điệu - Hàm số bị chặn - Hàm số chẵn, hàm số lẻ - Hàm số tuần hoàn

1.2.1 Hàm số đơn điệu

Định nghĩa 2.

i) Ta nói hàm số $f(x)$ gọi là tăng (giảm) trong khoảng (a, b) nếu:

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)(f(x_1) \geq f(x_2)).$$

ii) Hàm $f(x)$ được gọi là tăng ngặt (giảm ngặt) trong khoảng (a, b) nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)(f(x_1) > f(x_2)).$$

iii) Hàm số tăng (ngặt) hay giảm (ngặt) được gọi chung là hàm đơn điệu (ngặt).

Đồ thị của hàm số tăng là một đường đi lên từ trái sang phải.

Đồ thị của hàm số giảm là một đường đi xuống từ trái sang phải.

Ví dụ 3.

1) Hàm $y = \sin x$ tăng ngặt trên $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Hàm $y = \cos x$ giảm ngặt trên $[0, \pi]$.

2) Hàm $y = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{nếu } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ không tăng cũng không giảm trên $\mathbb{R}$.

1.2.2 Hàm số bị chặn

Định nghĩa 3.

i) Hàm số f được gọi là *bị chặn trên* trên tập $D \subset \mathbb{R}$ nếu tồn tại số M sao cho $f(x) \leq M, \forall x \in D$.

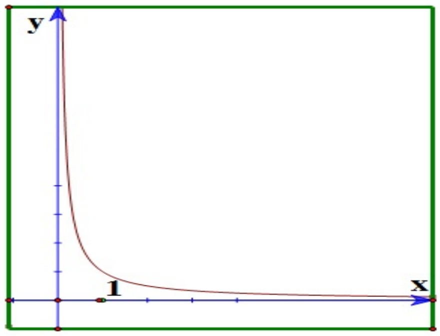
ii) Hàm f được gọi là *bị chặn dưới* trên tập $D \subset \mathbb{R}$ nếu tồn tại một số m sao cho $f(x) \geq m, \forall x \in D$.

iii) Hàm f vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới trên D được gọi là *bị chặn* trên D.

Ví dụ 4.

Ta có: $\dfrac{1}{x} > 0, \forall x \in (0, +\infty)$.

Vậy trên $(0, +\infty)$, hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$ bị chặn dưới nhưng không bị chặn trên.



Hình 2: $y = \dfrac{1}{x}$

1.2.3 Hàm số chẵn - hàm số lẻ

Định nghĩa 4.

Hàm số $f(x)$ xác định trên tập X đối xứng (tức là nếu $x \in X$ thì $-x \in X$)

Hàm f được gọi là chẵn nếu $f(-x) = f(x),\ \forall x \in X$.

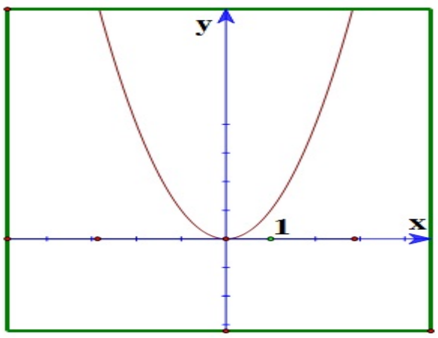
Hàm f được gọi là lẻ nếu $f(-x) = -f(x),\ \forall x \in X$.

Đồ thị hàm số chẵn đối xứng qua truc Oy. Đồ thị hàm số lẻ đối xứng qua gốc tọa độ O.

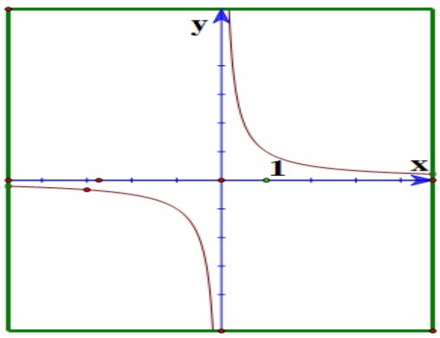
***Ví dụ* 5.**

1) Hàm số $y = x^2$ là hàm số chẵn.

2) Hàm số $y = \dfrac{1}{x}$ là hàm số lẻ.



Hình 3: $y = x^2$



Hình 4: $y = \dfrac{1}{x}$

1.2.4 Hàm số tuần hoàn

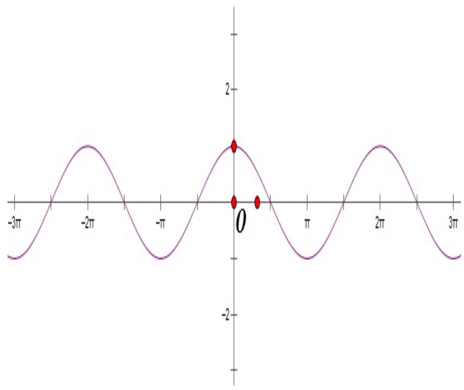
Định nghĩa 5. Hàm số $f(x)$ xác định trên tập X được gọi là tuần hoàn nếu tồn tại số t thỏa mãn: $\forall x \in X$ thì $x + t \in X$ và $f(x + t) = f(x)$.

Số T dương, nhỏ nhất thỏa mãn đẳng thức trên gọi là chu kì của hàm số tuần hoàn.

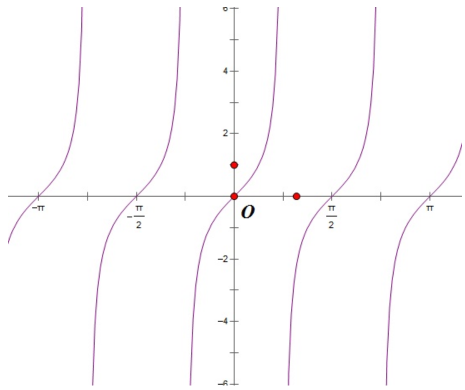
Ví dụ 6.

1)Hàm số $y = \cos x$ xác định $\forall x \in R$ và tuần hoàn với chu kì 2π.

2) Hàm số $y = \tan 2x$ xác định trên tập $D = R \setminus \{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\}$ và tuần hoàn với chu kì $\frac{\pi}{2}$.



Hình 5: $y = \cos x$



Hình 6: $y = tan2x$

1.3 Hàm số hợp - Hàm số ngược

1.3.1 Hàm số hợp

Định nghĩa 6. Cho hai hàm số $f(x)$ xác định trên tập X, $g(x)$ xác định trên tập Y sao cho $f(X) \subset Y$ (tập xác định của g chứa tập giá trị của f).

Hàm hợp của f và g là một hàm, kí hiệu $F = gof$;

$$F(x) = gof(x) = g(f(x)), \forall x \in X.$$

Ví dụ 7.

Cho hai hàm $f(x) = x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ và $g(x) = \cos x, x \in [0, 2\pi]$.

Khi đó hàm hợp là $f[g(x)] = \cos^2(x) + 1,\ x \in [0, 2\pi]$.

1.3.2 Hàm số ngược

Bây giờ, giả sử f là một hàm xác định trên D và đơn điệu ngặt trên D. Khi đó, với bất kỳ $y \in D' = f(D)$ ta xác định được duy nhất một $x \in D$ sao cho $f(x) = y$.

Từ đó ta có khái niệm về hàm ngược như sau:

Định nghĩa 7. Cho là một hàm xác định trên D, đơn điệu ngặt trên D và có tập giá trị là D' ($D' = f(D)$). Hàm ngược của hàm f là một hàm (ký hiệu f^{-1}) có tập xác định là D', tập giá trị là D và được xác định bởi

$$f^{-1} : D' \longrightarrow D$$

$$y \longmapsto x$$

với $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ với mọi $y \in D'$.

Đồ thị của hai hàm số f và f^{-1} đối xứng với nhau qua đường phân giác thứ nhất.

1.3.3 Cách tìm hàm ngược của hàm f

Bước 1: Viết $y = f(x)$.

Bước 2: Giải phương trình này cho x theo y (nếu có thể).

Bước 3: Biểu diễn f^{-1} như hàm số theo x bằng cách đổi x thành y và y thành x. Phương trình kết quả là $y = f^{-1}(x)$.

***Ví dụ* 8.** Tìm hàm ngược của hàm $f(x) = x^3 + 2,\ x \in \mathbb{R}$.
Giải:

Ta có

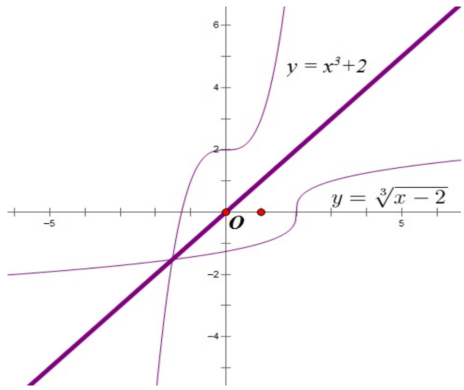
$$y = x^3 + 2 \Leftrightarrow x^3 = y - 2 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y-2}.$$

Đổi x thành y và y thành x ta được:

$$y = \sqrt[3]{x-2}$$

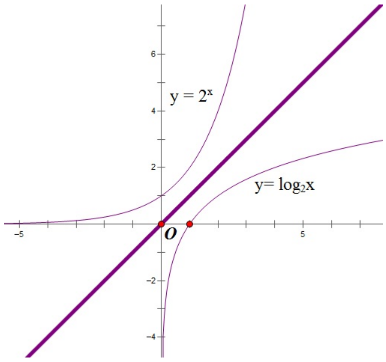
Vậy hàm ngược của hàm f là

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2},\ x \in \mathbb{R}$$



Hình 7: $y = x^3 + 2$

***Ví dụ* 9.** Hàm số $y = 2^x, x \in \mathbb{R}$ có hàm số ngược là $y = \log_2 x$ xác định trên khoảng $(0, +\infty)$.



Hình 8: $y = 2^x$ và $y = \log_2 x$

2 Hàm số sơ cấp

2.1 Các hàm số sơ cấp cơ bản

Các hàm số sau đây được gọi là các hàm số sơ cấp cơ bản:

1. Hàm số lũy thừa: $x \mapsto x^\alpha, \alpha \in R$;

2. Hàm số lũy mũ: $x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$;

3. Hàm số logarit: $x \mapsto \log_a x, a > 0, a \neq 1$;

4. Các hàm số lượng giác: $x \mapsto \sin x, x \mapsto \cos x, x \mapsto \tan x, x \mapsto \cot x$

5. Các hàm số lượng giác ngược: $x \mapsto \arcsin x, x \mapsto \arccos x, x \mapsto \arctan x, x \mapsto$ arccot$x$

2.2 Hàm số sơ cấp

Hàm số sơ cấp là những hàm số được tạo thành bởi một số hữu hạn các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia), các phép lấy hàm số hợp đối với các hàm số sơ cấp cơ bản và các hằng số.

3 Giới hạn của hàm số

3.1 Các định nghĩa giới hạn

3.1.1 Lân cận

Cho điểm $x_0 \in \mathbb{R}$, và $\delta > 0$. Khi đó ta nói:

Khoảng $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, là $\delta-$ lân cận của điểm x_0.

Khoảng $(x_0 - \delta, x_0)$, là $\delta-$ lân cận trái của điểm x_0.

Khoảng $(x_0, x_0 + \delta)$, là $\delta-$ lân cận phải của điểm x_0.

Tập hợp U chứa một $\delta-$lân cận của x_0 được gọi là một lân cận của x_0, thường ký hiệu là $U(x_0)$.

3.1.2 Định nghĩa

Định nghĩa 8.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trong lân cận $U(x_0)$ (có thể trừ x_0). Số L được gọi là giới hạn của hàm số $f(x)$ khi x dần tới (x_0) nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ cho trước nhỏ tùy ý luôn tồn tại số $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in U(x_0),\ 0 < |x - x_0| < \delta$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$.

***Ví dụ* 10.** Dùng định nghĩa để chứng minh rằng: $\lim\limits_{x \to 2}(3x + 4) = 10$.

Ta có: $|(3x+4) - 10| < \varepsilon \Leftrightarrow |3x - 6| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Khi đó, với mọi $\varepsilon > 0$, ta chọn $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}(> 0)$ ta có: nếu $0 < |x - 2| < \delta$ thì $|(3x + 4) - 10| < \varepsilon$.

Vậy $\lim\limits_{x \to 2}(3x + 4) = 10$.

Định nghĩa 9. (*Giới hạn một phía*)

a) Cho hàm số $f(x)$ xác định trong nửa khoảng $(a, x_0]$, có thể trừ x_0, số L_1 được gọi là giới hạn trái của hàm $f(x)$ khi x dần đến $x_0 (x < x_0)$ nếu với mỗi ε cho trước nhỏ tùy ý luôn tồn tại số $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in (a, x_0],\ 0 < x_0 - x < \delta$ thì $|f(x) - L_1| < \varepsilon$.

Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L_1$ hoặc $f(x) \to L_1$ khi $x \to x_0^-$.

b) Cho hàm số $f(x)$ xác định trong nửa khoảng $[x_0, b)$, có thể trừ x_0, số L_2 được gọi là giới hạn trái của hàm $f(x)$ khi x dần đến $x_0 (x > x_0)$nếu với mỗi ε cho trước nhỏ tùy ý luôn tồn tại số $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in [x_0, b),\ 0 < x - x_0 < \delta$ thì $|f(x) - L_2| < \varepsilon$.

Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L_2$ hoặc $f(x) \to L_2$ khi $x \to x_0^+$.

Định lý 3.1. Điều kiện cần và đủ để tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ là $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ đều tồn tại và

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L.$$

Định nghĩa 10. (*Giới hạn ở vô tận*)

Cho hàm số $f(x)$ xác định tại mọi x có $|x|$ lớn tùy ý.

a)Số L được gọi là giới hạn của $f(x)$ khi x dần tới dương vô cùng $(x \to +\infty)$ nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ cho trước nhỏ tùy ý, tồn tại số $M > 0$ khá lớn sao cho khi $x > M$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

b) Số L được gọi là giới hạn của $f(x)$ khi x dần tới âm vô cùng $(x \to -\infty)$ nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ cho trước nhỏ tùy ý, tồn tại số $M > 0$ khá lớn sao cho khi $x < -M$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$.

Định nghĩa 11. (*Giới hạn vô tận*)

Cho hàm số $f(x)$ xác định trong một lân cận $U(x_0)$

a) Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là $+\infty$ khi $x \to x_0$ nếu với mỗi số $A > 0$ lớn tùy ý luôn tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in U(x_0),\ 0 < |x - x_0| < \delta$ thì $f(x) > A$.

Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

b) Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là $-\infty$ khi $x \to x_0$ nếu với mỗi số $A > 0$ lớn tùy ý luôn tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in U(x_0),\ 0 < |x - x_0| < \delta$ thì $f(x) < -A$.

Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

***Ví dụ* 11.** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.

3.2 Giới hạn của các hàm số sơ cấp cơ bản

Để thực hiện việc tính giới hạn của hàm số, ta cần ghi nhớ một số công thức dưới đây:

1) Hàm số lũy thừa:

* $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty, & \text{nếu } \alpha > 0, \\ 0, & \text{nếu } \alpha < 0. \end{cases}$

* $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0, & \text{nếu } \alpha > 0, \\ +\infty, & \text{nếu } \alpha < 0. \end{cases}$

2) Hàm số mũ:

* $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{nếu } a > 1, \\ +\infty, & \text{nếu } 0 < a < 1. \end{cases}$

$$* \lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & \text{nếu } a > 1, \\ 0, & \text{nếu } 0 < a < 1. \end{cases}$$

3) Hàm số logarit:

$$* \lim_{x\to 0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & \text{nếu } a > 1, \\ +\infty, & \text{nếu } 0 < a < 1. \end{cases}$$

$$* \lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & \text{nếu } a > 1, \\ -\infty, & \text{nếu } 0 < a < 1. \end{cases}$$

4) Các hàm lượng giác:

Các hàm số $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$ không có giới hạn khi $x \to -\infty, x \to +\infty$.

$$* \lim_{x\to(\frac{\pi}{2}+k\pi)^-} \tan x = +\infty; \lim_{x\to(\frac{\pi}{2}+k\pi)^+} \tan x = -\infty; k \in \mathbb{Z}$$

$$* \lim_{x\to(k\pi)^+} \cot x = +\infty; \lim_{x\to(k\pi)^-} \cot x = -\infty; k \in \mathbb{Z}$$

5) Các hàm lượng giác ngược:

$$* \lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}; \lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}.$$

3.3 Các tính chất của giới hạn

Định lý 3.2. Giả sử $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ và $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2$. Khi đó ta có:

a) $\lim\limits_{x\to a} C.f(x) = C.\lim\limits_{x\to a} f(x) = C.L_1$*; với C là hằng số;*

b) $\lim\limits_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = L_1 + L_2$*;*

c) $\lim\limits_{x\to a}[f(x).g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x).\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_1.L_2$*;*

d) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ nếu $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2 \neq 0$.

Nhận xét:

Trường hợp (b): Khi $L_1 = +\infty$ và $L_2 = -\infty$ thì về mặt hình thức ta có dạng $\infty - \infty$, đó là một dạng vô định (nghĩa lad chưa khẳng định được $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ có hay không.

Trường hợp (c): Khi $L_1 = 0$ và $L_2 = \infty$ thì về mặt hình thức ta có dạng $0.\infty$, đó là một dạng vô định.

Trường hợp (d): Khi $L_1 = 0(\infty)$ và $L_2 = 0(\infty)$ thì về mặt hình thức ta có dạng $\dfrac{0}{0}$ hoặc $\dfrac{\infty}{\infty}$, đó là một dạng vô định.

Khi gặp các dạng vô định đó, muốn tính giới hạn tùy từng trường hợp phải tìm cách để khử dạng vô định.

***Ví dụ* 12.** Xét $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

Có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$. Nhân liên hiệp tử và mẫu với $\sqrt{1+x}+1$, ta được

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\dfrac{1}{2}$

Định lý 3.3. Cho hàm hợp $f\circ u: x\mapsto (f\circ u)(x)=f[u(x)]$.

Nếu ta có $\lim\limits_{x\to a}u(x)=u_0$, $f(u)$ xác định trong lân cận u_0 (có thể trừ u_0) và có $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$ thì $\lim\limits_{x\to a}f[u(x)]=A$.

Định lý 3.4. Giả sử $f(x),g(x),h(x)$ là những hàm số cùng xác định trong lân cận $U(x_0)$ (có thể trừ x_0) và trong lân cận đó có $f(x)\le g(x)\le h(x)$. Khi đó nếu $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=L$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=L$.

***Ví dụ* 13.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

***Ví dụ* 14.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$.

3.4 Vô cùng bé - Vô cùng lớn

3.4.1 Vô cùng bé

Định nghĩa 12. Hàm số $f(x)$ được gọi là một vô cùng bé, viết tắt là VCB khi $x\to x_0$ nếu: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

***Ví dụ* 15.** Khi $x\to 0$ thì $\sin x$ là 1 VCB, x cũng là 1 VCB.

Các tính chất của VCB

i) Nếu $f(x)$ là VCB khi $x\to x_0$ thì $C.f(x)$ (C: hằng số) cũng là VCB khi $x\to x_0$.

ii) Các định lí về tổng, tích, thương các VCB được suy trực tiếp từ đinh lí tổng, tích, thương các đại lượng có giới hạn .

So sánh các VCB

Cho $f_1(x)$ và $f_2(x)$ là 2 VCB khi $x\to x_0$. Khi đó:

i) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=0$ thì ta nói rằng $f_1(x)$ có bậc cao hơn $f_2(x)$, kí hiệu: $f_1(x)=o(f_2(x)), x\to x_0$.

ii) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = C, C \neq 0$ thì ta nói rằng $f_1(x)$ cùng bậc với $f_2(x)$, kí hiệu: $f_1(x) = O(f_2(x)), x \to x_0$.

Đặc biệt nếu $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1$ thì ta nói rằng $f_1(x)$ tương đương với $f_2(x)$ khi $x \to x_0$, kí hiệu: $f_1(x) \sim f_2(x), x \to x_0$.

Ví dụ 16.

Khi $x \to 0$ thì $1 - \cos x$ là VCB cấp cao hơn VCB x.

Khi $x \to 0$ thì $\sin x$ và x^2 là 2 VCB cùng cấp.

Khi $x \to 0$ thì $\sin x$ và x là 2 VCB tương đương.

Ta có các VCB tương đương sau:

Khi $x \to 0 : \sin ax \sim ax, \tan ax \sim ax, 1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}, e^x - 1 \sim x, ln(x+1) \sim x$

Ứng dụng VCB tương đương để khử dạng vô định $\dfrac{0}{0}$

i) Nếu $f(x) \sim (f_1(x)), g(x) \sim (g_1(x)), x \to x_0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$

ii) *Quy tắt ngắt bỏ VCB cấp cao*: giả sử $f(x), g(x)$ là 2VCB khi $x \to x_0$ và $f(x), g(x)$ đều là tổng của nhiều VCB. Khi đó, giới hạn của tỉ số $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ bằng giới hạn của tỉ số hai VCB cấp thấp nhất ở tử và mẫu.

Ví dụ 17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\ln(1+2x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{2x} = \dfrac{3}{2}$

Ví dụ 18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x + \sin^3 x}{2x + x^2 + 3x^4} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2}$

3.4.2 Vô cùng lớn

Định nghĩa 13. Hàm số $f(x)$ được gọi là một vô cùng lớn, viết tắt là VCL khi $x \to x_0$ nếu: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$.

Ví dụ 19. Khi $x \to 0$ thì $\dfrac{1}{x}$ là 1 VCL.

Các tính chất của VCL

i) Nếu $f(x)$ là VCL khi $x \to x_0$ thì $C.f(x)$ (C: hằng số) cũng là VCL khi $x \to x_0$.

ii) Các định lí về tổng, tích, thương các VCL được suy trực tiếp từ đinh lí tổng, tích, thương các đại lượng có giới hạn .

So sánh các VCL

Cho $f_1(x)$ và $f_2(x)$ là 2 VCB khi $x \to x_0$. Khi đó:

i) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \infty$ thì ta nói rằng $f_1(x)$ có bậc cao hơn $f_2(x)$.

ii) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = C, C \neq 0$ thì ta nói rằng $f_1(x)$ cùng bậc với $f_2(x)$.

Đặc biệt nếu $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1$ thì ta nói rằng $f_1(x)$ tương đương với $f_2(x)$ khi $x \to x_0$, kí hiệu: $f_1(x) \sim f_2(x), x \to x_0$.

Ứng dụng VCL để khử dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$

i) Nếu $f(x) \sim (f_1(x)), g(x) \sim (g_1(x)), x \to x_0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$

ii) *Quy tắt ngắt bỏ VCB cấp thấp*: giả sử $f(x), g(x)$ là 2VCL khi $x \to x_0$ và $f(x), g(x)$ đều là tổng của nhiều VCL. Khi đó, giới hạn của tỉ số $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ bằng giới hạn của tỉ số hai VCB cấp cao nhất ở tử và mẫu.

Ví dụ 20. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^3 + x^2 - 4x}{x^3 - 3x^2 + x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^3}{{}^3x} = 3$

4 Sự liên tục của hàm số

4.1 Định nghĩa

Định nghĩa 14. Cho hàm f xác định trong khoảng (a; b). Ta nói hàm $f(x)$ *liên tục* tại điểm $x_0 \in (a; b)$ nếu: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Hàm số không liên tục tại điểm x_0 được gọi là gián đoạn tại điểm x_0.

Định nghĩa 15. Cho hàm f xác định trong một lân cận $(x_0 - \delta, x_0)$. Nếu: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ thì ta nói hàm $f(x)$ *liên tục trái* tại điểm x_0

Định nghĩa 16. Cho hàm f xác định trong một lân cận $(x_0, x_0 + \delta)$. Nếu: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ thì ta nói hàm $f(x)$ *liên tục phải* tại điểm x_0

Định nghĩa 17. Hàm f được gọi là *liên tục trên khoảng* (a, b) nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó. Nếu nó liên tục trên khoảng (a, b) và liên tục trái tại b, liên tục phải tại a ta nói f liên tục trên $[a, b]$.

***Ví dụ* 21.** Hàm số $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{nếu } x \le 0, \\ x-1 & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$

xác định tại mọi $x \in \mathbb{R}$ nhưng $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -1 \neq 1 = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

Vậy $x = 0$ là điểm gián đoạn của hàm số.

***Ví dụ* 22.** Xét tính liên tục của hàm số sau trên R: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{nếu } x \neq 0, \\ a & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

Giải.

Tập xác định của hàm số: R. Với $x \neq 0$, hàm số liên tục.

Với $x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1, f(0) = a$

Nếu $a = 1$ thì hàm số liên tục tại $x = 0$

Nếu$a \neq 1$ thì hàm số gián đoạn tại $x = 0$

Vậy $a = 1$ thì hàm số liên tục trên R, $a \neq 1$ thì hàm số liên tục tại mọi điểm $x \neq 0$

4.2 Các tính chất của hàm liên tục

Định lý 4.1. *Nếu hàm f liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì f bị chặn trên đoạn $[a, b]$, tức là tồn tại hai số M và m sao cho $m \le f(x) \le M, \forall x \in [a, b]$. Hơn nữa f đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó, tức là có $\alpha, \beta, \beta \in [a, b]$ để*

$$f(\beta) = \min_{x\in[a,b]} f(x) \text{ và } f(\alpha) = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Định lý 4.2. *(Định lý về giá trị trung gian)*

Nếu hàm f liên tục trên đoạn $[a, b]$, m và M là các giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của nó trên đoạn đó thì với mọi số μ nằm giữa m và M, luôn tồn tại điểm $x_0 \in [a, b]$ sao cho: $f(x_0) = \mu$.

Hệ quả:

Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$, $f(a).f(b) < 0$ thì trong khoảng (a, b) tồn tại một điểm x_0 sao cho $f(x_0) = 0$.

4.3 Sự liên tục đều

Hàm số $f(x)$ liên tục trong khoảng (a, b) được gọi là liên tục đều trong (a, b) nếu với $\epsilon > 0$ bất kì luôn tìm được $\delta > 0$ sao cho với bất kì $u, v \in (a, b)$ thỏa mãn

$$|u - v| < \delta \text{thì kéo theo} |f(u) - f(v)| < \epsilon$$

Định lý 4.3. *(định lí Heine) Hàm số* $f(x)$ *liên tục trong khoảng đóng* $[a, b]$ *thì* $f(x)$ *liên tục đều trong* $[a, b]$.

CHƯƠNG II ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

1 Đạo hàm của hàm số

1.1 Đạo hàm

1.1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1. Cho hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng (a, b). Ta nói rằng hàm số $f(x)$ *khả vi tại điểm* $x_0 \in (a, b)$ nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$$

Giới hạn này được gọi là đạo hàm của hàm f tại điểm x_0 và được kí hiệu là $f'(x_0)$.

Hàm số f có đạo hàm tại điểm x_0 được gọi là khả vi tại điểm x_0.

Nếu hàm số $f(x)$ *khả vi tại mọi điểm* $x \in (a, b)$ thì ta nói rằng $f(x)$ *khả vi trong khoảng* (a, b).

Nhận xét: Nếu đặt $\Delta x = x - x_0$ thì biểu thức định nghĩa trở thành:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(c)$$

Vậy đạo hàm tại $x = x_0$ của hàm $f(x)$ chính là giới hạn của tỉ số giữa số gia của hàm số tại điểm $x = x_0$ (tức là hiệu $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$) với số gia của đối số tại điểm $x = x_0$ (tức là hiệu $x_0 + \Delta x - x_0$).

1.1.2 Cách tính đạo hàm theo định nghĩa

Đặt $\Delta x = x - x_0$: số gia của đối số

Tính $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$: số gia của hàm số

Đạo hàm của hàm số: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Ví dụ 1.

(1) Xét hàm số $f(x) = a, x \in \mathbb{R}$ thì $f'(x) = 0$.

Thật vậy, ta có: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = a - a = 0$

Suy ra $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

(2) Xét hàm số $f(x) = x, x \in \mathbb{R}$.

Ta có $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = x + \Delta x - x = \Delta x$

suy ra, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

Vậy $f'(x) = 1$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

(3) Xét hàm số $f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin(\frac{\Delta x}{2})\cos(x + \frac{\Delta x}{2}).$$

Suy ra

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin(\frac{\Delta x}{2})\cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) = \cos x.$$

Vậy $f'(x) = \cos x$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

1.2 Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Nếu vẽ đồ thị của hàm số $f(x)$ trong một hệ tọa độ Decart vuông góc thì tỉ số $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ chính là hệ số góc của dây cung M_0M với $M_0(x_0, f(x_0))$ và $M(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$.

Khi cho $\Delta x \to 0$ thì điểm M trên đồ thị tiến đến điểm M_0, do vậy, cát tuyến M_0M tiến đến tiếp tuyến tại điểm M_0. Vậy, đạo hàm tại mỗi điểm chính là tiếp tuyến của đồ thị của $f(x)$ tại điểm đó.

Hàm số f có đạo hàm $f'(x_0)$ tại điểm x_0 khi và chỉ khi đồ thị (C) có tiếp tuyến tại điểm M_0 với hệ số góc $f'(x_0)$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số f tại điểm M_0 là:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

1.3 Các quy tắc tính đạo hàm

Định lý 1.1. *Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số xác định trên (a, b), giả sử $f(x)$ và $g(x)$ đều có đạo hàm tại $x \in (a, b)$. Khi đó $f(x) \pm g(x), f(x)g(x)$ cũng có đạo hàm tại x và*

1. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$,
2. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, *đặc biệt* $(cf(x))' = cf'(x)$.
3. *Nếu* $g(x) \neq 0$ *thì* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *cũng có đạo hàm tại* x *và* $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Từ (3) ta suy ra

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}.$$

Định lí sau đây cho ta cách tính đạo hàm của hàm số hợp.

Định lý 1.2 (Đạo hàm của hàm hợp)**.** *Nếu $u = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 và $y = g(u)$ có đạo hàm tại $u_0 = f(x_0)$, thì gof cũng có đạo hàm tại x_0 và*

$$(gof)'(x_0) = \{g[f(x_0)]\}' = g'(u_0).f'(x_0).$$

(Vế phải là: đạo hàm của y theo u nhân với đạo hàm của u theo x).

***Ví dụ* 2.** Hàm số $y = \sin x^2$ là hợp của hai hàm $y = \sin u$ và $u = x^2$. Ta có $y'(u) = \cos u$ và $u'(x) = 2x$. Do đó $y'(x) = \cos(x^2)2x$.

Định lý 1.3. *Giả sử $x = f(y)$ có đạo hàm tại $y_0 \in (a, b)$ và $f'(y_0) \neq 0$. Nếu tồn tại hàm ngược $y = g(x)$ liên tục tại $x_0 = f(y_0)$ thì tồn tại đạo hàm $g'(x_0)$ và*

$$g'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)}.$$

***Ví dụ* 3.** Cho $x = f(y) = y^2$, $y \in (0, \infty)$. Dễ dàng thấy rằng f có hàm ngược $y = g(x) = f^{-1}(x) = x$. Ta áp dụng định lý trên và có ngay kết quả.

$$g'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Chẳng hạn, để tính đạo hàm của hàm số $y = \arcsin x$ ta có thể tính thông qua hàm số $y = \sin x$. Vì hàm số $y = \sin x$ có hàm số ngược là $x = \arcsin y$. Theo công thức tính đạo hàm của hàm số ngược ta có $(\arcsin y)' = \dfrac{1}{(\sin x)'} = \dfrac{1}{\cos x}$.

Mặt khác, $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - y^2}$. Vậy $(\arcsin y)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$ hay

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

1.4 Bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản

1. $(c)' = 0$	2. $(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}$
3. $(e^x)' = e^x$	4. $(a^x)' = a^x \ln a$
5. $(\ln\|x\|)' = \dfrac{1}{x}, x \neq 0$	6. $(\log_a \|x\|)' = \dfrac{1}{x \ln a}, x \neq 0$
7. $(\sin x)' = \cos x$	8. $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
9. $(\cos x)' = -\sin x$	10. $(\cot x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$
11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, x \in (-1; 1)$	12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, x \in (-1; 1)$
13. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$	14. $(\text{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

1.5 Đạo hàm vô cùng, đạo hàm một phía

Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a, b), x_0 \in (a, b)$.

Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ thì ta nói rằng đạo hàm của hàm số f tại x_0 bằng $+\infty$ và viết là $f'(x_0) = +\infty$. Định nghĩa tương tự với $f'(x_0) = -\infty$.

Đạo hàm một phía

Giả sử hàm số f xác định trong khoảng $[x_0, b]$ (hoặc $[a, x_0]$). Nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in R$$

hoặc

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in R$$

thì giới hạn này gọi là *đạo hàm phải* (hoặc *đạo hàm trái*) của f tại điểm x_0, kí hiệu: $f'_+(c)$ (hoặc $f'_-(c)$).

1.6 Đạo hàm cấp cao

Cho f là một hàm có đạo hàm trong khoảng (a, b). Khi đó ta có một hàm số mới f' xác định bởi

$$\begin{array}{rccc} f': & (a,b) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f'(x). \end{array}$$

Định nghĩa 2. i) Nếu hàm f' có đạo hàm $(f')'(x_0)$ tại điểm $x_0 \in (a, b)$ thì số $(f')'(x_0)$ được gọi là *đạo hàm cấp 2* của hàm f tại x_0 và được kí hiệu là $f''(x_0)$. Vậy:

$$f''(x_0) = (f')'(x_0).$$

Một cách tổng quát ta có định nghĩa

ii) Nếu hàm f có đạo hàm cấp $n-1, n \in \mathbb{N}^*$ trong một lân cận U của $x_0 \in (a, b)$. Khi đó nếu hàm

$$\begin{array}{rccc} f^{(n-1)}: & (a,b) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f^{(n-1)}(x) \end{array}$$

có đạo hàm tại điểm x_0 thì đạo hàm này $(f^{(n-1)})'(x_0)$ được gọi là *đạo hàm cấp n* của f tại x_0 và được kí hiệu là $f^{(n)}(x_0)$.

Vậy $f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)$.

iii) Ta nói hàm f có đạo hàm cấp n (hay khả vi cấp n) trên (a, b) nếu nó có đạo hàm cấp n tại mọi điểm $x \in (a, b)$.

Đạo hàm f' được gọi là *đạo hàm cấp 1* của f. Ta cũng quy ước đạo hàm cấp 0 của f chính là f.

Ta cũng nói f khả vi liên tục đến cấp n trên (a, b) nếu f khả vi đến cấp n trên (a, b) và $f^{(n)} : (a, b) \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục.

Ví dụ 4. Giả sử $f(x) = x^n, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

Khi đó $f'(x) = nx^{n-1}$, $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$, ..., $f^{(m)}(x) = n(n-1)...(n-m+1)x^{n-m}$ nếu $m \leq n$ và $f^{(m)}(x) = 0$ nếu $n < m$.

Ví dụ 5.

$$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}.$$
$$f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$
$$f''(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 2\frac{\pi}{2}).$$

Bằng quy nạp ta tính được:

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2}), x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Tương tự: $f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}$ thì

$$f^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2}), x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

$$f(x) = \frac{1}{x+1}, x \neq 1.$$

thì

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(x+1)^{n+1}}.$$

Ví dụ 6. Giả sử u và v là hai hàm số có đạo hàm đến cấp n tại $x_0 \in (a, b)$. Khi đó tích của chúng, $u.v$ xác định trên (a, b) bởi $(uv)(x) = u(x).v(x)$ cũng có đạo hàm đến cấp n tại x_0 và ta có công thức sau gọi là công thức Leibniz

$$(uv)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)}(x_0) v^{(n-k)}(x_0), \text{ trong đó } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{1.1}$$

2 Vi phân

2.1 Khái niệm vi phân

Định nghĩa 3. Một hàm số khả vi tại x, có:

$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$

Tích $f'(x).\Delta x$ được gọi là *vi phân* của $f(x)$ lấy tại điểm x và được kí hiệu là df. Vậy:

$$df = f'(x)\Delta x$$

Vi phân của hàm số $f(df)$ bằng tích số của đạo hàm $(f'(x))$ nhân với số gia của đối số (Δx). Đặc biệt, nếu xét hàm số $f(x) = x$ thì $dx = 1.\Delta x$, nghĩa là $\Delta x = dx$. Do vậy công thức trên có dạng:

$$df = f'(x)dx \text{ hay } f'(x) = \frac{df}{dx}$$

2.2 Vi phân hàm hợp và tính bất biến của vi phân.

Giả sử f là một hàm khả vi theo biến x. Khi đó:

$$df = f'(x)dx.$$

Bây giờ giả sử x lại là một hàm khả vi theo biến t, $x = \varphi(t)$. Khi đó hàm hợp $h = f \circ \varphi$ xác định bởi $h(t) = f(\varphi(t))$ cũng khả vi theo biến t và ta có:

$$h'(t) = f'(\varphi(t)).\varphi'(t).$$

Do đó $dh = f'(\varphi(t)).\varphi'(t)dt$.

Vì $dx = \varphi'(t)dt$ nên có thể viết lại:

$$dh = f'(x)dx, x = \varphi(t).$$

Ta lại được $f'(x)dx$ như vi phân của f đối với biến x coi như là biến độc lập.

Trở lại cách viết truyền thống $y = f(x), x = \varphi(t)$ thì $y = f(\varphi(t))$. Khi đó y vừa có thể coi là hàm của x vừa có thể xem là hàm của t. Lúc này khi xem y là hàm của x và xem x là hàm của t đều có cùng một dạng:

$dy = f'(x)dx$ hay $dy = y'_x dx$.

Điều này có nghĩa là dù cho x là một biến độc lập hay là một hàm theo biến khác thì dạng vi phân của y không thay đổi. Tính chất này ta gọi là tính bất biến dạng vi phân cấp 1.

2.3 Vi phân cấp cao

Định nghĩa 4.

Vi phân cấp 2 của $f(x)$ tại x (tương ứng với dx)(nếu có) là vi phân của vi phân df (vi phân df bây giờ được gọi là vi phân cấp 1), kí hiệu là d^2f và được định nghĩa:

$$d^2f = d(df)$$

Một cách quy nạp ta định nghĩa vi phân cấp $n, n \in \mathbb{N}$ của f tại x, kí hiệu là $d^nf(x)$ là vi phân của vi phân cấp $(n-1)$:

$$d^nf = d(d^{n-1})f)$$

Ví dụ 7. Cho $f(x) = 2x^3 + x^2 + 1$ Tính d^2f.

Ta có: $df = (6x^2 + 2x)dx$

$d^2f = (12x + 2)dx$

Chú ý: Vi phân cấp cao không có dạng bất biến như vi phân cấp một.

Ví dụ 8. Xét $f(x) = x^2$. Ta có: $df = 2xdx$ và $d^2f = 2(dx)^2$

Bây giờ nếu đặt $x = t^2$, khi đó $f = t^4$, $df = 4t^3dt$ và $d^2f = 12t^2(dt)^2$

Mặt khác, ta lại có $d^2f = 2(dx)^2$, lúc này $dx = 2tdt$ nên $d^2f = 2(2tdt)^2 = 8t^2(dt)^2 \neq 12t^2(dt)^2$.

Từ đó cho thấy vi phân cấp cao không có dạng bất biến như vi phân cấp 1.

3 Các định lí hàm khả vi

Định lý 3.1. *(định lí Fermat)*

Nếu hàm số $f : (a, b) \to R$ đạt cực đại tại $c \in (a, b)$ và nếu f khả vi thì $f'(c) = 0$.

Định lý 3.2. *(định lí Rolle)*

Cho hàm số f xác định, liên tục trong khoảng đóng $[a, b]$ và khả vi trong khoảng mở (a, b). Giả sử $f(a) = f(b)$ thì khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Định lý 3.3. *(định lí Lagrange)*

Cho hàm số f xác định, liên tục trong khoảng đóng $[a, b]$ và khả vi trong khoảng mở (a, b), khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Định lý 3.4. *(định lí Cauchy)*

Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số xác định, liên tục trong khoảng đóng $[a, b]$ và $g(a) \neq g(b)$; giả sử $f(x)$ và $g(x)$ khả vi trong khoảng mở (a, b), $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$.

Khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

4 Ứng dụng của đạo hàm

4.1 Tìm các giới hạn dạng vô định

Quy tắc Lôpitan (De L'Hospital)

Quy tắc này cho phép sử dụng đạo hàm để khử các dạng vô định khi tính giới hạn của hàm số.

Định lý 4.1.

Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số xác định, khả vi tại lân cận $x = a$ $(a \in R)$, có thể trừ tại $x = a$.

Nếu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ hoặc $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, $g'(x) \neq 0$ ở lân cận $x = a$.

Và nếu $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ thì $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Nhận xét

i) Trường hợp $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, định lí Lôpitan vẫn đúng.

ii) Khi a là $+\infty$ hoặc $-\infty$ chúng ta vẫn có thể áp dụng quy tắc Lô-pi-tan.

Ví dụ 9. Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x - \sin 2x}{x^3}$.

Ta có $(x^3)' = 3x^2 \neq 0, \forall x \neq 0$;

$\lim\limits_{x \to 0}(2x - \sin 2x) = 0$ và $\lim\limits_{x \to 0} x^3 = 0$.

Ta lại có

$$\lim_{x \to 0} \frac{(2x - \sin 2x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \to 0} \frac{2(1 - \cos 2x)}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{4\sin^2 x}{3x^2} = \frac{4}{3} \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{4}{3}.$$

Theo quy tắc Lôpitan ta suy ra $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x - \sin 2x}{x^3} = \dfrac{4}{3}$.

Thông thường, để cho gọn ta có thể viết như sau:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x - \sin 2x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{(2x - \sin 2x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \to 0} \frac{2(1 - \cos 2x)}{3x^2} = \frac{4}{3}.$$

***Ví dụ* 10.** Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x-\sin x}$.

Áp dụng quy tắc Lô-pi-tan hai lần ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^3)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{(3x^2)'}{(1-\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{\sin x}=6.$$

***Ví dụ* 11.** Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big(x\tan\dfrac{1}{x}\Big)$.

Ta viết lại: $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big(x\tan\dfrac{1}{x}\Big)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\tan\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$.

Ta thấy $\lim\limits_{x\to+\infty}\tan\dfrac{1}{x}=0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

Áp dụng quy tắc Lôpitan ta có:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\tan\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\Big(\tan\frac{1}{x}\Big)'}{\Big(\frac{1}{x}\Big)'}=\lim_{x\to+\infty}(1+\tan^2(\frac{1}{x}))=1.$$

***Ví dụ* 12.** Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\sin 3x}$

Ta thấy $\lim\limits_{x\to 0}(2^x-1)=0$ và $\lim\limits_{x\to 0}\sin 3x=0$.

Áp dụng quy tắc Lôpitan ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{(2^x-1)'}{(\sin 3x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x.\ln 2}{3\cos 3x}=\frac{\ln 2}{3}$$

***Ví dụ* 13.** Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}$

Ta thấy $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

Áp dụng quy tắc Lôpitan ta có:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$$

Nhận xét Đối với những giới hạn thuộc những dạng vô định khác, nhiều trường hợp có thể sử dụng những phép biến đổi đơn giản để đưa về các dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ hay $\dfrac{\infty}{\infty}$ rồi áp dụng quy tắc Lô-pi-tan. Chẳng hạn, nếu $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x).g(x))$ có dạng $0\times\infty$, nghĩa là $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$. Khi đó ta viết lại (với giả thiết phù hợp)

$$f(x).g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

Khi $x \to x_0$ biểu thức thứ hai có dạng vô định $\frac{0}{0}$ còn biểu thức thứ ba có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$.

Với các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$, thường thì người ta lấy logarit biểu thức đó trước khi áp dụng quy tắc Lô-pi-tan. Chẳng hạn cần tìm giới hạn biểu thức $[f(x)]^{g(x)}$ khi $x \to x_0$ (một trong các dạng vô định trên). Khi đó $\ln[f(x)]^{g(x)} = g(x)\ln[f(x)]$ (hiển nhiên với các giả thiết để $\ln[f(x)]$ có nghĩa) lúc này $\lim\limits_{x\to x_0} \ln[f(x)]^{g(x)}$ sẽ có dạng $0 \times \infty$ và có thể xử lí như vừa trình bày trên. Giả sử ta tìm được $\lim\limits_{x\to x_0} \ln[f(x)]^{g(x)} = A$. Do tính liên tục của hàm ln ta sẽ được $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)} = e^A$.

***Ví dụ* 14.** Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot^2 x - \dfrac{1}{x^2}\right)$ (có dạng vô định $\infty - \infty$).

Ta có:

$$\begin{aligned}\cot^2 x - \frac{1}{x^2} &= \frac{x^2\cos^2 x - \sin^2 x}{x^2\sin^2 x} = \frac{x\cos x + \sin x}{x}.\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin^2 x}\\ &= (\cos x + \frac{\sin x}{x}).\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin^2 x}.\end{aligned}$$

Khi $x \to 0$ thừa số thứ nhất có giới hạn là 2 còn thừa số thứ hai có dạng vô định $\frac{0}{0}$.

Áp dụng quy tắc L'Hospital để tìm giới hạn của thừa số thứ 2 khi $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos^2 x - \sin^2 x}{x^2\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x.\sin x}{\sin^2 x + 2x\sin x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{\frac{\sin x}{x} - 2\cos x} = -\frac{1}{3}.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot^2 x - \dfrac{1}{x^2}\right) = 2.(-\dfrac{1}{3}) = -\dfrac{2}{3}$.

***Ví dụ* 15.** Tính giới hạn của biểu thức $y = \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$ khi $x \to 0^+$.

Dễ thấy rằng ở đây ta có dạng vô định 1^∞. Khi đó

$$\ln y = \frac{\ln(\frac{\sin x}{x})}{1-\cos x} = \frac{\ln(\sin x) - \ln x}{1-\cos x}$$

(để ý rằng khi $x > 0$ và x đủ gần 0 thì $y > 0$). Biểu thức $\ln y$ có dạng vô định $\frac{0}{0}$ khi $x \to 0^+$. Áp dụng quy tắc L'Hospital ta được:

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y = \lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln(\sin x) - \ln x)'}{(1-\cos x)'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}\sin x}{x\sin^2 x} = -\frac{1}{3}.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0^+} y = e^{-\frac{1}{3}}$.

4.2 Đạo hàm và xu hướng biến thiên của hàm số

Định lý 4.2. *Cho f là một hàm số xác định, liên tục trong một khoảng đóng $[a, b]$ và khả vi trong khoảng mở (a, b), khi đó:*

i) điều kiện cần và đủ để $f(x)$ tăng (hoặc giảm) trong $[a, b]$ là: $f'(x) \geq 0$ (hoặc $f'(x) \leq 0$), $\forall x \in (a, b)$.

ii) Nếu $f'(x) \geq 0$ (hoặc $f'(x) \leq 0$), $\forall x \in (a, b)$ và nếu $f'(x) > 0$ (hoặc $f'(x) < 0$) tại ít nhất một điểm x thì $f(b) > f(a)$ (hoặc $f(b) < f(a)$).

CHƯƠNG III NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

1 Tích phân bất định

1.1 Khái niệm nguyên hàm và tích phân bất định

1.1.1 Định nghĩa 1

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Hàm số $F(x)$ xác định trên (a, b) được gọi là một nguyên hàm của $f(x)$ trên (a, b) nếu $F(x)$ khả vi trên (a, b) và $F'(x) = f(x)$ (hay $dF(x) = f(x)dx$), với mọi $x \in (a, b)$.

Ví dụ 1.

a) $\dfrac{x^5}{5}$ là một nguyên hàm của x^4 vì $\left(\dfrac{x^5}{5}\right)' = x^4$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) $\dfrac{x^5}{5} + C$, trong đó C là một hằng số bất kỳ, là một nguyên hàm của x^4 vì $\left(\dfrac{x^5}{5} + C\right)' = x^4$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Định lý 1.1. *Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên (a, b) thì tập tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên (a, b) là $\{F(x) + C, C \in \mathbb{R}\}$.*

1.1.2 Định nghĩa 2

Tập tất cả các nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên khoảng (a, b) được gọi là tích phân bất định của $f(x)$ trên (a, b) và được ký hiệu là

$$\int f(x)dx.$$

Ta gọi $f(x)$ là hàm dưới dấu tích phân, x là biến số lấy tích phân, còn $f(x)dx$ là biểu thức dưới dấu tích phân.

Vậy nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì ta có thể viết

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{với } C \text{ là hằng số bất kỳ.}$$

1.1.3 Các tính chất cơ bản

1. Nếu f có nguyên hàm trên khoảng (a, b) thì

(i) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$,

(i) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$,

(iii) $\int f(x)dx = \int f(u)du = \int f(t)dt = \cdots$, miễn sao $x, u, t, \cdots$ đều biến thiên trên (a, b).

2. Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ và α là hằng số tuỳ ý khác 0 thì

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx = \alpha F(x) + C, (\text{với } C \text{ là hằng số bất kỳ}).$$

3. Nếu $F(x)$ và $G(x)$ lần lượt là nguyên hàm của $f(x)$ và $g(x)$ trên (a, b) thì

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + G(x) + C.$$

1.2 Bảng tích phân bất định của một số hàm số thường gặp

1. $\int \alpha dx = \alpha x + C, \quad \alpha \in \mathbb{R},$
2. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1,$
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$ với mọi x thuộc một khoảng mở không chứa 0,
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, (0 < a \neq 1),$
5. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C,$
6. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C, x \in (-1, 1),$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C,$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C,$
9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C,$
10. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C,$

Ví dụ 2. Tính tích phân

a,

$$\begin{aligned}\int \Big(x + \frac{1}{x}\Big)^2 dx &= \int \Big(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\Big)dx = \int x^2 dx + \int \frac{dx}{x^2} + 2\int dx \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + 2x + C.\end{aligned}$$

b,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} &= \int \Big(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\Big)dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} \\ &= \tan x - \cot x + C.\end{aligned}$$

c,

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx &= \int (\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}})dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx + \int x^{-\frac{1}{2}}dx \\ &= \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C.\end{aligned}$$

d,

$$\begin{aligned}\int \frac{(2x+3)dx}{\sqrt{x^2+3x-2}} &= \int (x^2+3x-2)^{-\frac{1}{2}}d(x^2+3x-2) \\ &= \frac{(x^2+3x-2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x^2-3x+2} + C.\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{a^2-x^2} &= \int \frac{dx}{(a+x)(a-x)} = \frac{1}{2a}\int \left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x}\right)dx \\ &= \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{a-x}dx + \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{a+x} \\ &= -\frac{1}{2a}\int \frac{d(a-x)}{a-x}dx + \frac{1}{2a}\int \frac{d(a+x)}{a+x} \\ &= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.\end{aligned}$$

1.3 Các phương pháp tính tích phân bất định

1.3.1 Phương pháp đổi biến số

Nếu biết rằng $\int g(t)dt = G(t) + C$ thì

$$\int g(w(x))w'(x)dx = G(w(x)) + C$$

(trong đó các hàm số $g(t), w(x), w'(x)$ đều được giả thiết là những hàm số liên tục). **Phương pháp.** Giả sử ta cần tính $\int f(x)dx$.

1) Nếu $f(x) = g(w(x)).w'(x), x \in (a,b)$ thì đặt $u = w(x)$. Khi đó

$$\int f(x)dx = \int g(w(x))w'(x)dx = \int g(u)du.$$

Như vậy ta có thể tính $\int f(x)dx$ nhờ $\int g(u)du$. Sau khi đã tìm được nguyên hàm $G(u)$ của $g(u)$, chỉ cần thay t bởi $w(x)$ và ta có

$$\int f(x)dx = \int g(u)du = G(w(x)) + C.$$

2) Trong nhiều trường hợp, ta có thể đặt $x = \varphi(t)$. Khi đó

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)).\varphi'(t)dt = \int g(x)dt = G(t) + C.$$

Sau đó chuyển về biến x nhờ hàm ngược $t = \varphi^{-1}(x) = \psi(x)$.

***Ví dụ* 3.** Tính $I=\int \dfrac{x^2}{(1-x)^4}dx$

Đặt $u=1-x$. Ta có $du=-dx$, $x^2=(1-u)^2=1-2u+u^2$,

$$\begin{aligned} I &= -\int \frac{u^2-2u+1}{u^4}du=\int\Big(-\frac{1}{u^2}+\frac{2}{u^3}-\frac{1}{u^4}\Big)du \\ &= \frac{1}{u}-\frac{2}{2u^2}+\frac{1}{3u^3}+C \\ &= \frac{1}{1-x}-\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{3(1-x)^3}+C. \end{aligned}$$

***Ví dụ* 4.**

$$\begin{aligned} \int\frac{dx}{\sin x} &= \int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int\frac{\cos\frac{x}{2}dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} \\ &= \int\frac{d(\tan\frac{x}{2})}{\tan\frac{x}{2}} \quad (\text{đặt } u=\tan\frac{x}{2}) \\ &= \ln\Big|\tan\frac{x}{2}\Big|+C. \end{aligned}$$

Từ đó, ta suy ra kết quả sau đây

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{1}{\sin(x+\frac{\pi}{2})}=\ln\Big|\tan\Big(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\Big)\Big|+C.$$

***Ví dụ* 5.** Tính $I=\int\sqrt{a^2-x^2}dx, \quad a>0, \quad x\in[-a,a]$.

Đặt $x=a\sin t, t\in\Big[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\Big]$. Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}a\cos t dt=\int a^2\cos^2 t dt \\ &= a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=a^2\Big(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\Big)+C \\ &= \frac{a^2}{2}\Bigg(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\Bigg)+C \\ &= \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C. \end{aligned}$$

***Ví dụ* 6.** Tính $I=\int\dfrac{dx}{(x^2+a^2)^2}$.

Đặt $x=a\tan t, t\in\Big(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\Big)$. Khi đó $dx=\dfrac{adt}{\cos^2 t}$; $\quad x^2+a^2=\dfrac{a^2}{\cos^2 t}$.

Do đó.

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a^3}\int\cos^2 t dt=\frac{1}{a^3}\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt \\ &= \frac{1}{a^3}\Big(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\Big)+C=\frac{1}{2a^3}(t+\sin t\cos t)+C. \end{aligned}$$

Ta có $\tan t = \dfrac{x}{a}$. Suy ra $\cos^2 t = \dfrac{1}{\tan^2 t + 1} = \dfrac{a^2}{x^2 + a^2}$.
Do đó $\cos t = \dfrac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}}$; $\quad \sin t = \tan t . \cos t = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.
Thế vào kết quả của I ta được

$$I = \frac{1}{2a^3}\Big(\arctan\frac{x}{a} + \frac{ax}{x^2 + a^2}\Big) + C.$$

Bằng phương pháp đổi biến số, ta có thể tính được các tích phân cơ bản sau đây và ghép vào bảng các tích phân cơ bản

15. $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$,
16. $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$,
17. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\Big|\tan\dfrac{x}{2}\Big| + C$,
18. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\Big|\tan\Big(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\Big)\Big| + C$,
19. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} + C, a > 0$,
20. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C, a > 0$,
21. $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a} + C$,
22. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + b}} = \ln\big|x + \sqrt{x^2 + b}\big| + C$,
23. $\int \sqrt{x^2 + b}dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 + b} + \dfrac{b}{2}\ln\big|x + \sqrt{x^2 + b}\big| + C$,
24. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\Big|\dfrac{a + x}{a - x}\Big| + C$.

1.3.2 Phương pháp tính tích phân từng phần

Giả sử u, v là hai hàm khả vi (trên một khoảng (a, b) nào đó). Khi đó, ta có $(uv)' = u'v + uv'$. Như vậy, nếu một trong hai hàm $u'v, uv'$ có nguyên hàm thì hàm kia cũng có nguyên hàm và ta có công thức tích phân từng phần

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

hay viết gọn $\int udv = uv - \int vdu$.

Ví dụ 7.

$$I = \int \ln x dx = x\ln x - \int 1.dx = x\ln x - x + C.$$

Ví dụ 8.

$$\begin{aligned} I &= \int x^2e^{3x}dx = \int x^2 d\Big(\frac{e^{3x}}{3}\Big) = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx \\ &= \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\int xd\Big(\frac{e^{3x}}{3}\Big) = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\Big(x\frac{e^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx\Big) \\ &= \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2x}{9}e^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + C. \end{aligned}$$

Ví dụ 9. Tính $I = \int x^2 \sin x dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int x^2 d(-\cos x) = -x^2\cos x - \int -\cos x d(x^2) \\ &= -x^2\cos x + 2\int x\cos x dx = -x^2\cos x + 2\int xd(\sin x) \\ &= -x^2\cos x + 2x\sin x - \int \sin x dx \\ &= -x^2\cos x + 2x\sin x + \cos x + C. \end{aligned}$$

Chú ý Nói chung người ta thường áp dụng phương pháp tích phân từng phần khi hàm dưới dấu tích phân có dạng tích của một đa thức với một trong các loại hàm $e^{kx}, \ln(kx)$, các hàm lượng giác và lượng giác ngược; hoặc là tích của hàm e^{kx} với một hàm lượng giác. Cụ thể

1) $\int P(x)e^{kx}dx$. Đặt $u = P(x), dv = e^{kx}dx$,

2) $\int P(x)\sin(kx)dx$ (tương ứng $\int P(x)\cos(kx)dx$) . Đặt $u = P(x), dv = \sin(kx)dx$ (tương ứng. $dv = \cos(kx)dx$),

3) $\int P(x)\ln(kx)dx$. Đặt $u = \ln(kx), dv = P(x)dx$,

4) $\int P(x)\arcsin(kx)dx$ (tương ứng $\int P(x)\arccos(kx)dx$) . Đặt $u = \arcsin(kx)$ (tương ứng $u = \arccos(kx)dx$), $dv = P(x)dx$.

1.4 Tích phân các hàm hữu tỉ

Xét một hàm hữu tỉ có dạng

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m}$$

với $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ và $a_n, b_m \neq 0$.

Khi $n < m$ ta nói $R(x)$ là một phân thức thực sự.

Nếu $n \geq m$ thì bằng cách chia tử cho mẫu bao giờ cũng có thể biểu diễn $R(x)$ dưới dạng tổng của một đa thức và một phân thức thực sự. Do vậy, ta chỉ xét việc tính tích phân bất định của một phân thức hữu tỉ thực sự.

1.4.1 Phân tích phân thức thực sự thành các phân thức đơn giản

Người ta chứng minh được rằng có thể phân tích một phân thức thực sự bất kỳ thành tổng các phân thức đơn giản sau đây

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{A}{(x-a)^k}, \quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k},$$

trong đó A, M, N, a, p, q là các số thực, k là số nguyên lớn hơn hoặc bằng 2 và $p^2 - 4q < 0$.

***Ví dụ* 10.** Phân tích $f(x) = \dfrac{1}{x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1}$ thành tổng các phân thức đơn giản.

Trước hết ta phân tích mẫu thành tích

$$MS = (x-1)(x^4 + 2x^2 + 1) = (x-1)(x^2+1)^2.$$

Do đó

$$f(x) \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Muốn xác định các hệ số A, B, C, D, E ta quy đồng mẫu thức ở vế phải, sau đó đồng nhất hệ số của luỹ thừa cùng bậc của x ở tử thức của 2 vế, ta được

$$\begin{cases} A + D = 0 \\ D - E = 0 \\ 2A + B + D - E = 0 \\ C - B - D + E = 0 \\ A - C - E = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \dfrac{1}{4} \\ B = C = -\dfrac{1}{2} \\ D = E = -\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Vậy $f(x) = \dfrac{1}{4(x-1)} - \dfrac{x+1}{2(x^2+1)^2} - \dfrac{x+1}{4(x^2+1)}$.

***Ví dụ* 11.** Phân tích $f(x) = \dfrac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}$ thành tổng các phân thức đơn giản.

Ta cần phân tích

$$f(x) \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-4}.$$

Nhân 2 vế với $x - 1$ rồi cho $x = 1$, ta được

$$\left.\frac{x^2+2x+6}{(x-2)(x-4)}\right|_{x=1} = A = 3.$$

Nhân 2 vế với $x-2$ rồi cho $x=2$, ta được

$$\left.\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-4)}\right|_{x=2} = B = -7.$$

Nhân 2 vế với $x-4$ rồi cho $x=4$, ta được

$$\left.\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)}\right|_{x=4} = C = 5.$$

Vậy $f(x) = \dfrac{3}{x-1} - \dfrac{7}{x-2} + \dfrac{5}{x-4}$.

***Ví dụ* 12.** Phân tích $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}$ thành tổng các phân thức đơn giản.

Ta có

$$f(x) \equiv \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+3}.$$

Nhân 2 vế với $(x-1)^3$ rồi cho $x=1$, ta được

$$\left.\frac{x^2+1}{x+3}\right|_{x=1} = A = \frac{1}{2}.$$

Nhân 2 vế với $x+3$ rồi cho $x=-3$, ta được

$$\left.\frac{x^2+1}{(x-1)^3}\right|_{x=-3} = D = -\frac{5}{32}.$$

Quy đồng và khử mẫu, ta được

$$x^2+1 = A(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)^2(x+3) + D(x-1)^3.$$

Đồng nhất hệ số của x^3 ta được $C + D = 0 \Leftrightarrow C = -D = \dfrac{5}{32}$.

Cho $x=0$, ta được $3A - 3B + 3C - D = 1$, suy ra $B = \dfrac{3}{8}$.

Vậy $f(x) = \dfrac{1}{2(x-1)^3} + \dfrac{3}{8(x-1)^2} + \dfrac{5}{32(x-1)} - \dfrac{5}{32(x+3)}$.

1.4.2 Tích phân các phân thức đơn giản

(i) $\int \dfrac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C$,

(ii) $\int \dfrac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) = \dfrac{A}{-k+1}(x-a)^{-k+1} + C, k \geq 2$,

1.5 Tích phân các hàm lượng giác

1.5.1 Phương pháp chung

Muốn tính tích phân $I = \int R(\sin x, \cos x)dx$, ta đặt $t = \tan\dfrac{x}{2}$. Khi đó

$$x = 2\arctan t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Do đó, có thể đưa tích phân I về dạng

$$I = \int R\Big(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\Big)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

và rõ ràng ở đây biểu thức dưới dấu tích phân là hữu tỉ đối với t.

***Ví dụ* 13.** Tính $I = \int \dfrac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$.

Đặt $t = \tan\dfrac{x}{2}$, ta có

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{4\dfrac{2t}{1+t^2} + 3\dfrac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = 2\int \frac{dt}{2t^2+8t+8} \\ &= \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C. \end{aligned}$$

Vậy $I = -\dfrac{1}{\tan\dfrac{x}{2} + 2} + C$.

1.5.2 Một số trường hợp đặc biệt

a) Tích phân dạng $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

Ta xét ba trường hợp đặc biệt sau

(i) Nếu $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ tức là $R(\sin x, cosx)$ là một hàm chẵn đối với $(\sin x, \cos x)$, khi đó ta đặt $t = \tan x$, hoặc $t = \cot x$,

(ii). Nếu $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ tức là $R(\sin x, cosx)$ là một hàm lẻ đối với $\cos x$, khi đó ta đặt $t = \sin x$,

(iii). Nếu $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ tức là $R(\sin x, cosx)$ là một hàm lẻ đối với $\sin x$, khi đó ta đặt $t = \cos x$.

***Ví dụ* 14.** Tính $I = \int \dfrac{\sin^2 x dx}{\cos^6 x}$.

Đặt $t = \tan x$, ta có

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \frac{1}{\cos^2 x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int t^2(1+t^2)dt = \int (t^2+t^4)dt \\ &= \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} + C. \end{aligned}$$

***Ví dụ* 15.** Tính $I = \int \dfrac{\cos^3 x dx}{\sin^4 x}$. Đặt $t = \sin x$, ta có $dt = \cos x dx$

$$I = \int \frac{\cos^2 x . \cos x dx}{\sin^4 x} = \int \frac{(1-t^2)dt}{t^4} = \int \Big(\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2}\Big)dt = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + C.$$

Vậy $I = -\dfrac{1}{3\sin^3 x} + \dfrac{1}{\sin x} + C.$

***Ví dụ* 16.** Tính $I = \int \dfrac{\sin^3 x dx}{\cos x \sqrt[3]{\cos x}}$. Đặt $t = \cos x$, ta có $dt = -\sin x dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int (1-\cos^x)\cos^{-\frac{4}{3}} x \sin x dx = -\int (1-t^2)t^{-\frac{4}{3}}dt \\ &= -\int t^{-\frac{4}{3}}dt + \int t^{\frac{2}{3}}dt = 3t^{-\frac{1}{3}} + \frac{3}{5}t^{\frac{3}{5}} + C \\ &= \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + \frac{3}{5}\cos x \sqrt[3]{\cos^2 x} + C. \end{aligned}$$

b) Các tích phân dạng $\int \cos ax \cos bx dx, \int \sin ax \sin bx dx, \int \sin ax \cos bx dx$.

Muốn tính các tích phân này, ta dùng công thức lượng giác biến đổi tích thành tổng

$$\begin{aligned} \cos ax \cos bx &= \frac{1}{2}[\cos(a+b)x + \cos(a-b)x], \\ \sin ax \sin bx &= \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a-b)x], \\ \sin ax \cos bx &= \frac{1}{2}[\sin(a-b)x + \sin(a-b)x]. \end{aligned}$$

***Ví dụ* 17.** Tính $I = \int \sin 2x \cos 5x dx$.

Ta có $\sin 2x \cos 5x = \dfrac{1}{2}(\sin 7x - \sin 3x)$, do đó

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int (\sin 7x - \sin 3x)dx = \frac{1}{2}\int \sin 7x dx - \frac{1}{2}\int \sin 3x dx \\ &= -\frac{1}{14}\cos 7x + \frac{1}{6}\cos 3x + C. \end{aligned}$$

1.6 Tích phân các hàm vô tỉ

a) Tích phân dạng $\int R(x, x^{\frac{m}{n}}, \cdots, x^{\frac{r}{s}})dx$, trong đó $m, n, \cdots, r, s$ là những số nguyên dương.

Giả sử k là bội số chung nhỏ nhất của các mẫu số $n, \cdots, s$. Khi đó ta có

$$\frac{m}{n} = \frac{m_1}{k}, \cdots, \frac{r}{s} = \frac{r_1}{k}.$$

Đặt $x = t^k$, ta được

$$\int R(x, x^{\frac{m}{n}}, \cdots, x^{\frac{r}{s}})dx = \int R(t^k, t^{m_1}, \cdots, t^{r_1})kt^{k-1}dt = \int R_1(t)dt$$

trong đó $R_1(t)$ là hàm hữu tỉ của t.

***Ví dụ* 18.** Tính $I = \int \dfrac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[8]{x}}{x(\sqrt[4]{x} + 1)}dx$. Đặt $x = t^8$, ta được

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{t^2 - t}{t^8(t^2 + 1)} 8t^7 dt = 8\int \frac{t - 1}{t^2 + 1}dt = 8\int \frac{tdt}{t^2 + 1} - 8\int \frac{dt}{t^2 + 1} \\ &= 4\int \frac{d(t^2 + 1)}{t^2 + 1} - 8\arctan t = 4\ln(t^2 + 1) - 8\arctan t + C. \end{aligned}$$

Vậy $I = 4\ln(\sqrt[4]{x} + 1) - 8\arctan\sqrt[8]{x} + C$.

b) Tích phân dạng $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$, với $a \neq 0$.

Ta chỉ xét một số trường hợp đặc biệt, bằng cách đổi biến $x = a\sin t, x = a\cos t$ để biến đổi các tích phân về dạng cơ bản.

***Ví dụ* 19.** Tính $I = \int \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}dx, a > 0$.

Đặt $x = a\sin t, t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Khi đó

$dx = a\cos t dt, \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)dt} = a|\cos t| = a\cos t$.

Do đó

$$\begin{aligned} I &= a\int \frac{\cos^2 t}{\sin t}dt = a\int \frac{1 - \sin^2 t}{\sin t}dt = a\int \frac{dt}{\sin t} - a\int \sin t dt \\ &= a\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + a\cos t + C = a\ln\left|\frac{1}{\sin t} - \frac{\cos t}{\sin t}\right| + a\cos t + C. \end{aligned}$$

Vì $\sin t = \dfrac{x}{a}, \cos t = \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$ nên

$$I = a\ln\left|\frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right| + \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

2 Tích phân xác định

2.1 Khái niệm tích phân xác định

2.1.1 Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a, b]$. Chia đoạn $[a, b]$ thanh n đoạn nhỏ tuỳ ý bởi các điểm chia $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Mỗi phép chia như thế gọi là một phân hoạch đoạn $[a, b]$.

Trên mỗi đoạn $[x_{i-1}, x_i]$, ta lấy tuỳ ý một điểm $\xi_i, i = \overline{1, n}$. Lập tổng

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\Delta x_i, \text{ với } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Tổng I_n được gọi là tổng tích phân của hàm $f(x)$ ứng với phân hoạch trên.

Cho số điểm chia tăng vô hạn sao cho $d = \max\limits_i \Delta x_i \to 0$. Nếu trong quá trình đó I_n dần tới một giới hạn xác định I không phụ thuộc vào cách phân hoạch $[a, b]$ và cách lấy điểm ξ_i thì ta nói rằng hàm $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$ và gọi I là tích phân xác định của hàm $f(x)$ trên $[a, b]$. Ta kí hiệu

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n \to \infty \\ d \to 0}} I_n = \lim_{\substack{n \to \infty \\ d \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\Delta x_i,$$

trong đó f được gọi là hàm dưới dấu tích phân, $x \in [a, b]$ gọi là biến lấy tích phân, a là cận dưới và b là cận trên của tích phân.

Chú ý.
+ Nếu $a = b$ thì ta định nghĩa $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.
+ Nếu $a > b$ thì ta định nghĩa $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

Nhận xét. Từ định nghĩa tích phân xác định, ta suy ra

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt.$$

2.1.2 Ý nghĩa hình học của tích phân xác định

Xét hình thang cong $aABb$ giới hạn bởi trục hoành Ox, các đường thẳng $x = a, x = b$ và đường cong $y = f(x)$ với $f(x) \geq 0$ và liên tục trên $[a, b]$.

Để đi đến định nghĩa diện tích hình thang cong, ta làm như sau. Chia đoạn $[a,b]$ thành n đoạn nhỏ tuỳ ý với các điểm chia $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Trên mỗi đoạn nhỏ $[x_{i-1}, x_i]$, lấy tuỳ ý một điểm $\xi_i, i = \overline{1,n}$.

Dựng n hình chữ nhật có các kích thước $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ và $f(\xi_i), i = \overline{1,n}$. Khi đó, diện tích của tổng n hình chữ nhật này là

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Ta nhận thấy rằng nếu phân hoạch đoạn $[a,b]$ sao cho n khá lớn và Δx_i khá bé, thì diện tích S_n xấp xỉ bằng diện tích hình thang cong $aABb$. Từ đó ta đi đến diện tích hình thang cong $aABb$ như sau.

Nếu tổng S_n dần đến giới hạn S khi $n \to \infty$ sao cho $d = \max \Delta x_i \to 0$ thì S được gọi là diện tích hình thang cong $aABb$. Như vậy, diện tích S của hình thang $aABb$ chính là $\int\limits_a^b f(x)dx$.

2.1.3 Định lý về sự tồn tại của tích phân xác định

Định lý 2.1. *Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ thì nó khả tích trên đoạn đó.*

Ngoài ra, ta còn có các lớp hàm khả tích sau đây.

Định lý 2.2. *Nếu hàm $f(x)$ bị chặn trên đoạn $[a,b]$ và chỉ có một số hữu hạn điểm gián đoạn thì nó khả tích trên $[a,b]$.*

Định lý 2.3. *Nếu hàm $f(x)$ đơn điệu trên đoạn $[a,b]$ thì nó khả tích trên $[a,b]$.*

2.1.4 Các tính chất cơ bản của tích phân xác định

Giả sử các hàm $f(x)$ và $g(x)$ khả tích trên $[a,b]$. Khi đó, ta có

1) $\int\limits_a^b k.f(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx, k$ là hằng số,

2) $\int\limits_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx,$

3) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx,$ với $c \in [a,b]$,

4) Nếu $f(x) = C$ (hằng số) thì $\int\limits_a^b Cdx = C(b-a)$,

5) Nếu $f(x) \le g(x)$ trên $[a,b]$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx$.

6) Nếu m, M thoả mãn $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a,b]$ thì

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

2.1.5 Mối liên hệ giữa nguyên hàm và tích phân xác định

Theo định nghĩa, tích phân xác định phụ thuộc vào các cận lấy tích phân. Do đó, tích phân $\int_a^x f(t)dt, x \in [a,b]$ là một hàm của x (hàm của cận trên). Ta đặt

$$\phi(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Định lý 2.4. *Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ thì hàm $\phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ có đạo hàm trên đoạn đó và*

$$\phi'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x).$$

Nói cách khác, $\phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a,b]$.

Chú ý rằng, mọi hàm liên tục trên $[a,b]$ đều có nguyên hàm trên đoạn đó.

2.1.6 Công thức Newton- Leibnitz

Định lý 2.5. *Giả sử $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ và F là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a,b]$. Khi đó ta có công thức*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) := F(x)\Big|_a^b.$$

Công thức trên được gọi là công thức Newton- Leibnitz.

Ví dụ 20. Tính $I = \int_2^4 \frac{dx}{x}$

Ta có:

$$I = \int_2^4 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_2^4 = \ln 4 - \ln 2 = \ln 2$$

2.2 Các phương pháp tính tích phân xác định

2.2.1 Phương pháp đổi biến số

Tương tự như tích phân bất định, ta cũng có hai cách đổi biến để tính $\int_a^b f(x)dx$.

a) Đổi biến $x = \varphi(t)$.

Định lý 2.6. *Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và $x = \varphi(t)$ trong đó hàm $\varphi(t)$ thoả mãn các điều kiện sau đây*

1. *$\varphi(t)$ đơn điệu và có đạo hàm liên tục trên $[\alpha, \beta]$,*

2. *$\varphi(\alpha) = a$ và $\varphi(\beta) = b$,*

3. *Khi t biến thiên trong $[\alpha, \beta]$ thì x biến thiên trong $[a, b]$.*

Khi đó

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Chú ý: Khi tính tích phân xác định bằng phương pháp đổi biến số, ta không cần quay lại biến cũ như trong tích phân bất định.

Ví dụ 21. Tính tích phân

$$I = \int_0^1 x^2\sqrt{1 - x^2}dx.$$

Đặt $x = \sin t, 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$. ta có $dx = \cos t dt, \sqrt{1 - x^2} = \cos t$.

Đổi cận Do đó

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t.\cos^2 t dt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - \cos 4t)dt \\ &= \frac{1}{8}(t - \frac{\sin 4t}{4})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2\pi}{4}) = \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

b) Đổi biến $t = \varphi(x)$.

Định lý 2.7. *Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và $t = \varphi(x)$ trong đó hàm $\varphi(x)$ thoả mãn các điều kiện sau đây*

1. *$\varphi(x)$ là hàm đơn điệu, có đạo hàm liên tục trên $[a, b]$ và hàm ngược φ^{-1} có đạo hàm,*

2. Biểu thức $f(x)dx$ trở thành $g(t)dt$, trong đó $g(t)$ là một hàm số liên tục (trên $[\varphi(a), \varphi(b)]$ nếu $\varphi(x)$ đơn điệu tăng).

Khi đó ta có công thức

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt.$$

Ví dụ 22. Tính

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx.$$

Đặt $t = \sin x$, hàm số $t = \sin x$ đơn điệu trên $[0, \frac{\pi}{2}]$. Vì vậy

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

2.2.2 Phương pháp tích phân từng phần

Cho hai hàm số $u(x), v(x)$ khả vi liên tục trên trên $[a, b]$. Khi đó ta có công thức tích phân từng phần

$$\int_a^b udv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Ví dụ 23. Tính

$$I = \int_1^e x \ln x dx.$$

Ta có:

$$\begin{aligned} I &= \int_1^e \ln x d(\frac{x^2}{2}) = \frac{x^2}{2} \ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + 1. \end{aligned}$$

Ví dụ 24. Tính

$$I = \int_1^e \sin(\ln x) dx.$$

Ta có:

$$\begin{aligned} I &= x\sin(\ln x)\Big|_1^e - \int_1^e x\frac{\cos(\ln x)}{x} dx = e\sin 1 - \int_1^e \cos(\ln x)dx \\ &= e\sin 1 - \Big[x\cos(\ln x)\Big|_1^e + \int_1^e \sin(\ln x)dx\Big] = e\sin 1 - e\cos 1 + 1 - I. \end{aligned}$$

Vậy $I = \frac{e}{2}(\sin 1 - \cos 1) + \frac{1}{2}$.

2.3 Ứng dụng của tích phân xác định

2.3.1 Tính diện tích hình phẳng

1) Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$, thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $f(x)$, các đường thẳng $x = a, x = b$ và trục Ox được cho bởi công thức

$$S = \int_a^b |f(x)|dx.$$

2) Cho các hàm $f(x), g(x)$ liên tục trên $[a, b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $f(x)$ và $g(x)$, và các đường thẳng $x = a, x = b$ được cho bởi công thức

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx.$$

***Ví dụ* 25.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2, y = \dfrac{x^2}{2}$ và $y = 2x$.

Để thuận tiện cho việc tính toán, ta chia diện tích hình phẳng cần tìm thành 2 phần, diện tích phần thứ nhất S_1 ứng với $x \in [0, 2]$, diện tích phần thứ hai S_2 ứng với $x \in [2, 4]$. Ta có

$$S_1 = \int_0^2 (x^2 - \frac{x^2}{2})dx = \frac{x^3}{6}\Big|_0^2 = \frac{4}{3},$$

$$S_1 = \int_2^4 (2x - x^2)dx = (\frac{2x^2}{2} - \frac{x^2}{6})\Big|_2^4 = \frac{8}{3}.$$

Vậy diện tích hình phẳng đã cho $S = S_1 + S_2 = 4(\text{\it đvdt})$.

***Ví dụ* 26.** Tính diện tích của hình ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Do ellipse đối xứng qua các trục tọa độ nên diện tích của nó

$$\begin{aligned} S &= 4\int_0^a f(x)dx = 4\int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}dx \\ &= 4\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{4b}{a}.\frac{\pi a^2}{4} = \pi ab(\text{\it đvdt}). \end{aligned}$$

2.3.2 Độ dài đường cong phẳng

1) Cho đường cong AB có phương trình $y = f(x)$ với $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a, b]$. Khi đó độ dài cung AB được tính theo công thức

$$d = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$

2) Trường hợp đường cong AB cho bởi phương trình tham số

$$\begin{cases} x & = \varphi(t) \\ y & = \psi(t), \end{cases} \quad a \le t \le b,$$

trong đó $\varphi(t), \psi(t)$ là những hàm số có đạo hàm liên tục với mọi $t \in [a, b]$. Khi đó, dộ dài của cung AB được tính theo công thức

$$d = \int_a^b \sqrt{\varphi'^2_t + \psi'^2_t} dt.$$

***Ví dụ* 27.** Tìm độ dài đường cong $y = \ln x$ từ điểm có hoành độ $x_1 = \sqrt{3}$ đến điểm có hoành độ $x_2 = \sqrt{8}$. Ta có

$$d = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + [(\ln x)']^2} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + (\frac{1}{x})^2} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx.$$

Đặt $u = \sqrt{x^2+1}$, ta có $du = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$, suy ra $dx = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} du$.

Do đó

$$\begin{aligned} d &= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{(x^2+1)}{x^2} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_2^3 \frac{u^2}{u^2-1} du = \int_2^3 (1 + \frac{1}{u^2-1}) du \\ &= (u + \frac{1}{2} \ln|\frac{u-1}{u+1}|) \Big|_2^3 = 3 + \frac{1}{2} \ln \frac{2}{4} - 2 - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

3 Tích phân suy rộng

Ở phần trước, ta đã xét tích phân với các khoảng lấy tích phân là hữu hạn hoặc hàm số phải xác định và bị chặn trong khoảng lấy tích phân. Trong bài này, chúng ta sẽ mở rộng định nghĩa tích phân cho trường hợp khoảng lấy tích phân là vô hạn hoặc hàm số dưới dấu tích phân có thể không bị chặn tại một điểm nào đó trong khoảng lấy tích phân.

3.1 Tích phân có cận vô hạn (tích phân suy rộng loại 1)

Khi tính diện tích của một số hình phẳng, chẳng hạn hình phẳng sau đây (hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, đường thẳng $x = a$ và trục Ox, hình phẳng này kéo dài mãi về bên phải) ta không thể dùng tích phân xác định như ở bài trước để tính được mà ta cần một khái niệm mới, đó là khái niệm tích phân suy rộng. Một phương pháp thích hợp để tính diện tích của hình phẳng như trên là: trước hết dùng tích phân xác định để tính diện tích của miền từ $x = a$ đến $x = t$ (hữu hạn) sau đó cho t dần đến $+\infty$ trong biểu thức nhận được.

Tức là

$$\text{Diện tích hình phẳng } = \lim_{t\to+\infty} \int\limits_a^t f(x)dx.$$

Cụ thể, ta có định nghĩa sau đây:

Định nghĩa 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $[a, +\infty)$. Nếu giới hạn

$$\lim_{t\to+\infty} \int\limits_a^t f(x)dx$$

tồn tại (hữu hạn hoặc vô hạn) thì nó được gọi là tích phân suy rộng của hàm số $f(x)$ trên khoảng $[a, +\infty)$ và ký hiệu như sau:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} \int\limits_a^t f(x)dx$$

Nếu giới hạn ở vế phải tồn tại hữu hạn thì ta nói tích phân suy rộng $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ*. Ngược lại, nếu giới hạn ở vế phải là vô hạn hoặc không tồn tại thì ta nói tích phân suy rộng đó *phân kì*.

***Ví dụ* 28.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x^2},\ x > 0$, đường thẳng $x = 1$ và trục Ox.

Diện tích hình phẳng cần tìm được tính bởi công thức $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

Với $t > 1$ ta có

$$\int\limits_1^t \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^t = -\frac{1}{t} + 1.$$

Ta lại có $\lim\limits_{t\to+\infty} \left(-\frac{1}{t} + 1\right) = 1$. Do đó $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$. Như vậy tích phân suy rộng này là hội tụ.

***Ví dụ* 29.** Tính $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

Ta có

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{t\to+\infty} \int\limits_1^t \frac{1}{x}dx = \lim_{t\to+\infty} \left(\ln|x|\big|_1^t\right) = \lim_{t\to+\infty} \ln t = +\infty$$

Vậy tích phân suy rộng này là phân kỳ.

***Ví dụ* 30.** Xét $\int\limits_0^{+\infty} \cos x dx$.

Với $b > 0$, ta có $\int\limits_0^b \cos x dx = \sin x|_0^b = \sin b$. Vì giới hạn $\lim\limits_{b\to+\infty} \sin b$ không tồn tại nên tích phân suy rộng này là phân kỳ.

Định nghĩa 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-\infty, b]$. Nếu giới hạn

$$\lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx$$

tồn tại (hữu hạn hoặc vô hạn) thì nó được gọi là tích phân suy rộng của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(-\infty, b]$ và ký hiệu như sau:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx$$

Sự hội tụ và phân kỳ của tích phân suy rộng này cũng được định nghĩa tương tự như trên.

Định nghĩa 3. Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $(-\infty, +\infty)$. Tích phân suy rộng của f trên $(-\infty, +\infty)$ được định nghĩa:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx.$$

với $c \in \mathbb{R}$ tùy ý.

Trong trường hợp này tích phân suy rộng $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi hai tích phân suy rộng $\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx$ và $\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$ cùng hội tụ.

***Ví dụ* 31.** Tính $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^2}$.

Ta viết

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Với $c < 0, b > 0$ ta có

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{c\to-\infty} \int_c^0 \frac{dx}{1+x^2} = -\lim_{c\to-\infty} \arctan c = \frac{\pi}{2}, \\
\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{b\to+\infty} \arctan b = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Do đó $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^2} = \pi$. Vậy tích phân suy rộng này là hội tụ.

3.2 Tích phân của hàm không bị chặn trong khoảng lấy tích phân (tích phân suy rộng loại 2)

Ta đã định nghĩa tích phân xác định cho hàm số f trên đoạn $[a,b]$ nhưng tích phân theo nghĩa này chỉ tồn tại đối với những hàm bị chặn. Khi hàm f không bị chặn trên đoạn $[a,b]$ thì không thể định nghĩa được tích phân Riemann vì tổng Riemann có thể không xác định.

Ví dụ 32. Xét hàm $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in (0,1]$. Tích phân $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$ không tồn tại vì hàm này không bị chặn trên $(0,1]$. Ta xét tích phân $\int\limits_\varepsilon^1 \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$ với $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ. Ta thấy rằng hàm $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ xác định và bị chặn trên đoạn $[\varepsilon, 1]$ và

$$\int\limits_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\,\Big|_\varepsilon^1 = 2(1-\sqrt{\varepsilon}).$$

Từ đây ta có

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2$$

Điều này gợi ý cho ta mở rộng định nghĩa tích phân xác định cho hàm không bị chặn trên đoạn hữu hạn.

Giả sử hàm $f(x)$ khả tích trên mọi đoạn $[t,b]$, $t > a$ và không bị chặn khi $x \to a^+$ $(x > a)$. Xét

$$I(t) = \int\limits_t^b f(x)dx.$$

Định nghĩa 4. Cho hàm f liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng $(a,b]$. Nếu giới hạn

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

tồn tại (hữu hạn hoặc vô hạn) thì nó được gọi là tích phân suy rộng của hàm số $f(x)$ trên đoạn $(a,b]$ và ký hiệu như sau:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Nếu giới hạn ở vế phải tồn tại hữu hạn thì ta nói tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ *hội tụ*. Ngược lại nếu giới hạn ở vế phải là vô hạn hoặc không tồn tại thì ta nói tích phân đó *phân kì*.

Tương tự ta định nghĩa cho tích phân suy rộng của hàm $f(x)$ khả tích trên mọi đoạn $[a, t],\ t < b$ và không giới nội khi $x \to b^-(x < b)$,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx.$$

Nếu hàm lấy tích phân không bị chặn khi $x \to x_0$, với $x_0 \in (a, b)$ ta chia đoạn $[a, b]$ thành hai đoạn $[a, x_0], [x_0, b]$ và định nghĩa

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^b f(x)dx.$$

Trong trường hợp này tích phân suy rộng $\int\limits_a^b f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi hai tích phân suy rộng $\int\limits_a^{x_0} f(x)dx$ và $\int\limits_{x_0}^b f(x)dx$ cùng hội tụ.

Ví dụ 33. Tính tích phân $\int\limits_{-1}^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Ta có hàm dưới dấu tích phân không bị chặn khi $x \to -1^+$ và $x \to 1^-$.

Do đó, ta viết lại

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ta tính

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{t \to -1^+} \int_t^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \lim_{t \to -1^+} [\arcsin 0 - \arcsin(t)] = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Tương tự ta tính được

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Do đó $\int\limits_{-1}^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ hội tụ và $\int\limits_{-1}^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = \pi$.

CHƯƠNG IV HÀM HAI BIẾN

1 Tích phân bất định

1.1 Khái niệm hàm hai biến

Đặt $\mathbb{R}^2 = \{(x,y)|x,y \in \mathbb{R}\}$ ($\mathbb{R}^2$ được xem là toàn bộ mặt phẳng tọa độ Oxy).

Định nghĩa 1. Cho $D \subset \mathbb{R}^2$. Ta gọi một *hàm số hai biến số* (hàm hai biến) f từ D vào $\mathbb{R}$ là một quy tắc cho tương ứng mỗi cặp số thực $(x,y) \in D$ với một và chỉ một số thực z ký hiệu là $f(x,y)$, x và y được gọi là hai *biến số độc lập*.

$$\begin{aligned} f:\ D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto z = f(x,y) \end{aligned}$$

D được gọi là *miền xác định* của hàm f. Tập hợp

$$f(D) = \{z \in \mathbb{R}|z = f(x,y), \forall (x,y) \in D\}$$

gọi là *miền giá trị* của hàm f.

Nếu người ta cho hàm số hai biến số bởi biểu thức $z = f(x,y)$ mà không nói gì về miền xác định thì miền xác định của hàm số đó được hiểu là tập hợp tất cả những cặp $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sao cho biểu thức $f(x,y)$ có nghĩa.

Đồ thị của hàm f là tập hợp tất cả các điểm $M(x,y,f(x,y))$ $(x \in D)$ trong không gian với hệ tọa độ Oxyz.

Ví dụ 1.
a) Hàm $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ là hàm hai biến.
Miền xác định của $f(x,y)$ là hình tròn (kể cả biên) tâm O bán kính 1.
Đồ thị hàm này là mặt cầu tâm O bán kính 1.
b) Hàm $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ là hàm hai biến xác định trên $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
c) Hàm $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ là hàm hai biến. Miền xác định của hàm số là toàn bộ mặt phẳng.

1.2 Giới hạn của hàm hai biến

Định nghĩa 2. Ta nói rằng dãy điểm $M_n(x_n,y_n)$ dần tới điểm $M_0(x_0,y_0)$ trong $\mathbb{R}^2$ và viết $M_n \to M_0$ (hay $(x_n,y_n) \to (x_0,y_0)$) khi $n \to \infty$ nếu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} = 0.$$

hay $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0; \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$

Cho hàm số $f(M) = f(x,y)$ xác định trong một miền D chứa điểm $M_0(x_0, y_0)$ (có thể trừ điểm M_0). Ta nói rằng L là giới hạn của $f(x,y)$ khi điểm $M(x,y)$ dần tới điểm M_0 nếu với mọi dãy $M_n(x_n, y_n)$ (khác M_0) thuộc miền D dần tới M_0 ta đều có

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = L$$

Khi đó ta viết $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x) = L$ hay là $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x) = L$.

Định nghĩa 3. Hàm f xác định trên $A \subset \mathbb{R}^n$. Ta nói f có giới hạn $l \in \mathbb{R}$ khi $x \to a$ và viết

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \text{ hay } f(x) \to l \text{ khi } x \to a$$

nếu $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ sao cho $\forall x \in A$ mà $0 < d(x,a) < \delta$ thì $|f(x) - l| < \epsilon$.

Ví dụ 2.

a) Tính $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \dfrac{2x-3}{x^2+y^2}$.

Với dãy tùy ý $\{(x_n, y_n)\} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}$; $x_n \to 0, y_n \to 1$ ta có:

$$\frac{2x_n - 3}{x_n^2 + y_n^2} \to \frac{2.0 - 3}{0^2 + 1^2} = -3.$$

Vậy $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \dfrac{2x-3}{x^2+y^2} = -3$.

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.

Ta có

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{x\frac{x^2+y^2}{2}}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x|}{2}.$$

Do đó khi $x \to 0$ thì $\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} \to 0$. Vậy $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

c) Tính $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x}{y-x}$.

Với $x_n = \dfrac{1}{n}, y_n = \dfrac{2}{n}$ thì $(x_n, y_n) \to (0,0)$ và $\dfrac{x_n}{y_n - x_n} = 1 \to 1$.

Với $x'_n = \dfrac{1}{n}, y'_n = \dfrac{3}{n}$ thì $(x'_n, y'_n) \to (0,0)$ và $\dfrac{x'_n}{y'_n - x'_n} = \dfrac{1}{2}$.

Vì $1 \neq \dfrac{1}{2}$ nên không tồn tại $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x}{y-x}$.

1.3 Tính liên tục của hàm hai biến

1.3.1 Các khái niệm liên tục

Giả sử $A \subset \mathbb{R}^n$ và $f : A \to \mathbb{R}$.

a) Hàm f được gọi là liên tục tại $a \in A$ nếu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(x)$.

b) Hàm f được gọi là liên tục trên A nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc A.

c) Hàm f được gọi là liên tục đều trên A nếu với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x, y \in A$ mà $d(x, y) < \delta$ thì $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

d) Hàm f được gọi là liên tục theo biến $x_i (i = \overline{1, n})$ tại điểm $a = (a_1, ..., a_n) \in A$ nếu hàm $x_i \mapsto f(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n)$ liên tục tại $a_i \in A_i = \{x_i \in \mathbb{R} : (a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n) \in A\}$.

Nếu điều này xảy ra với mọi $i = \overline{1, n}$ thì ta nói f liên tục theo từng biến tại $a \in A$.

Hàm số hai biến số liên tục cũng có những tính chất như hàm số một biến số liên tục. Chẳng hạn, nếu hàm số nhiều biến số liên tục trong một miền đóng, bị chặn thì nó bị chặn trong miền ấy, nó đạt giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của nó trong miền ấy, nó liên tục đều trong miền ấy.

2 Đạo hàm và vi phân của hàm hai biến

2.1 Đạo hàm riêng

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trên tập mở $G \subset \mathbb{R}^2$ và cho điểm $(x_0, y_0) \in G$. Cho x số gia Δx. Khi đó ta có số gia của hàm tại điểm (x_0, y_0) là $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$.

Nếu tồn tại và hữu hạn giới hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ thì giới hạn đó là đạo hàm riêng của hàm $f(x, y)$ theo biến x tại điểm (x_0, y_0) và ký hiệu là: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ hoặc $f'_x(x_0, y_0)$.

Như vậy đạo hàm riêng theo biến x là đạo hàm của hàm $f(x, y)$ theo biến x nếu coi y là hằng số.

Tương tự ta có đạo hàm riêng theo biến y, ký hiệu là $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ hoặc $f'_y(x_0, y_0)$.

Ví dụ 3.

a) Cho $f(x, y) = x^3 - 2xy^2 + y$.

Ta có $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 2y^2$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -4xy + 1$; $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = 3$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 1$.

b) $f(x,y) = |x|$. Ta có $f(0,y) = 0$ nên $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0; f(x,0) = |x|$.

Hàm một biến này không có đạo hàm tại $x = 0$ nên không tồn tại $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

c) $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } xy = 0 \\ 1 & \text{nếu } xy \neq 0 \end{cases}$ hàm này gián đoạn tại $(0,0)$ vì $(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}) \to (0,0)$ nhưng $f(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}) = 1$, không dẫn đến $f(0,0) = 0$ khi $n \to \infty$. Tuy vậy hàm này có các đạo hàm riêng tại $(0,0)$.

Thật vậy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0$$

và tương tự $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

2.2 Tính khả vi và vi phân của hàm hai biến

Cho hàm hai biến $z = f(x,y)$ xác định trong một lân cận của điểm (x_0, y_0). Cho x số gia Δx, y số gia Δy. Khi đó ta gọi số gia toàn phần của hàm $f(x,y)$ tại (x_0,y_0) là $\Delta f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$.

Rõ ràng $f(x,y)$ liên tục tại (x_0,y_0) khi và chỉ khi $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y \to 0}} \Delta f(x_0,y_0) = 0$.

Định nghĩa 4. Hàm f được gọi là khả vi tại (x_0,y_0) nếu số gia toàn phần tại (x_0,y_0) có thể viết dưới dạng

$$\Delta f(x_0,y_0) = A.\Delta x + B.\Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y \qquad (2.1)$$

trong đó A, B là các hằng số $\alpha, \beta \to 0$ khi $\Delta x, \Delta y \to 0$.

Nếu hàm $f(x,y)$ khả vi tại điểm (x_0,y_0) thì ta ký hiệu $df(x_0,y_0) = A.\Delta x + B.\Delta y$ và gọi nó là vi phân toàn phần của $f(x,y)$ tại điểm (x_0,y_0).

Hàm f được gọi là khả vi trên G nếu nó khả vi tại mọi điểm của G.

Định lý 2.1. *Nếu hàm f khả vi tại (x_0,y_0) thì nó liên tục tại (x_0,y_0).*

Chứng minh. Vì hàm f khả vi tại (x_0,y_0) nên theo hệ thức (2.1) cho $\Delta x, \Delta y \to 0$ ta có $\Delta f(x_0,y_0) \to 0$. Vậy $f(x,y)$ liên tục tại (x_0,y_0). □

Định lý 2.2. *Nếu $f(x,y)$ khả vi tại (x_0,y_0) thì $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng tại (x_0,y_0) hơn nữa $f'_x(x_0,y_0) = A, f'_y(x_0,y_0) = B$.*

Chứng minh. Trong hệ thức nếu cho $\Delta y = 0$ thì $f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = A.\Delta x + \alpha \Delta x$. Từ đó $\dfrac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = A + \alpha$. Cho $\Delta x \to 0$ ta có $f'_x(x_0, y_0) = A$.

Cho $\Delta x = 0$ và tiến hành tương tự ta có $f'_y(x_0, y_0) = B$. □

Định lý 2.3. *Nếu hàm $f(x, y)$ xác định trong một $\epsilon-$lân cận của điểm (x_0, y_0), có các đạo hàm riêng f'_x, f'_y liên tục tại điểm (x_0, y_0) thì hàm $f(x, y)$ khả vi tại (x_0, y_0).*

Chứng minh. Với $\Delta x, \Delta y$ đủ bé ta có:

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)\\ &[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)].\end{aligned}$$

Áp dụng định lý Lagrange cho hàm $f(x, y_0 + \Delta y)$ và hàm $f(x_0, y)$ ta có:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x + f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta y(\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)).$$

Vì các đạo hàm riêng f'_x, f'_y liên tục tại (x_0, y_0) nên ta có:

$$f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0) + \alpha; f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x_0, y_0) + \beta,$$

trong đó $\alpha, \beta \to 0$ khi $\Delta x, \Delta y \to 0$.

Bởi vì $\Delta f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y$ nên ta có điều cần chứng minh. □

Theo Định lý 2.3 và chú ý rằng $dx = \Delta x, dy = \Delta y$ nếu $f(x, y)$ khả vi tại điểm (x, y) thì ta có vi phân của hàm $f(x, y)$ tại (x, y) là

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy.$$

Chú ý rằng nếu có các đạo hàm riêng không liên tục tại (x_0, y_0) thì chưa chắc hàm đã khả vi tại (x_0, y_0).

Nếu xem $f = f(x, y)$ là hàm của hai biến độc lập $(x, y) \in G$ thì

$$df = f'_x dx + f'_y dy$$

Bây giờ, nếu xem x, y là các biến phụ thuộc vào $(u, v) \in D$ thì

$$df = f'_u du + f'_v dv$$

Thay vào ta có:

$$df = f'_x(x'_u du + x'_v dv) + f'_y(y'_u du + y'_v dv) = f'_x dx + f'_y dy.$$

Ta thấy rằng dạng vi phân của hàm là không thay đổi khi các biến của nó là biến độc lập hay phụ thuộc. Tính chất này cũng giống như tính bất biến của vi phân cấp 1 của hàm 1 biến.

2.3 Đạo hàm của hàm hợp

Cho hàm số f xác định trên tập mở G trong $\mathbb{R}^2$ và $x = x(t), y = y(t)$ là các hàm một biến xác định trên tập D mở trong $\mathbb{R}$ sao cho $(x(t), y(t)) \in G, \forall t \in D$. Khi đó, hàm hợp $f(x(t), y(t))$ xác định trên D. Nếu f khả vi trên G còn các hàm $x(t), y(t)$ khả vi trên D thì hàm hợp $f(x(t), y(t))$ có đạo hàm tại mọi điểm $t \in D$ và

$$f'_t = f'_x x'_t + f'_y y'_t.$$

Chứng minh. a) Giả sử $t \in D$ và Δt là số gia của t sao cho $t + \Delta t \in D$. Khi đó ta có các số gia $\Delta x, \Delta y, \Delta f$. Vì f khả vi trên G nên $\Delta f(x, y) = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \alpha$, trong đó $\lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{\alpha}{\rho} = 0$.

Theo giả thiết các hàm $x(t), y(t)$ khả vi trên D nên khi $\Delta t \to 0$ thì Δx và Δy và do đó $\rho \to 0$. Mặt khác

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'_t; \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = y'_t$$

nên $f'_t = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} (f'_x \dfrac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y \dfrac{\Delta y}{\Delta t} + \dfrac{\alpha}{\rho} \sqrt{\dfrac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{\Delta t^2}}) = f'_x x'_t + f'_y y'_t$.

b) Bây giờ với hàm số f như đã cho ở trên còn $x = x(u, v), y = y(u, v)$ là các hàm số khả vi trên $D \subset \mathbb{R}^2$ sao cho $x(u, v), y(u, v) \in G$ khi $(u, v) \in D$ thì hàm hợp $f(x(u, v), y(u, v))$ là hàm hai biến xác định trên D. Tương tự như trên ta chứng minh được hàm $f(x(u, v), y(u, v))$ tồn tại các đạo hàm riêng tại mọi điểm của D và

$$f'_u = f'_x x'_u + f'_y y'_u; f'_v = f'_x x'_v + f'_y y'_v.$$

□

2.4 Đạo hàm và vi phân cấp cao

2.4.1 Đạo hàm riêng cấp cao

Đạo hàm riêng cấp hai là đạo hàm của đạo hàm riêng. Với hàm hai biến $z = f(x,y)$ ta có:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} = f''_{x^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy} = f''_{y^2}$$

***Ví dụ* 4.** Cho hàm $f(x,y) = x^3y + e^y \sin x$. Ta có

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + e^y \cos x; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + e^y \sin x;$$
$$\frac{\partial f^2}{\partial x^2} = 6xy + e^y \sin x; \quad \frac{\partial f^2}{\partial x \partial y} = 3x^2 + e^y \cos x;$$
$$\frac{\partial f^2}{\partial y \partial x} = 3x^2 + e^y \cos x; \quad \frac{\partial f^2}{\partial x \partial y} = e^y \sin x.$$

Các đạo hàm $\dfrac{\partial f^2}{\partial x \partial y}$ và $\dfrac{\partial f^2}{\partial y \partial x}$ gọi là đạo hàm hỗn hợp.

Định lý 2.4. *Nếu đạo hàm hỗn hợp f''_{xy}, f''_{yx} xác định và liên tục trong một $\epsilon-$lân cận của điểm (x_0, y_0) thì*

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

2.4.2 Vi phân cấp cao

Cho hàm số f khả vi trong tập mở $G \subset \mathbb{R}^2$. Vi phân của f tại $(x,y) \in G$ là

$$df(x,y) = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy.$$

Vì df là hàm của hai biến (x,y) nên có thể xét vi phân của nó tại điểm nào đó. Ta gọi df là vi phân cấp 1 của f.

Định nghĩa 5. Nếu tồn tại vi phân của df tại một điểm nào đó thì ta gọi vi phân đó là vi phân cấp 2 của hàm f tại điểm đó và ký hiệu là d^2f. Như vậy $d^2f = d(df)$.

Chú ý

a) Khi lấy vi phân của df ta xem dx, dy là các hằng số. Do đó

$$\begin{aligned} d^2f &= d(f'_x dx + f'_y dy) = (f''_{xx}dx + f''_{yx}dy)dx + (f''_{xy}dx + f''_{yy})dy \\ &= f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2. \end{aligned}$$

(với giả thiết các đạo hàm hỗn hợp cấp 2 bằng nhau).

b) Các vi phân cấp 3, 4,... được định nghĩa tương tự và ký hiệu là $d^3f, d^4f, ...$ Một cách tổng quát, nếu tồn tại $d^{n-1}f$ thì $d^nf = d(d^{n-1}f)$. Ta cũng thấy rằng, nếu hàm f có tất cả các đạo hàm riêng đến cấp n và chúng liên tục tại điểm nào đó thì f có vi phân cấp n tại điểm đó.

c) Để tính vi phân cấp cao ta dùng công thức hình thức sau

$$d^nf = (\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy)^n f$$

3 Cực trị của hàm hai biến

Để tìm hiểu cực trị của hàm hai biến, trước hết ta xét bài toán sau:

Một shop quần áo ở Tp Đà Nẵng bán hai loại áo tốt, một loại là áo sơ mi nam, một loại là áo len nữ. Chủ cửa hàng có thể thu mua cả hai loại trên với giá 2 trăm ngàn đồng mỗi cái. Chủ cửa hàng ước tính rằng nếu áo sơ mi nam bán với giá x trăm ngàn đồng mỗi cái, áo len nữ bán với giá y trăm ngàn đồng mỗi cái thì khách hàng sẽ mua xấp xỉ $40 - 50x + 4y$ áo sơ mi nam và $20 + 60x - 70y$ áo len nữ mỗi ngày. Hỏi chủ cửa hàng nên bán các loại áo với giá bao nhiêu để tổng lợi nhuận là lớn nhất?

Ta thấy tổng lợi nhuận từ việc bán áo mỗi ngày được cho bởi hàm:

$$f(x, y) = (40 - 50x + 40y)(x - 2) + (20 + 60x - 70y)(y - 2)$$

Vấn đề đặt ra ở đây là ta phải tìm x và y sao cho tổng lợi nhuận là lớn nhất nghĩa là tìm x và y để $f(x, y)$ lớn nhất. Đây chính là vấn đề tìm cực trị của hàm hai biến mà ta sẽ nghiên cứu sau đây. Tuy nhiên, ở đây ta chỉ xét cực trị không điều kiện.

3.1 Cực trị địa phương

Định nghĩa 6. Cho $f(x, y)$ là hàm hai biến xác định trên tập mở $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và $(x_0, y_0) \in D$.

- Hàm f *đạt cực đại địa phương tại* (x_0, y_0) nếu tồn tại lân cận U của (x_0, y_0) sao cho với mọi $(x, y) \in U \setminus \{(x_0, y_0)\} : f(x, y) < f(x_0, y_0)$. Lúc đó, giá trị $f(x_0, y_0)$ gọi là giá trị cực đại của hàm $f(x, y)$, ký hiệu $f_{CĐ} = f(x_0, y_0)$.

- Hàm f *đạt cực tiểu địa phương tại* (x_0, y_0) nếu tồn tại lân cận U của (x_0, y_0) sao cho với mọi $(x, y) \in U \setminus \{(x_0, y_0)\} : f(x, y) > f(x_0, y_0)$. Lúc đó, giá trị $f(x_0, y_0)$ gọi là giá trị cực tiểu của hàm $f(x, y)$, ký hiệu $f_{CT} = f(x_0, y_0)$.

- Hàm f đạt cực đại hay cực tiểu địa phương tại (x_0, y_0) được gọi chung là *đạt cực trị địa phương tại* (x_0, y_0) và điểm (x_0, y_0) được gọi là điểm cực trị.

Ví dụ 5. Hàm $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ đạt cực tiểu địa phương tại $(x_0, y_0) = (0, 0)$ vì

$$f(0, 0) = 0 < f(x, y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

Ví dụ 6. Hàm $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + 1} + \dfrac{1}{y^2 + 1}$ đạt cực đại địa phương tại $(x_0, y_0) = (0, 0)$ vì

$$f(0, 0) = 2 > f(x, y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

3.2 Điều kiện cần để hàm số có cực trị

Định lý 3.1. *Nếu $f(x, y)$ đạt cực trị địa phương tại điểm (x_0, y_0)* ***và*** *có các đạo hàm riêng $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$ thì*

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \quad (*).$$

Lúc đó điểm (x_0, y_0) thỏa mãn hệ (*) được gọi là điểm dừng.

Nhận xét

Nếu hàm đạt cực trị địa phương tại (x_0, y_0) thì vẫn chưa thể kết luận (x_0, y_0) là điểm dừng. Bởi vì có những hàm đạt cực trị địa phương tại (x_0, y_0) nhưng tại đó các đạo hàm riêng cấp một không tồn tại. Chẳng hạn, hàm $f = \sqrt{x^2 + y^2}$ đạt cực tiểu địa phương tại $(0, 0)$ nhưng f không có các đạo hàm riêng cấp một tại điểm đó.

Không phải bất kỳ điểm dừng nào cũng là điểm cực trị. Chẳng hạn, điểm $(0, 0)$ là điểm dừng của hàm $f(x, y) = x^2 - y^2$ nhưng điểm $(0, 0)$ không phải là điểm cực trị của f.

3.3 Điều kiện đủ để hàm số có cực trị

Đối với điều kiền cần để hàm có cực trị tại (x_0, y_0), chưa có sự xuất hiện của các đạo hàm riêng cấp 2 tại (x_0, y_0). Các đạo hàm riêng cấp hai này sẽ tham gia để xác định điều kiện đủ để hàm f có cực trị tại (x_0, y_0).

Định lý 3.2. *Giả sử $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp hai liên tục trong một lân cận nào đó của (x_0, y_0) và các đạo hàm riêng $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$. Đặt*

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), B = f''_{xy}(x_0, y_0), C = f''_{yy}(x_0, y_0).$$

Khi đó, ta có các kết luận tại điểm (x_0, y_0) được thể hiện qua bảng sau

Điều kiện	**Kết luận**
$B^2 - AC < 0$	$A > 0$: f đạt cực tiểu địa phương tại (x_0, y_0) $f_{CT} = f(x_0, y_0)$. $A < 0$: f đạt cực đại địa phương tại (x_0, y_0) $f_{CĐ} = f(x_0, y_0)$.
$B^2 - AC = 0$	Hàm f có thể đạt cực trị hoặc không đạt cực trị tại (x_0, y_0).
$B^2 - AC > 0$	f không đạt cực trị địa phương tại (x_0, y_0).

Chú ý Thông thường, khi giải các bài toán ứng dụng thực tế thì cực trị địa phương chính là giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất.

Ví dụ 7. Ta trở lại bài toán ban đầu: Ta thấy tổng lợi nhuận từ việc bán áo mỗi ngày được cho bởi hàm:

$$f(x, y) = (40 - 50x + 40y)(x - 2) + (20 + 60x - 70y)(y - 2)$$

Ta có

$$f'_x = -100x + 100y + 20,\ f'_y = 100x - 140y + 80.$$

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -100x + 100y + 20 &= 0 \\ 100x - 140y + 80 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 2,5 \\ y &= 2,7. \end{cases}$$

Ta có $A = f''_{xx}(2,5;2,7) = -100, B = f''_{xy}(2,5;2,7) = 100, C = f''_{yy}(2,5;2,7) = -140$ và $\Delta = -4000 < 0$. Vì $A = -100 < 0$ nên hàm đạt cực đại tại $(2,5;2,7)$.

Kết luận: Vậy chủ cửa hàng nên bán áo sơ mi nam với giá 270.000 đồng, áo len nữ với giá 250.000 đồng.

3.4 Cách tìm cực trị của hàm hai biến

Từ điều kiện cần và điều kiện đủ để hàm hai biến có cực trị. Ta có thể tóm tắt các bước tìm cực trị như sau:

- **Bước 1**: Tìm các điểm dừng bằng cách giải hệ phương trình

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$$

- **Bước 2**: Nếu hệ vô nghiệm, ta kết luận hàm số không có cực trị. Nếu hệ có nghiệm là (x_0, y_0), ta tính các giá trị

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), B = f''_{xy}(x_0, y_0), C = f''_{yy}(x_0, y_0).$$

- **Bước 3**: Dựa vào bảng ở định lý trên, ta kết luận các cực trị của hàm f.

Ví dụ 8. Tìm cực trị của hàm số

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y + 1.$$

Ta có

$$f'_x = 2x - y + 1;\ f'_y = 2y - x + 1.$$

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y + 1 &= 0 \\ 2y - x + 1 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= -1 \\ y &= -1. \end{cases}$$

Ta lại có

$$f''_{xx} = 2;\ f''_{xy} = -1;\ f''_{yy} = 2.$$

Do đó $B^2 - AC = -3 < 0$. Vì $A = 2 > 0$ nên hàm đạt cực tiểu tại $(-1, -1)$ và

$$f_{CT} = 0.$$

***Ví dụ* 9.** Tìm cực trị của hàm số

$$f(x, y) = 2x + y + 1.$$

Ta có

$$f'_x = 2;\; f'_y = 1.$$

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y + 1 & = 0 \\ 2y - x + 1 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = -1 \\ y & = -1. \end{cases}$$

Ta lại có

$$f''_{xx} = 2;\; f''_{xy} = -1;\; f''_{yy} = 2.$$

Do đó $B^2 - AC = -3 < 0$. Vì $A = 2 > 0$ nên hàm đạt cực tiểu tại $(-1, -1)$ và $f_{CT} = 0$.

3.5 Giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của hàm hai biến trong một miền đóng bị chặn

Cách tìm GTLN - GTBN của hàm nhiều biến

- **Bước 1**: Tìm các giá trị cực trị của hàm số.
- **Bước 2**: Tìm các giá trị đầu mút.
- **Bước 3**: So sánh các giá trị và rút ra kết luận.

***Ví dụ* 10.** Tìm GTLN, GTNN của hàm số: $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$

trên miền $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$

CHƯƠNG V PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

1 Các khái niệm cơ bản

1.1 Khái niệm chung về phương trình vi phân

1.1.1 định nghĩa

Một phương trình mà đối tượng phải tìm là hàm số và hàm số phải tìm có mặt trong phương trình đó dưới dấu đạo hàm hoặc vi phân các cấp được gọi là *phương trình vi phân.*

Phương trình vi phân với hàm số phải tìm là hàm số một biến số được gọi là *phương trình vi phân thường.*

***Ví dụ* 1.** Các phương trình vi phân sau là các phương trình vi phân thường:

a, $y' = y^2 + x^2$

b, $xdy - y^2dx = 0$

c, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -a^2y$

Phương trình vi phân với hàm số phải tìm là hàm số nhiều biến số được gọi là *phương trình vi phân đạo hàm riêng.*

***Ví dụ* 2.** Các phương trình vi phân sau là các phương trình vi phân đạo hàm riêng:

a, $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u$

b, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

1.1.2 Cấp của phương trình vi phân

Cấp của phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm hoặc vi phân của hàm phải tìm có mặt trong phương trình đó.

Trong các phương trình ở 2 ví dụ trên, 1a và 1b là các phương trình vi phân thường cấp 1, 1c là phương trình vi phân thường cấp 2, 2a là phương trình vi phân đạo hàm riêng cấp 1, 2b là phương trình vi phân đạo hàm riêng cấp 2.

Trong chương trình chúng ta chỉ học phương trình vi phân cấp 1 thường.

1.2 Phương trình vi phân cấp 1 thường

Phương trình vi phân cấp 1 thường được cho dưới một trong các dạng sau:

- Dạng tổng quát: $F(x, y, y') = 0$
- Dạng đã giải theo đạo hàm $y' = f(x, y)$
- Dạng đối xứng: $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

1.2.1 Nghiệm và tích phân của phương trình vi phân

Nghiệm của phương trình vi phân là một hàm số mà khi thay hàm số đó cùng với đạo hàm hoặc vi phân của nó vào phương trình ta được một đồng nhất thức.

Chẳng hạn $\varphi(x)$ là nghiệm của phương trình vi phân $y' = f(x, y)$ khi và chỉ khi: $\varphi'(x) = f[x, \varphi(x)]$.

Nhiều khi nghiệm của phương trình vi phân được viết dưới dạng hàm ẩn: $\phi(x, y) = 0$. Trong trường hợp này, phương trình hữu hạn $\phi(x, y) = 0$ được gọi là tích phân của phương trình vi phân.

Ví dụ 3. a, Cho phương trình $y' = f(x)$

Phương trình này có nghiệm là $y = \int f(x)dx$.

b, Cho phương trình $y' - y = 0$

Nghiệm của phương trình này là $y = e^x$.

1.2.2 Nghiệm tổng quát và nghiệm riêng

Giải một phương trình vi phân có nghĩa là tìm tất cả các nghiệm của phương trình đó.

Họ hàm số $y = \varphi(x, c)$ được gọi là *nghiệm tổng quát* của một phương trình thường cấp 1 nếu khi gán cho C một số bất kì thuộc tập số thực ta được một nghiệm của phương trình đó. Mỗi nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát khi gán C bằng một số nhất định được gọi là *nghiệm riêng* của phương trình vi phân đó.

Nghiệm tổng quát của một phương trình vi phân viết dưới dạng hàm ẩn:

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

được gọi là *tích phân tổng quát* cuả phương trình đó. Mỗi tích phân ứng với một giá trị xác định của C được gọi là *tích phân riêng* của phương trình.

***Ví dụ* 4.** Phương trình $y' = x^2$ có nghiệm tổng quát là

$$y = \frac{x^3}{3} + C$$

Nghiệm $y = \dfrac{x^3}{3}$ ứng với C = 0 là một nghiệm riêng.

2 Một số phương trình vi phân cấp 1 đơn giản

2.1 Phương trình có biến số phân ly

Phương trình có biến số phân ly có dạng: $f(x)dx + g(y)dy = 0$

Lấy tích phân 2 vế ta được:

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C$$

***Ví dụ* 5.** Giải phương trình: $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$

Giải

Nếu $x \neq \pm 1$, $y \neq \pm 1$, chia 2 vế phương trình cho $\sqrt{1-y^2}.\sqrt{1-x^2}$ ta được

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = 0,$$

Lấy tích phân 2 vế ta được tích phân tổng quát:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = C,$$

$$\Leftrightarrow \qquad \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = C; \qquad C\text{: hằng số dương.}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = C$($C$: hằng số) Các nghiệm: $x = \pm 1; y = \pm 1$ cũng thỏa mãn phương trình.

***Ví dụ* 6.** Tìm nghiệm riêng của phương trình

$$\frac{yy'}{x} + e^y = 0$$

thỏa mãn điều kiện $y(1) = 0$.

Giải

Thay $y' = \dfrac{dy}{dx}$, ta có

$$\frac{ydy}{xdx} + e^y = 0$$

đưa về dạng phương trình tách biến:

$$\Leftrightarrow ydy + e^y.xdx = 0$$

$$\Leftrightarrow ydy.e^{-y} + xdx = 0$$

Lấy tích phân 2 vế của phương trình ta được

$$\int y.e^{-y}dy + \int xdx = C$$

Lấy tích phân hai vế phương trình ta được

$$-e^{-y}(y+1) + \frac{x^2}{2} = C$$

$$\Leftrightarrow 2e^{-y}(y+1) = x^2 - 2C$$

Theo điều kiện ban đầu thì y = 0 khi x = 1, do đó:

$$2 = 1 - 2C \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$$

Vậy nghiệm thỏa mãn điều kiện bài toán là:

$$2e^{-y}(y+1) = x^2 + 1$$

2.2 Một số phương trình đưa được về dạng phân ly biến số

2.2.1 Phương trình thuần nhất

Phương trình dạng: $\dfrac{dy}{dx} = \varphi\Big(\dfrac{y}{x}\Big) \quad (*)$

Phương trình này không đổi khi thay (x, y) bởi (kx, ky) với k là hằng số.

Đặt $z = \dfrac{y}{x}$ ta có: $y = xz$ và $\dfrac{dy}{dx} = z + x\dfrac{dz}{dx}$

Thay vào phương trình (*) ta được:

$$z + x\frac{dz}{dx} = \varphi(z) \Leftrightarrow x\frac{dz}{dx} = \varphi(z) - z$$

Nếu $\varphi(z) - z \neq 0$ thì

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\varphi(z) - z}$$

Đây là phương trình phân ly biến số.

Ví dụ 7. Giải phương trình $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \tan\dfrac{y}{x}$

Giải

Đặt $y = xz \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = z + x\dfrac{dz}{dx}$

Thay vào phương trình đã cho ta được

$$z + x\frac{dz}{dx} = z + \tan z$$

$$\Leftrightarrow x\frac{dz}{dx} = \tan z$$

$$\Leftrightarrow xdz = \tan z dx$$

Chia 2 vế cho $x \tan z$ ta được:

$$\cot z dz = \frac{1}{x}dx$$

Lấy tích phân 2 vế:

$$\int \cot z dz = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\Leftrightarrow \ln(\sin z) = \ln x + \ln C$$

$$\Leftrightarrow \sin z = Cx$$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình đã cho là:

$$\sin\frac{y}{x} = Cx \text{ (với } C \text{ là hằng số bất kì)}$$

2.2.2 Phương trình dạng $\frac{dy}{dx} = f(ax + by)$

Phương trình này có thể đưa được về dạng phân ly biến số bằng cách đặt $z = ax + by$.

Thật vậy, xem z là hàm số của x, ta có:

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$$

Mà $\frac{dy}{dx} = f(ax + by) = f(z)$, do đó

$$\frac{dz}{dx} = a + bf(z) \Leftrightarrow \frac{dz}{a + bf(z)} = dx$$

. Đây là phương trình phân ly biến số.

Ví dụ 8. Giải phương trình $\frac{dy}{dx} = 2x + y$

Giải

Đặt $z = 2x + y$, ta có $\frac{dz}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx}$.

Mà $\dfrac{dy}{dx} = 2x + y$, phương trình đã cho được quy về

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} = 2 + z \quad &\Leftrightarrow dz = (2+z)dx \\ &\Leftrightarrow \frac{dz}{2+z} = dx \end{aligned}$$

Lấy tích phân 2 vế

$$\int \frac{dz}{2+z} = \int dx$$

$$\ln(2+z) = x + \ln C$$

$$\Leftrightarrow \ln(2+z) - \ln C = x$$

$$\Leftrightarrow z = C.e^x - 2$$

Thay $z = 2x + y$ ta được nghiệm tổng quát của phương trình đã cho:

$$y = C.e^x - 2x - 2$$

2.2.3 Phương trình dạng $\frac{dy}{dx} = f\Big(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\Big)$

*__Trường hợp 1__: $a_1b_2 = a_2b_1$.

Trường hợp này ta có:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \Rightarrow a_1 = ka_2 \text{và} b_1 = kb_2$$

$$\frac{dy}{dx} = f\Big(\frac{k(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\Big) = g(a_2x + b_2y)$$

Phương trình này có dạng của phương trình ở mục 2.2.2.

*__Trường hợp 1__: $a_1b_2 \neq a_2b_1$.

Trường hợp này hệ phương trình

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất (x_0, y_0). Thay $x = x_0 + u, y = y_0 + v$, ta có:

$dx = du, dy = dv$,

$a_1x + b_1y + c_1 = a_1u + b_1v + (a_1x_0 + b_1y_0 + c_1) = a_1u + b_1v$,

$a_2x + b_2y + c_2 = a_2u + b_2v + (a_2x_0 + b_2y_0 + c_2) = a_2u + b_2v$

Phương trình ban đầu trở thành

$$\frac{dv}{du} = f\Big(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\Big)$$

Phương trình này là phương trình vi phân thuần nhất, do đó có thể đưa về dạng vi phân biến số bằng cách đặt $v = z.u$.

***Ví dụ* 9.** Giải phương trình $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - y + 1}{x + y - 3}$

Giải

Hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất $x_0 = 1, y_0 = 2$.

Thay $x = 1 + u$ và $y = 2 + v$ ta được:

$$\frac{dv}{du} = \frac{u - v}{u + v}$$

Đặt $z = \dfrac{v}{u} \Rightarrow v = uz$ và $\dfrac{dv}{du} = z + u\dfrac{dz}{du}$

Thay vào phương trình ta có:

$$z + u\frac{dz}{du} = \frac{u - uz}{u + uz}$$

$$\Leftrightarrow z + u\frac{dz}{du} = \frac{1 - z}{1 + z}$$

$$\Leftrightarrow u\frac{dz}{du} = \frac{1 - 2z - z^2}{1 + z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{u} = \frac{(1 + z)dz}{1 - 2z - z^2}$$

Lấy tích phân hai vế:

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{(1 + z)dz}{1 - 2z - z^2}$$

$$\Leftrightarrow ln|u| = -\frac{1}{2}ln|1 - 2z - z^2| + lnC$$

$$\Leftrightarrow u^2(1 - 2z - z^2) = C$$

Do đó, $u^2\Big(1 - 2\dfrac{v}{u} - \Big(\dfrac{v}{u}\Big)^2\Big) = C \Rightarrow u^2 - 2uv - v^2 = C$

Thay $x - 1 = u$ và $y - 2 = v$, tích phân tổng quát của phương trình là:

$$(x - 1)^2 - 2(x - 1)(y - 2) - (y - 2)^2 = C$$

2.3 Phương trình tuyến tính cấp một

Phương trình vi phân tuyến tính cấp một có dạng:

$$\frac{dy}{dx} + p(x).y = q(x)$$

trong đó q, p là hai hàm liên tục.

+ Nếu $q(x) \equiv 0$; phương trình được gọi là phương trình tuyến tính thuần nhất.

+ Nếu $q(x) \not\equiv 0$ phương trình được gọi là phương trình tuyến tính không thuần nhất.

2.3.1 Phương trình tuyến tính thuần nhất

Dạng $\quad y' + p(x)y = 0$

***Cách giải**:

Với $y = 0$ là một nghiệm của phương trình.

Với $y \neq 0$, nhân 2 vế phương trình với $\dfrac{dx}{y}$ và chuyển $p(x)dx$ sang vế phải ta được: $\quad \dfrac{dy}{y} = -p(x)dx.$

Lấy tích phân 2 vế phương trình:

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C|; \qquad C \neq 0$$

$$\Leftrightarrow ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int p(x)dx$$

Vậy nghiệm tổng quát của là:

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, \quad C \text{ là hằng bất kỳ}$$

(C = 0 cho tương ứng nghiệm y = 0 để mất trong quá trình biến đổi).

2.3.2 Phương trình tuyến tính không thuần nhất

Dạng $\quad y' + p(x).y = q(x)$, với $q(x) \neq 0$

***Cách giải**: *Bước 1: giải phương trình tuyến tính thuần nhất $y' + p(x).y = 0$, giải ra được nghiệm tổng quát:

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} = \varphi(x, C(x)), \quad C \text{ là hằng bất kỳ}$$

*Bước 2: Thay y và $y' = \varphi'_x + \varphi'_C \dfrac{dC(x)}{dx}$ vào phương trình để tìm $C(x)$. Nghiệm của phương trình dưới dạng

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} = \varphi[x, C(x)]$$

với $C(x)$ vừa tìm được.

Ví dụ 10. Giải phương trình: $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = x^2$

Giải

* Giải $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = 0$ Ta có:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0$$
$$\Leftrightarrow xdy - ydx = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Lấy tích phân 2 vế phương trình, ta được

$$ln|y| = ln|x| + ln|C|$$

$$\Leftrightarrow y = Cx$$

*Xem $C = C(x)$, lúc đó: $y = C(x).x$ và $y' = C(x) + x\dfrac{dC(x)}{dx}$

Thay vào phương trình ban đầu:

$$C(x) + x\frac{dC(x)}{dx} - \frac{C(x).x}{x} = x^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{dC(x)}{dx} = x$$
$$\Leftrightarrow C(x) = \frac{x^2}{2} + C_1$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là: $y = (\dfrac{x^2}{2} + C_1).x$

Ví dụ 11. Giải phương trình: $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = -2x^3$

Giải

* Giải $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{dy}{y} + 2xdx = 0$

$\Leftrightarrow \int \dfrac{dy}{y} + \int 2xdx = 0$

$\Leftrightarrow \ln y + x^2 = \ln C$

$\Leftrightarrow y = C.e^{-x^2}$

* Coi $C = C(x)$, khi đó $y = C(x).e^{-x^2}$ và $y' = -2x.C(x) + e^{-x^2}\dfrac{d(C(x))}{dx}$

Thay vào phương trình đầu bài, ta được

$$-2x.C(x) + e^{-x^2}\frac{d(C(x))}{dx} + 2xC(x).e^{-x^2} = -2x^3$$

$\Leftrightarrow e^{-x^2}\dfrac{d(C(x))}{dx} = -2x^3$
$\Leftrightarrow d(C(x)) = -2x^3.e^{x^2}dx$
$\Leftrightarrow \int d(C(x)) = \int -2x^3.e^{x^2}dx$
$\Leftrightarrow C(x) = -x^2.e^{x^2} + e^{x^2} + C_1$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$y = (-x^2.e^{x^2} + e^{x^2} + C_1).e^{-x^2} = -x^2 + 1 + C_1.e^{-x^2}$$

2.4 Phương trình Bernoulli

Phương trình Bernoulli có dạng:

$$\frac{dy}{dx} + p(x).y = q(x).y^{\alpha}$$

trong đó $\alpha \in \mathbb{R}$; q, p là hai hàm liên tục.

Nếu $\alpha = 0$ hay $\alpha = 1$; phương trình đã cho là phương trình tuyến tính.

Giả sử $\alpha \neq 0$ và $\alpha \neq 1$; chia hai vế của phương trình cho y^{α} $(y \neq 0)$ ta được:

$$y^{-\alpha}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-\alpha} = q(x)$$

Đặt $z = y^{1-\alpha} \Longrightarrow \dfrac{dz}{dx} = (1-\alpha)y^{-\alpha}\dfrac{dy}{dx}$,
và thay vào ta được: $\dfrac{1}{1-\alpha}\dfrac{dz}{dx} + p(x)z = q(x)$,
hay $\dfrac{dz}{dx} + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x)$.
Đây là phương trình tuyến tính với ẩn hàm là z.

Ví dụ 12. Giải phương trình: $\dfrac{dy}{dx} - 2xy = 2x^3y^2$

Giải

Giả sử $y \neq 0$, chia 2 vế của phương trình cho y^2, ta được

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} - 2xy^{-1} = 2x^3 \qquad (*)$$

Đặt $z = y^{-1}$, ta có: $\dfrac{dz}{dx} = -y^{-2}\dfrac{dy}{dx}$
Thay vào phương trình đề (*) ta được,

$$-\frac{dz}{dx} - 2xz = 2x^3$$

Giải phương trình tuyến tính này ta tìm được $z = Ce^{-x^2} + 1 - x^2$, với C: hằng số bất kỳ.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = \frac{1}{Ce^{-x^2} + 1 - x^2} \qquad \text{với } C\text{: hằng số bất kỳ.}$$

Ví dụ 13. Giải phương trình: $y' + 2y = y^2 e^x$

Giải

Giả sử $y \neq 0$ ta suy ra: $\dfrac{y'}{y^2} + \frac{2}{y} = e^x$.

Đặt $z = \dfrac{1}{y} \neq 0$; $\quad z' = \dfrac{-y'}{y^2}$.

Thay vào phương trình, ta được:

$$-z' + 2z = e^x \qquad \text{hay} \qquad z' - 2z = -e^x.$$

Đây là phương trình tuyến tính. Giải ra ta được nghiệm tổng quát:

$$z = \left(Ce^{2x} + e^x\right)^{-1}; \qquad C : \text{hằng số.}$$

Vậy nghiệm tổng quát của $(*)$ là:

$$y = \frac{1}{z} = Ce^{2x} + e^x; \qquad C : \text{hằng số bất kỳ.}$$

CHƯƠNG VI MA TRẬN - ĐỊNH THỨC

1 Ma trận

1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1. Cho m, n là hai số nguyên dương. Ta gọi ma trận cỡ $m \times n$ là một bảng số gồm $m.n$ số thực được viết thành m hàng, n cột có dạng như sau:

$$(a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ hoặc } [a_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Trong đó các số thực $a_{ij},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$ được gọi là *các phần tử của ma trận*, chỉ số i chỉ hàng và chỉ số j chỉ cột của phần tử ma trận.

Ta có thể dùng các chữ cái in hoa: A, B, C, ... để đặt tên các ma trận. Tập hợp tất cả các ma trận cấp $m \times n$ được ký hiệu là $M_{m,n}(\mathbb{R})$, để cho gọn ta có thể viết $A = [a_{ij}]_{m\times n}$.

Ví dụ 1.

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 3 & -1 \\ -4 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

là một ma trận cỡ 2×3.

Các phần tử của A là $a_{11} = \sqrt{5}, a_{12} = 3, a_{13} = -1, a_{21} = -4, a_{22} = 11, a_{23} = 0$.

1.2 Các loại ma trận đặc biệt

a. Ma trận hàng - Ma trận cột

Ma trận cấp $1 \times n$ được gọi là ma trận hàng, ma trận cấp $m \times 1$ được gọi là *ma trận cột*.

Ví dụ 2.

$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ là ma trận hàng.

$B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$ là ma trận cột.

b. Ma trận không

Ma trận $O = [0_{ij}]_{m\times n}$ gồm tất cả các phần tử đều bằng 0 được gọi là *ma trận không*.

c. Ma trận vuông - Ma trận chéo

Ma trận có số dòng và số cột bằng nhau (và bằng n) được gọi là ma trận vuông cấp n.

Cho ma trận vuông cấp n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Đường chéo gồm các phần tử $a_{11}, a_{22}, ...a_{nn}$ được gọi là *đường chéo chính* của A.
- Các đường chéo còn lại song song với đường chéo chính được gọi là *đường chéo phụ* của A.
- Nếu A có các phần tử nằm ngoài đường chéo chính đều bằng 0 thì A được gọi là *ma trận chéo*.

d. Ma trận đơn vị

Ma trận chéo cấp n có tất cả các phần tử nằm trên đường chéo chính đều bằng 0 được gọi là ma trận đơn vị, ký hiệu I_n.

Ví dụ 3.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e. Ma trận tam giác

Ma trận tam giác trên (dưới) cấp n là ma trận có tất các phần tử nằm phía dưới (phía trên) đường chéo chính đều bằng 0.

Ví dụ 4.

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ là ma trận tam giác trên,

$$B = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 0 \\ 8 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$ là ma trận tam giác dưới

f. Ma trận đối xứng - Ma trận phản đối xứng

Ma trận đối xứng cấp n là ma trận có các phần tử đối xứng qua đường chéo chính bằng nhau ($a_{ij} = a_{ji}$). Ma trận phản đối xứng cấp n là ma trận có các phần tử đối xứng qua đường chéo chính đối nhau ($a_{ij} = -a_{ji}$).

***Ví dụ* 5.** $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & -7 \end{bmatrix}$ là ma trận đối xứng,

$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ -4 & 3 & -7 \end{bmatrix}$ là ma trận phản đối xứng.

1.3 Ma trận bằng nhau

Định nghĩa 2. Hai ma trận cùng cỡ $[a_{ij}]_{m\times n}, [b_{ij}]_{m\times n}$ được gọi là *bằng nhau* nếu các phần tử ở từng vị trí đều bằng nhau:

$$a_{ij} = b_{ij}, \forall i = \overline{1, m}, \forall j = \overline{1, n}.$$

***Ví dụ* 6.**

$$\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ z & 2 & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & u & 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 2 \\ u = 2 \\ t = 3. \end{cases}$$

1.4 Các phép toán trên ma trận

a) Phép cộng và trừ

Cho hai ma trận cùng cỡ $A = [a_{ij}]_{m\times n}, B = [b_{ij}]_{m\times n}$, tổng và hiệu của hai ma trận A, B là một ma trận xác định như sau:

$$A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{m\times n}$$

* Phép cộng ma trận có tính chất giao hoán và kết hợp, nghĩa là:

$$A + B = B + A,\ A + (B + C) = (A + B) + C,\ \forall A, B, C \in M_{m,n}(\mathbb{R}).$$

Ví dụ 7. Cho $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

Ta có $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 7 & 0 & -3 \end{bmatrix}, A - B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$

b) Nhân một số với ma trận

Cho $A = [a_{ij}]_{m\times n}, \lambda \in \mathbb{R}$. Tích của ma trận A với một số thực λ là một ma trận xác định như sau:

$$\lambda A = [\lambda a_{ij}]_{m\times n}.$$

* Ma trận $-A$ được gọi là ma trận đối của A.

* Phép nhân một số với ma trận có tính chất phân phối đối với phép cộng ma trận, nghĩa là:

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B,\ \forall A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R}),\ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ 8. $\begin{bmatrix} -2 & 6 & 0 \\ -4 & 8 & 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

c) Nhân ma trận với ma trận

Cho hai ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n},\ B = [b_{jk}]_{n\times p}$. Tích của hai ma trận A, B là một ma trận xác định như sau

$$AB = [c_{ik}]_{m\times p},\ \text{với } c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\ (i = \overline{1, m}, k = \overline{1, p}).$$

Ví dụ 9. $\begin{bmatrix} -2 & 6 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 18 & 6 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix}$

Phép nhân ma trận có các tính chất:

- $A(BC) = (AB)C,\quad \forall A \in M_{m,n}(\mathbb{R}),\ \forall B \in M_{n,p}(\mathbb{R}),\ \forall C \in M_{p,q}(\mathbb{R});$
- $A(B + C) = AB + AC,\quad \forall A \in M_{m,n}(\mathbb{R}),\ \forall B, C \in M_{n,p}(\mathbb{R});$
- $(A + B)C = AC + BC,\quad \forall A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R}),\ \forall C \in M_{n,p}(\mathbb{R});$
- $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B),\quad \forall A \in M_{m,n}(\mathbb{R}),\ \forall B \in M_{n,p}(\mathbb{R}),\ \forall \lambda \in \mathbb{R};$

- $AI_n = A = I_m A, \qquad\qquad \forall A \in M_{m,n}(\mathbb{R}).$

***Ví dụ* 10.** Cho $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 6 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Tính $2(A+B)C$.

Giải: Ta có

$$2(A+B)C = 2\begin{bmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 8 & 40 & 13 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 80 & 26 \\ -8 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Hoặc ta có thể tính bằng cách: $2(A+B)C = 2(AC+BC)$.

Chú ý:

* Phép nhân ma trận không có tính chất giao hoán.

* Đặc biệt, nếu A là ma trận vuông cấp n và p là một số nguyên dương thì:

$$A^0 = I_n,\ A^p = A^{p-1}A \text{ (lũy thừa ma trận).}$$

***Ví dụ* 11.** Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tính A^{2010}.

Giải: Ta có

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bằng quy nạp ta tính được

$$A^{2010} = \begin{bmatrix} 1 & -2010 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d) Phép chuyển vị

Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$. Ma trận chuyển vị của A là ma trận:

$$A^t = [a_{ji}]_{n\times m}$$

(chuyển dòng 1 thành cột 1, dòng 2 thành cột 2, ..., dòng m thành cột m).

***Ví dụ* 12.** Cho $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 6 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$.

Khi đó ma trận chuyển vị của ma trận A là $A^t = \begin{bmatrix} -5 & 3 & -4 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$.

Phép chuyển vị có các tính chất:

- $(A+B)^t = A^t + B^t$;
- $(\lambda A)^t = \lambda A^t$;
- $(AB)^t = B^t A^t$,

  $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{R}),\ \forall B \in M_{n,p}(\mathbb{R}),\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$;
- $A^t = A \Leftrightarrow A$ đối xứng, $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$;
- $A^t = -A \Leftrightarrow A$ phản đối xứng, $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$.

***Ví dụ* 13.** Cho $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 & -4 \\ 3 & 6 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -5 & 3 & -4 \\ -3 & 6 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Khi đó A là ma trận đối xứng, B là ma trận phản đối xứng.

2 Định thức

Xét ma trận cấp n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Nếu bỏ đi hàng i và cột j ta được ma trận chỉ còn $n-1$ hàng và $n-1$ cột, tức là ma trận vuông cấp $n-1$. Ta kí hiệu ma trận này là M_{ij} và gọi là ma trận con ứng với phần tử a_{ij}. Chẳng hạn, với

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ta có

$$M_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad M_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad M_{13} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$
$$M_{21} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad M_{22} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad M_{23} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$
$$M_{31} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad M_{32} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad M_{33} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

2.1 Định nghĩa

Cho $A = [a_{ij}]_n \in M_n(\mathbb{R})$ là ma trận vuông cấp n.

Định thức của ma trận A là một số thực, ký hiệu $\det(A)$ hay $|A|$ được xác định như sau:

- A là ma trận cấp 1:

  $A = [a_{11}]$ thì $\det(A) = a_{11}$.

- A là ma trận cấp 2:

  $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

  thì $\det(A) = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

- Nếu A là ma trận vuông cấp n thì

  $\det(A) = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + ... + (-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}$ (khai triển theo dòng 1)

  Tổng quát:

  $\det(A) = (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}+(-1)^{i+2}a_{i2}M_{i2}+...+(-1)^{i+n}a_{in}M_{in}$ (khai triển theo dòng i)

  hoặc

  $\det(A) = (-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}+(-1)^{2+j}a_{2j}M_{2j}+...+(-1)^{n+j}a_{nj}M_{nj}$ (khai triển theo cột j)

$(i, j = \overline{1, n})$.

Để kí hiệu định thức, dùng hai gạch đứng hai bên.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ví dụ 14.

- Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. Khi đó $\det(A) = 2.(-2) - 3.1 = -7$.
- $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} = 240$
- Cho $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Khi đó, khai triển theo cột 1 ta được

$$\det(A) = 2.(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3.(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 41.$$

Để tính định thức của ma trận vuông cấp 3 ta còn có **quy tắc Sarrus**, quy tắc này được thực hiện như sau: Ta ghép vào bên phải ma trận A hai cột đó là cột 1 và 2 của A, sau đó lấy tích của các phần tử trên các đường chéo như hình dưới:

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + \;\; - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Ta được:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Chẳng hạn, định thức của ma trận B trong ví dụ 14 ở trên là:

$$\det(A) = 2.3.1 + (-2).(-4).3 + 1.1.2 - 1.3.3 - 2.(-4).2 - (-2).1.1 = 41.$$

Ví dụ 15. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, khi đó (khai triển theo cột 3) ta có:

$$\det(A) = 0.\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0.\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0.\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Chú ý:

- Nếu ma trận vuông A có 1 dòng hoặc 1 cột bằng 0 thì $\det(A) = 0$. Đặc biệt $\det(O_n) = 0$.
- Định thức của ma trận tam giác bằng tích của các phần tử trên đường chéo chính

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}...a_{nn}.$$

Đặc biệt: $\det(I_n) = 1$.

2.2 Tính chất của định thức

Tính chất 1: $\det(A^t) = \det(A)$ với $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Ví dụ 16. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

Tính chất 2: Đổi chỗ hai dòng (hoặc hai cột) cho nhau thì định thức đổi dấu.

Ví dụ 17. $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 5 & -5 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

Từ tính chất này ta dễ dàng rút ra được tính chất sau:

Tính chất 3: Định thức có ít nhất 2 dòng (hoặc 2 cột) giống nhau thì bằng 0.

Chẳng hạn: $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 4 & -4 \\ -3 & -3 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & y^2 & y^5 \\ 1 & y^2 & y^5 \end{vmatrix} = 0.$

Tính chất 4: Nhân một dòng (hoặc một cột) với một số $\lambda \neq 0$ thì định thức được nhân với λ.

Ví dụ 18. $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & x^3 \\ x+1 & 1 & y^3 \\ x+1 & 1 & z^3 \end{vmatrix} = (x+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & x^3 \\ 1 & 1 & y^3 \\ 1 & 1 & z^3 \end{vmatrix} = 0.$

Từ tính chất này ta cũng dễ dàng suy ra tính chất sau:

Tính chất 5: Định thức có 2 dòng (hoặc 2 cột) tỉ lệ với nhau thì bằng 0.

Tính chất 6: Nếu định thức có 1 dòng (hoặc 1 cột) mà mỗi phần tử là tổng của hai số hạng thì có thể tách thành tổng của hai định thức.

Ví dụ 19. $\begin{vmatrix} x-1 & x & x^2 \\ x+2 & y & y^3 \\ x-3 & z & z^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x & x^2 \\ x & y & y^3 \\ x & z & z^4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & x & x^2 \\ 2 & y & y^3 \\ -3 & z & z^4 \end{vmatrix}.$

Tính chất 7: Định thức sẽ không thay đổi nếu ta cộng vào 1 dòng (cột) với tích của λ và một dòng (cột) khác.

Ví dụ 20. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} d_2 \to d_2 + d_1 \\ = \\ d_3 \to d_3 + (-2)d_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} =$ $-6.$

2.3 Phương pháp tính định thức

Để tính định thức, có thể khai triển theo dòng hoặc theo cột như định nghĩa hoặc dùng phươngpháp biến đổi sơ cấp để đưa về dạng tam giác, vì

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}...a_{nn}$$

Các phép biến đổi về hàng mà ta sẽ dùng:

Biến đổi sơ cấp	Tác dụng
1. Nhân một háng với 1 số $k \neq 0$	Định thức nhân với k
2. Đổi chỗ hai hàng	Định thức đổi dấu
3. Cộng k lần hàng i vào hàng j	Định thức không đổi dấu

Áp dụng các phép biến đổi sơ cấp về hàng để đưa định thức về dạng định thức của ma trận tam giác trên, nhớ ghi lại các phép biến đổi đó.

***Ví dụ* 21.** Tính $I = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$

Đổi chỗ 2 hàng $\quad I = -\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$

Đưa thừa số 3 của hàng 1 ra ngoài $\quad I = -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$

Cộng (-2) lần hàng 1 vào hàng 3 $\quad I = -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix}$

Cộng (-10) lần hàng 2 vào hàng 3 $\quad I = -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix}$

Vậy I = -3.1.1.(-55) = 165

3 Ma trận nghịch đảo

3.1 Định nghĩa

Ma trận vuông A (cấp n) được gọi là khả đảo (hay có ma trận nghịch đảo) nếu tồn tại ma trận vuông B (cấp n) sao cho:

$$\boxed{AB = BA = I_n.}$$

Dễ thấy rằng B là duy nhất.

Thật vậy, giả sử tồn tại B' sao cho $AB = BA = I_n$. Lúc đó $B = BI_n = B(AB') = (BA)B' = I_nB' = B'$.

Ta gọi B là ma trận nghịch đảo của A và ký hiệu là: A^{-1}. Như vậy

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.}$$

***Ví dụ* 22.** Ma trận nghịch đảo của ma trận $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ là ma trận $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ vì

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = I_2 \ .$$

3.2 Ma trận phụ hợp

Cho ma trận vuông A (cấp n). Ma trận phụ hợp của A, ký hiệu P_A, được xác định như sau:

$$P_A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

trong đó

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})}$$

là phần bù đại số của phần tử a_{ij} $(i, j = \overline{1, n})$ của ma trận A. Còn M_{ij} là ma trận nhận được từ A bằng cách bỏ đi dòng i và cột j.

Định lý 3.1. *Nếu A là ma trận vuông cấp n thì*

$$\boxed{A.P_A = P_A.A = \det(A).I_n}$$

Định lý 3.2. *Điều kiện cần và đủ để ma trận vuông A khả nghịch là* $\det(A) \neq 0$ *(hay A là ma trận không suy biến). Khi đó*

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} P_A.}$$

3.3 Cách tính ma trận nghịch đảo bằng ma trận phụ hợp

Cho A là ma trận vuông cấp n.

Bước 1:

Tính $\det(A)$. Nếu $\det(A) = 0$ thì A không có ma trận nghịch đảo. Ngược lại, nếu $\det(A) \neq 0$ ta chuyển sang bước 2.

Bước 2:

Tìm ma trận phụ hợp P_A của A. Khi đó ma trận nghịch đảo của A là

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} P_A.$$

Ví dụ 23. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Ta có $\det(A) = 5 \neq 0$. Do đó A có ma trận nghịch đảo.

Ta lại có:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1,\ A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3,\ A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3,\ A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1,\ A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2,\ A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Suy ra ma trận phụ hợp của A là:

$$P_A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Do đó:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

3.4 Tính chất

i) Giả sử A, B là hai ma trận vuông cùng cấp và đều khả nghịch. Lúc đó:

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$$

Đặc biệt: $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m, m$ nguyên dương .

ii) Giả sử ma trận vuông A khả nghịch và $k \neq 0$. Lúc đó ma trận kA cũng khả nghịch và có:

$$\boxed{(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}}$$

iii) Nếu ma trận vuông A khả nghịch thì A^{-1} và A^t cũng khả nghịch và

$$\boxed{(A^{-1})^{-1} = A, (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t}$$

4 Hạng của ma trận

4.1 Định thức con cấp k

Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$.

Định thức của ma trận con cấp k ($1 \le k \le \min\{m, n\}$) của A được gọi là định thức con cấp k của A.

Định lý 4.1. *Nếu trong ma trận A tất cả các định thức con cấp k đều bằng 0 thì các định thức con cấp $k+1$ cũng bằng 0.*

4.2 Hạng của ma trận

Hạng của ma trận khác $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ (khác ma trận không) là cấp cao nhất của tất cả các định thức con khác 0 của A, ký hiệu $r(A)$. Ta có:

$$1 \le r(A) \le \min\{m, n\}.$$

Nếu A là ma trận không thì ta quy ước $r(A) = 0$.

Chú ý: $\boxed{r(A^t) = r(A)}$

***Ví dụ* 24.** Tìm hạng của ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & -5 & 1 & 4 \\ 3 & -8 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

Giải: Ta có định thức con cấp 2: $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Các định thức con cấp 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & -8 & 5 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ -8 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Do đó $r(A) = 2$.

4.3 Phương pháp tìm hạng của ma trận

Định lý 4.2. *Hạng của ma trận bậc thang (hàng) bằng số dòng khác 0 của ma trận đó.*

Cho A là ma trận vuông cấp n. Khi đó $r(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

***Ví dụ* 25.** Cho các ma trận sau:

$$A = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}; \qquad B = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \qquad C = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Ta có: $r(A) = 3, r(B) = 2, r(C) = 3$

Định lý 4.3. *Các phép biến đổi sơ cấp hàng không làm thay đổi hạng của ma trận.*

Nghĩa là: Nếu ta dùng các phép biến đổi sơ cấp dòng biến đổi ma trận A trở thành ma trận B thì $r(A) = r(B)$.

Phương pháp:

Dùng các phép biến đổi sơ cấp dòng biến đổi ma trận A về ma trận bậc thang B. Khi đó hạng của A là số dòng khác 0 của B.

Các phép biến đổi sơ cấp trên hàng:

- Đổi chỗ 2 hàng với nhau.

- Nhân các phần tử của 1 hàng với một số $k \neq 0$.

- Nhân $k \neq 0$ với 1 hàng và cộng các phần tử tương ứng đó vào một hàng khác.

***Ví dụ* 26.** Tìm hạng của ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & -5 & 1 & 4 \\ 3 & -8 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

Giải:

Ta có:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & -5 & 1 & 4 \\ 3 & -8 & 5 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[h_3 \to -3h_1 + h_3]{h_2 \to -2h_1 + h_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{h_3 \to -h_2 + h_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy $r(A) = 2$.

CHƯƠNG VII HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1 Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

1.1 Hệ phương trình tuyến tính

Định nghĩa 1. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát là hệ m phương trình đại số bậc nhất đối với n ẩn số

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n & = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \tag{7.1}$$

trong đó a_{ij}, b_i $(i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$ là các hệ số thực (hoặc phức); $x_1, ..., x_n$ là các ẩn số. Các phần tử b_i gọi là các *hệ số tự do*.

Các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}; \ \overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

lần lượt được gọi là *ma trận hệ số* và *ma trận hệ số mở rộng* của hệ (7.1).

+ Đặt $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ thì hệ (7.1) có thể viết dưới dạng $AX = B$.

Đây là dạng ma trận của hệ (7.1).

***Ví dụ* 1.** Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 2x + 3z = 0 \\ 2y + z = 4. \end{cases}$$

Ma trận hệ số và ma trận hệ số mở rộng của hệ trên lần lượt là:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Và hệ đã cho có thể viết lại dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

1.2 Hệ Cramer

a) Định nghĩa: Hệ phương trình (7.1) được gọi là hệ Cramer nếu ma trận hệ số A là ma trận vuông khả nghịch tức là $m = n$ và định thức:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

***Ví dụ* 2.** Hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 3 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 3. \end{cases}$$

là hệ Cramer vì hệ có 3 phương trình, 3 ẩn số và định thức của ma trận hệ số:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$$

Định lý 1.1. *(Quy tắc Cramer)*

Hệ phương trình Cramer:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n & = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases} \tag{1.1}$$

có nghiệm duy nhất $(x_1, x_2, ..., x_n)$ *được xác định như sau:*

$$x_j = \frac{D_j}{D}$$

trong đó D *là định thức của ma trận hệ số và*

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(j-1)} & b_2 & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \forall j = \overline{1, n}$$

(D_j *là ma trận được suy ra từ ma trận* A *bằng cách thay cột thứ* j *bằng cột vế phải* b*.)*

Trở lại Ví dụ 2: Hệ phương trình trong Ví dụ 2 là hệ Cramer vì ma trận hệ số A là một ma trận vuông và

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Do đó, theo quy tắc Cramer hệ này có nghiệm duy nhất xác định như sau:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4; \ D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 30; \ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2; \ D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -20,$$

$$x = \frac{D_1}{D} = -\frac{15}{2}; \ y = \frac{D_2}{D} = -\frac{1}{2}; \ z = \frac{D_3}{D} = 5.$$

Chú ý:

Để giải hệ phương trình Cramer ta có thể sử dụng ma trận nghịch đảo của ma trận hệ số A bằng cách viết hệ phương trình dưới dạng ma trận như sau:

$$AX = B.$$

- Tìm ma trận A^{-1}.

- Nhân hai vế của phương trình ma trận trên với A^{-1}.

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B,$$

từ đó suy ra nghiệm của hệ Cramer đã cho.

***Ví dụ* 3.** Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp sử dụng ma trận nghịch đảo:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 9 \\ x + 2y - 3z = 14 \\ 3x + 4y + z = 16. \end{cases}$$

Giải: Ta có

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0.$$

nên hệ trên là hệ Cramer. Ma trận nghịch đảo của A là:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hệ phương trình trên viết dưới dạng ma trận:

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

1.3 Phương pháp khử Gauss giải hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Xét hệ phương trình tuyến tính tổng quát (7.1), ma trận hệ số là A, ma trận hệ số mở rộng là $\overline{A}$.

Tương ứng với các phép biến đổi sơ cấp dòng của ma trận mở rộng $\overline{A}$ ta có các phép biến đổi tương đương của hệ phương trình tuyến tính như sau:

- Đổi chỗ hai phương trình cho nhau (tương ứng với phép đổi chỗ hai dòng của ma trận mở rộng cho nhau).
- Nhân hai vế của một phương trình nào đó với một số khác không (tương ứng với phép nhân một dòng của ma trận mở rộng với một số khác không).

- Cộng theo từng vế của một phương trình với một phương trình khác sau khi đã nhân với một số tùy ý(tương ứng với thay một dòng của ma trận mở rộng bởi tổng của dòng đó với tích của một số tùy ý và dòng khác).

Sự tương ứng trên cùng với các định lý về nghiệm của hệ phương trình tuyến tính đã học ở bài trước, ta có một phương pháp khử để giải hệ phương trình tuyến tính tổng quát như sau (gọi là phương pháp khử Gauss).

Phương pháp:

- **Bước 1:** Dùng các phép biến đổi sơ cấp dòng đưa ma trận $\overline{A}$ về ma trận bậc thang $\overline{A_1}$, trong đó A_1 là ma trận nhận được từ $\overline{A_1}$ bằng cách bỏ đi cột cuối cùng. Khi đó $r(A) = r(A_1), r(\overline{A}) = r(\overline{A_1})$.

- **Bước 2:** Có 3 trường hợp xảy ra
  - $r(A) < r(\overline{A})$: hệ vô nghiệm
    (dòng cuối cùng khác 0 của $\overline{A_1}$ có dạng $(0, 0, ..., 0|b)$, $(b \neq 0)$).
  - $r(A) = r(\overline{A}) = n$: hệ có nghiệm duy nhất. Giải hệ phương trình có ma trận hệ số mở rộng $\overline{A_1}$ sau khi bỏ tất cả các hàng bằng 0 (hệ này tương đương với hệ phương trình đã cho).
  - $r(A) = r(\overline{A}) = k < n$: hệ có vô số nghiệm. Nghiệm được giải như sau:
    * Lập hệ phương trình mới có ma trận hệ số mở rộng $\overline{A_1}$ sau khi bỏ tất cả các hàng bằng 0 (hệ này tương đương với hệ phương trình đã cho).
    * Chọn k ẩn cơ bản (có định thức, lập nên từ k cột hệ số của các ẩn đó, khác 0); lần lượt cho $n - k$ ẩn còn lại bởi $n - k$ tham số tùy ý và tìm các ẩn cơ bản theo các tham số đó ta sẽ được nghiệm của hệ. Nghiệm đó gọi là nghiệm tổng quát của hệ đã cho.

    Cách chọn k ẩn cơ bản như sau:

    Nhìn vào ma trận $\overline{A_1}$, nếu phần tử khác 0 đầu tiên của dòng ở cột thứ j thì ta chọn ẩn x_j làm ẩn cơ bản. Cứ làm như vậy đối với k dòng ta sẽ được k ẩn cơ bản.

***Ví dụ* 4.** Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp khử Gauss:

a) $\begin{cases} x + 3y - 2z = -3 \\ 2x + y + 3z = 6 \\ 3x - y + 4z = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - x_3 = -1 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 + 9x_2 + 10x_3 + 5x_4 = 2 \end{cases}$

Giải

a) Ta có:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & 4 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow[h_3 \to h_3 - 3h_1]{h_2 \to h_2 - 2h_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & -5 & 7 & 12 \\ 0 & -10 & 10 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_3 \to h_3 - h_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & -5 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

từ đó ta thấy $r(A) = r(\overline{A}) = 3$ nên hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất. Hệ đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = -3 \\ \quad - 5y + 7z = 12 \\ \qquad - 4z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất: $(2; -1; 1)$.

b) Ta có:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 7 & -1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[h_3 \to h_3 - 4h_1]{h_2 \to h_2 - 2h_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 13 & -5 & 2 & -5 \\ 0 & 13 & -5 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_3 \to h_3 - h_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 13 & -5 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

từ đó ta thấy $r(A) < r(\overline{A})$ nên hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

c) Ta có:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \\ 4 & 9 & 10 & 5 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{h_3 \to h_3 - 5h_1 \\ h_4 \to h_4 - 4h_1}]{h_2 \to h_2 - 2h_1} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \\ 0 & -22 & -12 & -14 & -4 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[h_4 \to h_4 - h_2]{h_3 \to h_3 - 2h_2} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

từ đó ta thấy $r(A) = r(\overline{A}) = 2 < 4$ nên hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm. Ta giải tiếp như sau:

Hệ phương trình đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ \quad\; - 11x_2 - 6x_3 - 7x_4 = -2 \end{cases}$$

Ta chọn x_1, x_2 làm các ẩn cơ bản, x_3, x_4 làm các ẩn không cơ bản. Cho $x_3 = \alpha, x_4 = \beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Khi đó ta có hệ phương trình tương đương là:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 1 - 4x_3 - 3x_4 \\ \quad\; - 11x_2 = -2 + 6x_3 + 7x_4 \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{14}{11}\alpha + \dfrac{2}{11}\beta + \dfrac{1}{11} \\ x_2 = -\dfrac{6}{11}\alpha - \dfrac{7}{11}\beta + \dfrac{2}{11} \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \end{cases}$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình đã cho là:

$$\Big(-\frac{14}{11}\alpha+\frac{2}{11}\beta+\frac{1}{11};-\frac{6}{11}\alpha-\frac{7}{11}\beta+\frac{2}{11};\alpha;\beta\Big),\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

Ví dụ 5. Giải và biện luận theo tham số a hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} ax & + & y & + & z = & 1 \\ x & + & ay & + & z = & a \\ x & + & y & + & az = & a^2 \end{cases}$$

Giải

Ta có:

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{h_1\leftrightarrow h_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & a^2 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[h_3\to h_3-ah_1]{h_2\to h_2-h_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-a^2 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a^3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_3\to h_3+h_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-a^2 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1+a-a^2-a^3 \end{bmatrix}=\overline{A_1}$$

Xét hai trường hợp

- TH1: $2-a-a^2=0 \Leftrightarrow a=1$ hoặc $a=-2$
  - Khi $a=1$, ta có $\overline{A_1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Hệ đã cho tương đương với hệ $x+y+z=1$, hệ này có vô số nghiệm và nghiệm tổng quát có dạng $(1-\alpha-\beta;\alpha;\beta),\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
  - Khi $a=-2$, ta có $\overline{A_1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Vì $r(A)=2<3=r(\overline{A})$ nên hệ đã cho vô nghiệm.

- TH2: $2 - a - a^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1$ và $a \neq -2$. Khi đó hệ phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} x + y + az = a^2 \\ (a-1)y + (1-a)z = a - a^2 \\ (2 - a - a^2)z = 1 + a - a^2 - a^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{a+1}{a+2} \\ y = \dfrac{1}{a+2} \\ z = \dfrac{(a+1)^2}{a+2} \end{cases}$$

Kết luận:

- $a = 1$: Hệ có vô số nghiệm dạng $(1 - \alpha - \beta; \alpha; \beta), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- $a = -2$: Hệ vô nghiệm.
- $a \neq 1$ và $a \neq -2$: Hệ có nghiệm duy nhất $\left(-\dfrac{a+1}{a+2}; \dfrac{1}{a+2}; \dfrac{(a+1)^2}{a+2}\right)$.

1.4 Áp dụng phương pháp Gauss tìm ma trận nghịch đảo

Dựa vào các phép biến đổi sơ cấp dòng của ma trận, ta có một phương pháp tìm ma trận nghịch đảo như sau (Phương pháp Gauss - Jordan):

Lập ma trận khối $(A|I_n)$ (xếp ma trận I_n sau ma trận A), trong đó I_n là ma trận đơn vị cùng cấp. Bằng phép biến đổi sơ cấp dòng liên tiếp, ta đưa ma trận khối đó về ma trận khối có dạng $(I_n|B)$. Khi đó $A^{-1} = B$.

***Ví dụ* 6.** Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

.

Lập ma trận

$$(A|I_3) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Tiến hành liên tiếp các phép biến đổi sơ cấp dòng như sau:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{h_2 \to h_2 + h_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{h_3 \to h_3 - h_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{h_3 \to (\frac{-1}{2})h_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[h_1 \to h_1 - h_3]{h_2 \to h_2 - h_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right]$$

Vậy ma trận nghịch đảo của ma trận A là

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

2 Hệ thuần nhất

2.1 Định nghĩa

Định nghĩa 2. Hệ phương trình thuần nhất dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n & = 0 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n & = 0 \end{cases}$$

Ma trận hệ số $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$

Dạng ma trận của hệ: $A.X = 0$

Hệ luôn có nghiệm dạng $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = [0 \;\; 0 \;\; ... \;\; 0]^t$. Nghiệm này gọi là nghiệm tầm thường của hệ thuần nhất.

Số nghiệm của một hệ phương trình thuần nhất n ẩn được xác định thông qua hạng của ma trận hệ số của nó và số ẩn:

- Nếu $r(A) = n$ thì hệ thuần nhất có một nghiệm duy nhất là nghiệm tầm thường.
- Nếu $r(A) < n$ thì hệ thuần nhất có vô số nghiệm.

Định lý 2.1. *Hệ thuần nhất có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi* $\det(A) = 0$.

Ví dụ 7.

a, Hệ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$ có định thức $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$ nên chỉ có nghiệm tầm thường $x_1 = 0, x_2 = 0$.

b, Hệ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases}$ có định thức $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = 0$ nên hệ có nghiệm không tầm thường, chẳng hạn $x_1 = -3, x_2 = 2$.

2.2 Hệ nghiệm cơ bản của hệ thuần nhất

CHƯƠNG VIII   SỐ PHỨC

1 Tập số phức và các phép toán

1.1 Định nghĩa

1.1.1 Đơn vị ảo

Đơn vị ảo là số có bình phương bằng -1. Kí hiệu: i

$$i^2 = -1$$

1.1.2 Định nghĩa số phức

Cho $a, b \in R$. Mỗi biểu thức dạng $a + bi$ được gọi là một *số phức*.

$$z = a + bi$$

a: phần thực của z, ký hiệu: Rez

b: phần ảo của z, ký hiệu: Imz

1.1.3 Số phức bằng nhau

Cho $z = a + bi, z' = a' + b'i$

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

Ví dụ 1. Cho $z = 2 + ni$ và $z' = m - 3 - 4i$

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = m - 3 \\ n = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ n = -4 \end{cases}$$

1.1.4 Số phức liên hợp

Cho $z = a + bi$.

Số phức $z' = a - bi$ được gọi là số phức liên hợp của số phức z.
Kí hiệu: $z = \overline{z'}$.

Ví dụ 2. $z_1 = 2 + 3i$ là số phức liên hợp của $z = 2 - 3i$. Lúc đó $z = \overline{z_1}$.

1.1.5 Môđun của số phức

Cho $z = a + bi$, Môđun của số phức z kí hiệu là $|z|$, được xác định như sau

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

***Ví dụ* 3.** Cho $z = 3 - 4i$, Môđun của z là $|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$.

1.2 Các phép toán trên tập số phức

1.2.1 Phép cộng và phép trừ

Cho $z = a + bi, z' = a' + b'i$
Ta có: $z \pm z' = a \pm a' + (b \pm b')i$

***Ví dụ* 4.** Cho $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = -2 - i$.
$z_1 + z_2 = -4i$,
$z_1 - z_2 = 4 - 2i$.

1.2.2 Phép nhân

Cho $z = a + bi, z' = a' + b'i$
Ta có: $z.z' = a.a' + ab'i + a'bi + bb'i^2$
hay nói cách khác $z.z' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$

***Ví dụ* 5.** Tính
a, $(2 + 3i)(3 - i)$
b, $(5 + 2i)(5 - 2i)$
Giải
a, $(2 + 3i)(3 - i) = 6 - 2i + 9i - 3i^2 = 9 + 7i$
b, $(5 + 2i)(5 - 2i) = 25 - (2i)^2 = 29$

1.2.3 Phép chia

Cho hai số phức $z = a + bi, z' = a' + b'i$

Khi đó,

$$\frac{z}{z'} = \frac{a + bi}{a' + b'i} = \frac{(a + bi)(a' - b'i)}{(a' + b'i)(a' - b'i)} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} - \frac{ab' - a'b}{a'^2 + b'^2}i$$

***Ví dụ* 6.** Tính
a, $\dfrac{3 - 2i}{1 + 2i}$

b, $\dfrac{3-2i}{i}$

Giải

a, $\dfrac{3-2i}{1+2i} = \dfrac{(3-2i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \dfrac{3-8i+4i^2}{5} = -\dfrac{1}{5} - \dfrac{8}{5}i$

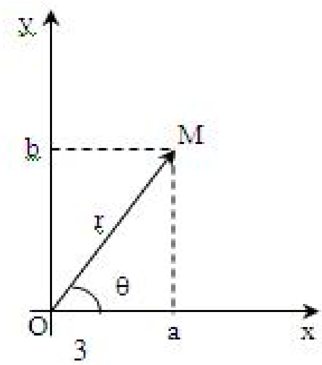
b, $\dfrac{3-2i}{i} = \dfrac{(3-2i)i}{-i^2} = 2+3i$

2 Dạng lượng giác và lũy thừa của số phức

2.1 Biểu diễn hình học của số phức

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, mỗi số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bằng điểm $M(a; b)$.

Trục Ox gọi là trục thực,
Trục Oy gọi là trục ảo,
Mặt phẳng Oxy được gọi là mặt phẳng phức.
Vectơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là biểu diễn hình học của số phức.



2.2 Dạng lượng giác của số phức

Cho số phức $z = a + bi \neq 0$. $M(a; b)$ trong mặt phẳng phức.

Số đo (rađian) của mỗi góc lượng giác với tia đầu là $0x$, tia cuối là OM được gọi là *argument* của z.

Ta có $|z| = r > 0, \theta$ là argument của z. Khi đó $\begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases}$

Biểu diễn lượng giác của số phức: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

****Nhận xét:***

- Nếu $a \neq 0$ thì $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$ và thường chọn θ trong khoảng $(-\pi; \pi)$.
- Nếu $a = 0$ thì chọn $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

Ví dụ 7. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác:

a, $z = 1 + \sqrt{3}x$

b, $z = -4$

c, $z = 12i$

Giải a, $r = |z| = \sqrt{1+3} = 2$

$\tan\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{3}$

Vậy $z = 2(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3})$.

b,$r = |z| = \sqrt{12^2} = 12$

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$

Vậy $z = 12(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2})$.

2.3 Lũy thừa của số phức

* ***Công thức Moivre***

Cho z là số phức có $|z| = r$, θ là một argument của z. Tức là

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

. Lũy thừa với số mũ nguyên dương n của z:

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

Ví dụ 8. Tính $(3+3i)^5$.

Giải

Đặt $z = 3 + 3i$

Ta có $r = |z| = 3\sqrt{2}$, chọn argument $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} z^5 &= (3\sqrt{2})^5\Big(\cos 5\frac{\pi}{4} + i\sin 5\frac{\pi}{4}\Big) \\ &= 972\sqrt{2}\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\Big) \\ &= -972 - 972i \end{aligned}$$

Vậy $(3+3i)^5 = -972 - 972i$.

BÀI TẬP CHƯƠNG VIII

1. Tìm x, y thỏa mãn:

a, $(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i$

b, $(x+4i)(3-yi)=2(1-7)i$

c, $\dfrac{x-3}{3+i}+\dfrac{y-3}{3-i}=i$

2. Giải phương trình trên tập số phức

a, $z-5+7i=2-i$

b,$\dfrac{z}{-1+3i}=3+2i$

c, $z(2+3i)=4+5i$

d, $z(1+2i)=-1+3i$

e, $(1+i)z^2=-1+7i$

3. Giải phương trình:

a, $|z|-z=1+2i$

b, $|z|+z=2+i$

c, $|z|-2z=3-4i$

4. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác:

a, 1 b, -3 c, $-4i$

d, $1+i$ e, $-\sqrt{3}+i$ f, $4-4i$

g, $\dfrac{1+i}{1+i}$ h, $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$

5. a, Chứng minh rằng:

$$i^{4n}=1,\quad i^{4n+1}=i,\quad i^{4n+2}=-1,\quad i^{4n+3}=-i,\forall n\in N$$

b, Tính : $i+i^2+i^3+i^4+....+i^{2009}+i^{2010}$;

6. Tính

a, $(1+i)^{25}$

b, $\Big(\dfrac{1+i}{1-i}\Big)^{16}$

c, $\Big(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\Big)^{20}$

7. Chứng minh:

$$(1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}\Big(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\Big)$$