TS. NGUYỄN DUY THUẬN (Chủ biên)

ThS. PHI MẠNH BAN – TS. NÔNG QUỐC CHINH

ĐẠI SỐ
TUYẾN TÍNH

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Mã số: 01.01.90/92. ĐH- 2003

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU 11
CÁC KÍ HIỆU 15

Chương I: ĐỊNH THỨC........ 18
MỞ ĐẦU 18
§1. PHÉP THẾ........ 20
1.1. Định nghĩa phép thế........ 20
1.2. Nghịch thế........ 21
1.3. Dấu của phép thế 21
§2. KHÁI NIỆM MA TRẬN........ 24
§3. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT CỦA ĐỊNH THỨC 26
3.1. Định nghĩa........ 26
3.2. Tính chất của định thức 27
§4. KHAI TRIỂN ĐỊNH THỨC........ 33
4.1. Định thức con - Phần bù đại số 33
4.2. Khai triển định thức theo một dòng........ 34
4.3. Khai triển định thức theo r dòng 38
§5. PHƯƠNG PHÁP TÍNH ĐỊNH THỨC 42
5.1. Tính định thức cấp 3........ 42
5.2. Áp dụng phép khai triển định thức theo một dòng hoặc một cột........ 43
5.3. Đưa định thức về dạng tam giác........ 44
5.4. Áp dụng các tính chất của định thức 47
5.5. Phương pháp quy nạp và phương pháp truy hồi 49
5.6. Tính định thức bằng máy tính bỏ túi và máy tính điện tử 51
§6. ỨNG DỤNG - HỆ PHƯƠNG TRÌNH CRAMER........ 55
6.1. Định nghĩa........ 55
6.2. Cách giải 55
6.3. Giải hệ Cramer bằng máy tính bỏ túi và máy tính điện tử........ 58
TÓM TẮT........ 60
BÀI TẬP........ 62
VÀI NÉT LỊCH SỬ 67

Chương II: KHÔNG GIAN VECTƠ 69
MỞ ĐẦU 69
§1. ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC TÍNH CHẤT ĐƠN GIẢN 71
1.1. Định nghĩa.. 71
1.2. Một số tính chất đơn giản 72
1.3. Hiệu của hai vectơ 73
§2. KHÔNG GIAN CON 74
2.1. Định nghĩa.. 74
2.2. Tính chất đặc trưng... 74
2.3. Tổng của những không gian con 76
2.4. Giao của những không gian con.. 76
2.5. Không gian sinh bởi một hệ vectơ 77
§3. SỰ ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH - SỰ PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH.......... 80
3.1. Định nghĩa.. 80
3.2. Các tính chất... 81
§4. CƠ SỞ CỦA KHÔNG GIAN VECTƠ 85
4.1. Định nghĩa.. 85
4.2. Sự tồn tại của cơ sở 86
§5. SỐ CHIỀU CỦA KHÔNG GIAN VECTƠ... 89
5.1. Định nghĩa.. 89
5.2. Số chiều của không gian con 89
§6. TỌA ĐỘ CỦA MỘT VECTƠ... 92
6.1. Định nghĩa.. 92
6.2. Ma trận chuyển.. 93
6.3. Liên hệ giữa các tọa độ của một vectơ đối với hai cơ sở khác nhau..... 95
§7. HẠNG CỦA HỆ VECTƠ- HẠNG CỦA MA TRẬN............................. 97
7.1. Hạng của hệ vectơ 97
7.2. Hạng của ma trận... 98
7.3. Cách tìm hạng của ma trận 103
7.5. Tìm cơ sở, số chiều của không gian sinh bởi một hệ vectơ bằng máy tính điện tử.. 107
TÓM TẮT... 111

BÀI TẬP 113
VÀI NÉT LỊCH SỬ 121

Chương III: ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH 123
MỞ ĐẦU 123
§1. ĐỊNH NGHĨA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH - SỰ XÁC ĐỊNH MỘT ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH 124
1.1. Các định nghĩa 124
1.2. Sự xác định một ánh xạ tuyến tính 128
§2. ẢNH VÀ HẠT NHÂN CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH 129
2.1. Định nghĩa và tính chất 129
2.2. Liên hệ giữa số chiều của ảnh, hạt nhân và không gian nguồn 133
2.3. Sự đẳng cấu giữa hai không gian cùng số chiều 135
§3. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP CÁC ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH - HOMK(V, W) 136
3.1. Phép cộng hai ánh xạ tuyến tính 136
3.2. Phép nhân một ánh xạ tuyến tính với một số 137
3.3. Không gian vectơ $Hom_K(V, W)$ 138
3.4. Tích hai ánh xạ tuyến tính 139
TÓM TẮT 141
BÀI TẬP 143
VÀI NÉT LỊCH SỬ 147

Chương IV: HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH 148
Mở đầu 148
§1. PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH - PHƯƠNG PHÁP GAUSS 149
1.1. Định nghĩa 149
1.2. Giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp Gauss (khử dần ẩn số) 150
1.3. Thực hiện phương pháp Gauss trên máy tính điện tử 156
§2. DIỀU KIỆN ĐỂ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH CÓ NGHIỆM 159
2.1. Điều kiện có nghiệm 159
2.2. Giải hệ phương trình tuyến tính bằng định thức 160

§3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT 165
3.1. Định nghĩa.. 165
3.2. Không gian nghiệm của hệ thuần nhất 166
3.3. Liên hệ giữa nghiệm của hệ phương trình tuyến tính và nghiệm của hệ thuần nhất liên kết 170
3.4. Giải hệ phương trình tuyến tính bằng máy tính điện tử 171
TÓM TẮ T.. 174
BÀI TẬP... 175
VÀI NÉT LỊCH SỬ 181

Chương V: MA TRẬN.. 183
MỞ ĐẦU 183
§1. MA TRẬN CỦA MỘT ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH 184
1.1. Định nghĩa... 184
1.2. Liên hệ giữa $Hom_K(V, W)$ với $Mat_{(m.n)}(K)$ 186
§2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN CÁC TẬP MA TRẬN 188
2.1. Phép cộng... 188
2.2. Phép nhân một ma trận với một số.. 189
2.3. Phép trừ.. 190
2.4. Không gian vectơ $Mat_{(m,n)}(K)$ 190
2.5. Tích của hai ma trận 191
2.6. Thực hiện các phép toán ma trận bằng máy tính bỏ túi và mây tính điện tử 196
§3. ĐẠI SỐ MATN(K) CÁC MA TRẬN VUÔNG CẤP N......................... 200
3.1. Định thức của tích hai ma trận.. 200
3.2. Ma trận nghịch đảo.. 202
3.3. Tìm ma trận nghịch đảo... 204
3.4. Một vài ứng dụng đầu tiên của ma trận nghịch đảo.......................... 210
3.5. Ma trận của một đẳng cấu.. 211
§4. SỰ THAY ĐỔI CỦA MA TRẬN CỦA MỘT ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH KHI THAY ĐỔI CƠ SỞ - MA TRẬN ĐỒNG DẠNG.............................. 212
4.1. Sự thay đổi của ma trận của một ánh xạ tuyến tính khi thay đổi cơ sở212
4.2. Ma trận đồng dạng... 213

§5. VECTƠ RIÊNG-GIÁ TRỊ RIÊNG 215
5.1. Vectơ riêng- Giá trị riêng 215
5.2. Da thức đặc trưng - Cách tìm vectơ riêng 217
5.3. Tìm giá trị riêng và vectơ riêng bằng máy tính điện tử 222
§6. CHÉO HOÁ MA TRẬN 224
6.1. Định nghĩa 224
6.2. Điều kiện để một ma trận chéo hoá được 224
6.3. Định lí 227
TÓM TẮT 228
BÀI TẬP 230
VÀI NÉT LỊCH SỬ 240

Chương VI: DẠNG SONG TUYẾN TÍNH DẠNG TOÀN PHƯƠNG ... 241
MỞ ĐẦU 241
§1. DẠNG TUYẾN TÍNH VÀ DẠNG SONG TUYẾN TÍNH 242
1.1. Định nghĩa, ví dụ 242
§2. DẠNG TOÀN PHƯƠNG 249
2.1. Định nghĩa 249
2.2. Ma trận của dạng toàn phương 250
2.3. Dạng toàn phương xác định 251
§3. ĐƯA DẠNG TOÀN PHƯƠNG VỀ DẠNG CHÍNH TẮC 252
3.1. Định nghĩa 252
3.2. Định lý 252
3.3. Dưa dạng toàn phương về dạng chinh tác bằng máy tính điện tử 257
3.4. Định lý quán tính 259
§4. KHÔNG GIAN VECTƠ ƠCLIT 262
4.1. Định nghĩa không gian vectơ Ơclit 262
4.2. Cơ sở trực chuẩn 263
4.3. Không gian con bù trực giao 268
4.4. Hình chiếu của một vectơ lên không gian con 269
4.5. Phép biến đổi trực giao - Ma trận trực giao 270
4.6. Phép biến đổi dối xứng 271
4.7. Ứng dụng 272

TÓM TẮT 280
§1. DẠNG TUYẾN TÍNH, DẠNG SONG TUYẾN TÍNH 280
1.1. Định nghĩa 280
1.2. Ma trận của dạng song tuyến tính 281
1.3. Liên hệ giữa hai ma trận của cùng một dạng song tuyến tính đối với hai cơ sở khác nhau 281
§2. DẠNG TOÀN PHƯƠNG 282
2.1. Dạng toàn phương 282
2.2. Ma trận của dạng toàn phương 282
2.3. Dạng toàn phương xác định 282
§3. ĐƯA DẠNG TOÀN PHƯƠNG VỀ DẠNG CHÍNH TẮC 283
3.1. Định nghĩa. 283
3.2. Định lý. 283
3.3. Dùng phần mềm Maple để đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc 283
3.4. Định lý quán tính 284
§4. KHÔNG GIAN VECTƠ ƠCLIT 285
4.1. Định nghĩa 285
4.2. Cơ sở trực chuẩn 285
4.3. Không gian con bù trực giao 286
4.4. Hình chiếu của một vectơ lên không gian con 286
4.5. Phép biến đổi trực giao - Ma trận trực giao 286
4.6. Phép biến đổi đối xứng 287
4.7. Ứng dụng 287
BÀI TẬP 288
§1. DẠNG SONG TUYẾN TÍNH 288
§2. DẠNG TOÀN PHƯƠNG 289
VÀI NÉT LỊCH SỬ 293

Chương VII: QUY HOẠCH TUYẾN ANH 294
MỞ DẦU 294
§1. BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH 295
1.1. Một vài bài toán thực tế 295
1.2. Bài toán quy hoạch tuyến tính 297

1.3. Ý nghĩa hình học và phương pháp đồ thị... 302
§2. PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH VÀ CÁC THUẬT TOÁN CỦA NÓ 306
2.1. Một số tính chất của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc ... 306
2.2. Phương pháp đơn hình... 313
2.3. Giải các bài toán quy hoạch tuyến tính bằng máy tính điện tử (Theo lập trình tính toán với Mathematica 4.0).. 335
TÓM TẮT... 339
BÀI TẬP... 340
VÀI NÉT LỊCH SỬ 346
LỜI GIẢI -HƯỚNG DẪN -TRẢ LỜI 347

TÀI LIỆU THAM KHẢO 385

LỜI NÓI ĐẦU

Ở thời đại của chúng ta, khoa học và kĩ thuật phát triển như vũ bão. Chúng đòi hỏi ngành giáo dục phải luôn luôn đổi mới kịp thời để đáp ứng mọi nhu cầu về tri thức khoa học của thanh thiếu niên, giúp họ có khả năng lao động và sáng tạo trong cuộc sống sôi động. Hiện nay chương trình và sách giáo khoa bậc phổ thông ở nước ta đã bắt đầu và đang thay đổi để phù hợp với đòi hỏi ấy. Trường Cao đẳng Sư phạm, cái nôi đào tạo giáo viên THCS, cần phải có những đổi mới tương ứng về chương trình và sách giáo khoa. Vì mục đích đó, bộ sách giáo khoa mới ra đời, thay thế cho bộ sách giáo khoa cũ.

Cuốn sách Đại số tuyến tính biên soạn lần này, nằm trong khuôn khổ của cuộc đổi mới ấy. Nó nhằm làm một giáo trình tiêu chuẩn chung cho các trường Cao đẳng Sư phạm trong cả nước theo chương trình mới (chương trình 2002), đòi hỏi không những phải đổi mới những nội dung kiến thức (nếu cần) và cả phương pháp giảng dạy của giảng viên cũng như phương pháp học tập của sinh viên. Mặt khác, qua một thời gian dài thực hiện chương trình và sách giáo khoa cũ, đến nay đã có thể đánh giá những ưu, khuyết điểm của nó, sự phù hợp của nó với trình độ đầu vào của sinh viên các trường Cao đẳng Sư phạm. Do đó cuốn sách biên soạn lần này cũng thừa hưởng những ưu điểm và khắc phục những thiếu sót của những cuốn sách cũ.

Đối tượng sử dụng cuốn sách này là sinh viên và giảng viên các trường Cao đẳng Sư phạm trong cả nước, các giáo viên THCS cần được bồi dưỡng để đạt trình độ chuẩn hoá. Cuốn sách cũng có thể được dùng cho các trường Đại học và Cao đẳng khác và cho tất cả những ai muốn tự học môn học này.

Cơ sở để lựa chọn nội dung của giáo trình này là yêu cầu đầu ra và trình độ đầu vào của sinh viên Cao đẳng Sư phạm hiện nay, đồng thời cũng cần tính đến vai trò của môn học đối với các môn khoa học khác như Giải tích, Hình học, Vật lý, Hoá học,v.v.., và tạo điều kiện cho người học có thể học lên cao hơn. Cụ thể, giáo trình này phải trang bị được cho người giáo viên toán tương lai ở trường THCS những kiến thức cần thiết, đầy đủ, vững vàng về Đại số tuyến tính để giảng dạy tốt những phần liên quan trong chương trình toán THCS. Tuy nhiên, nội dung và phương pháp trình bày những nội dung ấy lại phải phù hợp với trình độ nhận thức và khả năng tiếp nhận sinh viên. Mặt khác, giáo trình này cũng phải cung cấp đầy đủ kiến thức giúp người đọc có thể học được những môn khoa học khác như đã nói trên; đồng thời đáp ứng mong muốn của những sinh viên có hoài bão nâng cao hơn nữa trình độ của mình. Vì thế, nội dung cuốn sách chứa đựng những điều rất cơ bản mà mọi sinh viên cần nắm vững, nhưng cũng có những phần không đòi hỏi mọi sinh viên đều phải hiểu.

Môn quy hoạch tuyến tính có sử dụng nhiều kiến thức đại số tuyến tính. Nhiều sách Đại số tuyến tính trên thế giới xếp nó như một chương của mình dưới đề mục "Bất phương trình tuyến tính". Trong chương trình Cao đẳng Sư phạm mới của hệ đào tạo giáo viên dạy hai môn, nội dung của môn Quy hoạch tuyến tính có giảm bớt. Nó cũng được xếp vào một chương trong giáo trình Đại số tuyến tính này.

Cuốn sách này gồm bảy chương:

Chương I. Trình bày định nghĩa, các tính chất của định thức và các phương pháp cơ bản tính định thức. Đó là một phương tiện để nghiên cứu không gian vectơ và lý thuyết hệ phương trình tuyến tính.

Chương II và chương III. Nghiên cứu không gian vectơ và các ánh xạ giữa các không gian ấy - ánh xạ tuyến tính. Nó là cơ sở của Đại số tuyến tính. Nó giúp cho việc hoàn thiện lý thuyết hệ phương trình tuyến tính.

Chương IV. Hệ phương trình tuyến tính. Đó là một trong những hướng mở rộng của phương trình được học ở trường phổ thông. Với chương này, lý thuyết hệ phương trình tuyến tính được coi là hoàn thiện.

Chương V. Nghiên cứu ma trận và mối liên hệ giữa ma trận với không gian vectơ. Nhờ nó mà các ánh xạ tuyến tính được nghiên cứu sâu sắc hơn.

Chương VI. Nghiên cứu dạng song tuyến tính và dạng toàn phương, một phần của lý thuyết dạng trong Đại số tuyến tính nhưng lại có ảnh hưởng sâu sắc đến Hình học, Phương trình vi phân và Phương trình đạo hàm riêng.

Chương VII: Nghiên cứu một số bài toán của Quy hoạch tuyến tính.

Phần Đại số tuyến tính của cuốn sách này được dùng chung cho cả hai hệ đào tạo giáo viên toán (hệ đào tạo giáo viên dạy môn Toán cùng với môn thứ hai, và hệ đào tạo giáo viên dạy chỉ một môn Toán). Yêu cầu đối với mỗi hệ có khác nhau. Đối với hệ đào tạo giáo viên dạy hai môn, chương trình chỉ yêu cầu sinh viên nắm được những điều rất cơ bản. Chẳng hạn, đối với chương Định thức yêu cầu chỉ là hiểu được định nghĩa định thức, nắm vững các tính chất để tính được các định thức thông thường, không cần hiểu kĩ chứng minh của các tính chất này. Song đối với hệ đào tạo giáo viên chỉ dạy Toán thì đòi hỏi cao hơn cả về nội dung và cả về rèn luyện và phát triển tư duy toán học. Tuy nhiên những đòi hỏi này được thực hiện đến đâu còn tuỳ thuộc vào trình độ sinh viên ở từng địa phương. Đó là phần mềm dẻo mà các trường vận dụng linh hoạt. Phần Quy hoạch tuyến tính ở đây chỉ dùng cho hệ đào tạo giáo viên dạy hai môn.

Mỗi chương đều có phần mở đầu nêu lên những yêu cầu và cách học tập của chương ấy. Cuối mỗi chương có phần tóm tắt đôi nét chính nội dung của chương để bạn đọc có dịp ôn tập lại. Phần bài tập có một số lượng có thể vượt quá yêu cầu chung đôi chút vì các tác giả cuốn sách mong muốn giúp cho những bạn đọc ham thích môn học này có thêm cơ hội rèn luyện kĩ năng. Vì vậy, đối với số đông sinh viên thì giảng viên cần chỉ dẫn cho họ những bài cụ thể. Tuy nhiên bạn đọc cố gắng giải càng nhiều bài tập càng tất. Các phần in chữ nhỏ không đòi hỏi sinh viên phải đọc. Chúng chỉ dành cho những ai thích thú tìm hiểu.

Để học được giáo trình này, người học cần được bổ sung kiến thức về số phức khi mà chương trình Toán ở THPT chưa đề cập tới; hơn nữa cũng cần có khái niệm về các cấu trúc đại số như nhóm, vành, trường để tiện diễn đạt và bắt nhịp được với cách trình bày giáo trình; cần củng cố vững vàng kiến thức toán học bậc THPT.

Giáo trình này được học vào năm thứ nhất sau phần cấu trúc đại số của giáo trình Nhập môn Toán học Cao cấp.

Khi giảng dạy giáo trình này, có thể kết hợp nhiều hình thức như thuyết trình của giảng viên, hướng dẫn sinh viên tự đọc sách, tổ chức xêmina, v.v... Chẳng hạn, có thể tổ chức xêmina ở các mục: Các phương pháp tính định thức; Giải hệ phương trình tuyến tính; Các phép tính về ma trận. Một điều mà các tác giả muốn lưu ý thêm đối với các giảng viên là: vì giáo trình còn được sử dụng để tự học nên có nhiều chỗ phải đặt vấn đề dẫn dắt người học, có nhiều ví dụ. Do đó khi giảng bài ở lớp, các giảng viên nên lựa chọn những điều cần thiết nhất để có đủ thời gian truyền đạt những kiến thức cơ bản, những phần còn lại dành cho sinh viên tự học. Cũng như đã nói trên, Đại số tuyến tính có nhiều ứng dụng, do đó sinh viên cần có kĩ năng vận dụng kiến thức và kỹ năng tính toán.

Muốn thế việc thực hành của sinh viên cần được coi trọng. Nên cố gắng giảm bớt thời gian học lý thuyết ở lớp để giành thêm thời gian cho việc giải bài tập của sinh viên, và nếu có thể thu xếp được một tỉ lệ giữa thời gian dạy lý thuyết và thời gian làm bài tập là 1/1 thì càng tốt.

Đối với người học, khi học giáo trình này luôn luôn có giây và bút trong tay để tự mình mô tả các khái niệm dựa theo những định nghĩa; tự mình chứng minh các định lí sau khi đã tìm hiểu kĩ giả thiết và kết luận; vận dụng các khái niệm, các định lí để tự mình trình bày các ví dụ cho trong sách. Cuối mỗi chương có phần tóm tắt, bạn đọc nên tận dụng nó để củng cố và hệ thống lại kiến thức đã học được ở chương ấy. Cũng cần nói thêm rằng Đại số tuyến tính là một trong những ngành khoa học cổ nhất nhưng cũng rất hiện đại. Những điều được trình bày ở đây chỉ là những điều cơ bản nhất, mở đầu của Đại số tuyến tính trên trường số (mà chủ yếu là trường số thực). Còn nhiều vấn đề nội dung chưa thể đề cập tới.

Trong cuốn sách này chữ **K** được kí hiệu chung cho cả ba trường số, trường số hữu tỉ **Q**, trường số thực **R** và trường số phức **C**, mỗi khi muốn nói một điều gì chung cho cả ba trường số ấy.

Cuối cùng, các tác giả hi vọng rằng cuốn sách đáp ứng được những đòi hỏi của chương trình, những mong muốn của bạn đọc. Tuy nhiên, cuốn sách chưa tránh khỏi hết mọi khiếm khuyết. Vì thế, các tác giả mong nhận được nhiều ý kiến của bạn đọc để có thể sửa chữa những sai sót làm cho cuốn sách ngày càng hoàn thiện và ngày càng hữu ích hơn.

Xin chân thành cảm ơn!

Các tác giả

CÁC KÍ HIỆU

X_n	Tập hợp {1, 2,..., n} gồm n số tự nhiên từ 1 đến n.
$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$	Phép thế σ biến phần tử 1 thành σ(i).
S_n	Tập hợp các phép thế trên tập X_n
sgn(σ)	Dấu của phép thế σ.
$\sum_{i=1}^{n} a_i$	Tổng $a_1 + a_2 + \dots + a_n$.
$\sum_{j \in J} a_j$	Tổng các số a_j, với j thuộc tập chỉ số J.
$\prod_{i=1}^{n} a_i$	Tích $a_1 a_2 \dots a_n$.
$\prod_{j \in J} a_j$	Tích các thừa số a_j, với j thuộc tập chỉ số J.
$A = (a_{ij})_{(m,n)}$	Ma trận A có m dòng, n cột,với các thành phần a_{ij} ở dòng thứ i, cột thứ j.
$A = (a_{ij})_n$	Ma trận vuông cấp n.
$Mat_n(\mathbf{K})$	Tập hợp các ma trận vuông cấp n với các thành phần thuộc trường **K**.
${}^tA$	Ma trận chuyển vị của ma trận A.
A^{-1}	Ma trận nghịch đảo của ma trận A.
$\lvert A \rvert$	Định thức của ma trận A.
I	Ma trận đơn vị.
$\tilde{M}_{ij}$	Định thức con bù của thành phần a_{ij} trong ma trận vuông (a_{ij}).

A_{ij}	Phần bù đại số của thành phần a_{ij}.
$M^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_r}$	Định thức con xác định bởi các dòng $i_1,.., i_r$ và các cột i1,..., j_r.
$\tilde{M}^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_r}$	Định thức con bù của định thức con $M^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_r}$.
$A^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_r}$	Phần bù đại số của định thức con $M^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_r}$.
hạng(A)	Hạng của ma trận A.
A + B	Tổng của hai ma trận A và B.
AB	Tích của hai ma trận A và B.
$\vec{\alpha}$	Vectơ, là một phần tử của không gian vectơ.
$-\vec{\alpha}$	Vectơ đối của $\vec{\alpha}$.
$\vec{0}$	Vectơ không.
$\mathcal{A} = \{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2,..., \vec{\alpha}_m\}$	Hệ vectơ gồm các vectơ $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2,... \vec{\alpha}_m$.
hạng($\mathcal{A}$)	Hạng của hệ vectơ $\mathcal{A}$.
$(\varepsilon) =\{\vec{\varepsilon}_1\ \vec{\varepsilon}_2,..., \vec{\varepsilon}_n\}$	Cơ sở (ε) của không gian vectơ.
$\dim_K V$	Số chiều của **K**- không gian vectơ V.
$f: V \to W$	Ánh xạ tuyến tính từ không gian V đến không gian W.
f(X)	Ảnh của tập X qua ánh xạ tuyến tính f.
Imf	Ảnh của không gian V hay ảnh của ánh xạ tuyến tính f.
$f^{-1}(Y)$	Ảnh ngược của tập Y.
Kerf hay $f^{-1}(0)$	Hạt nhân của ánh xạ tuyến tính f.
$Hom_K(V, W)$	Tập hợp các ánh xạ tuyến tính từ V đến W.
f + g	Tổng của hai ánh xạ tuyến tính f và g.
gf	Tích của hai ánh xạ tuyến tính f và g.
$\vec{\alpha}.\vec{\beta}$	Tích vô hướng của hai vectơ.

$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$	$\vec{\alpha}$ trực giao với $\vec{\beta}$.
$H \perp G$	Không gian H trực giao với không gian G.
$\|\vec{\alpha}\|$	Chuẩn của $\vec{\alpha}$.
$hch_w \vec{\alpha}$	Hình chiếu của $\vec{\alpha}$ lên không gian W.
$\lvert z \rvert$	Môđun của số phức z.
$\bar{z}$	Số phức liên hợp của số phức z.
"$\Rightarrow$"	Chứng minh điều kiện cần.
"$\Leftarrow$"	Chứng minh điều kiện đủ.
x^*	Phương án tối ưu.
X^*	Tập phương án tối ưu.
A_i	Vectơ dòng thứ i của ma trận A.
A_j	Vectơ cột thứ j của ma trận A.

Chương I

ĐỊNH THỨC

MỞ ĐẦU

Ở lớp 9, ta giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp cộng đại số hoặc phương pháp thế. Những phương pháp này đã giúp ta dễ dàng giải các hệ phương trình với hệ số bằng số. Nhưng lên lớp 10, khi phải biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

ta thấy hai phương pháp trên kém tổng quát. Song nếu dùng khái niệm *định thức cấp hai* thì việc trình bày trở nên sáng sủa, gọn gàng.

Ta sẽ thấy rằng khi khái niệm định thức cấp n, (với n là một số nguyên dương tuỳ ý) được xây dựng, thì nó có một vai trò rất to lớn. Nó còn được áp dụng vào hầu hết các chương trong giáo trình này; đặc biệt, nó góp phần đưa vấn đề giải hệ phương trình bậc nhất trở thành một lý thuyết. Nó còn được áp dụng trong nhiều bộ môn khoa học khác như Hình học, Giải tích, Vật lí, Hoá học, v.v...

Chính vì thế mà ta cần nắm vững các tính chất của định thức và các phương pháp tính định thức, làm nhiều bài tập rèn luyện kĩ năng tính định thức để có thể vận dụng tốt khi học tập và nghiên cứu bộ môn Đại số tuyến tính này cũng như những môn khoa học khác.

Để định nghĩa định thức cấp n ta cần các khái niệm phép thế và ma trận.

Yêu cầu chính của chương này là:

- Hiểu rõ và nắm vững các tính chất của định thức.

- Nắm vững các phương pháp tính định thức để có thể tính thành thạo những định thức cần thiết.

Hơn nữa, trong chương này ta cần dùng một vài kí hiệu sau: Tổng của n số: $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$, ($n \geq 1$), được viết gọn là $\sum_{i=1}^{n} a_i$, đọc là "xích ma a_i, i chạy từ 1 đến n". Tổng quát hơn, nếu chỉ số chạy khắp một tập I nào đó thì ta viết là $\sum_{i \in I} a_i$, và đọc là "xích ma a_i, thuộc I".

Ví dụ : $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = \sum_{i=1}^{7} a_i$, đọc là "xích ma a_i, i chạy từ 1 đến 7".

• Tích của n số: $a_1a_2a_3...a_n$. ($n \geq 1$), được viết gọn là $\prod_{i=1}^{n} a_i$, và đọc là "pi a_i, i chạy từ 1 đến n". Nếu chỉ sốt chạy khắp một tập I nào đó thì ta viết là $\prod_{i \in I} a_i$ và đọc là "pi, a_i, i thuộc I".

Ví dụ: $a_1a_2a_3a_4a_5 = \prod_{i=1}^{n} a_i$, đọc là "pi a_i, i chạy từ 1 đến 5".

• Cuối cùng trong cuốn sách này ta dùng từ "trường **K**" mỗi khi muốn nói đến một điều nào đó chung cho cả trường số hữu tỉ **Q**, trường số thực **R** và trường số phức **C**.

Ta hãy tìm hiểu khái niệm phép thế.

§1. PHÉP THẾ

Ở đây ta chỉ dùng khái niệm phép thế như một phương tiện để nghiên cứu định thức chứ chưa nghiên cứu sâu về nó. Để học chương này bạn đọc chỉ cần hiểu và nhớ định nghĩa các dạng phép thế và tính chất về dấu của nó, không cần nhớ chứng minh.

1.1. Định nghĩa phép thế

a) Giả sử tập hợp $X_n = \{1, 2, 3,..., n\}$, ($n \geq 1$). Một song ánh $\sigma : X_n \to X_n$ được gọi là một phép thế trên tập X_n.

Nói riêng, song ảnh đồng nhất được gọi là phép thế đồng nhất.

b) Một phép thế τ trên tập X_n được gọi là một chuyển trí hai phần tử i, j thuộc X_n nếu $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$ và $\tau(k) = k$, với mọi $k \in X_n$, $k \neq i$, $k \neq i$. Nó còn được kí hiệu bởi (i, j).

Nói một cách đơn giản, một chuyển trí chỉ hoán vị hai phần tử nào đó của X_n, còn giữ nguyên mọi phần tử khác.

Tập hợp tất cả các phép thế trên tập X_n được kí hiệu bởi S_n.

Phép thế $\sigma : X_n \to X_n$ được biểu diễn như sau:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3................n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3)...........\sigma(n) \end{pmatrix}$$

trong đó $\sigma(i)$ là ảnh của phần tử $i \in X_n$ được viết ở dòng dưới, trong cùng một cột với i.

Ví dụ 1. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ là phép thế trên tập $X_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ xác định bởi:

$$\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 2, \varepsilon(3) = 4, \sigma(4) = 1.$$

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ là một chuyển trí hoán vị hai số 2 và 4. Nó được viết gọn là $\tau = (2, 4)$.

Chú ý. Ảnh của các phần tử của tập X_n qua mỗi phép thế cho ta một hoán vị trên tập X_n. Ngược lại, mỗi hoán vị lại xác định một phép thế, (chẳng hạn, hoán vị (3, 4, 1, 2) xác định phép thế $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ trên tập X_4). Vì thế số các phép thế trên tập X_n bằng số các hoán vị trên tập ấy; nghĩa là bằng n!. Như vậy, tập S_n có n! phần tử.

Ví dụ 2. S_3 có 3! = 1.2.3 = 6 phần tử. Đó là những phép thế sau:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.2. Nghịch thế

Định nghĩa. *Giả sử mà một phép thế trên tập X_n. Với $i,j \in X_n$, $i \neq j$, ta nói cặp $(\sigma(i), \sigma(j))$ là một nghịch thế của σ nếu $i < j$ nhưng $\sigma(i) > \sigma(j)$.*

Ví dụ. Trên X_3, phép thế $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ Có 2 nghịch thế là: (2, 1), (3, 1), phép thế $\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ có 3 nghịch thế là: (3, 2), (3, 1), (2, 1).

1.3. Dấu của phép thế

Định nghĩa. *Ta gọi phép thế σ là một phép thế chẵn nên nó có một số chẵn nghịch thế. σ được gọi là phép thế lẻ nếu nó có một số lẻ nghịch thế.*

Ta gán cho mỗi phép thế chẵn một giá trị bằng +1, mỗi phép thế lẻ một giá trị bằng -1.

Giá trị này của phép thế σ được gọi là dấu của σ và được kí hiệu bởi $sgn(\sigma)$.

Như vậy, theo định nghĩa, $sgn(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } \sigma \text{ chẵn} \\ -1, & \text{nếu } \sigma \text{ lẻ} \end{cases}$

Ví dụ. Trong ví dụ ở mục 1.2, ta thấy phép thế $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ là một phép thế lẻ vì nó có 3 nghịch thế, còn $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ là một phép thế chẵn vì nó có 2 nghịch thế. Do đó sgn(τ) = -1, sgn(σ) = 1.

Bạn đọc hãy tự xác định dấu của các phép thế σ_1 và τ_j trong ví dụ 2, ở mục 1.1.

Hệ quả 1.

$$sgn(\sigma) = \prod_{\{i,j\}} \frac{i-j}{s(i)-s(j)}.$$

Chứng minh. Chỉ cần chứng minh rằng

$$\prod_{\{i,\, j\}} \frac{i-j}{\sigma(i)-\sigma(j)} = \begin{cases} 1, \text{ nếu số nghịch thế là số chẵn} \\ -1, \text{ nếu số nghịch thế là số lẻ} \end{cases}$$

trong đó {i, j} chạy khắp tập các tập con gồm hai phần tử của X_n. Rõ ràng số nhân tử ở tử số và mẫu bằng nhau. Ta sẽ chứng minh: nếu tử số có nhân tử i - j thì mẫu cũng có i - j hoặc j - i. Vì σ là một song ánh nên ứng với nhân tử i - j tồn tại h, k ∈ X_n sao cho σ(h) = i, σ(k) - j. Nếu tử số có h - k thì mẫu số có σ(h) - σ(k) hay i - j, nếu tử số có k - h thì mẫu số có j = i. Vậy $\prod_{\{i,\, j\}} \frac{i-j}{\sigma(i)-\sigma(j)} = \left[\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}\right.$. Nhưng $\frac{i-j}{\sigma(i)-(j)}$ là số âm nếu (σ(i), σ(i)) là một nghịch thế và là số dương nếu trái lại. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Hệ quả 2. *Với hai phép thêm σ và μ trên X_n ta có:*

$$sgn(\sigma\mu) = sgn(\sigma)sgn(\mu)$$

Chứng minh. Theo định nghĩa và hệ quả ở mục 1.3,

$sgn(\sigma) = \prod_{\{i,j\}} \frac{i-j}{\sigma(i)-\sigma(j)}$. Do đó:

$$sgn(\sigma\mu) = \prod_{\{i,j\}} \frac{i-j}{\sigma\mu(i)-\sigma\mu(j)} = \prod_{\{i,j\}} \frac{i-j}{\mu(i)-\mu(j)} \cdot \frac{\mu(i)-\mu(j)}{\sigma\mu(i)-\sigma\mu(j)}$$

$$= \prod_{\{i,j\}} \frac{i-j}{\mu(i)-\mu(j)} \cdot \prod_{\{i,j\}} \frac{\mu(i)-\mu(j)}{\sigma\mu(i)-\sigma\mu(j)}$$

= sgn(μ)sgn(σ), vì {μ(i),μ(j)} cũng chạy khắp tập các tập con gồm hai phần tử của X_n. □

Hệ quả 3. *Mọi chuyển trí đều là phép thế lẻ.*

Ví dụ. Xét chuyển trí $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$. Các nghịch thế đứng ở dòng thứ hai, tức là dòng chứa các $\tau(i)$. Số 1 bé hơn và số 6 thì lớn hơn mọi số trong dòng nên chúng không tham gia vào nghịch thế. Do đó chỉ có:

- Các nghịch thế dạng (5, r): (5, 3), (5, 4), (5, 2)

- Các nghịch thế dạng (s, 2): (3, 2), (4, 2), (5, 2).

Vì nghịch thế (5, 2) đã được kể 2 lần nên chỉ có 5 nghịch thế. Vậy τ là phép thế lẻ.

Nếu bạn đọc muốn chứng minh hệ quả này có thể dựa trên cách lí giải ở ví dụ vừa nêu.

§2. KHÁI NIỆM MA TRẬN

Mỗi định thức cấp hai được xác định khi biết không những các số tạo nên nó mà cả cách sắp xếp chúng trong một bảng số, ta gọi là ma trận. Dưới đây là định nghĩa của ma trận

Định nghĩa 1. *Một bảng gồm m.n số được viết thành m dòng n cột như sau:*

$$\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\dots a_{1j}\dots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\dots a_{2j}\dots\ a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}\ \ a_{i2}\dots\ a_{ij}\dots\ a_{in} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\ a_{m2}\dots a_{mj}\dots a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

được gọi là một ma trận kiểu (m, n).

Mỗi số a_{ij} được gọi là một thành phần của ma trận. Nó nằm ở dòng thứ i và cột thứ j.

Ta thường kí hiệu ma trận bởi các chữ in hoa: A, B,...

Có thể viết ma trận (1) một cách đơn giản bởi

$$A = (a_{ij})_{(m,n)}.$$

Khi đã biết rõ m và n thì còn có thể viết là $A = (a_{ij})$.

Nếu ma trận chỉ có một dòng (một cột) thì ta gọi nó là ma trận dòng (ma trận cột).

Nếu m = n thì ma trận được gọi là ma trận vuông cấp n và viết là $A = (a_{ij})_n$.

Ví dụ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & \sqrt{5} & -7 \end{pmatrix}$ là một ma trận kiểu (2, 3).

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -9 & 0 & \frac{1}{2} \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$ là một ma trận vuông cấp 3.

$C = (2 \quad 7 \quad -5 \quad 0 \quad 6)$ là một ma trận dòng.

$$D = \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$ là một ma trận cột.

Định nghĩa 2. *Ta gọi ma trận*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \ldots & a_{i1} \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} \ldots & a_{i2} \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1j} & a_{2j} & \ldots a_{ij} \ldots & a_{mj} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} \ldots & a_{in} \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

là ma trận chuyển vị của ma trận (*1*) *và kí hiệu là* ${}^tA$.

Như vậy ma trận ${}^tA$ thu được từ A bằng cách đổi dòng thứ i của A thành cột thứ i của ${}^tA$ và nếu A là ma trận kiểu (m, n) thì ma trận chuyển vị ${}^tA$ ma trận kiểu (n, m).

Ví dụ. $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 & 1 \\ 7 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad {}^tA = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -2 & 0 \\ 4 & 9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

§3. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT CỦA ĐỊNH THỨC

Ta thấy định thức cấp hai $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ là một tổng. Hãy xem đấu ở mỗi hạng tử được chọn như thế nào. Đối với mỗi hạng tử, nếu viết các chỉ số thứ nhất ở dòng trên, còn chỉ số thứ hai ở dòng dưới thì được một phép thế:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a_{11} & a_{22} \end{array} \\ \alpha = & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} -a_{12} & a_{21} \end{array} \\ \tau = & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

$sgn(\alpha) = 1$ vì α có 0 nghịch thế; $sgn(\tau) = -1$ vì τ là một chuyển trí. Trên tập $X_2 = \{1, 2\}$ chỉ có hai phép thêm α và τ. Như vậy, có thể viết:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = sgn(\alpha)a_{1\alpha(1)}a_{2\alpha(2)} + sgn(\tau)a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)} = \sum_{\sigma \in S_2} sgn(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}.$$

Tổng quát, người ta định nghĩa định thức cấp n, (n > 0), như sau:

3.1. Định nghĩa

Với ma trận vuông

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots a_{1j} \ldots\ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1} & a_{i2} \ldots\ldots a_{ij} \ldots\ldots a_{in} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots a_{nj} \ldots\ldots a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

ta gọi tổng

$$D = \sum_{s \in S_n} sgn(s)a_{1s(1)}a_{2s(2)}\ldots a_{is(i)}\ldots a_{ns(n)}$$

là định thức của ma trận A và kí hiệu bởi

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots a_{1j} \ldots\ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1} & a_{i2} \ldots\ldots a_{ij} \ldots\ldots a_{in} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots a_{nj} \ldots\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

hay |A| *hay det(A).*

Trong cách kí hiệu này ta cũng nói mỗi a_{ij} là một thành phần, các thành phần a_{i1}, a_{i2},... a_{in} tạo thành dòng thứ i, các thành phần a_{1j}, a_{2j},.., a_{nj} tạo thành cột thứ j của định thức.

Khi ma trận A có cấp n ta cũng nói |A| *là một định thức cấp n.*

Ta thấy, mỗi hạng tử của định thức cấp n là một tích của n thành phần cùng với một dấu xác định; trong mỗi tích không có hai thành phần nào cùng dòng hoặc cùng cột.

Ví dụ 1. Nếu A = (a_{11}) là một ma trận vuông cấp một thì định thức cấp một

$$|A| = a_{11}$$

Ví dụ 2. Dùng định nghĩa để viết tường minh định thức cấp 3

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

bạn đọc sẽ thấy rằng:

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}\ .$$

Để tìm được kết quả này bạn phải tìm tất cả các phép thế trên X_3 và xác định dấu của chúng. Công việc khá vất vả. Muốn có những phương pháp tính toán thuận tiện hơn, hãy nghiên cứu các tính chất của định thức.

3.2. Tính chất của định thức

Bạn đọc cần hiểu và nhớ kĩ các tính chất sau đây của định thức để áp dụng và chỉ cần biết chứng minh của vài tính chất đơn giản để hiểu kĩ định nghĩa của định thức.

Tính chất 1. *Nếu định thức*

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1j} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{i1}+a''_{i1} & a'_{i2}+a''_{i2} & \ldots\ldots & a'_{ij}+a''_{ij} & \ldots\ldots & a'_{in}+a''_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

mà mọi thành phần ở dòng thứ i đều có dạng $a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}$ *thì*

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1j} \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{i1} & a'_{i2} \ldots & a'_{ij} \ldots & a'_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nj} \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1j} \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a''_{i1} & a''_{i2} \ldots & a''_{ij} \ldots & a''_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nj} \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Chứng minh. Kí hiệu hai định thức ở vế phải lần lượt là D' và D''.

Theo định nghĩa định thức ta có:

$$\begin{aligned} D &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots (a'_{i\sigma(i)} + a''_{i\sigma(i)}) \ldots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a'_{i\sigma(i)} \ldots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a''_{i\sigma(i)} \ldots a_{n\sigma(n)} \\ &= D' + D''. \ \square \end{aligned}$$

Ví dụ. $\begin{vmatrix} 3+a & 5-b \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & -b \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

hay $\begin{vmatrix} 3+a & 5-b \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -b \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

Tính chất 2. Nếu mọi thành phần ở dòng thứ i của định thức có thừa số chung c thì có thể đặt c ra ngoài dấu định thức; tức là:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots & a_{1j} \ldots\ldots & a_{1n} \\ \ldots\ldots & & & \\ ca_{i1} & ca_{i2} \ldots\ldots & ca_{ij} \ldots\ldots & ca_{in} \\ \ldots\ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots & a_{nj} \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots & a_{1j} \ldots\ldots & a_{1n} \\ \ldots\ldots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} \ldots\ldots & a_{ij} \ldots\ldots & a_{in} \\ \ldots\ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots & a_{nj} \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Chứng minh. Kí hiệu định thức ở vế trái bởi D', ở vế phải bởi D, ta có: $D' = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \ldots (ca_{i\sigma(i)} \ldots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)} = cD$. □

Ví dụ. $\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$

Tính chất 3. Trong định thức nếu đổi chỗ hai dòng cho nhau thì định thức đổi dấu, tức là:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots & a_{1j} \ldots\ldots & a_{1n} \\ \ldots\ldots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} \ldots\ldots & a_{kj} \ldots\ldots & a_{kn} \\ \ldots\ldots & & & \\ a_{h1} & a_{h2} \ldots\ldots & a_{hj} \ldots\ldots & a_{hn} \\ \ldots\ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots & a_{nj} \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots & a_{1j} \ldots\ldots & a_{1n} \\ \ldots\ldots & & & \\ a_{h1} & a_{h2} \ldots\ldots & a_{hj} \ldots\ldots & a_{hn} \\ \ldots\ldots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} \ldots\ldots & a_{kj} \ldots\ldots & a_{kn} \\ \ldots\ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots & a_{nj} \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ví dụ. Với n = 2 ta có:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad = -(ad - bc). \text{ Do đó } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}.$$

Chứng minh. Kí hiệu định thức ở vế trái bởi D', định thức ở vế phải bởi D và coi D̃ là định thức của ma trận (b'), trong đó:

$$b_{ij} = a_{ij} \text{ với } i \neq h,\ i \neq k,$$
$$b_{hj} = a_{kj},$$
$$b_{kj} = a_{hj},$$

với mọi $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

$$D' = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) b_{1\sigma(1)} \dots b_{h\sigma(h)} \dots b_{k\sigma(k)} \dots b_{n\sigma(n)}$$

Đặt $\tau = (h, k)$, ta có: $\tau(h) = k$, $\tau(k) = h$, $\tau(i) = i$, với $i \neq h$, $i \neq k$.

Do đó :

$$D' = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) b_{1\sigma\tau(1)} \dots b_{h\sigma\tau(k)} \dots b_{k\sigma\tau(h)} \dots b_{n\sigma\tau(n)}$$

$= \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{1\sigma\tau(1)} \dots a_{k\sigma\tau(k)} \dots a_{h\sigma\tau(h)} \dots a_{n\sigma\tau(n)}$. Vì τ là một chuyển trí nên $sgn(\tau) = -1$. Do đó $sgn(\sigma\tau) = sgn(\sigma)sgn(\tau) = -sgn(\sigma)$. Vì vậy:

$$D' = -\sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma\tau) a_{1\sigma\tau(1)} \dots a_{k\sigma\tau(k)} \dots a_{h\sigma\tau(h)} \dots a_{n\sigma\tau(n)} .$$

Khi σ chạy khắp S_n thì $\mu = \sigma\tau$ cũng vậy. Từ đó suy ra rằng

$$D' = -\sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma\tau) a_{1\sigma\tau(1)} \dots a_{k\sigma\tau(k)} \dots a_{h\sigma\tau(h)} \dots a_{n\sigma\tau(n)}$$

$$= -\sum_{\mu \in S_n} sgn(\mu) a_{1\mu(1)} \dots a_{k\mu(k)} \dots a_{h\mu(h)} \dots a_{n\mu(n)} = -D.$$

Tính chất 4. *Nếu đinh thức có hai dòng giống nhau thì đinh thức ấy bằng 0.*

Chứng minh. Giả sử định thức D có dòng thứ i giống dòng thứ k. Theo tính chất 3, đổi chỗ hai dòng này cho nhau ta được D' = - D. Nhưng định thức D' cũng là định thức D. Như vậy, D = - D. Suy ra 2D = 0. Vậy D = 0. □

Ví dụ: $D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -7 \\ -2 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0$. Thật vậy, theo tính chất 2,

$$D = -2\begin{vmatrix} 3 & 0 & -7 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

và $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -7 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0$ vì có hai dòng giống nhau (tính chất 4).

Tính chất 5. *Nếu định thức có hai dòng mà các thành phần (cùng cột) tương ứng tỉ lệ thì định thức ấy bằng 0.*

Chứng minh. Xin dành cho bạn đọc. □

Tính chất 6. *Nếu nhân mỗi thành phần ở dòng thứ i với cùng một sức rồi cộng vào thành phần cùng cột ở dòng thứ k thì được một định thức mới bằng đinh thức đã cho.*

Chứng minh. Cho

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots\cdots a_{1j} \cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1} \cdots\cdots a_{ij} \cdots\cdots a_{in} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1} \cdots\cdots a_{kj} \cdots\cdots a_{kn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots\cdots a_{nj} \cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Giả sử nhân mỗi thành phần của dòng thứ i với c rồi cộng vào thành phần cùng cột ở dòng thứ k. Thế thì ta được.

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots\cdots a_{1j} \cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1} \cdots\cdots a_{ij} \cdots\cdots a_{in} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1} + ca_{i1} \cdots\cdots a_{kj} + ca_{ij} \cdots\cdots a_{kn} + ca_{in} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots\cdots a_{nj} \cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Theo các tính chất 1 và 5, ta có:

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots\cdots a_{1j} \cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1} \cdots\cdots a_{ij} \cdots\cdots a_{in} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1} \cdots\cdots a_{kj} \cdots\cdots a_{kn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots\cdots a_{nj} \cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} \cdots\cdots a_{1j} \cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1} \cdots\cdots a_{ij} \cdots\cdots a_{in} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ ca_{i1} \cdots\cdots ca_{ij} \cdots\cdots ca_{in} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots\cdots a_{nj} \cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix} = D + 0 = D. \ \square$$

Ví dụ. Cho định thức $\begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 6 & 29 \end{vmatrix}$.

Nhân dòng thứ nhất với -3 rồi cộng vào dòng thứ hai ta được:

$$\begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 6 & 29 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 13 \\ -6+6 & -26+29 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

Tính chất 7. *Với ^tA là ma trận chuyển vị của ma trận A thì*

$$|^tA| = |A|$$

tức là, hai ma trận chuyển vị của nhau thì có định thức bằng nhau.

Ví dụ. Với n = 2, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

Thật vậy, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$.

Chứng minh. Đặt $^tA = (b_{ij})$. Thế thì $b_{ij} = a_{ij}$ với mọi i, j ∈ {1, 2,..., n}. Theo định nghĩa của định thức, ta có:

$$\left|^tA\right| = \sum_{\mu\in S_n} sgn(\mu)b_{1\mu(1)}b_{2\mu(2)}\ldots b_{n\mu(n)} = \sum_{\mu\in S_n} sgn(\mu)a_{\mu(1)1}a_{\mu(2)2}\ldots a_{\mu(n)n} \;.$$

Mỗi μ có một ánh xạ ngược σ. Với mỗi i, đặt r = σ(i), ta có μσ(i) = μσ(i) = i. Do đó

$$a_{\mu(r)r} = a_{i\sigma(i)}. \qquad (1)$$

vì μσ là phép thế đồng nhất nên 1 = sgn(σ) = sgn(μ)sgn(σ). Suy ra:

$$sgn(\mu) = sgn(\sigma). \qquad (2)$$

Hơn nữa khi μ chạy khắp S_n thì σ cũng vậy. Nhờ (1) và (2) có thể viết:

$$\left|^tA\right| = \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)} = |A|. \;\square$$

Chú ý. Nhờ tính chất 7, nếu ta thay từ "dòng" bởi từ "cột" trong các tính chất 1, 2, 3, 4, 5, 6 thì ta lại được những tính chất của định thức phát biểu đối với cột, chẳng hạn: "Nếu đổi chỗ hai cột cho nhau thì định thức đổi dấu”.

§4. KHAI TRIỂN ĐỊNH THỨC

Sau khi đã biết các tính chất của định thức, ta bắt đầu tìm cách tính định thức cấp bất kì. Ta cần đến vài khái niệm sau.

4.1. Định thức con - Phần bù đại số

Định nghĩa. *Cho định thức D cấp n.*

1) Nếu chọn r dòng $i_1,\ldots, i_r$ *và r cột* $j_1,\ldots, j_r$, $(r < n)$, *thì các thành phần nằm ở giao của r dòng và r cột ấy lập thành một định thức kí hiệu bởi* $M_{i_1\ldots i_r}^{j_1\ldots j_r}$ *và gọi là một định thức con cấp r của D.*

2) Nếu xoá đi r dòng và r cột ấy thì các thành phần còn lại lập thành một định thức kí hiệu bởi $\tilde{M}_{i_1\ldots i_r}^{j_1\ldots j_r}$ *và gọi là định thức con bù của định thức* $M_{i_1\ldots i_r}^{j_1\ldots j_r}$.

3)

$$A_{i_1\ldots i_r}^{j_1\ldots j_r} = (-1)^{i_1+\ldots+i_r+j_1+\ldots+j_r}\ \tilde{M}_{i_1\ldots i_r}^{j_1\ldots j_r}$$

được gọi là phần bù đại số của $M_{i_1\ldots i_r}^{j_1\ldots j_r}$.

Chú ý. Mỗi thành phần a_{ij} của một định thức D là một định thức con cấp một của D. Để đơn giản cách viết, định thức con bù và phần bù đại số của an được kí hiệu lần lượt bởi M_{ij} và A_{ij}.

Ví dụ. Cho định thức

$$D = \begin{vmatrix} 8 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

Nếu chọn dòng thứ ba cột thứ hai thì $a_{32} = 4$, là một định thức con cấp một của D.

$$\tilde{M}_{32} = \begin{vmatrix} 8 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 9 \\ -6 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$ là định thức con bù của 4;

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\tilde{M}_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 8 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 9 \\ -6 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$ là phần bù đại số của 4.

Nếu chọn hai dòng: thứ nhất và thứ ba, hai cột: thứ hai và thứ ba thì:

$M_{13}^{23} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ là một định thức con cấp hai của D;

$\tilde{M}_{13}^{23} = \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ -6 & 7 \end{vmatrix}$ là định thức con bù của M_{13}^{23};

$A_{13}^{23} = (-1)^{1+3+2+3}\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ -6 & 7 \end{vmatrix}$ là phần bù đại số của M_{13}^{23}.

4.2. Khai triển định thức theo một dòng

Đinh lí. *Cho định thức D cấp n có các thành phần là a_{ij}. Với mỗi $i \in \{1, 2, ..., n\}$, ta đều có:*

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$$

Ta nói đó là cách khai triển định thức theo dòng thứ i.

Chứng minh. 1) Trường hợp i = n và các $a_{nj} = 0$ với mọi j c $\in$ {1, 2,..., n-1).

Khi đó:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1j} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2j} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} \ldots a_{ij} \ldots a_{in} \\ \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots 0 \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{i\sigma(i)} \ldots a_{n-1\sigma(n-1)} a_{n\sigma(n)}.$$

$$\text{Nhưng } a_{n\sigma(n)} = \begin{cases} a_{nn} & \text{nếu } \sigma(n) = n, \\ 0 & \text{nếu } \sigma(n) \neq n. \end{cases}$$

Do đó trong tổng này chỉ còn các hạng tử ứng với những phép thế $\sigma \in S_n$ mà $\sigma(n) = n$; nghĩa là:

$$D = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{i\sigma(i)} \ldots a_{n-1\sigma(n-1)} a_{nn}$$

$$= a_{nn} \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{i\sigma(i)} \ldots a_{n-1\sigma(n-1)}.$$

Thu hẹp của mỗi σ ấy là một phép thế trên tập $X_{n-1} = \{1, 2,..., n - 1\}$; ngược lại, mỗi phép thế $\mu \in S_{n-1}$ lại sinh ra một phép thế σ trên tập $X_n = \{1, 2,..., n - 1, n\}$ xác định bởi:

$$\sigma(n) = n, \sigma(i) = \mu(i) \text{ với mọi } i \in \{1, 2,..., n - 1\}.$$

Vì thế có thể viết $D = a_{nn} \sum_{\mu \in S_{n-1}} sgn(\mu gn_{1\mu\mu(1} a_{2\mu\mu(2} \ldots a_{i\mu\mu(i} \ldots a_{n-1\mu\mu(-1)}$.

Vì $\sum_{\mu \in S_{n-1}} sgn(\mu gn_{1\mu\mu(1} a_{2\mu\mu(2} \ldots a_{i\mu\mu(i} \ldots a_{n-1\mu\mu(-1)} = \tilde{M}_{nn}$, trong đó $\tilde{M}_{nn}$ là định thức con bù của thành phần a_{nn}, và $A_{nn} = (-1)^{n+n} \tilde{M}_{nn} = (-1)^{2n} \tilde{M}_{nn} = \tilde{M}_{nn}$ nên $D = a_{nn}A_{nn}$.

2) Trường hợp $i \neq n$, và trong dòng thứ i chỉ có một $a_{ij} = 0$, còn mọi $a_{is} = 0$ với $s \neq i$; tức là:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1j} \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2j} \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots\ldots & a_{ij} \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nj} \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ta đổi chỗ liên tiếp n - i lần hai dòng liền nhau để chuyển dòng thứ i xuống vị trí dòng thứ n và được:

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1j} \dots \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2j} \dots \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nj} \dots \dots & a_{nn} \\ 0 & 0 \dots \dots & a_{ij} \dots \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-i}D.$$

Tiếp tục đổi chỗ liên tiếp n - i lần hai cột liền nhau để chuyển cột thứ i đến vị trí của cột thứ n, ta được:

$$D'' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \dots a_{1n} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} & a_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots \dots & a_{nn} & a_{nj} \\ 0 & 0 \dots \dots & 0 & a_{ij} \end{vmatrix} = (-1)^{n-j}D'.$$

$$D'' = (-1)^{n-j}D' = (-1)^{n-j}.(-1)^{n-i}D = (-1)^{n-i+n-j}D = (-1)^{i+j}D \text{ hay } D = (-1)^{i+j}D''.$$

Mặt khác, đặt $\tilde{M}_{ij}$ là định thức con bù của a_{ij}, thì theo chứng minh trong trường hợp 2), ta có:

$$D'' = a_{ij}\tilde{M}_{ij}.$$

Vậy $D = (-1)^{i+j}D'' = (-1)^{i+j}a_{ij}\tilde{M}_{ij} = a_{ij}(-1)^{i+j}\tilde{M}_{ij} = a_{ij}A_{ij}.$

3) Trường hợp tổng quát.

Với i cố định, ta coi $a_{ij} = 0 + \dots + 0 + a_{ij} + 0 + \dots + 0$, trong đó có n - 1 số 0 và a_{ij} là số hạng thứ i. Theo tính chất 2 của định thức, ta có thể viết:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots \dots a_{1j} \dots \dots a_{1n} \\ \dots \\ a_{i1} & a_{i2} \dots \dots a_{ij} \dots \dots a_{in} \\ \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots \dots a_{nj} \dots \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots \dots a_{1j} \dots \dots a_{1n} \\ \dots \\ a_{i1} & 0 \quad \dots \dots 0 \dots \dots 0 \\ \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots \dots a_{nj} \dots \dots a_{nn} \end{vmatrix} + \dots +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots \dots a_{1j} \dots \dots a_{1n} \\ \dots \\ 0 & 0 \quad \dots \dots a_{ij} \dots \dots 0 \\ \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots \dots a_{nj} \dots \dots a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots \dots a_{1j} \dots \dots a_{1n} \\ \dots \\ 0 & 0 \quad \dots \dots 0 \dots \dots a_{in} \\ \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots \dots a_{nj} \dots \dots a_{nn} \end{vmatrix},$$

trong đó mỗi định thức ở vế phải đều có dạng định thức ở trường hợp 2)

Vậy $D = a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{ij}A_{ij} + \ldots + a_{in}A_{in}$. □

Chú ý. Nhờ tính chất 7 của định thức, định lí cũng đúng nếu ta thay từ "dòng" bởi từ "cột"; tức là:

$$D = a_{1j}A_{1j} + \ldots + a_{ij}A_{ij} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$$

Hệ quả. *Cho định thức D với các thành phần a_{ij} ta có:*

$$a_{i1}A_{k1} + \ldots + a_{ij}A_{kj} + \ldots + a_{in}A_{kn} = 0 \text{ nếu } k \neq i.$$

(viết gọn là: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0$, nếu $k \neq i$).

Chứng minh. Đặt $a_{ij} = a'_{ki}$ thì $a_{i1}A_{k1} + \ldots + a_{ij}A_{kj} + \ldots + a_{in}A_{kn} = a'_{k1}A_{k1} + \ldots + a'_{kj}A_{kj} + \ldots + a'_{kn}A_{kn}$ là khai triển của định thức D' thu được từ D bằng cách thay dòng thứ k bởi dòng thứ i, còn giữ nguyên mọi dòng khác; nghĩa là trong D' có dòng thứ k giống dòng thứ i. Vậy định thức D' = 0. □

Định lí trên đây cho phép đưa việc tính định thức cấp n về việc tính những định thức cấp thấp hơn và có thể tính được định thức cấp tuỳ ý.

Ví dụ. Tính định thức:

$$1)\quad D = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 8 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix}, \qquad 2)\quad C = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 7 & 9 \end{vmatrix}.$$

Giải

1) Khai triển định thức theo dòng thứ nhất ta có:

$$D = 2A_{11} + 5A_{12} + 1.A_{13}.$$

Ta có: $A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 3.9 - 7.8 = 27 - 56 = -29$,

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = -(1.9 - 8.4) = -(9 - 32) = 23 \ ,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 1.7 - 3.4 = 7 - 12 = -5.$$

Vậy D = 2.(- 29) + 5.23 + (- 5) = - 58 + 115 - 5 = 52.

2) Nhận thấy dòng thứ ba của định thức chỉ có hai thành phần khác 0 là $a_{32} = 4$ và $a_{33} = -3$, nên ta khai triển định thức theo dòng này sẽ giảm nhẹ việc tính toán. Cụ thể:

$$C = 4A_{32} + (-3)A_{33}.$$

Ta có $A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 8 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -52$ (theo kết quả phần 1)

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & 9 \end{vmatrix}.$$

Để tính định thức cấp 3 cuối cùng này, ta lại khai triển theo cột thứ hai. Vì số 1 nằm ở dòng 1 cột 2 nên phần bù đại số của nó là:

$(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = -(1.9 - 4.8) = 23$. Do đó $A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 1.23 = 23$

Vậy C - 4.(- 52) + (-3).23 = - 277.

4.3. Khai triển định thức theo r dòng

Định lí Laplace. *Nếu trong định thức D đã chọn r dòng cố định i_1, i_2, ... i_r. M_1, M_2,..., M_s là tất cả các định thức con cấp r của D chọn trong r dòng này và A_1, A_2,..., A_s là những phần bù đại số tương ứng thì*

$$D = \sum_{j=1}^{s} M_j A_j.$$

Bạn đọc chỉ cần hiểu nội dung của định lí này qua ví dụ và sử dụng chúng, không cần biết chứng minh. Tuy nhiên nếu thích thú bạn có thể tìm hiểu phép chứng minh sau phần ví dụ.

Ví dụ. Tính định thức:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$

Giải

Chọn dòng thứ nhất và dòng thứ ba. Hai dòng này cho ta 6 định thức cấp hai. Để cho đơn giản ta viết chúng là:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},\quad M_2 = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix},\quad M_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix},\quad M_4 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -11,$$

$$M_5 = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix},\quad M_6 = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Gọi A1, A_2,..., A_6 lần lượt là các phần bù đại số của M_1, M_2,..., M_6, theo định lí ta có:

$$D = M_1A_1 + M_2A_2 + \ldots + M_6A_6.$$

Chỉ có $M_4 \neq 0$ nên chỉ cần tính A_4. Vì M_4 được tạo thành từ các dòng 1, 3, các cột 2, 3 nên $A_4 = (-1)^{1+3+2+3}\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 38$.

Vậy D = M_4A_4 = (-11)(38) = - 418.

Chứng minh định lí. Để chứng minh ta cần kí hiệu cụ thể hơn. Theo các kí hiệu trong định nghĩa 4.1, ta phải chứng minh:

$$D = \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_r \le n} M_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_r} A_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_r}.$$

Hiển nhiên điều khẳng định là đúng với n = 1. Giả sử n > 1 và điều khẳng định đúng với n - 1, ta chứng minh nó đúng với n.

Trường hợp đã chọn r dòng đầu.

Vì $A_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_r} = (-1)^{i_1 + \ldots + i_r + j_1 + \ldots + j_r} \tilde{M}_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_r}$ nên ta sẽ chứng minh

$$D = \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_r \le n} (-1)^{1+\ldots+r+j_1+\ldots+j_r} M_{1\ldots r}^{j_1 \ldots j_r} \tilde{M}_{1\ldots r}^{j_1 \ldots j_r} = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s+1} a_{1s} M_{1s}.$$

Để cho đơn giản kí hiệu $M_{1\ldots r}^{j_1\ldots j_r} = M^{j_1\ldots j_r}$, $\tilde{M}_{1\ldots r}^{j_1\ldots j_r} = \tilde{M}^{j_1\ldots j_r}$.

Trong $M^{i_1\ldots i_r}$, a_{1j}, đứng ở dòng 1 cột t. Khai triển $M^{i_1\ldots i_r}$ theo dòng đầu, ta có:

$$M^{j_1\ldots j_r} = \sum_{t=1}^{r}(-1)^{1+t} a_{1j_t} \tilde{N}_{1j_t}^{j_1\ldots j_r}$$

trong đó, $\tilde{N}_{1j_r}^{j_1\ldots j_r}$ là định thức con bù của a_{1j_1} trong định thức $M^{i_1\ldots i_r}$. Như vậy:

$$\sum_{1\le j_1<\ldots<j_r\le n}(-1)^{1+\ldots+r+j_1+\ldots+j_r} M_{1\ldots r}^{j_1\ldots j_r}\tilde{M}^{j_1\ldots j_r}$$

$$= \sum_{1\le j_1<\ldots<j_r\le n}(-1)^{1+\ldots+r+j_1+\ldots+j_r}\left(\sum_{t=1}^{r}(-1)^{1+t} a_{1j_t}\tilde{N}_{1j_t}^{j_1\ldots j_r}\right)\tilde{M}^{j_1\ldots j_r}$$

$$= \sum_{j_t=1}^{n}(-1)^{1+j_t} a_{1j_t}\sum_{1\le j_1<\ldots<j_{t-1}<j_{t+1}<\ldots<j_r\le n}(-1)^{1+\ldots+r+j_1+\ldots+j_{t-1}+j_{t+1}+\ldots+j_r+t}\tilde{N}_{1j_t}^{j_1\ldots j_r}\tilde{M}^{j_1\ldots j_r}.$$

Mặt khác, khai triển định thức D theo dòng đầu ta có:

$$D = \sum_{j_t=1}^{n}(-1)^{1+j_t} a_{1j_t}\tilde{M}_{1j_t}$$

trong đó, $\tilde{M}_{1j_r}$ là định thức con bù của thành phần a_{1j_1} trong D. Do đó chỉ cần chứng minh rằng:

$$\tilde{M}_{1j_t} = \sum_{1\le j_1<\ldots<j_{t-1}<j_{t+1}<\ldots<j_r\le n}(-1)^{1+\ldots+r+j_1+\ldots+j_{t-1}+j_{t+1}+\ldots+j_r+t}\tilde{N}_{1j_t}^{j_1\ldots j_r}\tilde{M}^{j_1\ldots j_r} \qquad (1)$$

Vì $\tilde{M}_{1j_r}$ là định thức cấp n - 1 nên theo giả thiết quy nạp, điều khẳng định trong định lí là đúng. Chọn r - 1 dòng đầu, (chúng nằm trong các dòng thứ 2, 3,..., r đã chọn trong D), ta có:

$$\tilde{M}_{1j_t} = \sum_{1\le h_1<\ldots<h_{r-1}\le n-1}(-1)^{1+\ldots+r-1+h_1\ldots+h_{r-1}} P_{1j_t}^{h_1\ldots h_{r-1}}\tilde{P}_{1j_t}^{h_1\ldots h_{r-1}}$$

trong đó, $\tilde{P}_{1j_1}^{h_1\ldots h_{r-1}}$ họ là định thức con bù của $\tilde{P}_{1j_1}^{h_1\ldots h_{r-1}}$ trong định thức $\tilde{M}_{1j_r}$.

Hiển nhiên mỗi $P_{1j_1}^{h_1\ldots h_{r-1}}$ họ là một $N_{1j_r}^{j_1\ldots j_r}$ nào đó và ngược lại vì chúng là những định thức con cấp r - 1 nằm trong các dòng thứ 2, 3,..., r trong

D sau khi đã xoá cột thứ i_t (Bạn đọc hãy tự vẽ ra để giúp mình dễ hiểu). Nhưng $\tilde{M}_{1j_r}$ thu được từ D bằng cách xoá đi dòng 1 và cột j_t. Do đó các thành phần còn lại ở các cột thứ j_{t+1}, $i_{t+1} + 1,\dots$, n trong D trở thành các thành phần ở cột thứ $i_{t+1} - 1$, $j_{t+1},\dots$ n - 1 trong $\tilde{M}_{1j_r}$. Vì thế, với

$$h_1 = j_1,\dots, h_{t-1} = j_{t-1}, h_t = j_{t+1} - 1,\dots, h_{r-1} = j_r - 1 \qquad (3)$$

thì $P_{1j_k}^{h_1\dots h_{r-1}}$ chính là $N_{1j_k}^{j_1\dots j_r}$, còn $\tilde{P}_{1j_k}^{h_1\dots h_{r-1}}$ chính là $\tilde{M}^{j_1\dots j_r}$ tương ứng. Dấu của số hạng ứng với $P_{1j_k}^{h_1\dots h_{r-1}}$ là $(-1)^{1+\dots+r-1+h_1+\dots+h_{r-1}}$, còn dấu ứng với $N_{1j_k}^{j_1\dots j_r}$ là $(-1)^{1+\dots+r+j_1+\dots+j_{t-1}+j_{t+1}+\dots+j_r+r}$. Chú ý tới (3), ta có:

$$1 + \dots + r + j_1 + \dots + j_{t-1} + j_{t+1} + \dots + j_r + t - (1 + \dots + r - 1 + h_1 + \dots + h_{t-1} + h_t + \dots + h_{r-1})$$
$$= r + t + r - t = 2r.$$

Do đó các tích bằng nhau trong (1) và (2) có cùng một dấu. Vậy điều khẳng định được chứng minh.

Trường hợp tổng quát.

Chuyển cho dòng i_1 lên dòng thứ nhất, dòng i_2 lên dòng thứ hai, tiếp tục như thế cho đến khi chuyển dòng i_r lên dòng thứ r; tức là đã đổi chỗ hai dòng liền kề ($i_1 - 1 + i_2 - 2 +\dots + i_r - r$) lần, ta được định thức D' và

$$D = (-1)^{i_1-1+\dots+i_r-r} D'. \qquad (4)$$

Chú ý rằng sau khi thay đổi các dòng như vậy thì các định thức con cấp r lấy trong r dòng đầu vẫn là các định thức con $M_{i_1\dots i_r}^{j_1\dots j_r}$ của định thức đã cho. Do đó, theo chứng minh trên:

$$D' = \sum_{1\le j_1<\dots<j_k\le n} (-1)^{1+\dots+r+j_1+\dots+j_r} M_{i_1\dots i_r}^{j_1\dots j_r} \tilde{M}_{i_1\dots i_r}^{j_1\dots j_r},$$

Vì $i_1 - 1 + \dots + i_r - r + 1 + \dots + r + j_1 + \dots + j_r = i_1 + \dots + i_r + j_1 + \dots + j_r$ nên thay biểu thức D' vào (4) ta được:

$$D = \sum_{1\le j_1<\dots<j_r\le n} (-1)^{i_1+\dots+i_r+j_1+\dots+j_r} M_{i_1\dots i_r}^{j_1\dots j_r} \tilde{M}_{i_1\dots i_r}^{j_1\dots j_r}. \square$$

§5. PHƯƠNG PHÁP TÍNH ĐỊNH THỨC

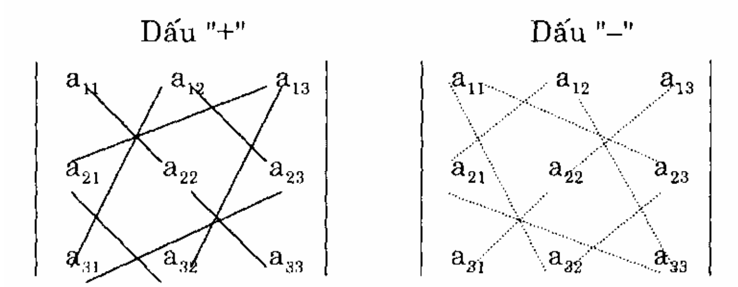
Bây giờ nhờ các tính chất của định thức ta hãy tìm những phương pháp tính định thức cấp tuỳ ý. Tuy nhiên, đối với các định thức cấp hai và cấp ba ngoài những phương pháp chung còn có phương pháp tính riêng. Ta đã biết quy tắc tính định thức cấp hai. Bây giờ ta xét một quy tắc tính định thức cấp ba.

5.1. Tính định thức cấp 3

Trong ví dụ ở mục 4.2, ta đã tính định thức cấp ba bằng cách khai triển theo một dòng. Tuy nhiên, từ định nghĩa định thức còn có một phương pháp tính riêng. Ta biết:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Nhận xét tổng này ta thấy có thể tính định thức cấp ba theo sơ đồ sau:



Mỗi hạng tử của định thức là một tích của ba thành phần nối với nhau bởi những đoạn thẳng. Tích có dấu "+" nếu các thành phần được nối bởi nét liền, có dấu "-" nếu các thành phần được nối bởi nét đứt.

Quy tắc này do nhà toán học tên là Sarus đề xướng, do đó nó có tên là *quy tắc Sarus.*

Ví dụ 1. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 8 \\ -2 & 7 & 4 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 5.7.0 + 0.4.3 + 8.(-2).6 - 5.4.6 - 0.(-2).0 - 8.7.3$

$$= -96 - 120 - 168 = -384.$$

Ví dụ 2. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 8 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 54 + 160 + 7 - 12 - 45 - 112 = 52.$

5.2. Áp dụng phép khai triển định thức theo một dòng hoặc một cột

Áp dụng định lí 4.2, ta có thể tính định thức tuỳ ý. Song để phép tính được đơn giản ta nên khai triển theo dòng (hoặc cột) có nhiều thành phần bằng 0 hoặc là những số đơn giản.

Ví dụ 1. Tính định thức $D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 10 \\ -4 & 0 & 2 & 9 \end{vmatrix}$.

Giải

Nhận thấy cột thứ hai có nhiều thành phần bằng 0. Khai triển định thức theo cột này ta không cần tính phần bù đại số của những thành phần bằng 0. Như vậy,

$$D = (-1)^{1+2}(-2) \begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 10 \\ -4 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 2[6.10(-4) + 3.12 - 6.19 - 7.10.2]$$

$$= 2(-240 + 6 - 54 - 140) = -856.$$

Ví dụ 2. Tính định thức $D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 10 \\ -4 & 2 & 2 & 9 \end{vmatrix}$.

Giải

Ta cũng có thể khai triển định thức này theo dòng hoặc cột có thành phần bằng 0. Tuy nhiên nhờ tính chất 6, ta có thể biến đổi định thức để trong một dòng hoặc trong một cột chỉ còn nhiều nhất là một thành phần khác 0. Chẳng hạn, ta sẽ biến đổi dòng thứ ba. Nhân cột thứ nhất với 1 rồi cộng vào cột thứ hai, nhân cột thứ nhất với -10 rồi cộng vào cột thứ tư, ta được:

$$D=\begin{vmatrix}3 & -2 & 5 & 0\\ 7 & 0 & 6 & 3\\ 1 & 1 & 0 & 10\\ -4 & 2 & 2 & 9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -5 & 5 & -30\\ 7 & -7 & 6 & -67\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ -4 & 6 & 2 & 49\end{vmatrix}=(-1)^{3+1}1.\begin{vmatrix}-5 & 5 & -30\\ -7 & 6 & -67\\ 6 & 2 & 49\end{vmatrix}.$$

Giữ nguyên cột thứ hai, cộng cột thứ hai vào cột thứ nhất, nhân cột thứ hai với 6 rồi cộng vào cột thứ 3 ta được:

$$D=\begin{vmatrix}0 & 5 & 0\\ -1 & 6 & -31\\ 8 & 2 & 61\end{vmatrix}=(-1)^{1+2}5\begin{vmatrix}-1 & -31\\ 8 & 61\end{vmatrix}=-5(-61+248)=-5.187=-935.$$

5.3. Đưa định thức về dạng tam giác

Định thức dạng tam giác dưới là đinh thức có dạng:

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & 0\ldots\ldots 0\ldots\ldots 0\\ a_{21} & a_{22}\ldots\ldots 0\ldots\ldots 0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{i1} & a_{i2}\ldots\ldots a_{ii}\ldots\ldots a_{in}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1} & a_{n2}\quad a_{ni}\quad a_{nn}\end{vmatrix},\quad (a_{ij}=0 \text{ nếu } i<j);$$

Định thức dạng tam giác trên là định thức có dạng:

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\ldots\ldots a_{1i}\ldots\ldots a_{1n}\\ 0 & a_{22}\ldots\ldots a_{2i}\ldots\ldots a_{2n}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\\ 0 & 0\ldots\ldots a_{ii}\ldots\ldots a_{in}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\\ 0 & 0\ldots\ldots 0\ldots\ldots a_{nn}\end{vmatrix},\quad (a_{ij}=0 \text{ nếu } i>j).$$

Khi đó, nhờ phép khai triển định thức theo một dòng hoặc một cột ta có: $D = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$.

Ví dụ 1. $\begin{vmatrix}5 & -7 & 9\\ 0 & 6 & 9\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=5.6.2=60,\quad \begin{vmatrix}7 & 0 & 0\\ -1 & -3 & 0\\ 4 & 0 & 2\end{vmatrix}=7.(-3).2=-42.$

Áp dụng tính chất 3 và tính chất 6 ta có thể đưa mọi định thức về dạng tam giác.

Ví dụ 2. Đưa định thức về dạng tam giác rồi tính định thức:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Giải

Trong cột thứ nhất ta có thể giữ nguyên số 3, rồi triệt tiêu các số 2. Song muốn thế ta phải nhân dòng thứ nhất với $-\frac{2}{3}$. Phép tính sẽ phức tạp. Để tránh điều đó ta đổi chỗ cột thứ nhất và cột thứ hai cho nhau, ta được:

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Bây giờ, trong cột thứ nhất giữ nguyên số 1 và triệt tiêu các thành phần khác thuận lợi. Nhân dòng thứ nhất lần lượt với -1 và 2 rồi lần lượt cộng vào dòng thứ ba và thứ tư ta được:

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 8 & 7 & 9 \end{vmatrix}.$$

Đổi chỗ dòng thứ hai và dòng thứ ba cho nhau:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 8 & 7 & 9 \end{vmatrix}.$$

Nhân dòng thứ hai với 8 rồi cộng vào dòng thứ tư:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 15 & -15 \end{vmatrix}.$$

Có thể tiếp tục nhân dòng thứ ba với 15 rồi cộng vào dòng thứ tư, song có thể áp dụng tính chất tính chất 3, đưa thừa số 15 ra ngoài định thức :

$$D = 15\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 15\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 15.1.(-1).(-1).5 = 75.$$

Hiển nhiên ta cũng có thể biến đổi các cột hoặc biến đổi cả cột lẫn dòng để đưa định thức về dạng tam giác.

Ví dụ 3. Đưa định thức về dạng tam giác rồi tính:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Giải

Nhân cột thứ tư với - 3 rồi cộng vào cột thứ nhất, ta được:

$$D = \begin{vmatrix} -18 & -2 & 5 & 7 \\ 7 & 5 & 1 & -1 \\ -9 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Nhân cột thứ ba lần lượt với 9 và - 2, rồi cộng lần lượt vào cột thứ nhất và cột thứ hai:

$$D = \begin{vmatrix} 27 & -12 & 5 & 7 \\ 16 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 27 & -4 & 5 & 7 \\ 16 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(đưa thừa số chung 3 ở cột thứ hai ra ngoài định thức).

Tiếp tục nhân cột thứ hai của định thức cuối cùng trên đây với -16 rồi cộng vào cột thứ nhất, ta được:

$$D = 3\begin{vmatrix} 91 & -4 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3.91.1.1.1 = 273.$$

5.4. Áp dụng các tính chất của định thức

Để đưa định thức về dạng tam giác ta đã sử dụng chủ yếu tính chất 6, đôi khi có sử dụng các tính chất khác. Nói chung, để tính định thức ta có thể áp dụng mọi tính chất của nó.

Ví dụ 1. Tính định thức:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 5 & -1 & 2 \\ 20 & -41 & 87 & 125 \\ 10 & 12 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Giải

Cộng dòng thứ nhất với dòng thứ hai, ta được:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 \\ 5 & 6 & 0 & -1 \\ 20 & -41 & 87 & 125 \\ 10 & 12 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Bây giờ định thức có hai dòng thứ hai và thứ tư tỉ lệ. Theo tính chất 5, D = 0.

Ví dụ 2. Tính định thức:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Giải

Nhận thấy tổng các thành phần trong các dòng đều bằng nhau. Do đó nếu cộng vào một cột tất cả các cột khác, chẳng hạn, cộng vào cột thứ nhất thì các thành phần của cột ấy đều bằng nhau. Theo tính chất 6, ta được một định thức bằng định thức đã cho

$$D = \begin{vmatrix} 1+2+3+4 & 2 & 3 & 4 \\ 2+3+4+1 & 3 & 4 & 1 \\ 3+4+1+2 & 4 & 1 & 2 \\ 4+1+2+3 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Tiếp tục khai triển định thức theo cột thứ nhất.

$$D = 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 10.2.\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 20\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}20\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = (-20).(-8) = 160.$$

Ví dụ 3. Tính định thức:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -6 & -4 & -2 & 0 & 2 \\ -16 & -12 & -8 & -4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Giải

Nhận thấy các dòng thứ 4, 5 có thừa số chung lần lượt là 2, 4. Do đó:

$$D = 2.4\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 8D'$$

(D’ là định thức vừa tìm được). Nhân mỗi dòng của D’ với -1 ta được D’’ = - D’. Chuyển vị D’’ ta lại được D’. Do đó, theo tính chất 1, D’’ =

D'. Như vậy, D' = D'' = - D'. Suy ra D' = 0. Vậy D = 0.

Ví du 4. Tính đinh thức

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -4 & 1 \\ 21 & 24 & 15 & 20 \\ 1 & 7 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Giải

Nhận thấy các thành phần ở dòng thứ hai bằng các thành phần tương ứng của dòng thứ nhất cộng với 19. Do đó, áp dụng tính chất 1 ta có:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -4 & 1 \\ 2+19 & 5+19 & -4+19 & 1+19 \\ 1 & 7 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & -4 & 1 \\ 1 & 7 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 5 & -4 & 1 \\ 19 & 19 & 19 & 19 \\ 1 & 7 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Định thức thứ nhất ở vế phải bằng 0 vì có hai dòng giống nhau. Đưa thừa số chung 19 của định thức thứ hai ra ngoài định thức, ta có:

Vậy:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -4 & 1 \\ 19 & 19 & 19 & 19 \\ 1 & 7 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 19\begin{vmatrix} 2 & 5 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 19\begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 19\begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 6 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 19\begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & -21 & 27 \end{vmatrix} = 19.(162 - 21) = 2679.$$

5.5. Phương pháp quy nạp và phương pháp truy hồi

Ta đã biết phương pháp quy nạp, còn nội dung của phương pháp truy hồi là biểu diễn định thức cần tính qua những định thức có cấp thấp hơn có dạng xác định và theo một công thức xác định. Tính các định thức cấp thấp ta sẽ lần lượt tính được những định thức cấp cao hơn.

Ví dụ 1. Dùng phương pháp quy nạp, tính định thức:

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Giải

Khai triển định thức theo cột cuối ta có:

$$D_n = \begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n \end{vmatrix} - a_n \begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n \prod_{i=1}^{n} a_i - a_n D_{n-1}.$$

Hãy xét vài trường hợp để dự đoán kết quả.

Với $n = 1$, $D_1 = \begin{vmatrix} -a_1 & a_1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2a_1 = (-1)2a_1.$

Với $n = 2$,

$$D_2 = \begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_2 \begin{vmatrix} -a_1 & a_1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a_1a_2 + 2a_1a_2 = 3a_1a_2 = (-1)^2 3a_1a_2.$$

Từ đó ta dự đoán $D_n = (-1)^n(n+1)\prod_{i=1}^{n} a_i$; Ta thử chứng minh công thức này. Hiển nhiên công thức đúng với $n = 1$, $n - 2$. Bây giờ giả sử $n > 2$ và công thức đúng với $n - 1$; tức là :

$D_{n-1} = (-1)^{n-1} n \prod_{i=1}^{n} a_i$ Khi đó:

$$D_n = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} a_i - a_n D_{n-1} = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} a_i - a_n (-1)^{n-1} n \prod_{i=1}^{n-1} a_i$$
$$= (-1)^n \left[\prod_{i=1}^{n} a_i + n \prod_{i=1}^{n} a_i \right] = (-1)^n (n+1) \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

Vậy $D_n = (-1)^n (n + 1) \prod_{i=1}^{n} a_i$

Giải

Khai triển định thức này theo dòng thứ nhất:

$$D_5 = 4\begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 4\begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} - 5.2\begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Ta thấy hai định thức cuối cùng có cùng dạng với định thức đã cho.

Đặt chúng là D_4, D_3, ta có:

$$D_5 = 4D_4 - 10D_3.$$

Tương tự, $D_4 - 4D_3 - 10D_2$, trong đó $D_2 = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6$.

Tính được D_3 sẽ tính được D_4; tiếp tục tính được D_5.

Ta có $D_3 = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4D_2 - 5\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4D_2 - 40 = 24 - 40 = -16$

Vậy $D_5 = 4D_4 - 10D_3 = 4(4D_3 - 10D_2) - 10D_3 = 6D_3 - 40D_2 = 6(-16) - 40.6 = -336$.

5.6. Tính định thức bằng máy tính bỏ túi và máy tính điện tử

Ngày nay công nghệ thông tin phát triển, người ta đã tạo ra nhiều chương trình để máy tính giải nhanh chóng nhiều phép toán. Vì có nhiều chương trình, ở các máy tính có thể cài đặt những chương trình khác nhau nên trong cuốn sách này chỉ nêu lên cách sử dụng một vài trong số những chương trình ấy để làm ví dụ. Về nguyên tắc, khi một máy tính được cài đặt một chương trình nào thì trong chương trình ấy đã có hướng dẫn cụ thể việc sử dụng nó. Với mỗi chương trình cũng có thể cói sách hướng dẫn sử dụng kèm theo. Ở đây xin lấy máy tính bỏ túi "CASIO fx-570MS" và chương trình cài đặt vào máy tính điện tử “Mathematica 4.0” làm ví dụ.

a) Tính định thức bằng máy tính bỏ túi CASIO fx-570MS.

Chú ý rằng máy tính CASIO fx-570MS chỉ có thể tính được định thức cấp $n \leq 3$.

Ví dụ. Tính định thức $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

Giải.

Bước 1. Tạo ma trận ứng với định thức.

Thực hiện theo các tao tác sau:

- Đưa về tệp ma trận bằng cách bấm các nút theo thứ tự:

$\boxed{\text{MODE}}\ \boxed{\text{MODE}}\ \boxed{\text{MODE}}\ \boxed{2}$

Trên cửa sổ của máy tính hiển thị chữ MAT; nghĩa là máy đã mở tệp ma trận.

- Tạo ma trận:

• Bấm các nút $\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\text{MAT}}\ \boxed{1}$.

Trên cửa sổ xuất hiện hai dòng: DIM EDIT MAT

1 2 3

• Bấm $\boxed{1}$ để xác định số dòng và số cột của ma trận.

Cửa sổ xuất hiện hai dòng: A B C

1 2 3

• Bấm nút $\boxed{1}$ để kí hiệu ma trận A.

• Bấm $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ để xác định rằng A là ma trận vuông cấp 3.

• Nhập các thành phần của ma trận:

$\boxed{2}\boxed{=}\ \boxed{-}\ \boxed{1}\boxed{=}\boxed{6}\ \boxed{=}\boxed{5}\boxed{=}\boxed{0}\boxed{=}\boxed{1}\ \boxed{=}\boxed{3}\boxed{=}\boxed{2}\ \boxed{=}\ \boxed{4}\boxed{=}\ \boxed{AC}$

Nút $\boxed{AC}$ để khẳng định đã lập xong ma trận A.

Bước 2. Tính định thức của ma trận A:

• $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{MAT}}$

Trên cửa sổ xuất hiện hai dòng: Det Trn

1 2

• Bấm $\boxed{1}$ để chuyển sang việc tính định thức.

• Bấm $\boxed{\text{SHIFII}}$ $\boxed{\text{MAT}}$ $\boxed{3}$

Trên cửa sổ xuất hiện hai dòng: A B C Ans

1 2 3 4.

Nhắc lại rằng 1 là kí hiệu ma trận A.

• Bấm $\boxed{1}$ $\boxed{=}$.

Trên cửa sổ xuất hiện số 73. Đó là định thức của ma trận A.

b) Tính định thức bằng máy tính điện tử (theo chương trình MATHEMATICA 4.0)

Với chương trình "Mathematica 4.0", máy tính điện tử có thể tính định thức cấp bất kì.

Ví dụ. Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -4 & 1 \\ 21 & 24 & 15 & 20 \\ 1 & 7 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Giải

Mở "Mathematica 4.0".

Trên màn hình ta chỉ việc đánh lệnh:

Det[{{2,5, -4,1},{21,24,15,20},{1,7,0,1},{5, -1, 2,0}}]

rồi ấn phím Enter ở tận cùng bên phải. Sau một giây màn hình xuất hiện:

Output: 2679.

Nếu muốn tính định thức của ma trận A đã được tạo lập trước, chẳng hạn:

A = {{2, 5, - 4, 1}, {21, 24, 15, 0}, {1, 7, 0, 1}, {5, - 1, 2, 0}}

thì chỉ việc đánh lệnh:

Det[A] ↵.

Quan điểm về việc sử dụng máy tính

Máy tính rất thuận lợi cho việc tính toán vì nó nhanh chóng cho ta kết quả của phép toán mà ta thực hiện. Nó rất có lợi cho những người chỉ cần sử dụng kết quả của phép toán mà không cần biết phương pháp hay thuật giải bài toán ấy. Chúng ta không những phải biết sử dụng máy tính mà còn phải sử dụng thành thạo, vì đó là thành quả của khoa học kĩ thuật, là một công cụ lao động rất hiện đại và ngày càng phổ cập. Nhưng khi dùng máy tính để giải một bài toán thì ta chỉ là người xem kết quả của bài toán mà người khác đã giải. Song, là người làm toán và dạy toán, nhiệm vụ chính của chúng ta không phải chỉ là biết sử dụng máy tính để giảng dạy mà là phải biết những phương pháp giải toán, những cơ sở lý thuyết để dựa vào đó mà người ta đã đề xuất những phương pháp giải và tạo ra những chương trình cho máy thực hiện. Vì thế ta phải nắm vững những lý thuyết toán học và rèn luyện kỹ năng giải toán ở trường Phổ thông cũng như ở Đại học bằng tư duy và lập luận. Rất có thể trong số chúng ta, nhờ sự nắm vững lý thuyết toán học và những kĩ năng giải toán mà sẽ có những người sáng tạo được những phần mềm toán học có nhiều ứng dụng.

§6. ỨNG DỤNG - HỆ PHƯƠNG TRÌNH CRAMER

Ứng dụng đầu tiên và quan trọng của định thức là giải hệ phương trình bậc nhất n phương trình, n ẩn.

6.1. Định nghĩa

1) Hệ phương trình tuyến tính n ẩn là hệ có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Trong đó: $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các ẩn, a_{ij}, b_i thuộc trường số K, với $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, a_{ij} được gọi là hệ số của ẩn x_j, b_i được gọi là hạng tử tự do.

2) Một nghiệm của hệ (1) là một bộ n số ($c_1, c_2, \dots, c_j, \dots$ cn) thuộc trường K sao cho khi thay $x_j = c_j$ thì mọi đẳng thức trong (1) đều là những đẳng thức đúng.

3) Nếu hệ (1) có m = n và định thức

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots\dots a_{1j} \dots\dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1} & a_{i2} \dots\dots a_{ij} \dots\dots a_{in} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots\dots a_{nj} \dots\dots a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

thì nó được gọi là hệ Cramer. Định thức D được gọi là định thức của hệ phương trình.

6.2. Cách giải

Cho hệ Cramer

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (2)$$

Với mỗi j, trong định thức D ta thay cột thứ i bởi cột gồm các hạng tử tự do b_1, b_2,..., bn) ta được định thức:

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots b_1 \ldots\ldots & a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{i1} & a_{i2} \ldots\ldots b_i \ldots\ldots & a_{in} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots b_n \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(cột thứ j)

Vì $b_i = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n$ nên

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n) \ldots\ldots & a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{i1} & a_{i2} \ldots\ldots (a_{i1}x_1 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n) \ldots\ldots & a_{in} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots (a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n) \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Theo các tính chất 1 và 2 của định thức, ta có:

$$D_j = x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots a_{11} \ldots\ldots & a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{i1} & a_{i2} \ldots\ldots a_{i1} \ldots\ldots & a_{in} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots a_{n1} \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + x_j \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots a_{1j} \ldots\ldots & a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{i1} & a_{i2} \ldots\ldots a_{ij} \ldots\ldots & a_{in} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots a_{nj} \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots +$$

$$\ldots + x_n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots a_{1n} \ldots\ldots & a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{i1} & a_{i2} \ldots\ldots a_{in} \ldots\ldots & a_{in} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots a_{nn} \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Định thức ở hạng tử thứ j chính là D, còn các định thức khác ở vế phải đều bằng 0 (vì có hai cột giống nhau). Do đó $D_j = x_j D$. Suy ra

$$x_j = \frac{D_j}{D}, \text{ với mọi } j \in \{1, 2, ..., n\}$$

Vậy hệ phương trình Cramer có nghiệm duy nhất.

Nhà toán học Thụy sĩ tên là Cramer (1704-1752) đã dùng định thức để trình bày lời giải của một hệ phương trình tuyến tính mà sau này người ta lấy tên ông đặt cho hệ phương trình dạng đó. Tuy nhiên ông không phải là người chứng minh công thức Cramer mà người chứng minh công thức này lại là Vandermonde, một nhà toán học Pháp.

Ví dụ. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_4 = 0 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 = -1 \\ -2x_2 - x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}.$$

Giải

Ta phải tính D, và các D_j.

$$D=\begin{vmatrix}3&0&-2&0\\1&3&0&5\\0&1&4&1\\0&-2&-1&-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-9&-2&-15\\1&3&0&5\\0&1&4&1\\0&-2&-1&-4\end{vmatrix}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-9&-2&-15\\1&4&1\\-2&-1&-4\end{vmatrix}=-26.$$

$$D_1=\begin{vmatrix}3&0&-2&0\\0&3&0&5\\-1&1&4&1\\0&-2&-1&-4\end{vmatrix}=-26.\quad D_2=\begin{vmatrix}3&3&-2&0\\1&0&0&5\\0&-1&4&1\\0&0&-1&-4\end{vmatrix}=52,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}3&0&3&0\\1&3&0&5\\0&1&-1&1\\0&-2&0&-4\end{vmatrix}=0,\ D_4=\begin{vmatrix}3&0&-2&3\\1&3&0&0\\0&1&4&-1\\0&-2&-1&0\end{vmatrix}=-26.$$

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-26}{-26}=1,\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{52}{-26}=-2,\ x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{0}{-26}=0,\ x_4=\frac{D_4}{D}=\frac{-26}{-26}=1.$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất: (1, -2, 0, 1).

6.3. Giải hệ Cramer bằng máy tính bỏ túi và máy tính điện tử

a) Giải bằng máy tính bỏ túi

Máy tính bỏ túi CASIO-570MS chỉ có thể giải được hệ Cramer với $n \le 3$.

Ví dụ. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}3x-\ y+z=\ 5\\4x+2y+5z=\ 0\\ \ x+3y-6z=-5\end{cases}$$

Giải

Để đưa về chương trình "giải phương trình" ta bấm

MODE MODE MODE 1

Cửa số xuất hiện hai dòng unknowns? (ẩn)

2 3 (2 hay 3 ẩn)

Bấm $\boxed{3}$ (để khẳng định số ẩn là 3).

Cửa sổ xuất hiện a_1? (có nghĩa là bảo ta nhập hệ số a_1).

Bấm $\boxed{3}\boxed{=}$ (để nhập hệ số $a_1 = 3$).

Tiếp tục nhập các hệ số bằng cách bấm liên tiếp:

$\boxed{-1}\ \boxed{=}\boxed{1}\ \boxed{=}\ \boxed{5}\ \boxed{=}\ \boxed{4}\ \boxed{=}\ \boxed{2}\boxed{=}\ \boxed{5}\ \boxed{=}\ \boxed{0}\ \boxed{=}\ \boxed{1}\ \boxed{=}\ \boxed{3}\ \boxed{=}\ \boxed{-6}$
$\boxed{=}\boxed{-5}\ \boxed{=}$.

Lập tức cửa số xuất hiện x - 1

Bấm ∅ tìm được y = - 2.

Bấm ∅ tìm được z = 0.

Vậy hệ có nghiệm (1, - 2, 0).

b) Giải bằng máy tính điện tử

Máy tính điện tử có thể giải hệ Cramer n ẩn với n là số nguyên dương tuỳ ý.

Ví dụ. Giải hệ phương trình trong ví dụ của mục 6.2:

$$\begin{cases} 3x_1 - \quad\quad 2x_3 \quad\quad = 3 \\ x_1 + 3x_2 \quad\quad + 5x_4 = 0 \\ \quad\quad x_2 + 4x_3 + x_4 = -1 \\ \quad -2x_2 - x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Giải

• Tạo ma trận của hệ phương trình bằng cách đánh:

A ={{3, 0, -2, 0},{1, 3, 0, 5},{0, 1, 4, 1},{0, -2, -1, -4}}

(Chú ý phải dùng phím enter ở tận cùng bên phải).

• Giải hệ phương trình bằng cách đánh lệnh:

LinearSolve[A,{3, 0, -1, 0}] ↵.

Màn hình xuất hiện :

Out[] = (1, -2, 0, 1). Đó là nghiệm của hệ phương trình.

TÓM TẮT

Ta đã dùng phép thế để mô tả khái niệm định thức. Một phép thế trên tập $X_n = \{1, 2, \ldots, n_i\}$ là một song ánh.

$\sigma: X_n \rightarrow X_n$, nó được viết như sau:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Một cặp $(\sigma(i), \sigma(j))$ được gọi là một *nghịch thế* của σ nếu $i < j$ nhưng $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Phép thế σ được gọi là phép thế chẵn (1ẻ) nếu nó có một số chẵn (1ẻ) nghịch thế.

Dấu của phép thế σ kí hiệu bởi $\mathrm{sgn}(\sigma)$ được xác định bởi:

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1, \text{ nếu } \sigma \text{ là phép thế chẵn} \\ -1, \text{ nếu } \sigma \text{ là phép thế lẻ} \end{cases}$$

Định thức của ma trận vuông $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1j} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1} & a_{i2} \ldots a_{ij} \ldots a_{in} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nj} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$ tổng $\sum_{\sigma \in S_o} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \ldots a_{2\sigma(2)} \ldots a_{i\sigma(i)} \ldots a_{n\sigma(n)}$ kí hiệu bởi

hay $|A|$ hay $\det(A)$.

Định thức có 7 tính chất (xem §3). Dùng các tính chất này ta chứng minh được định lí về sự khai triển định thức theo một dòng:

$D = a_{i1}a_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$ với mọi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

trong đó A_{ij} là phần bù đại số của thành phần a_{ij} (xem định nghĩa 4.1).

Ta cũng có:

$A_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn} = 0$ nếu $i \neq k$.

Tính chất 7 nói rằng:

$$|{}^tA| = |A|$$

suy ra rằng mọi tính chất của định thức phát biểu đối với dòng đều đúng đối với cột

Áp dụng các tính chất của định thức ta có thể tính được định thứ cấp tuỳ ý. Có nhiều phương pháp tính định thức, trong đó hai phương pháp thường dùng nhất là phương pháp khai triển định thức theo một dòng hoặc một cột và phương pháp đưa về dạng tam giác. Tuy nhiệt cũng cần biết các phương pháp khác để việc tính toán được linh hoạt. Hệ phương trình Cramer là một ứng dụng đầu tiên của định thức Đó là hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

Trong đó $x_1, x_2,.. x_n$ là các ẩn, $a_{ij}, b_i \in K$, với $i \in \{1, 2,..., n\}$, $j \in \{1, 2,..., m\}$; a_{ij} được gọi là hệ số của ẩn x_j, b_i được gọi là hạng tử tự do và

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots a_{1j}\ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{i1} & a_{i2}\ldots a_{ij}\ldots a_{in} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots a_{nj}\ldots a_{nn} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Định thức này được gọi là định thức của hệ phương trình (1).

Kí hiệu D_j là định thức thu được từ D bằng cách thay cột thứ i của D bởi cột các hệ tử tự do, ta có công thức nghiệm của hệ Cramer, được gọi là công thức Cramer:

$$x_j = \frac{D_j}{D}, \text{ với mọi } j \in \{1, 2, .., n\}.$$

BÀI TẬP

§1. PHÉP THẾ

1. Tìm tất cả các phép thế của mỗi tập sau:

$X_2 = \{1, 2\}$, $X_3 = \{1, 2, 3\}$, $X_4 = \{1, 2, 3, 4\}$.

Xác định dấu của mỗi phép thế.

2. Với mỗi phép thế sau hãy xác định dấu của nó, tìm phép thế nghịch đảo và dấu của phép thế nghịch đảo:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \ldots & n \\ n & n-1 & n-2 \ldots & 1 \end{pmatrix}$.

Xác định các tích $\sigma\mu$, $\mu\sigma$.

§3. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT CỦA ĐỊNH THỨC

3. Cho ma trận $A = (a_{ij})$ cấp 4.

a) Trong các tích sau, tích nào có mặt trong định nghĩa định thức của A:

$$a_{13}a_{24}a_{31}a_{33},\ a_{12}a_{24}a_{33}a_{41},\ a_{14}a_{22}a_{31}a_{43},\ a_{11}a_{23}a_{31}a_{42}.$$

b) Xác định dấu của những tích nói trên nếu nó có mặt trong định nghĩa định thức của ma trận A.

4. Chọn các số j, k sao cho mỗi tích sau có mặt trong định nghĩa định thức của ma trận $A = (a_{ij})$ cấp 5:

$$a_{11}a_{22}a_{3j}a_{4k}a_{54},\ a_{12}a_{2j}a_{33}a_{4k}a_{55}.$$

5. Cho ma trận cấp ba: $A = (a_{ij})$. Viết các tích có dấu "-" chứa a_{13} có mặt trong định nghĩa của định thức của A.

6. Cho ma trận $A = (a_{ij})$ cấp n. Xác định dấu của tích các thành phần nằm trên mỗi đường chéo (có mặt trong định nghĩa của định thức của A).

7. Biết rằng 121, 253, 495 chia hết cho 11. Chứng minh rằng định thức :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 4 & 9 & 5 \end{vmatrix} \text{ chia hết cho 11.}$$

8. Chứng minh rằng:

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

9. Không tính, dùng tính chất của định thức chứng tỏ rằng các định thức sau bằng 0:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 7 & 2 & 10 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 & -3 \\ 2 & 0 & -5 & 4 \\ 5 & 3 & 8 & -7 \\ -1 & 2 & 6 & -8 \end{vmatrix}$.

§4. KHAI TRIỂN ĐỊNH THỨC

10. Tính các định thức bằng cách khai triển theo dòng hoặc cột:

a) $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 4 & -1 \\ 3 & 6 & -3 & 1 \\ 8 & 12 & 1 & 0 \\ 11 & -6 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 10 & -4 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 10 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -6 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$;

$$\text{e)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 18 & -6 & 2 \\ 4 & 17 & 9 & -15 & 2 \\ 19 & 20 & 24 & 3 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{f)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 & 10 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 3 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 15 \end{vmatrix}.$$

11. Dùng định tí Laplace để tính định thức:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 12 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -6 & 12 \\ 18 & 15 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

§5. PHƯƠNG PHÁP TÍNH ĐỊNH THỨC

12. Tính các định thức bằng quy tắc Sarus:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 2 & 10 & 7 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 9 & 7 & -4 \\ 1 & 5 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \end{vmatrix}.$$

13. Tính định thức bằng cách đưa về dạng tam giác:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 5 & 16 \\ 0 & 0 & -4 & 10 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix}; \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & 9 \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 10 & -1 & 5 \\ -3 & -15 & -6 & 13 \end{vmatrix};$$

$$\text{d)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}; \qquad \text{e)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix};$$

f) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$.

14. Dùng phương pháp quy nạp tính các định thức:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$;

c) $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \dots\dots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \dots\dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \dots\dots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} \dots\dots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} \dots\dots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

(định thức Vandermonde).

§6. ỨNG DỤNG-HỆ PHƯƠNG TRÌNH CRAMER

15. Giải hệ phương trình Cramer:

a) $\begin{cases} 2x_1 + x_3 = -1 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 7 \\ 5x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \\ 4x_2 - 5x_3 = -13 \\ 3x_1 - 2x_3 = 1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_2 - 3x_3 - 5x_4 = -8 \\ 2x_1 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_4 = 0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x_1 - 3x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 13 \\ 3x_2 - x_4 = 4 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - 6x_2 + x_3 - 2x_4 = -9 \\ x_1 + 7x_2 \quad\quad + x_4 = 15 \\ \quad\quad x_2 \quad\quad + 5x_4 = 2 \end{cases}$.

16. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \\ a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + \ldots + a_n^2x_n = b^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^{n-1}x_1 + a_2^{n-1}x_2 + \ldots + a_n^{n-1}x_n = b^{n-1} \end{cases}$$, trong đó các a_j đôi một khác nhau.

17. (Bài tập tổng hợp)

Bạn hãy tìm trong cuốn sách giáo khoa này, hoặc trong các sách giáo khoa khác về đại số tuyến tính, những ví dụ về các phương pháp tính định thức (mỗi phương pháp có một hoặc hai ví dụ). Nói riêng, đối với phần "áp dụng các tính chất của định thức" thì mỗi tính chất có ít nhất một ví dụ.

Các định thức lấy làm ví dụ phải có cấp $n \geq 3$. Hơn nữa các ví dụ của bạn không được trùng với ví dụ trong sách giáo khoa này.

VÀI NÉT LỊCH SỬ

(Chân dung Leibnitz)

Ngày nay khi định nghĩa định thức bao giờ ta cũng nói: "định thức của một ma trận nào đó". Vì thế, một cách tự nhiên, ai cũng nghĩ rằng khái niệm định thức phải ra đời sau khái niệm ma trận. Nhưng thực tế, khái niệm định thức ra đời trước khái niệm ma trận 150 năm. Người đầu tiên đưa ra khái niệm định thức là Leibnitz, nhà toán học Đức,(1646- 1716) và nhà toán học Seki Kova, người Nhật bản. Nó cũng đã được xuất hiện trong công trình của một nhà toán học Nhật bản khác, tên là Takakazu (1642-1708).

Leibnitz đã không công bố phát kiến của mình có liên quan đến định thức. ông chỉ nói đến nó trong một bức thư gửi nhà toán học L'Hopital để bàn về việc giải hệ phương trình tuyến tính. Ở đó, ông đã nói đến khái niệm này và hết lời ca ngợi nó. Mãi tới năm 1850 (tức là sau gần 200 năm), khi thư từ của ông được công bố người ta mới biết rằng ông đã phát hiện ra khái niệm định thức. Leibmtz đã nhấn mạnh ích lợi của việc đánh số bởi hai chỉ số để kí hiệu các hệ số trong hệ phương trình.

(Chân dung Cauchy)

Seki đã chạm đến khái niệm định thức khi tìm nghiệm chung của hai đa thức f(x) và g(x) (với bậc thấp). Nhưng ông đã giữ bí mật phương pháp của mình và chỉ tin vào những học trò thân cận nhất. Năm 1674 phát kiến của Se ki được công bố, và khi đó phương pháp của ông được trình bày rõ ràng hơn.

Ở châu Âu, Newton, Bezout và Euler, khi nghiên cứu việc tìm tập nghiệm chung của các phương trình đại số đã gắn chặt việc nghiên cứu của mình với định thức. Vào năm 1750, nhà toán học Thụy sĩ Cramer đã công bố công trình tương đối tổng quát liên quan đến định thức. ông đã đưa ra một biểu diễn định thức cho lời giải của bài toán tìm một đường cônic đi qua 5 điểm cho trước. Tuy nhiên Cramer lại không phải là người chứng minh công thức Cramer mà chúng ta thường dùng.

Người đầu tiên định nghĩa và nghiên cứu định thức là nhà toán học Pháp tên là Vandermonde. Ông đã công bố những công trình này vào năm 1771. Ông đã chứng minh quy tắc Cramer và tìm được một số tính chất của định thức. Nhưng ông mới chỉ tính được định thức Vandermonde cấp 3. Năm 1772, Laplace (1749-1827) đã phát hiện công thức khai triển định thức theo một dòng hay một cột.

Tất cả các nhà toán học nói trên đã phát hiện, nghiên cứu định thức, nhưng vẫn chưa có tên gọi của định thức. Tên gọi của định thức lần đầu tiên xuất hiện trong một bài báo của Gauss năm 1801. Hai nhà toán học Pháp là Cauchy (1789-1857) và Jacobi (1804-1851) đã trình bày lí thuyết định thức một cách hệ thống. Từ đó khái niệm định thức trở nên phổ cập hơn.

Chương II

KHÔNG GIAN VECTƠ

MỞ ĐẦU

Trong chương I ta đã thấy, nhờ định thức ta đã giải được hệ phương trình Cramer. Song nếu chỉ dùng định thức để nghiên cứu việc giải hệ phương trình tuyến tính tổng quát (khi $m \neq n$ hoặc khi $m = n$ nhưng định thức của hệ phương trình bằng 0) thì sẽ có nhiều khó khăn, phức tạp. *Không gian vectơ* sẽ giúp ta vượt qua những khó khăn ấy và cũng giúp ta trình bày lí thuyết hệ phương trình tuyến tính một cách sáng sủa. Ở trường Phổ thông trung học ta đã dùng vectơ để nghiên cứu hình học. Vectơ còn được dùng để nghiên cứu nhiều ngành toán học khác và cả những môn khoa học khác như Cơ học, Vật lí, Hoá học, Địa lí, và nhiều ngành kĩ thuật.

Nếu xét tập hợp V các vectơ có chung điểm gốc O mà ta đã học ở trường Phổ thông thì ta thấy tập V cùng với phép cộng hai vectơ và phép nhân một vectơ với một số thoả mãn những điều kiện sau:

1) $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$;

2) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$;

3) có vectơ không $\vec{0}$ thoả mãn điều kiện: $\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha}$;

4) mỗi $\vec{\alpha}$ có một vectơ đối $-\vec{\alpha}$ thoả mãn điều kiện: $\vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = \vec{0}$;

5) $r(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = r\vec{\alpha} + r\vec{\beta}$;

6) $(r + s)\vec{\alpha} = r\vec{\alpha} + s\vec{\alpha}$;

7) $(rs)\vec{\alpha} = r(s\vec{\alpha})$;

8) $1.\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$, trong đó r, s, 1 là những số thực.

Trong toán học và nhiều khoa học khác còn có những tập hợp mà các phần tử của chúng không phải là những vectơ hình học như ta vừa nói, nhưng cũng có hai phép toán thoả mãn 8 điều kiện nêu trên. Chúng được gọi là những không gian vectơ.

Mục tiêu của chương này là trình bày định nghĩa không gian vectơ, các tính chất của nó và cấu tạo của một không gian vectơ, chuẩn bị cho việc áp dụng nó vào lí thuyết hệ phương trình tuyến tính và việc nghiên cứu nó sâu sắc hơn trong những chương sau để có thể áp dụng nó nhiều hơn vào những bộ môn toán học khác cũng như những lĩnh vực khoa học khác.

Vì thế ta cần:

- Nắm vững định nghĩa và các tính chất của không gian vectơ, không gian con:

- Hiểu rõ rằng mỗi không gian vectơ được tạo thành từ một họ "tối thiểu" những vectơ của không gian mà ta gọi là cơ sở; biết cách tìm cơ sở và số chiều của một không gian vectơ;

- Biết được mối liên hệ giữa toạ độ của cùng một vectơ trong hai cơ sở khác nhau.

Trong giáo trình này ta chỉ xét các không gian vectơ trên các trường số Tuy nhiên những điều trình bày sau đây đều đúng trong mọi trường tuỳ ý.

§1. ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC TÍNH CHẤT ĐƠN GIẢN

1.1. Định nghĩa

Định nghĩa. *Giả sử V là một tập hợp mà các phần tử được kí hiệu bởi $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$,..., **K** là một trường sô. Trên V có một phép toán gọi là phép cộng hai phần tử của V (kí hiệu "+") và phép toán thứ hai gọi là phép nhân một phần tử của V với một số thuộc trường K (kí hiệu ".").*

*Tập hợp V cùng với hai phép toán này được gọi là một không gian vectơ trên trường **K** (hay một **K**-không gian vectơ) nên các điều kiện sau được thoả mãn đời với mọi $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, ∈ **V** và mọi r, s, 1 ∈ K.*

1) $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$;

2) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$;

3) có một phần tử $\vec{0} \in V$ *thoả mãn điều kiện:* $\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha}$;

4) với mỗi $\vec{\alpha} \in V$ *có một phần tử, kí hiệu bởi* $-\vec{\alpha}$, *cũng thuộc V thoả mãn điều kiện:* $\vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = \vec{0}$;

5) $r(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = r\vec{\alpha} + r\vec{\alpha}$

6) $(r + s)\vec{\alpha} = r\vec{\alpha} + s\vec{\alpha}$;

7) $(rs)\vec{\alpha} = r(s\vec{\alpha})$;

8) $1.\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$.

$\vec{\alpha} \in V$ *được gọi là một vectơ,* $\vec{0}$ *được gọi là vectơ không,* $-\vec{\alpha}$ *được gọi là vectơ đối của* $\vec{\alpha}$.

Bạn đọc có thể dùng định nghĩa của không gian vectơ để kiểm chứng rằng các tập hợp cho trong các ví dụ dưới đây là những không gian vectơ.

Ví dụ 1. Tập hợp V các vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$?... chung gốc O trong không gian (mà ta học ở trường phổ thông) cùng với phép cộng hai vectơ và phép nhân một vectơ với một số thực là một không gian vectơ. Nó được gọi là *không gian vectơ hình học.*

Ví dụ 2. Mỗi trường **K** là một không gian vectơ trên **K** đối với phép cộng và phép nhân trên **K**.

Ví dụ 3. Trường số thực **R** là một không gian vectơ trên trường số hữu tỉ **Q**.

Ví dụ 4. Trường số phức **C** là một không gian vectơ trên trường số thực R và cũng là một không gian vectơ trên trường **Q**.

Ví dụ 5. Giả sử **K** là một trường số, tập hợp **K**[x] các đa thức của ẩn x với hệ số trong **K**, cùng với phép cộng hai đa thức và phép nhân đa thức với một số, là một **K**-không gian vectơ.

Ví dụ 6. **Kn** = **K** x **K** x... x **K** là tích đề các của n phiên bản **K**. Trên **Kn** xác định phép cộng hai phần tử và phép nhân một phần tử của $\mathbf{K}^n$ với một số thuộc **K** như sau:

Với $\vec{\alpha} = (a_1, a_2,..., a_n)$, $\vec{\beta} = (b_1, b_2,..., b_n)$ thuộc $\mathbf{K}^n$ và số $r \in$ **K**,

$(a_1, a_2,..., a_n) + (b_1, b_2,..., b_n) = (a_1, + b_1, a_2 + b_2, a_n,..., b_n)$,

$r(a_1, a_2, ..., a_n) = (ra_1, ra_2, ..., ra_n)$.

$\mathbf{K}^n$ là một **K**-không gian vectơ.

Từ đây trở đi, mỗi khi nói đến không gian $\mathbf{K}^n$ ta hiểu rằng hai phép toán trong đó đã được định nghĩa như trên.

Từ định nghĩa không gian vectơ ta suy ra ngay một số tính chất đơn gian cua nó.

1.2. Một số tính chất đơn giản

*Giả sử V là một **K**-không gian vectơ.*

1) V chỉ có một vectơ không $\vec{0}$ duy nhất.

2) Với mỗi $\vec{\alpha} \in V$, vectơ đối - $\vec{\alpha}$ duy nhất.

3) Với mỗi $\vec{\alpha} \in V$, $-(-\vec{\alpha}) = \vec{\alpha}$.

*4) Với $\vec{\alpha} \in V$ và $r \in$ **K**, $\rho\vec{\alpha} = \vec{0}$ khi và chỉ khi $r = 0$ hoặc $\vec{\alpha} = \vec{0}$.*

*5) Với $\vec{\alpha} \in V$ và $r \in$ **K**, ta có: $(-\rho\vec{\alpha} = -(\rho\vec{\alpha}) = \rho(\vec{\alpha})$.*

Chứng minh.

1) Giả sử $\vec{0}$ và $\vec{0}'$ là những vectơ không của V. Theo điều kiện 3)

trong định nghĩa, vì $\vec{0}$ là vectơ không nên $\vec{0} + \vec{0}' = \vec{0}'$. Tương tự, vì $\vec{0}'$ là vectơ không nên $\vec{0} + \vec{0}' = \vec{0}$. Vậy $\vec{0} = \vec{0}'$.

2) Giả sử $\vec{\alpha} \in V$ có những phần tử đối là $-\vec{\alpha}$ và $\vec{\alpha}'$. Theo điều kiện 4) trong định nghĩa, $\vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = \vec{0} = \vec{\alpha} + \vec{\alpha}$. Do đó, áp dụng các điều kiện 1) và 2), ta có :

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha} + [\vec{\alpha} + (-\vec{\alpha})] = (\vec{\alpha}' + \vec{\alpha}) + (-\vec{\alpha}) = \vec{0} + (-\vec{\alpha}) = -\vec{\alpha}.$$

3) Vì $-(-\vec{\alpha})$ và $\vec{\alpha}$ đều là vectơ đối của $-\vec{\alpha}$ nên từ 2) suy ra $-(-\vec{\alpha}) = \vec{\alpha}$.

4) "⇐"

• Nếu r = 0 thì theo điều kiện 6), ta có:

$$0\vec{\alpha} = (0 + 0)\vec{\alpha} = 0\vec{\alpha} + 0\vec{\alpha}.$$

Cộng $-0\vec{\alpha}$ vào vế đầu và vế cuối ta được: $\vec{0} = 0\vec{\alpha}$.

• Nếu $\vec{\alpha} = \vec{0}$ thì theo điều kiện 5), ta có:

$$r\vec{0} = r(\vec{0} + \vec{0}) = r\vec{0} + r\vec{0}.$$

Cộng $-r\vec{0}$ vào vế đầu và vế cuối ta được $\vec{0} = r\vec{0}$.

"⇒" Giả sử $r\vec{\alpha} = \vec{0}$. Nếu $r \neq 0$ thì theo điều kiện 7) và 8), ta có:

$$\vec{\alpha} = 1.\vec{\alpha} = (\frac{1}{r}.r)\vec{\alpha} = (\frac{1}{r}.r\vec{\alpha}) = \frac{1}{r}\vec{0} = \vec{0}$$

5) Vì $-(r\vec{\alpha})$ là vectơ đối của ra nên nhờ tính chất 2), ta chỉ cần chứng minh $(-r)\vec{\alpha}$ và $r(-\vec{\alpha})$ đều là vectơ đối của $r\vec{\alpha}$.

Ta có: $$(-r)\vec{\alpha} + r\vec{\alpha} = (-r + r)\vec{\alpha} = 0\vec{\alpha} = \vec{0};$$

$$r(-\vec{\alpha}) + r\vec{\alpha} = r(-\vec{\alpha} + \vec{\alpha}) = r\vec{0} = \vec{0}.$$

Điều đó chứng tỏ rằng $(-r)\vec{\alpha}$ và $r(-\vec{\alpha})$ đều là vectơ đối của $r\vec{\alpha}$. Vậy

$$(-r)\vec{\alpha} = -(r\vec{\alpha}) = r(-\vec{\alpha}). \square$$

1.3. Hiệu của hai vectơ

Định nghĩa. *$\vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$ được gọi là hiệu của $\vec{\alpha}$ và $\vec{\beta}$, kí hiệu bởi $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ và đọc là $\vec{\alpha}$ trừ $\vec{\beta}$.*

Từ định nghĩa này và tính chất của không gian vectơ ta suy ra: Hệ quả.

1) $\rho(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = p\vec{\alpha} - c\vec{\beta}$.

2) $(\rho - \sigma)\vec{\alpha} = \rho\vec{\alpha} - \sigma\vec{\alpha}$.

Chứng minh. Xin dành cho bạn đọc.

§2. KHÔNG GIAN CON

2.1. Định nghĩa

Định nghĩa. *Giả sử W là một tập con của không gian vectơ V. Nếu W cũng là một không gian vectơ đối với hai phép toán đã cho trong V thì W được gọi là một không gian con của V.*

Như vậy muốn chứng minh tập con W là một không gian con của không gian vectơ V ta phải chứng tỏ rằng các phép đã cho trong V cũng là các phép toán trong W và phải kiểm tra rằng 8 điều kiện nêu trong định nghĩa không gian vectơ đều được thoả mãn. Song ta sẽ thấy rằng chỉ cần kiểm tra một số ít điều kiện hơn.

2.2. Tính chất đặc trưng

Định lí. *Giả sử V là một không gian vectơ trên trường **K**. **W** là một tập con của V. Các mệnh đề sau tương đương:*

*(i) **W** là một không gian con của V.*

(ii) $\mathbf{W} \neq \varnothing$ *và với mọi* $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ *thuộc **W**, mọi r thuộc trường **K**, ta có* $\vec{\alpha} + \vec{\beta} \in \mathbf{W}$, $\rho\vec{\alpha} \in \mathbf{W}$.

(iii) $W \neq \varnothing$ *và với mọi* $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ *thuộc **W**, mọi r, s thuộc trường **K**, ta có* $r\vec{\alpha} + \sigma\vec{\beta} \in W$.

Chứng minh.

"(i) ⇒ (ii)": Nếu W là một không gian con của không gian vectơ V thì W phải chứa một vectơ $\vec{0}$ của nó. Do đó W ≠ ∅. Các điều kiện còn lại của (ii) hiển nhiên được thoả mãn.

"(i) ⇒ (iii)": Hiển nhiên.

"(iii) $\Rightarrow$ (i)": Giả sử các điều kiện của (iii) được thoả mãn. Khi đó,

với $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ thuộc **W** và r = s = 1 $\in$ K, $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = 1\vec{\alpha} + 1\vec{\beta} \in$ **W**;

với $\vec{\alpha} \in$ **W**, r $\in$ **K**, ta có: $r\vec{\alpha} = r\vec{\alpha} + 0\vec{\alpha} \in$ **W** ;

nghĩa là các phép toán trong **W** cũng là hai phép toán trong **V**. Ta phải kiểm tra rằng 8 điều kiện trong định nghĩa của không gian vectơ đều được thoả mãn. Hiển nhiên các điều kiện 1), 2), 5), 6), 7), 8) được thoả mãn vì hai phép toán trong **W** chính là hai phép toán đã cho trong **V**. Chỉ còn cần kiểm tra các điều kiện 3) và 4). Vì **W** $\neq \varnothing$ nên có một $\vec{\alpha} \in$ **W**. Theo tính chất của không gian vectơ, $\vec{0} = 0\vec{\alpha} + 0\vec{\alpha}$, mặt khác, theo giả thiết $0\vec{\alpha} + 0\vec{\alpha} \in$ **W**. Do đó $\vec{0} \in$ **W**. Tương tự, với mỗi $\vec{\alpha} \in$ **W** ta đều có $-\vec{\alpha} = (-1)\vec{\alpha} + 0\vec{\alpha} \in$ **W**. Vậy **W** là một không gian vectơ trên trường **K** và do đó **W** là một không gian con của **V**. □

Bạn đọc hãy dùng định lí 2.2 để chứng minh những điều khẳng định trong các ví dụ dưới đây:

Ví dụ 1. Với mỗi không gian vectơ V, bản thân V và tập $\{\vec{0}\}$ là những không gian con của V.

Chúng được gọi là những *không gian con tầm thường* của V.

Ví dụ 2. Tập P_n gồm đa thức 0 và các đa thức có bậc bé hơn hay bằng n của **K**[x], (xem ví dụ 5, mục 1.1) là một không gian con của không gian vectơ **K**[x].

Ví dụ 3. Theo ví dụ 6), mục 1.1, với n = 4 và **K = R** là trường số thực, thì $\mathbf{R}^4$ là một **R**-không gian vectơ. Tập **W** = $\{(a_1, a_2, 0, 0\}|a_i \in$ **R**) là một không gian con của không gian $\mathbf{R}^4$**.**

Thật vậy, ta chứng minh cho ví dụ 3.

Rõ ràng **W** $\neq \varnothing$ vì (0, 0, 0, 0) $\in$ **W**. Bây giờ với $\vec{\alpha} = (a_1, a_2, 0, 0)$, $\vec{\beta} = (b_1, b_2, 0, 0)$ thuộc **W** và r $\in$ **R**, ta có:

$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (a_1, a_2, 0, 0) + (b_1, b_2, 0, 0) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, 0, 0) \in$ **W**,

$r\vec{\alpha} = r(a_1, a_2, 0, 0) = (ra_1, ra_2, 0, 0) \in$ **W**.

W thoả mãn điều kiện (ii) trong định lí 2.2. Vậy **W** là một không gian con của **R4**.

Có nhiều cách tạo thành những không gian con của một không gian vectơ V.

2.3. Tổng của những không gian con

Mệnh đề và định nghĩa. *Giả sử W_1, W_2,... W_m là những không gian vectơ con của **K**-không gian vectơ V. Khi đó:*

Tập hợp $W = \{\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + ... + \vec{\alpha}_n | \vec{\alpha}_i \in W_i, \{1, 2,..., m\}\}$ là một không gian con của V.

Không gian này được gọi là *tổng của m không gian con W_i đã cho và được kí hiệu bởi $W_1 + W_2 +... + W_m$ hay $\sum_{i=1}^{m} W_i$.*

Chứng minh. Vì $\vec{0} \in W_i$ với mọi i ∈ {1, 2,..., m} nên $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0} + ... + \vec{0} \in W$; nghĩa là $W \neq \varnothing$.

Với $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + .. + a_m \in W$, $\vec{\beta} = \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2 +...+ \vec{\beta}_m \in W$ và $r \in K$, ta có: $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2 + ... + \vec{\beta}_m = (\vec{\alpha}_1 + \vec{\beta}_1) + (\vec{\alpha}_2 + \vec{\beta}_2) + .. + (\vec{\alpha}_m + \vec{\beta}_m)$

Vì $\vec{\alpha}_i$, $\vec{\beta}_i \in W_i$ và W_i là không gian con của không gian vectơ V nên $\vec{\alpha}_i + \vec{\beta}_i \in W_i$, $r\vec{\alpha}_i \in W_i$, với mọi i ∈ {1, 2,..., m}. Do đó

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} \in W, \quad r\vec{\alpha} \in W.$$

Theo định lí 2.2, W là một không gian con của V. □

2.4. Giao của những không gian con

Mệnh đề và định nghĩa. *Giả sử W_1, W_2,..., W_m là những không gian vectơ con của **K**-không gian vectơ V.*

Tập hợp $U = \bigcap_{i=1}^{m} W_i$ là một không gian con của V và được gọi là giao của m không gian con W_i.

Chứng minh. Xin dành cho bạn đọc.

Từ một hệ (một số hay một họ) vectơ của không gian V cũng có thể tạo thành một không gian con của V.

2.5. Không gian sinh bởi một hệ vectơ

Định lí. *Giả sử* $\mathcal{A} = \{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_m\}$ *là một hệ vectơ của **K**-không gian vectơ V. Khi đó tập hợp*

W = {$r\vec{\alpha}_1 + \rho_2\vec{\alpha}_2 + \ldots + \rho_\mu\vec{\alpha}_\mu / r_i \in$ ***K**, với mọi* $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$*} là một không gian con của V.*

W được gọi là không gian sinh bởi hệ vectơ $\mathcal{A}$*, còn* $\mathcal{A}$ *được gọi là hệ sinh của* W.

Chứng minh. Rõ ràng $W \neq \varnothing$ vì $\vec{0} = \vec{\alpha}_1 + 0\vec{\alpha}_2 + \ldots + 0\vec{\alpha}_m \in W$.

Giả sử $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in W$ và $t \in K$, chẳng hạn:

$$\vec{\alpha} = r_1\vec{\alpha}_1 + r_2\vec{\alpha}_2 + \ldots + r_m\vec{\alpha}_m, \quad \vec{\beta} = s_1\vec{\alpha}_1 + s_2\vec{\alpha}_2 + \ldots + s_m\vec{\alpha}_m.$$

Từ các điều kiện trong định nghĩa của không gian vectơ, ta suy ra:

$$\begin{aligned}\vec{\alpha} + \vec{\beta} &= r_1\vec{\alpha}_1 + r_2\vec{\alpha}_2 + \ldots + r_m\vec{\alpha}_m + s_1\vec{\alpha}_1 + s_2\vec{\alpha}_2 + \ldots + s_m\vec{\alpha}_m \\ &= (r_1 + s_1)\vec{\alpha}_1 + (r_2 + s_2)\vec{\alpha}_2 + \ldots + (r_m + s_m)\vec{\alpha}_m \in W,\end{aligned}$$

$$t\vec{\alpha} = t(r_1\vec{\alpha}_1 + r_2\vec{\alpha}_2 + \ldots + r_m\vec{\alpha}_m) = (tr_1)\vec{\alpha}_1 + (tr_2)\vec{\alpha}_2 + \ldots + (tr_m)\vec{\alpha}_m \in W.$$

Theo định lí 2.2, W là một không gian con của V. □

Chú ý. Không gian sinh bởi một vectơ thường được kí hiệu bởi $\mathbf{K}\vec{\alpha}$.

Nếu W là không gian sinh bởi hệ vectơ $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_m\}$ thì $W = \sum_{i=1}^{n} K\vec{\alpha}_1$.

Không gian W trên đây sinh bởi một hệ hữu hạn vectơ. Người ta gọi nó là *không gian hữu hạn sinh.*

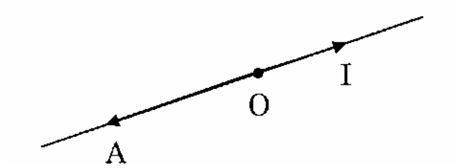
Có những không gian vectơ có hệ sinh vô hạn nhưng không có hệ sinh hữu hạn nào. Trong giáo trình này ta chỉ xét các không gian vectơ có hệ sinh hữu hạn

Ví dụ 1.

1) Giả sử V là không gian vectơ hình học trong không gian (xem ví dụ li trong mục 1.2). $\overrightarrow{OI}$ là một vectơ cố định.

Nếu O ≡ I thì tập $U = \{r\overrightarrow{OI} \mid r \in \mathbf{R}\}$ chỉ chứa vectơ $\vec{0}$, là một không gian con tầm thường của **V**.

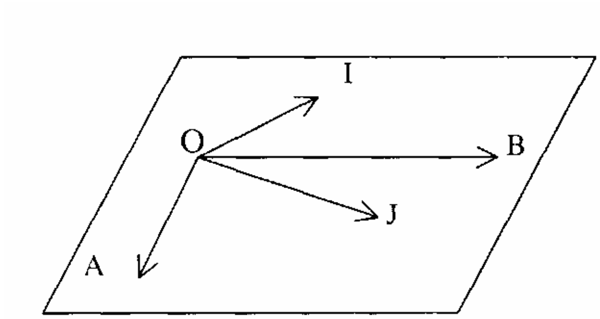
Nếu O ≠ I thì tập U = $\{r\overrightarrow{OI} \mid r \in R\}$ gồm các vectơ gốc O, nằm trên đường thẳng OI.



• Giả sử $\overrightarrow{OJ}$ là vectơ không cùng phương với $\overrightarrow{OI}$. Khi đó, tập

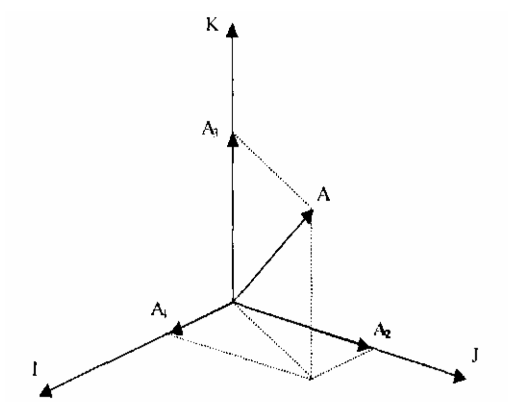
$$\mathbf{W} = \{r_1\overrightarrow{OI} + r_2\overrightarrow{OJ} \mid r_1 \in \mathbf{R}, r_2 \in \mathbf{R})$$

là một không gian con của V gồm các vectơ,,... nằm trong mặt phẳng (OIJ).



Giả sử $\overrightarrow{OK}$ không đồng phẳng với $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OJ}$. Thế thì $\{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK}\}$ là một hệ sinh của V. Thật vậy, như ta đã biết mỗi vectơ $\overrightarrow{OA}$ trong không gian đều có dạng: $\overrightarrow{OA} = r_1\overrightarrow{OI} + r_2\overrightarrow{OJ} + r_3\overrightarrow{OK}$.

$$(r_1\overrightarrow{OI} = r_1\overrightarrow{OA_1},\ r_2\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OA_2} + r_3\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA_3}$$



Ví dụ 2. Xét không gian vectơ $\mathbf{R}^4$ và không gian con W trong ví dụ 3, mục 2.2. Hệ hai vectơ $\overrightarrow{\varepsilon_1} = (1, 0, 0, 0)$, $\overrightarrow{\varepsilon_2} = (0, 1, 0, 0)$, của $\mathbf{R}^4$ là một hệ sinh của W.

Để chứng minh điều này ta phải chứng tỏ rằng mỗi $\vec{\alpha} \in$ W được biểu diễn dưới dạng $\vec{\alpha} = r_1\vec{\varepsilon}_1 + r_2\vec{\varepsilon}_2$. Biết rằng mỗi vectơ trong W có dạng $\vec{\alpha} = (a_1, a_2, 0, 0) \in$ W. Theo phép cộng và phép nhân với một số trong $\mathbf{R}^4$, ta có:

$$\vec{\alpha} = (a_1, a_2, 0, 0) = (a_1, 0, 0, 0) + (0, a_2, 0, 0)$$

$$= a_1(1, 0, 0, 0) + a_2(0, 1, 0, 0) = a_1\vec{\varepsilon}_1 + a_2\vec{\varepsilon}_2.$$

Vậy $\{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2\}$ là hệ sinh của **W**.

Ta hãy thử thêm vectơ $\vec{\delta}$ (2, 3, 0, 0) vào hệ vectơ $\{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2\}$ và xét không gian con W' sinh bởi hệ vectơ $\{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\delta}\}$. Mỗi $\vec{\alpha} = a_1\vec{\varepsilon}_1 + a_2\vec{\varepsilon}_2 + a\vec{\delta} \in$ W' đều có thể viết thành:

$$\begin{aligned}
\vec{\alpha} &= a_1(1, 0, 0, 0) + a_2(0, 1, 0, 0) + a_3(2, 3, 0, 0)\\
&= a_1(1, 0, 0, 0) + a_2(0, 1, 0, 0) + a_3[(2, 0, 0, 0) + (0, 3, 0, 0)]\\
&= a_1(1, 0, 0, 0) + a_2(0, 1, 0, 0) + 2a_3(1, 0, 0, 0) + 3a_3(0, 1, 0, 0)\\
&= (a_1 + 2a_3)(1, 0, 0, 0) + (a_2 + 3a_3)(0, 1, 0, 0)\\
&= (a_1 + 2a_3)\vec{\varepsilon}_1 + (a_2 + 3a_3)\vec{\varepsilon}_2.
\end{aligned}$$

Đó là một vectơ trong **W**. Như vậy, W' $\subseteq$ W.

Ngược lại, mỗi vectơ $\vec{\beta} = b_1\vec{\varepsilon}_1 + b_2\vec{\varepsilon}_2 \in$ W đều có thể viết dưới dạng $\vec{\beta} = b_1\vec{\varepsilon}_1 + b_2\vec{\varepsilon}_2 + \vec{\delta}$. Đó là một vectơ thuộc W'.

Vậy W' = W; nghĩa là hai hệ $\{\varepsilon, \varepsilon_2, \vec{\delta}\}$ và $\{\varepsilon, \varepsilon_2, \vec{\delta}\}$ đều là hệ sinh của không gian vectơ W.

Một câu hỏi đặt ra là trong một hệ sinh của một không gian vectơ có thể có một số tối thiểu vectơ sinh ra không gian ấy hay không? Trả lời của câu hỏi này liên quan đến một khái niệm gọi là hệ vectơ độc lập tuyến tính.

§3. SỰ ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH - SỰ PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH

3.1. Định nghĩa

Giả sử $\mathcal{A} = \{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, ..., \vec{\alpha}_{m-1}, \vec{\alpha}_m\}$ (1)

là một hệ vectơ của **K**- không gian vectơ V, (m > 0).

Định nghĩa 1. *Nếu $\vec{\alpha} = r_1\vec{\alpha}_1 + r_2\vec{\alpha}_2 + ... + r_{m-1}\vec{\alpha}_{m-1} + r_1\vec{\alpha}_m$ thì ta nói $\vec{\alpha}$ là một tổ hợp tuyến tính của hệ vectơ $\mathcal{A}$ hay $\vec{\alpha}$ biểu thị tuyến tính qua m vectơ đã cho.*

Định nghĩa 2. *Hệ vectơ $\mathcal{A}$ được gọi là phụ thuộc tuyến tính nếu có m số $r_1, r_2, ..., r_{m-1}, r_m$ thuộc trường K, không đồng thời bằng 0, sao cho*

$$r_1\vec{\alpha}_1 + r_2\vec{\alpha}_2 + ... + r_{m-1}\vec{\alpha}_{m-1} + r_m\vec{\alpha}_m = \vec{0}.$$

Định nghĩa 3. *Hệ vectơ $\mathcal{A}$ được gọi là độc lập tuyến tính nếu nó không phụ thuộc tuyến tính; nói cách khác, nếu*

$$r_1\vec{\alpha}_1 + r_2\vec{\alpha}_2 + ... + r_{m-1}\vec{\alpha}_{m-1} + r_m\vec{\alpha}_m = \vec{0}.$$

thì $r_1 = r_2 = ... = r_{m-1} = r_m = 0$.

Ví dụ 1. Trong không gian vectơ, mỗi vectơ khác $\vec{0}$ đều lập thành một hệ vectơ độc lập tuyến tính. Thật vậy, giả sử $\vec{\alpha}$ là một vectơ khác $\vec{0}$ trong **K**-không gian vectơ V. Từ $r\vec{\alpha} = \vec{0}$ với r ~ **K**, nhờ tính chất 4), ở mục 1.2, suy ra r = 0; nghĩa là hệ vectơ $\{\vec{\alpha}\}$ độc lập tuyến tính.

Ví dụ 2. Mọi hệ vectơ chứa $\vec{0}$ đều là phụ thuộc tuyến tính. Thật vậy, giả sử $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, ..., \vec{\alpha}_m, \vec{0}\}$ là một hệ vectơ bất kì của không gian vectơ V. Chọn $r_1 = r_2 = ... = r_m = 0$, $r_{m+1} = 1$, ta có:

$$0\vec{\alpha}_1 + 0\vec{\alpha}_2 + ... + 0\vec{\alpha}_m + 1.\vec{0} = \vec{0}.$$

Điều này chứng tỏ hệ đã cho phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ 3. Trong không gian vectơ hình học V, (xem ví dụ 1, mục 1.1), ba vectơ lập thành một hệ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi chúng đồng phẳng; độc lập tuyến tính khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng.

Thật vậy, $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OJ}$, $\overrightarrow{OA}$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi tồn tại ba số thực r_1, r_2, r_3 không đồng thời bằng 0 sao cho $r_1\overrightarrow{OI} + r_2\overrightarrow{OJ} + r_3\overrightarrow{OA} =$

$\vec{0}$; chẳng hạn, $r_3 \neq 0$. Khi đó $\overrightarrow{OA} = -\frac{r_1}{r_3}\overrightarrow{OI} - \frac{r_2}{r_3}\overrightarrow{OK}$. Điều này chứng tỏ ba vectơ đồng phẳng.

Ví dụ 4. Xét không gian vectơ $\mathbf{R}^4$. Hệ gồm ba vectơ $\vec{\varepsilon}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{\varepsilon}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\vec{\alpha} = (2, -5, 0, 0)$ là phụ thuộc tuyến tính, còn các hệ vectơ $\{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2\}$, $\{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\alpha}\}$, $\{\vec{\varepsilon}_2, \vec{\alpha}\}$độc lập tuyến tính.

Thật vậy, $\vec{\alpha} = (2, -5, 0, 0) = (2, 0, 0, 0) + (0, -5, 0, 0)$

$= 2(1, 0, 0, 0) – (5, 1, 0, 0)$

$= 2\vec{\varepsilon}_1 - 5\vec{\varepsilon}_2$

hay $2\vec{\varepsilon}_1 - 5\vec{\varepsilon}_2 + (-1)\vec{\alpha} = \vec{0}$; nghĩa là hệ $\{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\alpha}\}$ là phụ thuộc tuyến tính và $\vec{\alpha}$ biểu thị tuyến tính qua $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2$.

Bây giờ ta xét hệ vectơ $\{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\alpha}\}$. Giả sử $r_1\vec{\varepsilon}_1 + r_2\vec{\alpha} = \vec{0}$, nghĩa là

$$r_1(1, 0, 0, 0) + r_2(2, -5, 0, 0) - (0, 0, 0, 0)$$

hay $(r_1, 0, 0, 0) + (2r_2, -5r_2, 0, 0) = (r_1 + 2r_2, -5r_2, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$.

Suy ra:

$$\begin{cases} r_1 + 2r_2 = 0 \\ -5r_2 = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình hai ẩn r_1, r_2 này có nghiệm duy nhất là $r_1 = 0$, $r_2 = 0$.

Vậy hệ hai vectơ $\{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\alpha}\}$ độc lập tuyến tính.

Bạn đọc hãy tự kiểm tra sự độc lập tuyến tính của hai hệ $\{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2\}$, $\{\vec{\varepsilon}_2, \vec{\alpha}\}$.

Từ định nghĩa suy ra các tính chất sau.

3.2. Các tính chất

Theo định nghĩa, hai khái niệm phụ thuộc tuyến tính và độc lập tuyến tính của hệ vectơ là hai khái niệm *phủ định lẫn nhau.* Vì thế, khái niệm này có một tính chất gì thì lập tức suy ra một tính chất tương ứng của khái niệm kia.

Tính chất 1.

1) Nếu thêm p vectơ vào một hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính thì được *một hệ phụ thuộc tuyến tính.*

2) Nếu bớt đi p vectơ của một hệ vectơ độc lập tuyến tính thì được một hệ độc lập tuyến tính.

Chứng minh. 1) Giả sử hệ vectơ $\mathcal{A} = \{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_{m-1}, \vec{\alpha}_m\}$ phụ thuộc tuyến tính. Khi đó tồn tại m số $s_1, \ldots, s_m$ không đồng thời bằng 0, chẳng hạn $s_i \neq 0$, sao cho:

$$s_1\vec{\alpha}_1 + \ldots + s_i\vec{\alpha}_i + \ldots + s_m\vec{\alpha}_m = \vec{0}.$$

Thế thì:

$$s_1\vec{\alpha}_1 + \ldots + s_i\vec{\alpha}_i + \ldots + s_m\vec{\alpha}_m + 0\vec{\alpha}_{m+1} + \ldots + 0\vec{\alpha}_{m+p} = \vec{0}.$$

Theo định nghĩa, hệ vectơ $\{\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_{i-1}\ \vec{\alpha}_i, \ \vec{\alpha}_{i+1}, \ldots, \vec{\alpha}_m, \ldots, \vec{\alpha}_{m+1}, \ldots, \vec{\alpha}_{m+p}\}$ phụ thuộc tuyến tính.

2) Giả sử từ hệ vectơ độc lập tuyến tính $\mathcal{A}$ bớt đi *p* vectơ ta được hệ vectơ $\mathcal{B}$. Nếu $\mathcal{B}$ phụ thuộc tuyến tính thì theo 1), thêm p vectơ nói trên vào $\mathcal{B}$ lại được hệ $\mathcal{A}$ phụ thuộc tuyến tính; trái với giả thiết. Vậy $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính. □

Tính chất 2.

1) Một hệ gồm m vectơ (m > 1) là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi có một vectơ của hệ được biểu thị qua các vectơ còn lại.

2) Một hệ gồm m vectơ (m > 1) là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi không có một vectơ nào của hệ được biểu thị qua các vectơ còn lại.

Chứng minh.

1) "⇒" Giả sử hệ vectơ

$$\mathcal{A} = \{\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_{i-1}, \vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}_{i+1} \ldots, \vec{\alpha}_m\} \qquad (1)$$

Của **K**-không gian vectơ V là phụ thuộc tuyến tính. Theo định nghĩa, tồn tại m số $r_i \in$ **K**, $i \in \{1, 2, \ldots, m)$ không đồng thời bằng 0, chẳng hạn, $r_i \neq 0$, sao cho:

$$r_1\vec{\alpha}_1 + \ldots + r_{i-1}\vec{\alpha}_{i-1} + t_{i+1}\vec{\alpha}_{i+1} \ldots + r_m\vec{\alpha}_m = \vec{0}.$$

Khi đó $r_1\vec{\alpha}_1 = - r_1\vec{\alpha}_1 - \ldots - t_{i-1}\vec{\alpha}_{i-1} - r_{i+1}\vec{\alpha}_{i+1} - \ldots - r_m\vec{0}$.

Vì $r_i \neq 0$ nên từ đẳng thức này suy ra

$$\vec{\alpha}_i = -\frac{r_1}{r_i}\vec{\alpha}_1 - \dots - \frac{r_{i-1}}{r_i}\vec{\alpha}_{i-1} - \frac{r_{i+1}}{r_i}\vec{\alpha}_{i+1} - \dots - \frac{r_m}{r_i}\vec{\alpha}_m ;$$

nghĩa là $\vec{\alpha}_i$ được biểu thị tuyến tính qua các vectơ còn lại.

"⇐" Giả sử trong hệ vectơ (1) có vectơ $\vec{\alpha}_i$; thoả mãn đẳng thức:

$$\vec{\alpha}_i = s_1\vec{\alpha}_1 + \dots + s_{i-1}\vec{\alpha}_{i-1} + s_{i+1}\vec{\alpha}_{i+1} + \dots + s_m\vec{\alpha}_m .$$

Thế thì $s_1\vec{\alpha}_1 + \dots + s_{i-1}\vec{\alpha}_{i-1} + (-1)\vec{\alpha}_i + s_{i+1}\vec{\alpha}_{i+1} + \dots + s_m\vec{\alpha}_m = \vec{0}$.

Vì có $s_i = -1 \neq 0$ nên đẳng thức này chứng tỏ hệ (1) phụ thuộc tuyến tính.

2) Trực tiếp suy ra từ 1). □

Tính chất 3.

1) Một hệ gồm m vectơ (m > 0) là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi mỗi tổ hợp tuyến tính của hệ đều chỉ có một cách biểu thị tuyến tính duy nhất qua hệ đó.

2) Một hệ gồm m vectơ (m > 0) của không gian vectơ V là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi có một vectơ của V biểu thị tuyến tính được qua hệ đó theo hai cách khác nhau.

Chứng minh. 1) "⇒" Giả sử hệ vectơ $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_m\}$ độc lập tuyến tính và

$$\vec{\beta} = b_1\vec{\alpha}_1 + b_2\vec{\alpha}_2 + \dots + b_m\vec{\alpha}_m$$

Nếu $\vec{\beta}$ còn có cách biểu thị tuyến tính

$$\vec{\beta} = b'_1\vec{\alpha}_1 + b'_2\vec{\alpha}_2 + \dots + b'_m\vec{\alpha}_m$$

thì $(b_1 - b'_1)\vec{\alpha}_1 + (b_2 - b'_2)\vec{\alpha}_2 + \dots + (b_m - b'_m)\vec{\alpha}_m = \vec{0}$.

Vì hệ vectơ gã cho độc lập tuyến tính nên theo định nghĩa, $b_1 - b'_1 = b_2 - b'_2 = \dots = b_m - b'_m = 0$.

Suy ra: $b_1 = b'_1$, $b_2 = b'_2$,..., $b_m = b'_m$; nghĩa là cách biểu thị tuyến tính của $\vec{\beta}$ qua hệ vectơ đã cho là duy nhất.

"⇐": Nếu mỗi tổ hợp tuyến tính của hệ vectơ $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_m\}$ đều chỉ có một cách biểu thị tuyến tính duy nhất thì $\vec{0} = 0\vec{\alpha}_1 + 0\vec{\alpha}_2 + \dots +$

$0\vec{\alpha}_m$ cũng là cách biểu thị tuyến tính duy nhất của $\vec{0}$. Do đó, nếu $\vec{0} = r_1\vec{\alpha} + r_2\vec{\alpha}_2 + ... + r_m\vec{\alpha}_m$ thì bắt buộc $r_1 = r_2 ... = r_m = 0$. Vậy hệ vectơ đã cho độc lập tuyến tính.

2) Suy ra từ 1). □

Tính chất 4.

1) Nếu thêm vào một hệ độc lập tuyến tính một vectơ không biểu thị tuyến tính được qua hệ ấy thì được một hệ độc lập tuyến tính.

2) Nếu bớt đi ở một hệ phụ thuộc tuyến tính một vectơ không biểu thị tuyến tính được qua các vectơ còn lại thì được một hệ phụ thuộc tuyến tính.

Chứng ninh. 1) Giả sử $\mathcal{A} = \{\vec{\alpha}_1, a_2, ..., \vec{\alpha}_{m-1}, \vec{\alpha}_m\}$là một hệ vectơ độc lập tuyến tính của **K**-không gian vectơ V. $\vec{\beta} \in V$ là một vectơ không biểu thị tuyến tính được qua hệ $\mathcal{A}$. Ta phải chứng minh hệ vectơ $\mathcal{B} = \{\vec{\alpha}_1, a_2, ..., \vec{\alpha}_{m-1}, \vec{\alpha}_m, \vec{\beta}\}$ độc lập tuyến tính. Giả sử

$$r_1\vec{\alpha}_1 + ... + r_m\vec{\alpha}_m + r\vec{\beta} = \vec{0}.$$

Nếu $r \neq 0$ thì

$$\vec{\beta} = -\frac{r_1}{r}\vec{\alpha}_1 - ... - \frac{r_m}{r}\vec{\alpha}_m;$$

trái với giả thiết về $\vec{\beta}$. Do đó $r = 0$ và $r = \vec{\alpha}_1 + ... + r_m\vec{\alpha}_m = \vec{0}$ vì hệ $\mathcal{A}$ độc lập tuyến tính. Suy ra $r_1 = ... = r_m = 0$. Vậy $\mathcal{B}$ là hệ vectơ độc lập tuyến tính.

2) Suy ra ngay từ 1). □

Sau khi có khái niệm về hệ sinh của một không gian vectơ và hệ vectơ độc lập tuyến tính ta nghiên cứu cấu tạo của không gian vectơ.

§4. CƠ SỞ CỦA KHÔNG GIAN VECTƠ

Ta nhắc lại rằng, trong giáo trình này ta chỉ xét các không gian vectơ có hệ sinh hữu hạn (hữu hạn sinh) trên trường số.

4.1. Định nghĩa

Một hệ sinh độc lập tuyến tính của một không gian vectơ khác $\{\vec{0}\}$ *được gọi là một cơ sở của nó.*

Không gian vectơ $\{\vec{0}\}$ không có cơ sở; hay có thể nói, số vectơ trong cơ sở của không gian $\{\vec{0}\}$ bằng 0.

Ví dụ 1. Trong không gian vectơ Pn gồm đa thức 0 và các đa thức thuộc **K**[x] với bậc bé hơn hay bằng n, hệ vectơ $\{1, x, x^2, ..., x^n)$ là một cơ sở.

Thật vậy, mỗi đa thức $f(x) \in P_n$ đều có dạng $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...$

$+ a_nx^n$, $a_i \in K$, với mọi $i \in \{0, 1, 2, ..., n)$. Điều đó chứng tỏ $\{1, x, x^2, ..., x^n)$ là một hệ sinh của P_n. Mặt khác, nếu $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = 0$ thì từ định nghĩa đa thức suy ra $a_0 = a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$; nghĩa là $\{1, x, x^2, ..., x^n)$ là hệ vectơ độc lập tuyến tính. Vậy nó là một cơ sở của P_n.

Ví dụ 2. Trong không gian vectơ $\mathbf{R}^3$, hệ ba vectơ $\vec{\varepsilon}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{\varepsilon}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{\varepsilon}_3 = (0, 0, 1)$ là một cơ sở; người ta gọi đó là *cơ sở chính tắc*. Bạn đọc có thể chứng tỏ điều đó.

Hệ ba vectơ $\vec{\xi}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{\xi}_2 = (0, 1, 1)$, $\vec{\xi}_3$ $(1, 0, 1)$ cũng là một cơ sở.

Để khẳng định điều này ta sẽ chứng minh hệ vectơ $\{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3\}$ là một hệ sinh của $\mathbf{R}^3$ và độc lập tuyến tính. Giả sử $\vec{\alpha} = (a_1, a_2, a_3)$ là một vectơ bất kì thuộc $\mathbf{R}^3$. Ta tìm ba số $r_1, r_2, r_3 \in \mathbf{R}$ sao cho $\vec{\alpha} = r_1\vec{\xi}_1 + r_2\vec{\xi}_2 + r_3\vec{\xi}_3$ hay sao cho:

$$(a_1, a_2, a_3) = r_1(1, 1, 0) + r_2(0, 1, 1) + r_3(1, 0, 1)$$
$$= (r_1, r_1, 0) + (0, r_2, r_2) + (r_3, 0, r_3) = (r_1 + r_3, r_1 + r_2, r_2 + r_3).$$

Muốn vậy, $\begin{cases} r_1 + \quad\quad r_3 = a_1 \\ r_1 + r_2 \quad\quad = a_2 \\ \quad\quad r_2 + r_3 = a_3 \end{cases}$.

Giải hệ phương trình 3 ẩn r_1, r_2, r_3 này ta được nghiệm duy nhất

$$r_1 = \frac{a_1 + a_2 - a_3}{2},\ r_2 = \frac{a_2 + a_3 - a_1}{2},\ r_3 = \frac{a_3 + a_1 - a_2}{2}.$$

Như vậy, $\vec{\alpha} = \dfrac{a_1 + a_2 - a_3}{2}\vec{\xi}_1 + \dfrac{a_2 + a_3 - a_1}{2}\vec{\xi}_2 + \dfrac{a_3 + a_1 - a_2}{2}\vec{\xi}_3$.

Điều này chứng tỏ $\{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3\}$ là một hệ sinh của $\mathbf{R}^3$. Mặt khác, vì ba số r_1, r_2, r_3 được xác định duy nhất nên mỗi $\vec{\alpha}$ đều có cách biểu thị tuyến tính duy nhất qua hệ sinh này. Theo tính chất 3, mục 3.2, hệ sinh này độc lập tuyến tính. Vậy nó là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$.

Một câu hỏi đặt ra là mỗi không gian vectơ đều có cơ sở hay không? Để trả lời câu hỏi này ta hãy xét mối liên quan giữa hệ sinh và cơ sở.

4.2. Sự tồn tại của cơ sở

Trước hết ta xét bổ đề sau về mối liên quan giữa hệ sinh và cơ sở

Bổ đề. *Nếu không gian vectơ có một hệ sinh gồm m vectơ thì sốvectơ của mọi hệ vectơ độc lập tuyến tính của nó không vượt quá m.*

Chứng minh. Giả sử **K**-không gian vectơ V có một hệ sinh $\mathcal{A} = \{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2,..., \vec{\alpha}_m\}$, $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ với mọi $i \in \{1, 2,..., m)$ và $\mathcal{E} = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2,..., \vec{\varepsilon}_n\}$ là một hệ vectơ độc lập tuyến tính của V với n > m. Vì $\mathcal{A}$ là một hệ sinh nên

$$\vec{\varepsilon}_1 = a_{11}\vec{\alpha}_1 + a_{12}\vec{\alpha}_2 + ... + a_{1m}\vec{\alpha}_m.$$

$\varepsilon \neq \vec{0}$ nên có một a_{1j} khác 0, chẳng hạn $a_{11} \neq 0$. Do đó

$$\vec{\alpha}_1 = \frac{1}{a_{11}}\vec{\varepsilon}_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}}\vec{\alpha}_2 - ... - \frac{a_{1m}}{a_{11}}\vec{\alpha}_m.$$

Thay $\vec{\alpha}_1$ trong hệ $\mathcal{A}$ bởi $\vec{\varepsilon}_1$ ta được hệ $\mathcal{A}_1 = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\alpha}_2, ..., \vec{\alpha}_m\}$. Giả sử $\vec{\beta} \in V$ $\vec{\beta} = b_1\vec{\alpha}_1 + b_2\vec{\alpha}_2 + ... + b_m\vec{\alpha}_m$. Thế thì

$$\vec{\beta} = b_1\left(\frac{1}{a_{11}}\vec{\varepsilon}_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}}\vec{\alpha}_2 - \dots - \frac{a_{1m}}{a_{11}}\vec{\alpha}_m\right) + b_2\vec{\alpha}_2 + \dots + b_m\vec{\alpha}_m$$

$$= \frac{b_1}{a_{11}}\vec{\varepsilon}_1 + \left(b_2 - \frac{a_{12}}{a_{11}}\right)\vec{\alpha}_2 + \dots + \left(b_m - \frac{a_{1m}}{a_{11}}\right)\vec{\alpha}_m;$$

Như vậy mỗi $\vec{\beta} \in V$ đều biểu thị tuyến tính được qua hệ $\mathcal{A}_1$; do đó $\mathcal{A}_1$ là một hệ sinh của V. Nói riêng, $\vec{\varepsilon}_2$ có dạng:

$$\vec{\varepsilon}_2 = a_{21}\vec{\varepsilon}_1 + a_{22}\vec{\alpha}_2 + \dots + a_{2m}\vec{\alpha}_m.$$

Nếu tất cả các hệ số của các $\vec{\alpha}_i$ đều bằng 0 thì $\vec{\varepsilon}_2 = a_{21}\vec{\varepsilon}_1$. Suy ra hệ $\mathcal{E}$ phụ thuộc tuyến tính; trái với giả thiết. Vì thế có một $a_{2j} \neq 0$, Với $j \neq 1$. Nếu cần ta đánh số lại các $\vec{\alpha}_i$ để giả thiết rằng $a_{22} \neq 0$. Khi đó

$$\vec{\alpha}_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}\vec{\varepsilon}_1 + \frac{1}{a_{22}}\vec{\varepsilon}_2 - \frac{a_{23}}{a_{22}}\vec{\alpha}_3 - \dots - \frac{a_{2m}}{a_{22}}\vec{\alpha}_m$$

Thay $\vec{\alpha}_2$ trong $\mathcal{A}_1$ bởi $\vec{\varepsilon}_2$ ta được hệ $\mathcal{A}_2 = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \dots, \vec{\alpha}_m\}$. Lập luận như trên, $\mathcal{A}_2$ là một hệ sinh của V. Cứ tiếp tục như thế, ta lần lượt thay m vectơ của hệ $\mathcal{A}$ bởi m vectơ đầu tiên của hệ $\mathcal{E}$ và được hệ sinh $\mathcal{A}_m = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \dots, \vec{\varepsilon}_m\}$ của v. Theo giả thiết, $n > m$ nên $\vec{\varepsilon}_{m+1} \notin \mathcal{A}_m$. Nhưng $\mathcal{A}$m là hệ sinh của V nên $\vec{\varepsilon}_{m+1}$ được biểu thị tuyến tính qua hệ vectơ này; trái với giả thiết độc lập tuyến tính của hệ $\mathcal{E}$. Vậy $n \leq m$. □

Hệ quả. *Số vectơ trong hai cơ sở của một không gian vectơ bằng nhau.*

Chứng minh. Suy ra ngay từ định lí trên. □

Bây giờ ta trả lời cho câu hỏi đặt ra trước mục 4.2.

Định lí 1. *Mỗi **K** - không gian vectơ $V \neq \{\vec{0}\}$ đều có cơ sở.*

Chứng minh. Giả sử $\vec{\varepsilon}_1 \neq 0$ là một vectơ thuộc V. Theo ví dụ 1, mục 3.1, hệ $\{\vec{\varepsilon}_1\}$ độc lập tuyến tính. Nếu mọi vectơ của V đều biểu thị tuyến tính qua hệ này thì đó là một cơ sở của V. Nếu trái lại, trong V có $\vec{\varepsilon}_2$ không biểu thị tuyến được qua $\vec{\varepsilon}_1$. Theo tính chất 4, mục 3.2, hệ vectơ $\{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2\}$ độc lập tuyến tính. Nếu hệ này không phải là một cơ sở thì trong V có một $\vec{\varepsilon}_3$ không biểu thị tuyến tính được qua hệ $\{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2\}$. Lại theo tính chất 4, mục 3.2, hệ vectơ $\{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3\}$ độc lập tuyến tính. Tiếp tục, bổ sung như thế ta được những hệ vectơ độc lập tuyến tính của V. Vì V có một hệ sinh gồm m vectơ nào đó (có thể ta không biết hệ sinh ấy) nên theo bổ đề, quá trình này phải kết thúc ở vectơ $\vec{\varepsilon}_n$ nào đó với $n \le m$. Lúc đó ta được hệ vectơ

$$\mathscr{E} = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3, ..., \vec{\varepsilon}_n\}$$

mà mọi vectơ của v đều biểu thị tuyến tính được qua hệ $\mathscr{E}$. Vậy $\mathscr{E} = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3, ..., \vec{\varepsilon}_n\}$ là một cơ sở của V. □

Hệ quả. *Trong không gian vectơ, mỗi hệ vectơ độc lập tuyến tính bất kì đều có thể bổ sung thành một cơ sở.*

Ý nghĩa của định lí trên đây là dù cho không biết trước hệ sinh của không gian vectơ ta vẫn có thể dựng được một cơ sở của nó. Song khi đã biết một hệ sinh của không gian vectơ thì định lí sau đây cho thấy có thể chọn một cơ sở trong hệ sinh này. Đó là trả lời cho câu hỏi đặt ra trước §3.

Định lí 2. *Từ một hệ sinh của một không gian vectơ khác* $\{\vec{0}\}$ *có thể chọn ra một cơ sở.*

Chứng minh. Cách chứng minh định lí này giống như cách chứng minh định lí trên; chỉ khác ở chỗ là đáng lẽ ta chọn các vectơ ẽ; trong V thì ở đây ta phải chọn chúng trong hệ sinh đã cho. □

§5. SỐ CHIỀU CỦA KHÔNG GIAN VECTƠ

Hệ quả của bổ đề, mục 4.2, cho thấy số vectơ trong hai cơ sở khác nhau của một không gian vectơ thì bằng nhau. Điều đó cho phép ta định nghĩa:

5.1. Định nghĩa

*Số vectơ trong một cơ sở của **K**-không gian vectơ **V** được gọi là số chiều của V. Kí hiệu:* $\dim_{\mathbf{K}}V$.

Nếu không cần chỉ rõ trường K cụ thể, ta có viết đơn giản là dimV.

Ví dụ 1. Không gian P_n gồm đa thức 0 và các đa thức bậc bé hơn hay bằng n có số chiều bằng n + 1; tức là $\dim_K P_n = n + 1$.

(Xem ví dụ 1, mục 4.1).

Ví dụ *2.* $\dim_{\mathbf{R}}\mathbf{R}^3$ - 3.

Ví dụ 3. Không gian V các vectơ hình học trong không gian có $\dim_{\mathbf{R}}V = 3$.

Hệ quả. *Trong không gian vectơ n chiều mọi hệ vectơ độc lập tuyến tính gồm n vectơ đều là cơ sở.*

Chứng minh. Giả sử $\dim_{\mathbf{K}}V = n$ và $\mathcal{A} = \{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, ..., \vec{\alpha}_n\}$ là một hệ vectơ độc lập tuyến tính của V. Theo hệ quả của định lí 1, mục 4.2, có thể bổ sung vào $\mathcal{A}$ để được một cơ sở của V. Vì dimV = n, mọi cơ sở gồm n vectơ cho nên không cần bổ sung vectơ nào vào $\mathcal{A}$ nữa. Vậy $\mathcal{A}$ là một hệ sinh độc lập tuyến tính, do đó là một cơ sở của V. □

Ta hãy tìm hiểu mối liên hệ giữa số chiều của một không gian vectơ với số chiều của các không gian con của nó.

5.2. Số chiều của không gian con

Định lí 1. *Giả sử* W *là một không gian con của **K**-không gian vectơ* V. *Thế thì:*

1) $\dim_{\mathbf{K}}W \le \dim_{\mathbf{K}}V$.

2) $\dim_{\mathbf{K}}W = \dim_{\mathbf{K}}V$ *khi và chỉ khi W = V.*

Chứng minh.

1) Nếu W = { $\vec{0}$ } thì dimkw = 0 ≤ $\dim_K V$.

Bây giờ giả sử $\dim_K V = n$, $\dim_K W = m > 0$. Khi đó W có một cơ sở, chẳng hạn, (ε) gồm m vectơ. Vì (ε) là hệ vectơ độc lập tuyến tính trong W và W ⊆ V nên (ε) cũng là độc lập tuyến tính trong V. Theo bổ đề, mục 4.2, $\dim_K W$ m ≤ n = $\dim_K V$.

2) Suy ra từ hệ quả, mục 5.1. □

Định lí 2. *Nếu U, W là những không gian con của **K**-không gian vectơ V thì:*

$$dim(U + W) = dimU + dimW - dim(U \cap W).$$

Chứng minh.

Giả sử dim U = p, dimW = q, dim(U ∩ W) = r và $\{\vec{\xi}_1, \vec{\xi},..,\vec{\xi}_r\}$ (1) là một cơ sở của U ∩ W. Vì cơ sở này là một hệ vectơ độc lập tuyến tính trong U và trong W nên, theo hệ quả định lí 1, mục 4.2, có thể bổ sung thành cơ sở:

$$\{\vec{\varepsilon}_1,\ldots,\vec{\varepsilon}_{p-r},\ \vec{\xi}_1,\ldots,\vec{\xi}_r\} \qquad (2)$$

của U và thành cơ sở

$$\{\vec{\xi}_1,\ldots,\vec{\xi}_r,\vec{\delta}_1,\ldots,\vec{\delta}_{q-r}\} \qquad (3)$$

của W. Ta sẽ chứng minh rằng

$$\{\vec{\varepsilon}_1,\ldots,\vec{\varepsilon}_{p-r},\ \xi_1,\ldots,\xi_r,\delta_1,\ldots,\delta_{q-r}\} \qquad (4)$$

là một cơ sở của U + W. Muốn thế, trước hết, ta hãy chứng minh đó là một hệ sinh của U + W. Vì $\{\vec{\xi}_1,\ldots,\vec{\xi}_{p-r},\vec{\xi}_1,\ldots,\vec{\xi}_r\} \subset U$ và $\{\vec{\delta}_1,\ldots,\vec{\delta}_{q-r}\} \subset W$ nên hệ (4) nằm trong U + W. Giả sử $\vec{\alpha} = \vec{\beta} + \vec{\gamma}$, với

$$\vec{\beta} = a_1\vec{\varepsilon}_1 + \ldots + a_{p-r}\vec{\varepsilon}_{p-r} + b_1\vec{\xi}_1 + \ldots + b_r\vec{\xi}_r \in U,$$
$$\vec{\gamma} = c_1\vec{\xi}_1 + \ldots + c_r\vec{\xi}_r + d_1\vec{\delta}_1 + \ldots + d_{q-r}\vec{\delta}_{q-r} \in W.$$

Thế thì

$$\vec{\alpha} = a_1\vec{\varepsilon}_1 + \ldots + a_{p-r}\vec{\varepsilon}_{p-r} + (b_1 + c_1)\vec{\xi}_1 + \ldots + (b_r + c_r)\vec{\xi}_r + c_1\vec{\delta}_1 + \ldots + c_{q-r}\vec{\delta}_{q-r};$$

nghĩa là hệ (4) là một hệ sinh của U + W.

Hơn nữa, hệ (4) độc lập tuyến tính. Thật vậy, giả sử

$$x_1\vec{\varepsilon}_1 + \ldots + x_{p-r}\vec{\varepsilon}_{p-r} + y_1\vec{\xi}_1 + \ldots + y_r\vec{\xi}_r + z_1\vec{\delta}_1 + \ldots + z_{q-r}\vec{\delta}_{q-r} = \vec{0}. \qquad (5)$$

Thế thì $x_1\vec{\varepsilon}_1 + \ldots + x_{p-r}\vec{\varepsilon}_{p-r} + y_1\vec{\xi}_1 + \ldots + y_r\vec{\xi}_r = -z_1\vec{\delta}_1 - \ldots - z_{q-r}\vec{\delta}_{q-r} \in U \cap W$,

Vì vế trái là một vectơ trong U còn vế phải là một vectơ trong W. Cơ sở của $U \cap W$ là hệ (1) nên có thể viết

$$-z_1\delta_1 - \ldots - z_q\delta_q = t_1\xi_1 + \ldots + t_r\xi_r.$$

hay

$$t_1\vec{\xi}_1 + \ldots + t_r\vec{\xi}_r + z_1\vec{\delta}_1 + \ldots + z_{q-r}\vec{\delta}_{q-r} = \vec{0}.$$

Vì hệ (3) độc lập tuyến tính nên từ đẳng thức này suy ra

$$t_1 = \ldots = t_r = z_1 = \ldots = z_{q-r} = 0; \qquad (6)$$

Thay các giá trị này của z_i vào đẳng thức (5) ta được

$$x_1\vec{\varepsilon}_1 + \ldots + x_{p-r}\vec{\varepsilon}_{p-r} + y_1\vec{\xi}_1 + \ldots + y_r\vec{\xi}_r = \vec{0}.$$

Vì hệ (2) độc lập tuyến tính nên

$$x_1 = \ldots = x_p = y_1 = \ldots = y_r = 0 \qquad (7)$$

Từ (6) và (7) suy ra hệ (4) độc lập tuyến tính. Do đó nó là một cơ sở ủa U+W. Vậy

$$\dim(u + W) = p - r + r + q - r : p + q - r$$

$$= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W). \square$$

§6. TỌA ĐỘ CỦA MỘT VECTƠ

Vì cơ sở là một hệ sinh độc lập tuyến tính của không gian vectơ nên thời vectơ của không gian đều có cách biểu thị tuyến tính duy nhất qua cơ sở đó.

6.1. Định nghĩa

Giả sử $(\varepsilon) = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \dots, \vec{\varepsilon}_n\}$ *là một cơ sở của* ***K****-không gian vectơ V,* $\vec{\alpha} \in V$ *có cách biểu diễn duy nhất dưới dạng*

$$\vec{\alpha} = a_1\vec{\varepsilon}_1 + a_2\vec{\varepsilon}_2 + \dots + a_n\vec{\varepsilon}_n,\ a_i \in \mathbf{K},\ \text{với mọi}\ i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Bộ n số số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ *được gọi là các tọa độ của* $\vec{\alpha}$ *đối với cơ sở* (ε).

Thay cho lời nói $\vec{\alpha}$ *có các tọa độ là* $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ *ta viết:* $\vec{\alpha}\,(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Ví dụ. Trong ví dụ 2, mục 4, 1 ta đã biết hệ $(\xi) = \{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3)$, trong đó $\vec{\xi}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{\xi}_2 = (0, 1, 1)$, $\vec{\xi}_3(1, 0, 1)$ là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$. Vectơ $\vec{\alpha} = 3\vec{\xi}_1 - 5\vec{\xi}_2 + \vec{\xi}_3$ có tọa độ đối với cơ sở (ξ) là $(3,- 5, 1)$.

Cũng như đối với các vectơ hình học đã biết ở trường trung học, có một mối liên quan giữa toạ độ và các phép toán trên các vectơ.

Định lí. *Nếu* $k \in K$, $\vec{\alpha}$ *và* $\vec{\beta}$ *có tọa độ lần lượt là* $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ *và* $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ *thì:*

1) Toạ độ của $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ *là* $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$*;*

2) Toạ độ của $k\vec{\alpha}$ *là* $(ka_1, ka_2, \dots, ka_n)$.

Chứng minh. Xin dành cho bạn đọc. □

Bây giờ ta thử tìm toạ độ của $\vec{\alpha} = 3\vec{\xi}_1 - 5\vec{\xi}_2 + \vec{\xi}_3$ trong ví dụ trên đây đối với cơ sở chính tắc, tức là cơ sở $(\varepsilon) = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_n\}$ trong đó $\vec{\varepsilon}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{\varepsilon}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{\varepsilon}_3 = (0, 0, 1)$. Ta có:

$$\vec{\alpha} = 3\vec{\xi}_1 - 5\vec{\xi}_2 + \vec{\xi}_3 = 3(1, 1, 0) - 5(0, 1, 1) + (1, 0, 1)$$
$$= (3 + 1, 3 - 5, -5 + 1) = (4, -2, -4)$$
$$= 4(1, 0, 0) - 2(0, 1, 0) - 4(0, 0, 1) = 4\vec{\varepsilon}_1 - 2\vec{\varepsilon}_2 - 4\vec{\varepsilon}_3.$$

Vậy toạ độ của $\vec{\alpha}$ đối với cơ sở (ε) là (4, - 2, - 4).

Điều này chứng tỏ khi đổi cơ sở thì toạ độ của một vectơ thay đổi.

Ta hãy xem toạ độ của cùng một vectơ trong hai cơ sở khác nhau có quan hệ với nhau như thế nào. Trước hết, mối liên quan giữa hai cơ sở được diễn đạt bởi định nghĩa sau.

6.2. Ma trận chuyển

Định nghĩa. *Giả sử* $(\varepsilon) = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_n\}$ *và* $\{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \ldots, \vec{\xi}_3\}$ *là hai cơ sở của* ***K****-không gian vectơ* ***V****,*

$$\vec{\xi}_1 = t_{11}\vec{\varepsilon}_1 + t_{21}\vec{\varepsilon}_2 + \ldots + t_{n1}\vec{\varepsilon}_n$$
$$\vec{\xi}_2 = t_{12}\vec{\varepsilon}_1 + t_{22}\vec{\varepsilon}_2 + \ldots + t_{n2}\vec{\varepsilon}_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\vec{\xi}_n = t_{1n}\vec{\varepsilon}_1 + t_{2n}\vec{\varepsilon}_2 + \ldots + t_{nn}\vec{\varepsilon}_n$$

(vì mỗi vectơ $\vec{\xi}_i$ *đều biểu thị tuyến tính qua cơ sở* (ε)*).*

Ta gọi ma trận vuông cấp n

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \ldots\ldots\ldots\ldots t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} \ldots\ldots\ldots\ldots t_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_{n1} & t_{n2} \ldots\ldots\ldots\ldots t_{nn} \end{pmatrix}$$

là ma trận chuyển từ cơ sở (ε) *sang cơ sở* (ξ)*.*

Ví dụ. Xét không gian vectơ $\mathbf{R}^3$ với hai cơ sở

(ε) = $\{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_n\}$ trong đó $\vec{\varepsilon}_1$ (1, 0, 0), $\vec{\varepsilon}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{\varepsilon}_3 = (0, 0, 1)$, *và* $\{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3\}$ trong đó $\vec{\xi}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{\xi}_2 = (0, 1, 1)$, $\vec{\xi}_3 = (1, 0, 1)$, (Xem ví dụ mục 6.1).

a) Tìm ma trận chuyển từ cơ sở (ε) sang cơ sở (ξ)

b) Tìm ma trận chuyển từ cơ sở (ξ) sang cơ sở (ε).

Giải

a) Ta có:

$$\vec{\xi}_1 = (1, 0, 0) + (0, 1, 0) = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2$$
$$\vec{\xi}_2 = (0, 1, 0) + (0, 0, 1) = \vec{\varepsilon}_2 + \vec{\varepsilon}_3$$
$$\vec{\xi}_3 = (1, 0, 0) + (0, 0, 1) = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_3.$$

Vậy ma trận chuyển từ cơ sở (ε) sang cơ sở (ξ) là

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Ta phải biểu diễn các vectơ $\vec{\varepsilon}_i$ qua cơ sở (ξ). Cụ thể, ta viết:

$$(1, 0, 0) = \vec{\varepsilon}_1 = b_{11}\vec{\xi}_1 + b_{21}\vec{\xi}_2 + b_{31}\vec{\xi}_3$$

$$(0, 1, 0) = \vec{\varepsilon}_2 = b_{12}\vec{\xi}_1 + b_{22}\vec{\xi}_2 + b_{32}\vec{\xi}_3 \qquad (2)$$
$$(0, 0, 1) = \vec{\varepsilon}_3 = b_{13}\vec{\xi}_1 + b_{23}\vec{\xi}_2 + b_{33}\vec{\xi}_3 \qquad (3)$$

Đẳng thức (1) cho ta

$$(1, 0, 0) = b_{11}(1, 1, 0) + b_{21}(0, 1, 1) + b_{31}(1, 0, 1)$$
$$= (b_{11} + b_{31}, b_{11} + b_{21}, b_{21} + b_{31}).$$

Suy ra:

$$\begin{cases} b_{11} + \phantom{b_{21} +} b_{31} = 1 \\ b_{11} + b_{21} \phantom{+ b_{31}} = 0 \\ \phantom{b_{11} +} b_{21} + b_{31} = 0 \end{cases}$$

Giải hệ này ta tìm được:

$$b_{11} = \frac{1}{2},\ b_{21} = -\frac{1}{2},\ b_{31} = \frac{1}{2}.$$

Đẳng thức (2) cho ta một hệ phương trình; giải nó ta tìm được:

$$b_{12} = \frac{1}{2} = b_{22},\ b_{32} = -\frac{1}{2};$$

Tương tự, nhờ đẳng thức (3) ta tìm được:

$$b_{13} = -\frac{1}{2},\ b_{23} = \frac{1}{2} = b_{33}.$$

Vậy ma trận chuyển từ cơ sở (ξ) sang cơ sở (ε) là

$$T' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Bây giờ ta sẽ tìm ra công thức liên hệ giữa các tọa độ của cùng một vectơ trong hai cơ sở khác nhau.

6.3. Liên hệ giữa các tọa độ của một vectơ đối với hai cơ sở khác nhau

Định lí. *Giả sử* $(\varepsilon) = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_n\}$ *và* $(\xi) = \{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \ldots, \vec{\xi}_n\}$ *là hai cơ sở của* ***K****-không gian vectơ V,* $T = (t_{ij})$ *là ma trận chuyển từ cơ sở* (ε) *sang cơ sở* (ξ), $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *lần lượt là tọa độ của vectơ* $\vec{\alpha}$ *đối với cơ sở* (ε) *và cơ sở* (ξ)*. Thế thì:*

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} y_j \text{, với mọi } i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Chứng minh. Theo giả thiết ta có:

$$\begin{aligned} x_1\vec{\varepsilon}_1 + x_2\vec{\varepsilon}_2 + \ldots + x_n\vec{\varepsilon}_n = \vec{\alpha} &= y_1\vec{\xi}_1 + y_2\vec{\xi}_2 + \ldots + y_n\vec{\xi}_n \\ &= y_1(t_{11}\vec{\varepsilon}_1 + t_{21}\vec{\varepsilon}_2 + \ldots + t_{n1}\vec{\varepsilon}_n) \\ &\quad + y_2(t_{12}\vec{\varepsilon}_1 + t_{22}\vec{\varepsilon}_2 + \ldots + t_{n2}\vec{\varepsilon}_n) \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &\quad + y_n(t_{1n}\vec{\varepsilon}_1 + t_{2n}\vec{\varepsilon}_2 + \ldots + t_{nn}\vec{\varepsilon}_n) \\ &= (t_{11}y_1 + t_{12}y_2 + \ldots + t_{1n}y_n)\ \vec{\varepsilon}_1 \\ &\quad + (t_{21}y_1 + t_{22}y_2 + \ldots + t_{2n}y_n)\ \vec{\varepsilon}_2 \\ &\quad + \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad + (t_{n1}y_1 + t_{n2}y_2 + \ldots + t_{nn}y_n)\ \vec{\varepsilon}_n. \end{aligned}$$

Từ sự biểu thị tuyến tính duy nhất của $\vec{\alpha}$ qua cơ sở (ε) suy ra:

$$x_1 = t_{11}y_1 + t_{12}y_2 + \ldots + t_{1n}y_n$$
$$x_2 = t_{21}y_1 + t_{22}y_2 + \ldots + t_{2n}y_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = t_{n1}y_1 + t_{n2}y_2 + \ldots + t_{nn}y_n$$

Tổng quát: $x_i = t_{i1}y_1 + t_{12}y_2 + \ldots + t_{1n}y_n = \sum_{j=1}^{n} t_{ij}y_j$, Với mọi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. □

Ví dụ. Xét không gian $\mathbf{R}^3$ với hai cơ sở (ε) và (ξ) trong ví dụ ở mục 6.2. Cho $\vec{\beta} = (-5, 0, 1) \in \mathbf{R}^3$. Hãy tìm tọa độ của vectơ $\vec{\beta} \in \mathbf{R}^3$ đối với cơ sở (ξ).

Giải

Từ ví dụ mục 6.2, ta biết rằng ma trận chuyển từ cơ sở (ξ) sang cơ sở (ε) là:

$$T' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Gọi tọa độ của $\vec{\beta}$ đối với cơ sở (ξ) là (x_1, x_2, x_3). Theo giả thiết tọa độ của $\vec{\beta}$ đối với cơ sở (ε) là $y_1 = -5$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$. Theo công thức đổi tọa độ ta có:

$$x_1 = \frac{1}{2}(-5) + \frac{1}{2}.0 + (-\frac{1}{2}).1 = -3$$
$$x_2 = (-\frac{1}{2})(-5) + \frac{1}{2}.0 + \frac{1}{2}.1 = 3$$
$$x_3 = \frac{1}{2}.(-5) + (-\frac{1}{2}).0 + \frac{1}{2}.1 = -2.$$

§7. HẠNG CỦA HỆ VECTƠ- HẠNG CỦA MA TRẬN

Để nghiên cứu các chương sau ta cần biết cách tìm cơ sở của những không gian con sinh bởi một hệ vectơ của một không gian vectơ. Tuy về phương diện lí thuyết, định lí 4.6 cho thấy từ một hệ sinh của một không gian vectơ có thể tìm được một cơ sở của nó. Song khó có thể dùng nó vào thực hành. Trong mục này ta sẽ xét một kĩ thuật tìm cơ sở như thế. Trước hết ta hãy định nghĩa một khái niệm để tiện diễn đạt. Đó là hạng của hệ vectơ. Khái niệm này cũng có ứng dụng trong nhiều vấn đề khác.

7.1. Hạng của hệ vectơ

Định nghĩa. *Số chiều của không gian vectơ sinh bởi hệ vectơ $\mathcal{A}$ được gọi là hạng của hệ $\mathcal{A}$ Kí hiệu hạng ($\mathcal{A}$).*

Hệ quả. *Hệ $\mathcal{A}$ gồm m vectơ là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi hạng ($\mathcal{A}$) = m.*

Chứng minh. Xin dành cho bạn đọc. □

Ví dụ. Xét ví dụ 2, mục 2.5. Hệ vectơ $\mathcal{A} = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2\}$ độc lập tuyến tính nên nó là cơ sở của không gian vectơ W sinh bởi $\mathcal{A}$. Theo định nghĩa 7.1, hạng ($\mathcal{A}$) = dimW = 2. Hệ $\mathcal{B} = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\delta}\}$ cũng sinh ra không gian vectơ W. Do đó hạng($\mathcal{B}$) = dimW = 2.

Có thể giải thích vì sao mà hạng = hạng hay không? Hãy xem mệnh đề dưới đây.

Mệnh đề. *Nếu thêm vào một hệ vectơ một tổ hợp tuyến tính của hệ thì hạng của hệ mới bằng hạng của hệ đã cho.*

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{A} = \{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots \vec{\alpha}_m\}$, hạng($\mathcal{A}$) = n. Thêm vào $\mathcal{A}$ vectơ

$$\vec{\beta} = b_1\vec{\alpha}_1 + b_2\vec{\alpha}_2 + \ldots + b_m\vec{\alpha}_m,$$

ta được hệ $\mathcal{B} = \{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_m, \vec{\beta}\}$.

Gọi W, W' lần lượt là những không gian sinh bởi hệ $\mathcal{A}$ và hệ $\mathcal{B}$. Vì $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ nên W ⊂ W'. Ngược lại, giả sử W'. Khi đó $\vec{\alpha}$ là một tổ hợp tuyến tính của hệ $\mathcal{B}$, chẳng hạn,

$$\vec{\alpha} = r_1\vec{\alpha}_1 + ... + r_m\vec{\alpha}_m + r\vec{\beta} = r_1\vec{\alpha}_1 + ... + r_m\vec{\alpha}_m + r(b_1\vec{\alpha}_1 + b_2\vec{\alpha}_2 + ... + b_m\vec{\alpha}_m)$$

$$= (r_1 + rb_1)\vec{\alpha}_1 + ... + (r_m + rb_m)\ \vec{\alpha}_m \in W.$$

Do đó W' ⊂ W. Vậy W' = W. Suy ra hạng (B) = dim(W') - dim(W) - hạng(A). □

7.2. Hạng của ma trận

Định nghĩa. 1) *Cho ma trận*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots\ldots a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Coi các thành phần trong một dòng của ma trận A như các tọa độ của một vectơ trong không gian vectơ V (n chiều) đối với một cơ sở nào đó. Ta gọi hệ vectơ $\mathcal{A}$ gồm :

$$\begin{cases} \vec{\alpha}_1\ (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}) \\ \vec{\alpha}_2\ (a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{\alpha}_m\ (a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn}) \end{cases} \qquad (2)$$

là hệ vectơ dòng của ma trận A.

Hệ vectơ cột của ma trận A được định nghĩa tương tự.

Ngược lại, ma trận A được gọi là ma trận các tọa độ của hệ vectơ $\mathcal{A}$ (đối với cơ sở đã cho).

2) Ta gọi hạng của hệ vectơ dòng của ma trận A là hạng của ma trận A. Kí hiệu hạng(A).

Ví dụ 1. Ma trận kiểu (m, n): $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ có hạng(O) = 0.

Ví dụ 2. Cho các ma trận $A = (1 \quad 0 \quad -2)$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 6 & 0 & -12 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

hạng (A) = 1 vì hệ gồm một vectơ $\vec{\alpha} = (1, 0, -2) \neq \vec{0}$ độc lập tuyến tính.

Vì dòng thứ hai của B là tổ hợp tuyến tính của dòng thứ nhất nét theo mệnh đề mục 7.1, hạng(B) = hạng(A) = 1.

Đối với ma trận C ta thấy hệ vectơ dòng của nó gồm ba vectơ:

$$\begin{cases} \vec{\alpha}_1 = (5) \\ \vec{\alpha}_2 = (0) \\ \vec{\alpha}_3 = (-2). \end{cases}$$

Chúng đều biểu thị tuyến tính được qua $\vec{\alpha}_1$: $\vec{\alpha}_2 = 0\vec{\alpha}_1$, $\vec{\alpha}_3 = -\frac{2}{5}\vec{\alpha}_1$. Do đó không gian sinh bởi ba vectơ này có cơ sở là $\{\vec{\alpha}_1\}$. Vậy hạng(C) = 1.

Theo định nghĩa hạng của ma trận thì tìm hạng của ma trận cũng là tìm hạng của hệ vectơ dòng tương ứng và do đó biết hạng của ma trận sẽ suy ra cơ sở và số chiều của không gian vectơ sinh bởi hệ vectơ dòng của ma trận ấy.

Với ma trận $A = (a_{ij})$ kiểu (m, n), nêu chọn r dòng, r cột thì các thành phần nằm ở giao của r dòng r cột ấy lập thành một định thức cấp r. Ta gọi nó là đinh thức con cấp r của A.

Định lí. *Hạng của ma trận A bằng cấp cao nhất của các định thức con khác 0 của A.*

Chứng minh. Giả sử ma trận $A = (a_{ij})_{(m.n)}$ và cấp cao nhất của các định thức con khác 0 của nó bằng r. Có thể giả thiết rằng có một định thức con khác 0, cấp r nằm ở r dòng đầu, chẳng hạn:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0,$$

(Thật vậy, ta có thể đổi chỗ các dòng để đạt được điều đó và phép đổi chỗ như thế không làm thay đổi hạng của hệ vectơ dòng). Ta sẽ chứng minh rằng hệ gồm r vectơ dòng đầu

$$\begin{cases} \vec{\alpha}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \\ \vec{\alpha}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) \\ \dots\dots\dots\dots, \\ \vec{\alpha}_r = (a_{r1}, a_{r2}, \dots, a_{rn}) \end{cases} \qquad (2)$$

là cơ sở của không gian vectơ sinh bởi m vectơ dòng của ma trận A. Trước hết, hệ vectơ (2) độc lập tuyến tính. Thật vậy, giả sử

$$x_1\vec{\alpha}_1 + x_2\vec{\alpha}_2 + \dots + x_r\vec{\alpha}_r = \vec{0}$$

hay $x_1(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) + x_2(a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) + \dots + x_r(a_{r1}, a_{r2}, \dots, a_{rn}) = (0, 0, \dots, 0)$.

Áp dụng các phép toán trong không gian vectơ $\mathbf{K}^n$, ta được:

$$(x_1a_{11} + x_2a_{21} + \dots + x_ra_{r1}, x_1a_{12} + x_2a_{22} + \dots + x_ra_{n2}, \dots,$$
$$x_1a_{1n} + x_2a_{2n} + \dots + x_ra_{rn}) = (0, 0, \dots, 0).$$

Suy ra:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{r1}x_r = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{r2}x_r = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1r}x_1 + a_{2r}x_2 + \dots + a_{ar}x_r = 0 \end{cases}.$$

Rõ ràng (0, 0,..., 0) là một nghệm của hệ này. Vì

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \ldots\ldots\ldots a_{r1} \\ a_{12} & a_{22} \ldots\ldots\ldots a_{r2} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{1r} & a_{2r} \ldots\ldots\ldots a_{rr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots\ldots a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots\ldots a_{2r} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{r1} & a_{r2} \ldots\ldots\ldots a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

nên đây là một hệ Cramer. Do đó (0, 0,..., 0) là nghiệm duy nhất; nghĩa là bắt buộc $x_1 = x_2 = \ldots = x_i = 0$.

Điều này chứng tỏ hệ (2) độc lập tuyến tính. Bây giờ ta chứng minh rằng mọi vectơ dòng còn lại của ma trận A biểu thị tuyến tính được qua hệ (2); tức là phải chứng minh rằng với mỗi

$\vec{\alpha}_i$, $i \in \{r + 1, r + 2, \ldots, m\}$ đều tồn tại r số $k_1, k_2, \ldots, k_r$ thuộc **K** sao cho

$$\vec{\alpha}_i = k_1\vec{\alpha}_1 + k_2\vec{\alpha}_2 + \ldots + k_r\vec{\alpha}_r \tag{3}$$

$$(a_{i1}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{in}) = k_1(a_{11}, \ldots, a_{1j}, \ldots, a_{1n}) + k_2(a_{21}, \ldots, a_{2j}, \ldots, a_{2n}) + \ldots$$
$$+ k_r(a_{r1}, \ldots, a_{rj}, \ldots, a_{rn})$$
$$= (k_1a_{11} + k_2a_{21} + \ldots + k_ra_{r1}, \ldots, k_1a_{1j} + k_2a_{2j} + \ldots$$
$$+ k_ra_{rj}, \ldots, k_1a_{1n} + \ldots + k_2a_{2n} + \ldots + k_ra_{rn}).$$

Muốn vậy, phải chứng minh rằng:

$$a_{ij} = k_1a_{1j} + k_2a_{2j} + \ldots + k_ra_{rj}, \text{ với mọi } j \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{4}$$

Giả sử i cố định. Đối với a_{ij} ta xét định thức

$$D_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots\ldots\ldots a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} \ldots\ldots\ldots a_{2r} & a_{2j} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{r1} \ldots\ldots\ldots a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} \ldots\ldots\ldots a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix}.$$

Đây là một định thức con cấp r + 1 của ma trận A nên theo giả thiết nó bằng 0. Khai triển nó theo cột cuối ta được:

$$a_{1j}A_1 + a_{2j}A_2 + \ldots + a_{rj}A_r + a_{ij}D = 0,$$

trong đó A_s là phần bù đại số của thành phần ai trong định thức D_{ij}, với mọi $s \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Vì $D \neq 0$ nên

$$a_{ij} = -\frac{A_1}{D}a_{1j} - \frac{A_2}{D}a_{2j} - \ldots - \frac{A_r}{D}a_{rj}.$$

Khi i cố định, j thay đổi, ma trận

$$\begin{pmatrix} a_{11} \cdots\cdots a_{1r} \\ a_{21} \cdots\cdots a_{2r} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1} \cdots\cdots a_{rr} \\ a_{i1} \cdots\cdots a_{ir} \end{pmatrix}$$

không đổi nên các A_s không đổi vì chúng là những định thức con cấp r của ma trận này. Vì thế đặt $k_s = -\dfrac{A_s}{D}$, với mọi $s \in \{1, 2,..., r\}$, với i cố định đã chọn, ta được

$$a_{ij} = k_1a_{1j} + k_2a_{2j} + \ldots + k_ra_{rj}, \text{ với mọi } j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Do đó đẳng thức (3) được chứng minh.

Vậy hệ vectơ (2) là một cơ sở của không gian vectơ sinh bởi m vectơ dòng của ma trận A. Suy ra hạng(A) = r. □

Chú ý. Trong phép chứng minh định lí trên ta thấy nếu định thức con cấp cao nhất khác 0 của ma trận A nằm ở r dòng nào thì r vectơ dòng ấy là cơ sở của không gian vectơ sinh bởi m vectơ dòng của ma trận A.

Ví dụ: Tìm cơ sở của không gian vectơ sinh bởi hệ vectơ gồm các vectơ trong $\mathbf{R}^3$:

$$\vec{\alpha}_1 = (1, 5, -3), \quad \vec{\alpha}_2 = (4, 20, -12), \quad \vec{\alpha}_3 = (2, -1, 5).$$

Giải

Gọi A là ma trận mà các vectơ dòng là các vectơ đã cho:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 4 & 20 & -12 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Nhận thấy $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ và $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 4 & 20 & -12 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0.$

Như vậy $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ là định thức con cấp cao nhất khác 0 của ma trận A. Nó nằm ở dòng thứ nhất và thứ ba của ma trận A. Vậy hệ vectơ $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_3\}$ là cơ sở cần tìm.

Hệ quả 1. *Hệ m vectơ là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi ma trận các tọa độ của chúng có một đinh thức con khác 0, cấp m.*

Nói riêng, trong không gian vectơ n chiều, hệ n vectơ là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi định thức của ma trận các tọa độ của chúng khác 0.

Chứng minh. Xin dành cho bạn đọc.

Hệ quả 2. *Hạng của ma trận bằng hạng của hệ vectơ cột của nó.*

Chứng minh. Giả sử A = (a_{ij}) là ma trận kiểu (m, n). Xét ma trận chuyển vị t A. Hệ vectơ dòng của ^tA là hệ vectơ cột của A. Theo định lí trên, hạng(^tA) bằng cấp của định thức con cấp cao nhất khác 0 của ^tA. Nhưng mỗi định thức con của ^tA lại là chuyển vị của một định thức con của A và ngược lại. Mặt khác định thức của hai ma trận chuyển vị lẫn nhau bằng nhau. Do đó, |B| là một định thức con cấp cao nhất khác 0 của ^tA khi và chỉ khi |B'| là một định thức con cấp cao nhất khác 0 của A.

Vậy hạng (A) = hạng (^tA) = hạng (hệ vectơ dòng của ^tA) = hạng (hệ vectơ cột của A).

7.3. Cách tìm hạng của ma trận

Muốn tìm hạng của hệ vectơ ta tìm hạng của ma trận các tọa độ của hệ vectơ ấy.

Muốn tìm hạng của ma trận ta tìm định thức con cấp cao nhất khác 0 của ma trận ấy.

Để tìm định thức con cấp cao nhất khác 0 của ma trận A, không cần xét tất cả các định thức con của nó mà chỉ cần xuất phát từ một định thức con $D_1 \neq 0$ cấp s đã biết rồi xét các định thức con cấp s + 1 chứa D_1. Nếu tất cả các định thức con này đều bằng 0 thì D_1 là một định thức con cấp cao nhất khác 0; do đó hạng(A) = s. Nếu có một định thức $D_2 \neq 0$, cấp s + 1 thì tiếp tục xét các định thức cấp s + 2 chứa D_2. Cứ như thế cho tới khi tìm được một định thức $D \neq 0$, cấp r mà mọi định thức cấp r + 1 bao quanh nó đều bằng 0. Suy ra D là một định thức con cấp cao nhất khác 0 của ma trận A. Thật vậy, vì D nằm ở r dòng nào đó và mọi định thức con cấp r + 1 bao quanh D đều bằng 0 nên với lập luận như chứng minh của định lí, hệ r vectơ này là cơ sở của không gian vectơ W sinh bởi hệ vectơ dòng của ma trận A. Do đó dim(W) = r. Với mọi định thức con D' ≠ 0, cấp t, và Di nằm trong t dòng nào đó của A, thì hệ gồm t vectơ dòng này độc lập tuyến tính trong W. Vậy t ≤ dim(W) = r.

Áp dụng. Cho hệ vectơ $\mathcal{A}$ gồm:

$$\begin{cases} \vec{\alpha}_1 = (1, 2, 3, 4) \\ \vec{\alpha}_2 = (-1, 3, 0, 1) \\ \vec{\alpha}_3 = (2, 4, 1, 8) \\ \vec{\alpha}_4 = (1, 7, 6, 9) \\ \vec{\alpha}_5 = (0, 10, 1, 10) \end{cases}$$

a) Tìm hạng($\mathcal{A}$).

b) Tìm cơ sở của không gian vectơ sinh bởi $\mathcal{A}$.

Giải

a) Để tìm hạng của hệ vectơ, ta phải tìm hạng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & 7 & 6 & 9 \\ 0 & 10 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

Theo định lí, ta phải tìm định thức con cấp cao nhất khác 0 của A.

Xuất phát từ một định thức con khác 0 bất kì, chẳng hạn

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ta xét các định thức cấp 3 chứa D_2.

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -10 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -25 \neq 0.$$

Xét tiếp các định thức con cấp 4 chứa D_3. Chỉ còn hai định thức như thế, đó là:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -10 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & -20 & 1 & 8 \\ 10 & -20 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0 \text{ (vì cột 1 và cột 2 tỉ lệ);}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & 10 & 1 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -10 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & -20 & 1 & 8 \\ 10 & -20 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

Vậy hạng(A) = 3.

b) Vì D_3 nằm ở ba dòng đầu nên hệ vectơ $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3\}$ là một cơ sở cần tìm.

Cũng có thể có định thức cấp 3 khác chứa D_2 và khác 0, chẳng hạn,

$$D' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -28 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 1 \end{vmatrix} = -25 \neq 0.$$

Vậy hạng(A) = 3.

Vì D' nằm ở ba dòng: thứ nhất, thứ hai và thứ năm nên hệ vectơ $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3\}$ cũng là một cơ sở.

7.4. Tìm hạng của ma trận bằng các phép biến đổi sơ cấp

Ta cũng có thể dùng một số phép biến đổi trên ma trận để tìm hạng của ma trận.

Định nghĩa. *Các phép biến đổi sau đây được gọi là các phép biến đổi sơ cấp trên các ma trận:*

1) Đổi chỗ hai dòng (hai cột) cho nhau;

2) Nhân mỗi thành phần trong một dòng (cột) với cùng một số khác 0.

3) Nhân mỗi thành phần trong một dòng (cột) với cùng một số rồi cộng vào thành phần cùng cột (dòng) trong một dòng (cột) khác.

Định lí. *Nếu thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên một ma trận thì hạng của ma trận thu được bằng hạng của ma trận đã cho.*

Lạm dụng ngôn ngữ có thể nói: Các phép biến đổi sơ cấp không làm thay đổi hạng của một ma trận.

Chứng minh. Xin dành cho bạn đọc như một bài tập.

Ví dụ. Tìm hạng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -7 & 8 \\ -1 & 0 & 5 & -8 \\ 4 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Giải

• Đổi chỗ dòng thứ nhất và dòng thứ tư cho nhau:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ -1 & 0 & 5 & -8 \\ 4 & -2 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & -7 & 8 \end{pmatrix}.$$

• Cộng dòng thứ nhất vào dòng thứ hai; nhân dòng thứ nhất với - 4, rồi cộng vào dòng thứ ba; nhân dòng thứ nhất với - 3, rồi cộng vào dòng thứ tư. ta được:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & -2 & -10 & -28 \\ 0 & 2 & 2 & 29 \end{pmatrix}$$

• Đổi chỗ dòng thứ hai và dòng thứ tư cho nhau:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & 29 \\ 0 & -2 & -10 & -28 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

• Cộng dòng thứ hai vào dòng thứ ba:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & 29 \\ 0 & 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

• Cộng dòng thứ ba vào dòng thứ tư ta được ma trận:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & 29 \\ 0 & 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ma trận cuối cùng có định thức cấp ba:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = -16 \neq 0.$$

Đó là định thức con cấp cao nhất khác 0 của B. Vậy hạng(B) = 3. Vì các phép biến đổi sơ cấp không làm thay đổi hạng của ma trận nên hạng(A) = hạng(B) = 3.

Nếu dùng phép biến đổi sơ cấp để tìm cơ sở của không gian sinh bởi một hệ vectơ thì ta gặp một khó khăn nhỏ trong việc xác định những vectơ nào của hệ lập nên cơ sở, vì quá trình biến đổi ta đã đổi chỗ các dòng, các cột. Bạn đọc hãy thử tìm cách khắc phục khó khăn ấy.

7.5. Tìm cơ sở, số chiều của không gian sinh bởi một hệ vectơ bằng máy tính điện tử

Muốn tìm cơ sở và số chiều của không gian W sinh bởi một hệ vectơ $\mathcal{A}$ ta chỉ cần tìm định thức con cấp cao nhất khác 0 của ma trận A thiết lập bởi hệ vectơ đã cho. dimW = hạng(A) và định thức con cấp cao nhất khác 0 nằm ở những dòng nào thì những vectơ dòng ấy lập thành một cơ sở. Nhờ các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận, máy tính điện tử có thể thực hiện các phép biến đổi ấy để biến một ma trận đã cho thành một ma trận cùng hạng mà ta có thể nhận ra ngay định thức cấp cao nhất khác 0. Từ đó suy ra hạng của ma trận, cũng là hạng của hệ vectơ, và số chiều cần tìm.

Ví dụ 1. Tìm số chiều của không gian W sinh bởi hệ vectơ

$\mathcal{A} = \{\vec{\alpha}_1 = (-1, -1, 2, 0, -1),\ \vec{\alpha}_2 = (-2, 2, 0, 0, -2),\ \vec{\alpha}_3 = (2, -1, -1, 0, 1),$
$\vec{\alpha}_4 = (-1, -1, 1, 2, 2),\ \vec{\alpha}_5 = (1, -2, 2, -2, 0)\}.$

Giải

Để tạo ma trận đánh lệnh:

A = {{–1, –1, 2, 0, –1},{–2, 2, 0, 0, – 2}, {2, –1, –1, 0, 1},
{–1, –1, 1, 2, 2},{1, –1, –1, 0, 1}} ↵

Trên màn hình xuất hiện:

Out[1]: = {{11 -1, 2, 0, -1},{-2, 2, 0, 0, -2}, {2, -1, -1, 0, 1},
{-1, -1, 1, 2, 2},{1, - 1, -1, 0, 1}

Để lập ma trận thu gọn đánh tiếp lệnh:

RowReduce[A]//MatrixForm↵

Màn hình xuất hiện:

Out[2]:=MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Trong ma trận này ta thấy ngay định thức con cấp cao nhất khác 0 là:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Vậy hạng của ma trận bằng 4. Nhưng các phép biến đổi mà máy thực hiện cho ta một ma trận cùng hạng với ma trận A nên hạng = hạng($\mathcal{A}$) = 4 = dimW.

Để tìm cơ sở của không gian ta cần chú ý rằng khi biến đổi ma trận, theo chương trình Mathematica 4.0, máy tính có thể đổi chỗ các dòng, do đó thứ tự các dòng bị thay đổi. Vì thế nhìn vào ma trận thu được trên màn hình ta không biết được cơ sở gồm những vectơ nào trong các vectơ đã cho. Tuy nhiên máy tính không thay đổi cột. Vì vậy, ta hãy lấy các vectơ đã cho lập thành ma trận cột. Song, máy tính lại không tạo ma trận cột. Để tránh phải lập một ma trận cột ở giấy nháp, ta vẫn lập ma trận dòng rồi lấy ma trận chuyển vị.

Ví dụ 2. Tìm cơ sở của không gian W sinh bởi hệ vectơ:

$\mathcal{A} = \{ \vec{\alpha}_1 = (-2, 4, 2, 5),\ \vec{\alpha}_2 = (3, 1, 0, 7),\ \vec{\alpha}_3 = (-1, 9, 4, 17),$

$\vec{\alpha}(1, 0, 2, 1)\}.$

Giải

Đánh lệnh tạo ma trận:

A = {{-2, 4, 2, 5}, {3, 1, 0, 7},{-1, 9, 4, 17}, {1, 0, 2, 1}}↵

Màn hình xuất hiện:

Out[1] ={{-2, 4, 2, 5} {3, 1, 0, 7},{- 1, 9, 4, 17}, {1, 0, 2, 1}}.

Để lập ma trận chuyển vị, đánh lệnh:

tA = Transpose[A]↵

Màn hình xuất hiện:

Out[2]={{- 2, 3, - 1, 1},{4, 1, 9, 0),{2, 0, 4, 2},{5, 7, 17, 1}}

Để tìm ma trận thu gọn, đánh lệnh:

RowReduce[tA]//1MatnxForm↵

Màn hình xuất hiện:

Out[3]=MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ma trận này cho ta định thức con cấp cao nhất khác 0 là:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Vậy hạng của ma trận này bằng 3: hạng(^{t}A) = hạng(A) = hạng($\mathscr{A}$).

Định thức con cấp cao nhất khác 0 nằm ở các cột thứ nhất, thứ hai, thứ tư, do đó các vectơ cột $\vec{\alpha}_1$, $\vec{\alpha}_2$, $\vec{\alpha}_4$ lập thành một cơ sở.

TÓM TẮT

Chương II, trình bày khái niệm không gian vectơ trên một trường K. Đó là một tập hợp V mà mỗi phần tử gọi là một vectơ, trên đó có phép ông hai vectơ và phép nhân một vectơ với một số thuộc K thoả mãn 8 tiều kiện đã nêu ở định nghĩa 1.1.

Một tập con W của V được gọi là một không gian con của V nếu bản thân W cũng là một không gian đối với hai phép toán đã cho trong V. Muốn chứng minh W là không gian con của V chỉ cần chứng minh rằng:

1) $W \neq \emptyset$, với $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ thuộc W và $r \in K$, ta có $\vec{\alpha} + \vec{\beta} \in W$, $r\vec{\alpha} \in W$; hoặc 2) $W \neq \emptyset$, với $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ thuộc W và $r, s \in K$, ta có $r\vec{\alpha} + s\vec{\beta} \in W$. Tổng của m không gian con $W_1, W_2, ..., W_m$ của không gian vectơ V lại là một không gian con $W = \left\{\sum_{i=1}^{m} \vec{\alpha}_i \mid \vec{\alpha}_i \in W_i, i = 1, 2, ...m\right\}$.

Nếu $\mathcal{A} = \{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, ..., \vec{\alpha}_m\}$ là một hệ vectơ của **K**-không gian vectơ V thì

$$W = \{\sum_{i=1}^{m} k_i\vec{\alpha}_i \mid \vec{\alpha}_i \in \mathcal{A}, k_i \in \mathbf{K}, i = 1, 2, ..., m\}$$

là một không gian con của V và được gọi là không gian con sinh bởi hệ vectơ $\mathcal{A}$.

Hệ $\mathcal{A}$ được gọi là độc lập tuyến tính nếu từ đẳng thức $\sum_{i=1}^{m} k_i\vec{\alpha}_i = \vec{0}$ suy ra $k_1 = k_2 = ... = k_m = 0$.

Mỗi không gian vectơ đều có một hệ sinh độc lập tuyến tính, gọi là cơ sở của nó. Nếu $(\varepsilon) = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, ..., \vec{\varepsilon}_n\}$ là một cơ sở của **K**- không gian vectơ V thì mỗi $\vec{\alpha} \in V$ đều có cách biểu diễn duy nhất dưới dạng

$$\vec{\alpha} = a_1\vec{\varepsilon}_1 + a_2\vec{\varepsilon}_2 + ... + a_n\vec{\varepsilon}_n.$$

Các số a_i được gọi là tọa độ của $\vec{\alpha}$ đối với cơ sở (ε).

Một không gian vectơ có thể có nhiều cơ sở khác nhau. Tọa độ của một vectơ trong cơ sở này khác với tọa độ của nó đối với cơ sở kia. Biết tọa độ của $\vec{\alpha}$ đối với cơ sở (ξ) có thể tìm được tọa độ của nó đối với cơ sở (ε) nếu biết ma trận T chuyển từ cơ sở (ε) sang cơ sở (ξ). Đó là ma trận được thiết lập như sau:

Giả sử $\vec{\xi}_j = t_{1j}\vec{\varepsilon}_1 + t_{2j}\vec{\varepsilon}_2 + \ldots + t_{nj}\vec{\varepsilon}_n$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Thế thì

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \ldots\ldots\ldots\ldots t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} \ldots\ldots\ldots\ldots t_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_{n1} & t_{n2} \ldots\ldots\ldots\ldots t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Khi đó, nếu $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ lần lượt là tọa độ của $\vec{\alpha}$ đối với cơ sở (ε) và cơ sở (ξ) thì

$$x_i = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} y_j .$$

Khái niệm hạng của một hệ vectơ cũng như hạng của ma trận rất cần thiết cho các chương sau. Ta định nghĩa hạng của một hệ vectơ là số chiều của không gian sinh bởi hệ vectơ đó.

Với A là một ma trận, ta có: hạng(A) = hạng(hệ vectơ dòng) = hạng(hệ vectơ cột).

BÀI TẬP

§1. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT ĐƠN GIẢN

1. Dùng định nghĩa của không gian vectơ để chứng tỏ rằng:

a) Tập số thực **R** cùng với phép cộng hai số thực, phép nhân một số thực với một số hữu tỉ là một **Q**-không gian vectơ;

b) Tập số phức **C** cùng với phép cộng hai số phức và phép nhân một số phức với một số thực là một **R**-không gian vectơ;

c) Tập **Q**[x] các đa thức của ẩn x trên trường số hữu tỉ **Q** là một **Q**-không gian vectơ;

d) Với **Q** là tập số hữu tỉ, **R** là tập số thực, **V** = **Q** x **R**, cùng với phép cộng hai phần tử trong **V** và phép nhân một phần tử của V với một số hữu tỉ xác định như sau:

(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), r(a, b) = (ra, rb), a, c, r là những số hữu tỉ b, d là những số thực,là một **Q**-không gian vectơ.

e) Tập **Q** $(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in$ **Q**$\}$, với phép cộng và phép nhân với số hữu tỉ xác định như sau:

$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$,

$r(a + b\sqrt{2}) = ra + r\sqrt{2}$, $r \in$ **Q**

là một Q- không gian vectơ.

2. Các tập sau có phải là R-không gian vectơ không?

a) Tập **Q** với phép cộng hai số hữu tỉ và phép nhân một số hữu tỉ với một số thực;

b) Tập số phức **C** cùng với phép cộng hai số phức và phép nhân một số phức với một số thực;

c) Tập số nguyên **Z** cùng với phép cộng hai số nguyên và phép nhân một số nguyên với một số thực;

d) Tập **V** nói trong bài tập 1d) cùng với phép cộng và phép nhân với một số thực cũng xác định như thế,

e) Tập **D** các đa thức bậc n với hệ số thực.

3. Cho **G** là tập hợp các hàm số xác định trên tập số thực **R** có dạng f(x) = ax + b, trong đó a, b ∈ **R**, với phép cộng và phép nhân với một số hữu tỉ xác định như sau:

với f, g ∈ G, và f(x) = ax + b, g(x) = cx + d thì f + g là một hàm số xác định bởi

$$(f + g)(x) = (a + c)x + (b + d),$$

với f ∈ G và r ∈ **R**, và f(x) = ax + b thì rf là một hàm số xác định bởi (rf)(x) = rax + rb.

Chứng minh rằng G là một R- không gian vectơ.

4. Cho **F** là tập các hàm số của biến số x xác định trên **R** (và lấy các giá trị trong **R**) với phép cộng và phép nhân với một số thực xác định như sau:

với f, g ∈ F, f + g là một hàm số xác định bởi (f + g)(x) = f(x) + g(x);

với f ∈ F và r ∈ R, rf là một hàm số xác định bởi (rf)(x) = r.f(x). Chứng minh rằng F là một R-không gian vectơ.

5. Cho A và B là hai **K**-không gian vectơ. Trên V = A×B, xác định phép cộng và phép nhân với một số thuộc trường **K** như sau:

$(\vec{\alpha}_1, \vec{\beta}_1) + (\vec{\alpha}_2, \vec{\beta}_2) = (\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2, \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2)$, với mọi $\vec{\alpha}_1$, $\vec{\alpha}_2$ ∈ A, $\vec{\beta}_1$, $\vec{\beta}_2$ ∈ B; $k(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = (k\vec{\alpha}, k\vec{\beta})$, với mọi k ∈ **K**, mọi $\vec{\alpha}$ ∈ A, mọi $\vec{\beta}$ ∈ B.

Chứng minh rằng V là một **K**-không gian vectơ.

6. Trên tập A = {a} xác định phép cộng và phép nhân với một số thực như sau:

a + a = a, ra = a, với mọi r ∈ **R**.

Chứng minh rằng A là một **R**-không gian vectơ...

§2. KHÔNG GIAN CON

7. chứng minh rằng:

a) **Q** là một không gian con của **Q**-không gian vectơ R;

b) **R** là một không gian con của **Q**- không gian vectơ **C** (**C** là tập số phức);

c) $\mathbf{Q}\sqrt{2}$ là một không gian con của **Q**-không gian vectơ **R**, (xem bài tập 2f, **§1**) ;

d) **R**- không gian vectơ G là không gian con của **R**-không gian vectơ F, (với G và F là những không gian trong các bài tập 3 và 4, **§1**).

e) Tập D_n gồm đa thức 0 và các đa thức của **Q**[x] có bậc bé hơn hay bằng n, (n là số tự nhiên), là không gian con của **Q**-không gian vectơ **Q**[x].

8. Các tập hợp sau có phải là những không gian con của không gian vectơ R^3 không?

a) $E = \{(a_1, a_2, a_3 \mid a_i \in \mathbf{R}, i = 1, 3\}$;

b) $F = \{(a_1, a_2, - a_1) \mid a_i \in R, i = 1, 2\}$;

c) $B = \{(a_1, a_2, a_1a_2) \mid a_i \in R, i = 1, 2\}$;

d) $G = \{(a_1, a_2, a_1 + a_2) \mid a_i \in R, i - 1, 2\}$;

e) $C = \{(a_1, a_2, a_2) \mid a_i \in R, i = 1, 2\}$;

f) $H = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_1 + a_2 + a_3 = 0\ a_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, 3\}$;

9. Tập hợp các số nguyên có phải là một không gian con của không gian vectơ **R** trên trường **Q** hay không?

10. Tập hợp các đa thức bậc chẵn thuộc **R**[x] có phải là một không gian con của **R** [x] không?

11. Giả sử W là một không gian con của không gian vectơ $\mathbf{R}^4$, $(a_1, a_2, 4, a_4) \in W$. Chứng minh rằng với mỗi $r \in \mathbf{R}$ có một $(b_1, b_2, r, b_4) \in W$.

12. Giả sử U và W là hai không gian con của **K**-không gian vectơ V thoả mãn điều kiện $V = U \cup W$. Chứng minh rằng V = U hoặc V = W.

13. Giả sử $W_1, W_2,..., W_m$ là những không gian vectơ con của **K**-không gian vectơ V. Chứng minh rằng $U = \bigcap_{i=1}^{m} W_i$ là một không gian con của V.

14. Cho V là một R-không gian vectơ, $\vec{\alpha} \in V$. Chứng minh rằng tập $\mathbf{R}\vec{\alpha} = \{r\vec{\alpha} \mid r \in \mathbf{R}\}$ là một không gian con của V. $\mathbf{R}\vec{\alpha}$ được gọi là không gian sinh bởi vectơ $\vec{\alpha}$.

15. Giả sử U và W là hai không gian con của **R**-không gian vectơ V.

Chứng minh rằng U + W là giao của tất cả các không gian con của V chứa $U \cup W$.

§3. SỰ ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH-SỰ PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH

16. Cho ba vectơ $\vec{\alpha}_1 = (2, 0, 3)$, $\vec{\alpha}_2 = (0, 2, -1)$, $\vec{\alpha}_3 = (1, 2, 3)$ thuộc $\mathbf{R}^3$. Hãy biểu thị tuyến tính vectơ $\vec{\beta} = (5, - 2, 1)$ qua ba vectơ đã cho.

17. Cho ba vectơ $\vec{\alpha}_1 = x - 1$, $\vec{\alpha}_2 = 1$, $\vec{\alpha}_3 = x^2 + 1$ thuộc $\mathbf{R}[x]$. Hãy biểu thị tuyến tính vectơ $\vec{\beta} = x^2 - x + 2$ qua ba vectơ đã cho.

18. Xét xem các hệ vectơ sau trong $\mathbf{R}^3$ hệ nào độc lập tuyến tính?

a) $\vec{\alpha}_1 = (4, 0, 1)$, $\vec{\alpha}_2 = (2, 0, 1)$, $\vec{\alpha}_3 = (1, 2, 1)$;

b) $\vec{\alpha}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{\alpha}_2 = (4, 5, 6)$, $\vec{\alpha}_3 = (5, 7, 9)$;

c) $\vec{\alpha}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{\alpha}_2 = (4, 5, 6)$, $\vec{\alpha}_3 = (9, 8, 7)$;

d) $\vec{\alpha}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{\alpha}_2 = (4, 5, 6)$, $\vec{\alpha}_3 = (2, -1, 0)$.

19. Xét xem các hệ vectơ sau trong $\mathbf{R}[x]$ hệ nào độc lập tuyến tính:

a) $\vec{\alpha}_1 = 1$, $\vec{\alpha}_2 = x$, $\vec{\alpha}_3 = x^2$;

b) $\vec{\alpha}_1 = 1$, $\vec{\alpha}_2 = x + 1$, $\vec{\alpha}_3 = x^2 + 1$, $\vec{\alpha}_4 = 2x^2 + x + 3$.

20. Cho hai vectơ $\vec{\alpha} = (3, a + b, 5)$, $\vec{\beta} = (a + 1, b - 2, 10)$ trong $\mathbf{Q}^3$. Tìm a và b để hai vectơ này phụ thuộc tuyến tính.

21. Cho ba vectơ $\vec{\alpha}_1$, $\vec{\alpha}_2$, $\vec{\alpha}_3$ của **K**-không gian vectơ V, độc lập tuyến tính.

a) Chứng minh rằng ba vectơ $\vec{\beta}_1 = \vec{\alpha}_1$, $\vec{\beta}_2 = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2$, $\vec{\beta}_3 = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2$ $\vec{\alpha}_3$ độc lập tuyến tính.

bị Chứng minh rằng ba vectơ $\vec{\beta}_1 = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2$, $\vec{\beta}_2 = \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3$, $\vec{\beta}_3 = \vec{\alpha}_3 + \vec{\alpha}_1$ độc lập tuyến tính.

c) Ba vectơ $\vec{\beta} = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2$, $\vec{\beta}_2 = \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3$, $\vec{\beta}_4 = \vec{\alpha}_3 - \vec{\alpha}_1$ có độc lập tuyến tính không?

22. Chứng minh rằng:

Nếu hai vectơ $\vec{\alpha}_1$, $\vec{\alpha}_2$ của không gian vectơ V là độc lập tuyến tính và

$\mathbf{R}\vec{\alpha}_1$, $\mathbf{R}\vec{\alpha}_2$ là những không gian con của V lần lượt sinh bởi $\vec{\alpha}_1$, $\vec{\alpha}_2$ thì $\mathbf{R}\vec{\alpha}_1 \cap \mathbf{R}\vec{\alpha}_2 = \vec{0}$.

§4. CƠ SỞ CỦA KHÔNG GIAN VECTƠ

23. Cho $\{\vec{\varepsilon}_1,..., \vec{\varepsilon}_i,..., \vec{\varepsilon}_n\}$ là một cơ sở của không gian vectơ V. Chứng minh rằng:

a) Nếu thay $\vec{\varepsilon}_i$ bởi $r\vec{\varepsilon}_i$, (với $r \neq 0$) thì hệ vectơ thu được cũng là một cơ sở của V;

b) Nếu ta cộng vào $\vec{\varepsilon}_i$ một tổ hợp tuyến tính của các vectơ còn lại thì được một cơ sở mới của V.

24. Chứng minh rằng các hệ vectơ sau là những cơ sở của không gian vectơ $\mathbf{R}^3$:

a) $\vec{\varepsilon}_1 = (0, 0, 1)$, $\vec{\varepsilon}_2 = (0, 1, 1)$, $\vec{\varepsilon}_3 = (1, 1, 1)$;

b) $\vec{\xi}_1 = (4, 2, -1)$, $\vec{\xi}_2 = (0, 2, -1)$, $\vec{\xi}_3 = (-2, 0, 1)$

25. Các hệ vectơ sau có phải là cơ sở của không gian vectơ $\mathbf{R}^4$ không:

a) $\vec{\alpha}_1 = (1, 0, 3, 0)$, $\vec{\alpha}_2 = (2, 5, -1, 7)$, $\vec{\alpha}_3 = (0, 6, -1, 2)$, $\vec{\alpha}_3 = (1, 4, -2, 5)$;

b) $\vec{\beta}_1 = (2, 1, 0, 3)$, $\vec{\beta}_2 = (0, 2, 1, -4)$, $\vec{\beta}_3 = (-1, 2, 0, 1)$, $\vec{\beta}_3 = (0, 5, 3, -1)$.

26. chứng minh rằng nếu ba vectơ $\vec{\varepsilon}_1$, $\vec{\varepsilon}_2$, $\vec{\varepsilon}_3$ lập thành một cơ sở của **K**-không gian vectơ V thì ba vectơ $\vec{\xi}_1 = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2$, $\vec{\xi}_2 = \vec{\varepsilon}_2 + \vec{\varepsilon}_3$, $\vec{\xi}_3 = \vec{\varepsilon}_3 + \vec{\varepsilon}_1$ cũng lập thành một cơ sở của V.

27. Gọi P_3 là không gian vectơ gồm đa thức 0 và các đa thức $f(x) \in \mathbf{R}[x]$ có bậc $f(x) \leq 3$. Chứng minh rằng hai hệ vectơ:

$\vec{\varepsilon}_1 = 1$, $\vec{\varepsilon}_2 = x$, $\vec{\varepsilon}_3 = x^2$, $\vec{\varepsilon}_4 = x^3$;

$\vec{\xi}_1 = 1$, $\vec{\xi}_2 = x - 1$, $\vec{\xi}_3 = (x - 1)^2$, $\vec{\xi}_4 = (x - 1)^3$

là hai cơ sở của P_3.

28. Chứng minh rằng nếu $\{\vec{\varepsilon}_1,..., \vec{\varepsilon}_2,..., \vec{\varepsilon}_n\}$ là một cơ sở của R-không gian vectơ V thì $V = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{R}\vec{\varepsilon}_i$ và $\mathbf{R}\vec{\varepsilon}_i \cap \sum_{j\neq 1} \mathbf{R}\vec{\varepsilon}_j = \vec{0}$, với mọi i ∈

$\{1, 2,..., n\}$, trong đó $\sum_{j\neq 1} \mathbf{R}\vec{\varepsilon}_j$ là tổng của các $\mathbf{R}\vec{\varepsilon}_j$, (chẳng hạn, $\mathbf{R}\vec{\varepsilon}_3 \cap (\mathbf{R}\vec{\varepsilon}_1 + \mathbf{R}\vec{\varepsilon}_2 + \mathbf{R}\vec{\varepsilon}_4 +...+ \mathbf{R}\vec{\varepsilon}_n) = \{\vec{0}\}$. Người ta nói rằng V là tổng trực tiếp của các không gian con $\mathbf{R}\vec{\varepsilon}_i$, $i \in \{1, 2,..., n\}$.

§5. SỐ CHIỀU CỦA KHÔNG GIAN VECTƠ

29. Tìm số chiều của không gian vectơ V sinh bởi các hệ vectơ sau:

a) $\vec{\alpha}_1 = (3, -2, 0)$, $\vec{\alpha}_2 = (4, 0, -5)$, $\vec{\alpha}_3 = (-2, 4, -5)$;

b) $\vec{\beta}_1 = (4, -2, 1)$, $\vec{\beta}_2 = (0, 6, 5)$, $\vec{\beta}_3 = (1, 5, -7)$

c) $\vec{\gamma}_1 = (3, -5, 2)$, $\vec{\gamma}_2 = (-1, 4, 0)$, $\vec{\gamma}_3 = (2, -1, 2)$.

30. Giả sử U, W là hai không gian con của không gian vectơ V và V = U + W. Chứng minh rằng dimV = dimU + dimW khi và chỉ khi $U \cap W = \{\vec{0}\}$

31. Giả sử U, W là hai không gian con thực sự của không gian vectơ V, $U \neq W$.

a) Nếu dimV = 3, dimU = dimW = 2 thì dim$(U \cap W)$ bằng bao nhiêu?

b) nếu dimV = 6, dimU = dimW = 4 thì dim$(U \cap W)$ có thể bằng bao nhiêu?

32. Trong $\mathbf{R}^4$, không gian con U sinh bởi hai vectơ $\vec{\alpha}_1 = (-1, 1, 1, 1)$, $\vec{\alpha}_2 = (1, 2, 1, 0)$, không gian con W sinh bởi hai vectơ $\vec{\beta}_1 = (2, -1, 0, 1)$, $\vec{\beta}_2 = (0, -5, 6, 0)$. Tìm dim(U + W) và dim$(U \cap W)$.

33. Cho hệ vectơ $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_4\}$ là một cơ sở của không gian vectơ V. U là không gian con sinh bởi $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3,\}$, W là không gian con sinh bởi $\{\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_4,\}$.

a) chứng minh rằng $\{\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3\}$ là một cơ sở của $U \cap W$.

b) Tìm cơ sở và số chiều của U + W.

§6. TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ

34. Tìm tọa độ của các vectơ sau đối với cơ sở $\{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3, \vec{\varepsilon}_4\}$:

$$\vec{\alpha} = 3\vec{\varepsilon}_1 - 5\vec{\varepsilon}_2 + 7\vec{\varepsilon}_3 + 2\vec{\varepsilon}_4;\ \ \vec{\beta} = -9\vec{\varepsilon}_1 - 4\vec{\varepsilon}_3 - 5\vec{\varepsilon}_4;$$
$$\vec{\gamma} = 12\vec{\varepsilon}_2 - 8\vec{\varepsilon}_3 + \vec{\varepsilon}_4;\ \ \vec{\delta} = 5\vec{\varepsilon}_3.$$

35. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{\alpha} = (5, -2, 4, 1)$ đối với cơ sở:

a) $\vec{\varepsilon}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{\varepsilon}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\vec{\varepsilon}_3 = (0, 0, 1, 0)$, $\vec{\varepsilon}_4 = (0, 0, 0, 1)$;

b) $\vec{\xi}_1 = (0, 0, 0, 1)$, $\vec{\xi}_2 = (0, 0, 1, 0)$, $\vec{\xi}_3 = (0, 1, 0, 0)$, $\vec{\xi}_4 = (1, 0, 0, 0)$.

36. Biết tọa độ của các vectơ đối với một cơ sở (ε) nào đó như sau:

$\vec{\alpha}(0, -5, 4, 1)$, $\vec{\beta}\ (2, 7, 0, 9)$, $\vec{\gamma}(4, 0, 1, 2)$.

Tìm tọa độ của các vectơ sau đối với cơ sở (ε):

$\vec{\eta} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta} + 5\vec{\gamma}$, $\vec{\lambda} = -\vec{\alpha} + 4\vec{\beta} + 2\vec{\gamma}$, $\vec{\mu} = 4\vec{\alpha} - 7\vec{\beta} + 6\vec{\gamma}$.

37. Gọi P_3 là không gian vectơ gồm đa thức 0 và các đa thức $f(x) \in$ **R**[x] có bậc $f(x) \leq 3$.

a) Chứng minh rằng: (ε) : $\vec{\varepsilon}_1 = 1$, $\vec{\varepsilon}_2 = x$, $\vec{\varepsilon}_3 = x^2$, $\vec{\varepsilon}_4 = x^3$ và

(ξ): $\vec{\xi}_1 = 1$, $\vec{\xi}_2 = x - 1$, $\vec{\xi}_3 = (x-1)^2$, $\vec{\xi}_4 = (x-1)^3$

là hai cơ sở của không gian P_3.

b) Tìm ma trận chuyển từ cơ sở (ε) sang cơ sở (ξ).

c) Tìm tọa độ của các vectơ $f(x) = 2x^3 - x + 5$ đối với cơ sở (ξ).

§5. SỐ CHIỀU CỦA KHÔNG GIAN VECTƠ

29. Tìm số chiều của không gian vectơ V sinh bởi các hệ vectơ sau:

a) $\vec{\alpha}_1 = (3, -2, 0)$, $\vec{\alpha}_2 = (4, 0, -5)$, $\vec{\alpha}_3 = (-2, 4, -5)$;

b) $\vec{\beta}_1 = (4, -2, 1)$, $\vec{\beta}_2 = (0, 6, 5)$, $\vec{\beta}_3 = (1, 5, -7)$

c) $\vec{\gamma}_1 = (3, -5, 2)$, $\vec{\gamma}_2 = (-1, 4, 0)$, $\vec{\gamma}_3 = (2, -1, 2)$.

30. Giả sử U, W là hai không gian con của không gian vectơ V và V = U + W. Chứng minh rằng dimV = dimU + dimW khi và chỉ khi $U \cap W = \{\vec{0}\}$.

31. Giả sử U, W là hai không gian con thực sự của không gian vect(V, $U \neq W$.

a) Nếu dimV = 3, dimU = dimW = 2 thì dim(U∩W) bằng bao nhiêu?

b) Nếu dimV = 6, dimU = dimW = 4 thì dim(U∩W) có thể bằng bao nhiêu?

32. Trong $\mathbf{R}^4$, không gian con U sinh bởi hai vectơ $\vec{\alpha}_1 = (1, 1, 1, 1)$ $\vec{\alpha}_2 = (1, 2, 1, 0)$, không gian con W sinh bởi hai vectơ $\vec{\beta}_1$ (2, -1, 0, 1) $\vec{\beta}_2$ = (0, - 5, 6, 0). Tìm dim(U + W) và dim(U → W).

33. Cho hệ vectơ $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_4\}$ là một cơ sở của không gian vectơ V U là không gian con sinh bởi $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3\}$, W là không gian con sâu bởi $\{\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_4\}$.

a) Chứng minh rằng $\{\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3\}$ là một cơ sở của U ∩ W.

b) Tìm cơ sở và số chiều của U + W.

$\mathcal{A}$: $\vec{\alpha}_1 = (0, 1, 0, 2)$, $\vec{\alpha}_2 = (1, 1, 0, 1)$, $\vec{\alpha}_3 = (1, 2, 0, 1)$, $\vec{\alpha}_4 = (-1, 0, 2, 1)$;

$\mathcal{B}$: $\vec{\beta}_1 = (1, 0, 2, -1)$, $\vec{\beta}_2 = (0, 3, 0, 2)$, $\vec{\beta}_3 = (0, 1, 3, 1)$, $\vec{\beta}_4 = (0, -1, 0, 1)$.

a) Dùng hạng của hệ vectơ để chứng tỏ rằng hai hệ vectơ này là hai cơ sở của $\mathbf{R}^4$.

b) Tìm ma trận chuyển từ cơ sở $\mathcal{A}$ sang cơ sở $\mathcal{B}$.

c) Tìm tọa độ của $\vec{\alpha}$ = (2, 0, 4, 0) đối với cơ sở $\mathcal{B}$.

d) Dùng công thức đổi tọa độ để tính tọa độ của $\vec{\alpha}$ đối với cơ sở.

42. a) Chứng minh rằng các phép biến đổi sơ cấp không làm thay đổi hạng của ma trận.

b) Bạn hãy tự tìm một hệ vectơ trong không gian $\mathbf{R}^4$ và dùng các phép biến đổi sơ cấp để chứng tỏ rằng hệ vectơ ấy độc lập tuyến tính.

c) Bạn hãy tự chọn hai hệ, mỗi hệ gồm 4 vectơ, rồi dùng các phép biến đổi sơ cấp chứng tỏ rằng một hệ có hạng 3, một hệ có hạng 2 và chỉ ra cơ sở không gian sinh bởi mỗi hệ vectơ đã cho.

VÀI NÉT LỊCH SỬ

Khái niệm không gian vectơ xuất hiện muộn hơn nhiều so với khái niệm định thức. Leibnitz là người đầu tiên phát hiện ra khái niệm định thức và cũng chính ông là người có công lao đáng kể trong việc đề xướng khái niệm không gian vectơ. Bắt nguồn từ ý tưởng muốn dùng đại số để nghiên cứu hình học, cụ thể, muốn dùng đại số để miêu tả không chỉ những lượng khác nhau của hình học mà miêu tả cả vị trị của các điểm và hướng của đường thẳng trong hình học, Leibnitz đã quan tâm đến các cặp điểm (tuy nhiên, ông vẫn chưa phân biệt thứ tự của hai điểm).

Hơn 100 năm sau khi Leibnitz qua đời, tức là vào năm 1833, các công trình của ông về vấn đề này mới được công bố và người ta đã treo giải thưởng cho những ai phát triển được ý tưởng của Leibnitz trong những công trình này. Năm 1835, được Möbius thông báo tin này, Grassmann, một giáo viên thể dục của một trường học ở thành phố Stetin thuộc nước Đức, với lòng ham mê toán học, sau gần một năm làm việc, đã trình bày công trình về một cấu trúc tương tự không gian vectơ. Từ năm 1832 Grassmann đã tìm được các dạng vectơ của các luật trong cơ học. ông đã chú ý tới tính giao hoán, kết hợp của phép cộng các vectơ. Công trình của ông quá tổng quát nên đến năm 1840 các nhà toán học vẫn không hiểu được ý tưởng của ông. Vì thế nó có ít ảnh hưởng. Grassmann đã gửi quyển sách đầu tiên của mình cho Gauss và cho Möbius, nhưng Möbius không đọc hết vì không hiểu được ý tưởng của Grassmann. Năm 1844, cùng một lúc với Hamilton, Grassmann đã đưa ra khái niệm không gian giãn nở tuyến tính, (tức là không gian vectơ n chiều ngày nay) cùng với các tính chất của nó. Ông cũng đã định nghĩa *đại lượng giãn nở* như là tổ hợp tuyến tính, đã định nghĩa không gian con và khái niệm độc lập tuyến tính của hệ vectơ và cả khái niệm mà ngày nay gọi là cơ sở, số chiều, tích vô hướng. Vài lần, Grassmann xin được làm việc ở trường Đại học nhưng không thành, lần cuối cùng mà ông bị từ chối là do Kummer đã nhận xét rằng các bài báo của ông trình bày không được rõ ràng sáng sủa. Cho đến lúc chết ông

Chân dung Grassmann

vẫn là giáo viên thể dục ở thành phố Stettin, quê hương ông.

Việc biểu diễn hình học của số phức là một bước tiến trong quá trình hình thành không gian vectơ. Năm 1837, Hamilton đã công bố công trình trong đó số phức được biểu diễn bởi cặp số thực. Đến năm 1841, ông quan tâm đến các bộ n số thực vì muốn có những kết quả tương tự như đối với các số phức (tức là những cặp số). Chính đây là một tiếp cận với không gian vectơ. Sự quan tâm đến các bộ ba số thực đã dẫn ông tới khái niệm quaternion và ông đã dùng khái niệm này để nghiên cứu toán lí. Sau đó nhà vật lí người Anh J. C. Maxwell (1831-1879) và nhà vật lí người Mỹ J. W. Gibbs đã phát triển thành không gian vectơ. Các thuật ngữ vectơ và vô hướng là do Maxwell đề xướng. Hamilton cũng đã định nghĩa khái niệm tích vectơ.

Chân dung Hamilton

William Rowan Hamìlton có một tiểu sử sáng chói. Khi còn nhỏ ông nổi tiếng là một thần đồng toán học; 13 tuổi ông học được la thứ t;ếng. Sau khi tốt nghiệp Đại học Tnnity ở Dublin, ông được cử làm giáo sư thiên văn học ở trường Đại học tổng hợp. Năm 1837 ông là chủ tịch Viện hàn lâm khoa học Ailen.

Chương III

ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

MỞ ĐẦU

Ta đã biết các tập hợp liên hệ với nhau bởi các ánh xạ. Giả sử A và B là hai tập hợp không rỗng, một ánh xạ từ A đến B là một quy tắc nào đó cho ứng với phần tử $a \in A$ một phần tử duy nhất $f(a) \in B$; f(a) được gọi là ảnh của a. Ánh xạ từ tập A đến tập B được kí hiệu là $f: A \to B$. Ánh xạ f được xác định nếu biết ảnh của mọi $a \in A$. Các ánh xạ được phân loại thành đơn ánh, toàn ánh, song ánh.

Nếu $X \subset A$ thì tập hợp

$$f(x) = \{b \in B \mid b = f(x) \text{ với một } x \text{ nào đó thuộc } X\}$$

được gọi là ảnh của X.

Nếu $Y \subset B$ thì tập hợp

$$f^{-1}(y) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$$

được gọi là ảnh ngược (hay tạo ảnh) của Y; v.v...

Bây giờ, đối với các không gian vectơ, chúng tạo thành không chỉ bởi những phần tử, mà còn cả những phép toán. Vì thế mối liên hệ giữa chúng cũng phải được thể hiện bởi những ánh xạ có liên quan đến các phép toán ấy. Đó là ánh xạ tuyến tính.

Chương này dành cho việc nghiên cứu ánh xạ tuyến tính, gồm:

- Khái niệm ánh xạ tuyến tính hay các đồng cấu không gian vectơ, các dạng ánh xạ tuyến tính như : đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu.

- Sự xác định một ánh xạ tuyến tính (ở đó ta sẽ thấy rằng muốn xác định một ánh xạ tuyến tính chỉ cần biết ảnh của các vectơ trong một cơ sở).

- Khái niệm ảnh và hạt nhân, mối liên quan giữa ảnh, hạt nhân với đơn cấu, toàn cấu và đẳng cấu, mối liên hệ về chiều của không gian nguồn với số chiều của ảnh và của hạt nhân.

Trên tập các ánh xạ tuyến tính từ không gian V đến không gian W cũng có thể xác định phép cộng hai ánh xạ và phép nhân một ánh xạ với một số làm cho tập các ánh xạ này trở thành một không gian vectơ. Đó cũng là những điều mà bạn đọc cần nắm vững để có thể hiểu được các khái niệm giá trị riêng và vectơ riêng của một tự đồng cấu, sẽ được nghiên cứu tiếp ở chương V.

Ánh xạ tuyến tính còn được nghiên cứu tiếp ở những chương sau. Nó còn được mở rộng thành các khái niệm ánh xạ nửa tuyến tính, đa tuyến tính, đa tuyến tính thay phiên. Song giáo trình này chưa thể trình bày mọi đảng ánh xạ như thế. Một dạng đặc biệt của ánh xạ đa tuyến tính sẽ được trình bày ở chương VI. Đó là dạng song tuyến tính.

Để hiểu được những điều trình bày trong chương này, bạn đọc cần nắm vững những từ thức đã học về không gian vectơ.

§1. ĐỊNH NGHĨA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH - SỰ XÁC ĐỊNH MỘT ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

1.1. Các định nghĩa

Định nghĩa 1. *Giả sử V và W là hai **K**-không gian vectơ. Ánh xạ f: V $\to$ W được gọi là một ánh xạ tuyến tính hay một đồng cấu nếu:*

$$f(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = f(\vec{\alpha}) + f(\vec{\beta})$$
$$f(r\vec{\alpha}) = rf(\vec{\alpha})$$

với mọi $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, thuộc V và mọi $r \in K$.

$f(\vec{\alpha})$ gọi là ảnh của $\vec{\alpha}$.

Nếu W = V thì ánh xạ tuyến tính f được gọi là một tự đồng cấu.

Ví dụ 1. Giả sử V là một **K**-không gian vectơ. Ánh xạ $1_v = V \to V$ xác định bởi

$$1_v(\vec{\alpha}) = \vec{\alpha}, \text{ với mọi } \vec{\alpha} \in V$$

là một ánh xạ tuyến tính. Nó được gọi là *đồng cấu đồng nhất* trên V.

Ví dụ 2. Giả sử U là một không gian con của **K**-không gian vectơ V, ánh xạ j : U → V xác định bởi

$$j(\vec{\alpha}) = \vec{\alpha}, \text{ với mọi } \vec{\alpha} \in U$$

là một ánh xạ tuyến tính. Nó được gọi là *phép nhúng chính tắc.*

Ví dụ 3. Giả sử V và W là hai **K**-không gian vectơ. ánh xạ f. V → W xác định bởi

$$F(\vec{\alpha}) = \vec{0}_W \text{ với mọi } \vec{\alpha} \in V$$

là một ánh xạ tuyến tính. Nó được gọi là *đồng cấu không.*

Bạn đọc có thể dùng định nghĩa ánh xạ tuyến tính để tự kiểm tra rằng ba ánh xạ nói trên là những ánh xạ tuyến tính.

Ví dụ 4. Ánh xạ f: $R^3 \to R^2$ xác định bởi

$f((a_1, a_2, a_3)) = (a_1, a_2)$, với mọi $\vec{\alpha} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{R}^3$ là một ánh xạ tuyến tính.

Thật vậy, chỉ cần kiểm tra các điều kiện trong định nghĩa; với $\vec{\alpha}$ (a_1, a_2, a_3), $\vec{\beta} = (b_1, b_2, b_3)$ thuộc $\mathbf{R}^3$ và mọi r ∈ R, ta có:

$$f(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = f((a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3)) = f((a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)) =$$
$$(a_1 + b_1, a_2 + b_2) = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = f((a_1, a_2, a_3)) + f((b_1, b_2, b_3)) = f(\vec{\alpha}) + f(\vec{\beta}),$$
$$f(r\vec{\alpha}) = f(r(a_1, a_2, a_3)) = f((ra_1, ra_2, ra_3)) = (ra_1, ra_2) = r(a_1, a_2) = rf(\vec{\alpha}).$$

Ví dụ 5. Giả sử P_n và P_{n-1} lần lượt là các **R**-không gian vectơ gồm đa thức 0 và các đa thức thuộc **R**[x] với bậc lần lượt không quá n và không quá n - 1, d: $P_n \to p_{n-1}$ là phép lấy đạo hàm: d(f(x)) = f '(x). Thế thì d là một ánh xạ tuyến tính.

Thật vậy, với hai đa thức $\vec{\alpha} = f(x)$, $\vec{\beta} = g(x)$ và mọi r ∈ **R**, ta có:

$$d(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = d(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x) = d(f(x)) + d(g(x)) = d(\vec{\alpha}) + d(\vec{\beta});$$
$$d(r\vec{\alpha}) = d(rf(x)) = rf'(x) = rd(f(x)) = rd(\vec{\alpha}).$$

Ví dụ 6. Giả sử $\mathcal{A} = \{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, ..., \vec{\alpha}_n\}$ là một hệ vectơ trong không gian $\mathbf{R}^m$. Ánh xạ (cũng kí hiệu bởi $\mathcal{A}$)

$$\mathcal{A} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m \text{ xác định như sau:}$$

Với mỗi $\vec{\gamma} = (c_1, c_2,..., c_n) \in \mathbf{R}^n$, $\mathcal{A}(\vec{\gamma}) - c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 +...+ c_n\vec{\alpha}_n \in \mathbf{R}^m$, là một ánh xạ tuyến tính.

Thật vậy, với $\vec{\gamma} = (c_1, c_2,..., c_n)$, $\vec{\delta} = (d_1, d_2,..., d_n) \in \mathbf{R}_n$ và với mọi r $\in$ R, ta có:

$\vec{\gamma} + \vec{\delta} = (c_1 + d_1, c_2 + d_2,.., c_n + d_n)$ $r\vec{\gamma} = (rc_1, rc_2,..., rc_n)$.

Theo định nghĩa của ánh xạ $\mathcal{A}$, ta có:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\vec{\gamma}+\vec{\delta}) &= (c_1+d_1)\ \vec{\alpha}_1 + (c_2+d_2)\vec{\alpha}_2 + \ldots + (c_n+d_n)\ \vec{\alpha}_n\\ &= c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 +\ldots+ c_n\vec{\alpha}_n + d_1\vec{\alpha} + d_2\vec{\alpha}_2 +\ldots+ d_n\vec{\alpha}_n\\ &= \mathcal{A}(\vec{\gamma}) + \mathcal{A}(\vec{\delta}),\\ \mathcal{A}(r\vec{\gamma}) &= rc_1\vec{\alpha}_1 + rc_2\vec{\alpha}_2 +\ldots+ rc_n\vec{\alpha}_n = r(c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 +\ldots+ c_n\vec{\alpha}_n)\\ &= r.\mathcal{A}(\vec{\gamma}).\end{aligned}$$

Vậy $\mathcal{A}$ là một ánh xạ tuyến tính.

Hệ quả.

1) Ánh xạ f: V $\to$ W là một ánh xạ tuyến tính khi và chỉ khi:

$f(r\vec{\alpha} + s\vec{\beta}) = rf(\vec{\alpha}) + sf(\vec{\beta})$, với mọi $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ thuộc V và mọi r, s thuộc **K**.

2) Nếu f: V $\to$ W là một ánh xạ tuyến tính thì $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$, ở đây $\vec{0}_V$ và $\vec{0}_W$ lần lượt là vectơ không trong V và W.

Chứng minh. 1) Xin dành cho bạn đọc.

2) Vì $0\vec{\alpha} = \vec{0}_V$, và f là một ánh xạ tuyến tính nên

$f(\vec{0}_V) = f(\vec{0}\,\vec{\alpha}) = 0f(\vec{\alpha}) = \vec{0}_W$. □

Ánh xạ giữa các tập hợp được phân ra thành đơn ánh, toàn ánh, song ánh. Tương ứng với chúng, các ánh xạ tuyến tính cũng được phân thành đơn cấu, toàn cấu và đẳng cấu.

Định nghĩa 2. *Một ánh xạ tuyến tính được gọi là:*

a) đơn cấu nên nó là một đơn ánh;

b) toàn cấu nên nó là một toàn ánh;

c) đẳng cấu nên nó đồng thời là đơn cấu và toàn cấu.

Khi có một đăng cấu f từ không gian vectơ V đen không gian vectơ W thì ta viết:

$$f:\ V \cong W$$

và nói rằng V và W đẳng cấu với nhau.

Ví dụ 7. Ánh xạ đồng nhất là một đẳng cấu.

Ví dụ 8. Phép nhúng chính tắc là một đơn cấu.

Ví dụ 9. Ánh xạ tuyến tính f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ trong ví dụ 4, mục 1.1, là một toàn cấu. Thật vậy với mỗi $\vec{\delta} = (a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2$ đều tồn tại vectơ $\vec{\alpha}(a_1, a_2, 0) \in \mathbf{R}^3$ mà

$$f(\vec{\alpha}) = f((a_1, a_2, 0) = (a_1, a_2) = \vec{\delta}.$$

Điều này chứng tỏ ánh xạ tuyến tính f là một toàn ánh. Vậy f là một toàn cấu.

Mệnh đề. *Ánh xạ tuyến tính f : V → W là một đẳng cấu khi và chỉ khi tồn tại một ánh xạ tuyến tính f^{-1}: W → V sao cho $f^{-1}f = 1_v$, $ff^{1} = 1_w$.*

Chứng minh. "⇒" Giả sử hà một đẳng cấu. Khi đó bà một song ánh. Do đó tồn tại ánh xạ ngược f^{-1} sao cho $f^{-1}f - 1_v$, $ff^{-1} = 1_w$. Ta chỉ còn phải chứng minh f^{-1} là một ánh xạ tuyến tính; nghĩa là phải chứng minh rằng:

$f^{-1}(r\vec{\alpha} + s\vec{\beta}) = rf^{-1}(\vec{\alpha}) + sf\text{-}1(\vec{\beta})$, với mọi $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ thuộc W và mọi r, s∈**K**.

Vì $ff^{-1} = 1_w$ nên:

$$f^{-1}(r\vec{\alpha} + s\vec{\beta}) = f^{-1}(rff^{-1}(\vec{\alpha}) + sff^{-1}(\vec{\beta})) = f^{-1}(rf(f^{-1}(\vec{\alpha})) + sf(f^{-1}(\vec{\beta}))) \quad (1)$$

Theo giả thiết, f là một ánh xạ tuyến tính. Do đó:

$$rf(f^{-1}(\vec{\alpha})) + sf(f^{-1}(\vec{\beta})) = f(rf^{-1}(\vec{\alpha}) + sf^{-1}(\vec{\beta})). \quad (2)$$

(2) Từ (1) và (2) suy ra:

$$\begin{aligned} f^{-1}(r\vec{\alpha} + s\vec{\beta})) &= f^{-1}(f(rf^{-1}(\vec{\alpha}) + sf^{-1}(\vec{\beta}))) = f^{-1}f(rf^{-1}(\vec{\alpha}) + sf^{-1}(\vec{\beta})) \\ &= rf^{-1}(\vec{\alpha}) + sf^{-1}(\vec{\beta}) \end{aligned}$$

Vậy f^{-1} là một ánh xạ tuyến tính.

"⇒" Nếu $f^{-1}f = 1_v$, $ff^{-1} = 1_w$ thì (như đã biết trong phần tập hợp) f là một song ánh. Theo định nghĩa 1, mục 1.1, hà một đẳng cấu. □

Ta đã thấy từ **K**-không gian vectơ V bất kì đến một **K**-không gian W tuỳ ý luôn luôn có đồng cấu không. Ngoài đồng cấu không còn có đồng cấu nào khác và có cách nào để xác định chúng?

1.2. Sự xác định một ánh xạ tuyến tính

Định lí. *Giả sử V, W là hai K-không gian uectơ,* $(\varepsilon) = \{\vec{\varepsilon}_1, ..., \vec{\varepsilon}_2, ..., \vec{\varepsilon}_n\}$ *là một cơ sở của V và* $\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2, .., \vec{\delta}_n$ *là n vectơ tuỳ ý của W. Khi đó tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính f: V* $\rightarrow$ *W sao cho* $f(\vec{\varepsilon}_i) = \vec{\delta}_i$, *với mọi* $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Chứng minh. Trước hết ta xác định ánh xạ f: V $\rightarrow$ W như sau: với mỗi $\vec{\alpha} = r_1\vec{\varepsilon}_1 + r_2\vec{\varepsilon}_2 + ... + i_n\vec{\varepsilon}_n \in$ V, ta đặt

$$f(\vec{\alpha}) = r_1\vec{\beta}_1 + r_2\vec{\beta}_2 + ... + r_n\vec{\beta}_n \in W.$$

Đó thực sự là một ánh xạ vì (ε) là cơ sở của v nên với $\vec{\alpha}$, n số r_i được xác định duy nhất; do đó $f(\vec{\alpha})$ được xác định duy nhất. Ta phải kiểm tra rằng f là một ánh xạ tuyến tính. Với $\vec{\alpha} = r_1\vec{\varepsilon}_1 + r_2\vec{\varepsilon}_2 + ... + i_n\vec{\varepsilon}_n)$ $\vec{\beta} = s_1\vec{\varepsilon}_1 + s_2\vec{\varepsilon}_2 + ... + s_n\vec{\varepsilon}_n \in$ V và mọi $k \in$ K, ta có:

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (r_1 + s_1)\vec{\varepsilon}_1 + (r_2 + s_2)\vec{\varepsilon}_2 + ... + (r_n + s_n)\vec{\varepsilon}_n,$$

$$k\vec{\alpha} = kr_1\vec{\varepsilon}_1 + kr_2\vec{\varepsilon}_2 + ... + k\,r_n\vec{\varepsilon}_n.$$

Theo định nghĩa của f thì:

$$f(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = (r_1 + s_1)\vec{\delta}_1 + (r_2 + s_2)\vec{\delta}_2 + ... + (r_n + s_n)\vec{\delta}_n$$

$$= r_1\vec{\delta}_1 + r_2\vec{\delta}_2 + ... + r_n\vec{\delta}_n + s_1\vec{\delta}_1 + s_2\vec{\delta}_2 + ... + s_n\vec{\delta}_n = f(\vec{\alpha}) + f(\vec{\beta})$$

$$f(k\vec{\alpha}) = kr_1\vec{\delta}_1 + kr_2\vec{\delta}_2 + ... + kr_n\vec{\delta}_n = k(r_1\vec{\delta}_1 + r_2\vec{\delta}_2 + ... + r_n\vec{\delta}_n) = k\,f(\vec{\alpha}).$$

Hơn nữa, với $\vec{\varepsilon}_i$ ta có thể viết:

$$\vec{\varepsilon}_i = 0\vec{\varepsilon}_1 + ... + 0\vec{\varepsilon}_{i-1} + \vec{\varepsilon}_i + 0\vec{\varepsilon}_{i+1} + ... + 0\vec{\varepsilon}_n.$$

Do đó $f(\vec{\varepsilon}_i) = 0\vec{\delta}_1 + ... + 0\vec{\delta}_{i-1} + \vec{\delta}_i + 0\vec{\delta}_{i+1} + ... + 0\vec{\delta}_n = \vec{\delta}_i.$

Giả sử có ánh xạ tuyến tính f': V $\rightarrow$ W thoả mãn điều kiện $f'(\vec{\varepsilon}_i) = \vec{\delta}_i$, với mọi $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Vì f' là một ánh xạ tuyến tính nên với mỗi $\vec{\alpha} = r_1\vec{\varepsilon}_1 + r_2\vec{\varepsilon}_2 + ... + i_n\vec{\varepsilon}_n \in$ V, ta có:

$$f'(\vec{\alpha}) = f'(r_1\vec{\varepsilon}_1 + r_2\vec{\varepsilon}_2 + \ldots + r_n\vec{\varepsilon}_n) = r_1f'(\vec{\varepsilon}_1) + r_2f'(\vec{\varepsilon}_2) + \ldots + r_nf'(\vec{\varepsilon}_n)$$
$$= r_1\vec{\delta}_1 + r_2\vec{\delta}_2 + \ldots + r_n\vec{\delta}_n = f(\vec{\alpha}).$$

Vậy f' = f, tức là f xác định như trên là duy nhất. □

Ý nghĩa của định lí:

1) Muốn xác định một ánh xạ tuyến tính chỉ cần xác định ảnh của các vectơ cơ sở.

2) Mỗi hệ n vectơ của W xác định một ánh xạ tuyến tính từ V đến W Như vậy, có thể có vô số ánh xạ tuyến tính từ V đến W nếu $W \neq \vec{0}$.

Ví dụ. Cơ sở (ε) của $\mathbf{R}^3$ gồm $\vec{\varepsilon}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{\varepsilon}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{\varepsilon}_3 = (0, 0, 1)$ và ba vectơ $\vec{\delta}_1 = (0, 2)$, $\vec{\delta}_2 = (1, -1)$, $\vec{\delta}_3 = (3, 0)$ thuộc $\mathbf{R}^2$ xác định duy nhất ánh xạ tuyến tính f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ sao cho $f(\vec{\varepsilon}_i) = \vec{\delta}_1$, i = 1, 2, 3. Khi đó, với mỗi $\vec{\alpha} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{R}^3$,

hay: $\vec{\alpha} = a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1) = a_1\vec{\varepsilon}_1 + a_2\vec{\varepsilon}_2 + a_3\vec{\varepsilon}_3$,

$$f(\vec{\alpha}) = a_1\vec{\delta}_1 + a_2\vec{\delta}_2 + a_3\vec{\delta}_3 = a_1(0, 2) + a_2(1, -1) + a_3(3, 0)$$
$$= (0, 2a_1) + (a_2, -a_2) + (3a_3, 0) = (a_2 + 3a_3, 2a_1 - a_2).$$

Khi xét các ánh xạ giữa hai tập hợp ta đã định nghĩa khái niệm ảnh và ảnh ngược. Chẳng hạn, f: X → Y là một ánh xạ, A ⊆ X, B ⊆ Y,

Tập hợp f(A) = {f(a) ∈ Y | a ∈ A} được gọi là ảnh của A,

Tập hợp $f^{-1}(B)$ = {x E x | f(x) ∈ B} được gọi là ảnh ngược của B.

Nói chung, chúng không có đặc điểm gì. Song, các không gian vectơ là những tập hợp có phép toán và ánh xạ tuyến tính bị ràng buộc bởi các phép toán ấy nên chắc hẳn ảnh và ảnh ngược cũng có những đặc điểm riêng.

§2. ẢNH VÀ HẠT NHÂN CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

2.1. Định nghĩa và tính chất

Định nghĩa. *Giả sử* V, W *là hai K-không gian vectơ,* f: V → W *là một ánh xạ tuyến tính,* A ⊆ V, B ⊆ W.

Tập hợp f(A) = {$\vec{\beta}$ ∈ W | = $f(\vec{\alpha})$, *với mọi ã thuộc* A} *được gọi là* *ảnh của A.*

Tập hợp $f^{-1}(\vec{\beta}) = \{\vec{\alpha} \in V \mid f(\vec{\alpha}) \in B\}$ *được gọi là ảnh ngược (hay tạo ảnh+ của B.*

Nói riêng, f(V) được gọi là ảnh của V hay ảnh của f và kí hiệu là Imf $f^{J}(\vec{0}_w)$ *được gọi là hạt nhân của f và kí hiệu là Kerf.*

Ví dụ 1. Cho ánh xạ f: $\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ xác định bởi:

$$f(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_1, a_2, 0).$$

Dễ thấy f là một ánh xạ tuyến tính.

$$\mathrm{Imf} = \{ (a_1, a_2, 0) \mid a_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2 \},$$

$$\mathrm{Kerf} = \{ (a_1, a_2, a_3, a_4) \mid (a_1, a_2, 0) = f(a_1, a_2, a_3, a_4) = (0, 0, 0) \}.$$

Từ đó suy ra:

$$\mathrm{Kerf} = \{(0, 0, a_3, a_4) \mid 0 \in \mathbf{R},\ a_i \in \mathbf{R}, i = 3, 4 \} = \{0\} \times \{0\} \times \mathbf{R}^2.$$

Ví dụ 2. Ánh xạ g: $\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ xác định bởi:

$$f(a_1, a_2, a_3, a_4)\ (a_1, a_2, a_3).$$

g là một ánh xạ tuyến tính.

$$\mathrm{Img} = \{ (a_1, a_2, a_3) \mid a_i \in R, i = 1, 2, 3\} = \mathbf{R}^3,$$

$$\mathrm{Kerg} = \{ (a_1, a_2, a_3, a_4) \mid (a_1, a_2, a_3) = g(a_1, a_2, a_3, a_4) = (0, 0, 0) \}.$$

Từ đó suy ra

$$\mathrm{Kerg} = \{(0, 0, 0, a_4) \mid 0 \in \mathbf{R},\ a_4 \in \mathbf{R} \} = \{0\} \times \{0\} \times \{0\} \times \mathbf{R}.$$

Ví dụ 3. Cho ánh xạ h: R2 ~ R3 xác định bởi

$$f(a_1, a_2) = (a_1, a_2, a_1 - a_2).$$

Bạn hãy tự kiểm tra rằng h là một ánh xạ tuyến tính.

$$\mathrm{Imh} = \{ (a_1, a_2, a_1 - a_2) \mid a_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2 \},$$

$$\mathrm{Kerh} = \{ (a_1, a_2) \mid (a_1, a_2, a_1 - a_2) = f(a_1, a_2) = (0, 0, 0) \}.$$

Từ đó suy ra:

$$\text{Kerh} = \{(a_1, a_2) \mid a_1 = 0, a_2 = 0\} = (0, 0) = \vec{0} \in \mathbf{R}^2.$$

Ví dụ 4. Xét ánh xạ $\mathcal{A}$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ trong ví dụ 6, mục 1.1.

$\text{Im}\mathcal{A} = \{\vec{\beta} \in \mathbf{R}^m \mid \vec{\beta} = \mathcal{A}(\vec{\gamma}) = c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \ldots + c_n\vec{\alpha}_n$, với $\vec{\gamma} = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n\}$ hay $\text{Im}\mathcal{A} = \{\vec{\beta} = c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \ldots + c_n\vec{\alpha}_n \mid c_i \in \mathbf{R}\}$.

Điều này có nghĩa là Im~l là không gian sinh bởi hệ vectơ

Với $\vec{\beta} \in \mathbf{R}^m$, $\mathcal{A}^{-1}(\vec{\beta}) = \{\vec{\gamma} = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n \mid c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \ldots + c_n\vec{\alpha}_n = \vec{\beta}\}$.

$\text{Ker}\mathcal{A} = \{\vec{\gamma} = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n \mid c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \ldots + c_n\vec{\alpha}_n = \vec{0}\}$.

Định lí. *Giả sử V, W là hai K-không gian vectơ, f. V→ W là một ánh xạ tuyến tính, A là một không gian con của V, B là một không gian con của W. Khi đó:*

1) f(A) 1à một không gian con của W. Hơn nữa nếu hệ vectơ {$\vec{\gamma}_1$,.., $\vec{\gamma}_m$} là một hệ sinh của A thì hệ vectơ {f($\vec{\gamma}_1$),..., f($\vec{\gamma}$m)} là một hệ sinh của f(A);

2) f^{-1}(B) là một không gian con của V.

Chứng minh. 1) Vì $\vec{0}_V \in$ A nên $\vec{0}_W = f(\vec{0}_V) \in$ f(A); tức là f(A) ≠ ∅. Giả sử $\vec{\beta}_1$, $\vec{\beta}_2$ thuộc f(A) và r, s thuộc K. Theo định nghĩa của f(A) tồn tại $\vec{\alpha}_1$, $\vec{\alpha}_2$ thuộc A sao cho $\vec{\beta}_1 = f(\vec{\alpha}_1)$, $\vec{\beta}_2 = f(\vec{\alpha}_2)$. Vì f là một ánh xạ tuyến tính nên

$$\begin{aligned} r\vec{\beta}_1 + s\vec{\beta}_2 &= r\,f(\vec{\alpha}_1) + sf(\vec{\alpha}_2) = f(r\vec{\alpha}_1) + f(s\vec{\alpha}_2) = f(r\vec{\alpha}_1 + s\vec{\alpha}_2) \\ &= f(r\vec{\alpha}_1 + s\vec{\alpha}_2). \end{aligned}$$

Vì A là một không gian con của V nên $r\vec{\alpha}_1 + s\vec{\alpha}_2 \in$ A. Do đó

$$r\vec{\beta}_1 + s\vec{\beta}_2 = f(r\vec{\alpha}_1 + s\vec{\alpha}_2) \in f(A).$$

Theo định lí 2.2, Ch.II, f(A) là một không gian con của W.

Bây giờ giả sử {$\vec{\gamma}_1$,..., $\vec{\gamma}_m$} là một hệ sinh của A. Khi đó $f(\vec{\gamma}_i) \in$ f(A) với mọi i ∈ {1,..., m}. Với mỗi $\vec{\beta} \in$ f(A), tồn tại một $\vec{\alpha} \in$ A sao cho $\vec{\beta} = f(\vec{\alpha})$. Nhưng $\vec{\alpha}$ là một tổ hợp tuyến tính của hệ vectơ {$\vec{\gamma}_1$,..., $\vec{\gamma}_m$} chẳng hạn,

$$\vec{\alpha} = x_1\vec{\gamma}_1 + \ldots + x_m\vec{\gamma}_m.$$

Do đó

$$\vec{\beta} = f(\vec{\alpha}) = f(x_1\vec{\gamma}_1 + \ \dots\ + x_m\vec{\gamma}_m) = x_1 f(\vec{\gamma}_1) + \dots + x_m f(\vec{\gamma}_m).$$

Vậy f(A) sinh bởi hệ vectơ $\{(f\vec{\gamma}_1), \dots, f(\vec{\gamma}_m)\}$

2) Vì $f(\vec{0}_v) = \vec{0}_w \in B$ nên $\vec{0}_v \in f^{-1}(B)$; nghĩa là $f^{-1}(B) \neq \emptyset$. Giả sử $\vec{\alpha}_1$, $\vec{\alpha}_2$ thuộc $f^{-1}(B)$ và r, s thuộc K. Theo định nghĩa của ảnh ngược, $f(\vec{\alpha}_1)$, $f(\vec{\alpha}_2)$ thuộc B. Vì B là một không gian con của W, f là một ánh xạ tuyến tính nên

$$f(r\vec{\alpha}_1 + s\vec{\alpha}_2) = rf(\vec{\alpha}_1) + sf(\vec{\alpha}_2) \in B.$$

Do đó

$$r\vec{\alpha}_1 + s\vec{\alpha}_2 \in f^{-1}(B).$$

Lại theo định lí 2.2, Ch.II, $f^{-1}(B)$ là một không gian con của V. □

Từ đó ta có hệ quả 1 sau đây.

Hệ quả 1. *Giả sử f: V → W là một ánh xạ tuyến tính.*

Khi đó:

1) Imf là một không gian con của W.

2) Kerf là một không gian con của V.

Hệ quả 2. *Giả sử f: V → W là một ánh xạ tuyến tính.*

1) f là một toàn cấu khi và chỉ khi Imf = W.

2) f là một đơn cấu khi và chỉ khi Kerf = $\vec{0}_v$.

Chứng minh.

1) Hiển nhiên.

2) "⇒" Giả sử f là một đơn cấu và $\vec{\alpha} \in$ Kerf. Khi đó $f(\vec{\alpha}) = \vec{0}_w = f(\vec{0}_v)$. Vì f là đơn cấu nên $\vec{\alpha} = \vec{0}_v$. Suy ra Kerf = {v}.

"⇐" Giả sử Kerf = $\{\vec{0}_v\}$. Để chứng minh f là một đơn cấu ta phải chứng minh rằng nếu $f(\vec{\alpha}_1) = f(\vec{\alpha}_2)$ thì $\vec{\alpha}_1 = \vec{\alpha}_2$. Nhưng khi $f(\vec{\alpha}_1) = f(\vec{\alpha}_2)$ ta có

$$f(\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2) = f(\vec{\alpha}_1) - f(\vec{\alpha}_2) = \vec{0}_w.$$

Điều này có nghĩa là $\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2 \in$ Kerf. Suy ra $\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2 = \vec{0}_V$ vì Kerf = $\{\vec{0}_V\}$. Do đó $\vec{\alpha}_1 = \vec{\alpha}_2$. Vậy f là một đơn cấu. □

Ví dụ 5. Ánh xạ tuyến tính g: $\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ trong ví dụ 2, là một toàn cấu vì Img = $\mathbf{R}^3$.

Ví dụ 6. Ánh xạ tuyến tính h: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ trong ví dụ 3, là một đơn cấu vì Kerh = $\{\vec{0}\}$.

Khi f: V $\to$ W là một ánh xạ tuyến tính thì Kerf là một không gian con của V còn Imf là một không gian con của W. Tuy nhiên số chiều của chúng có mối liên quan chặt chẽ với số chiều của không gian nguồn V.

2.2. Liên hệ giữa số chiều của ảnh, hạt nhân và không gian nguồn

Định lí. *Giả sử f. V $\to$ W là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó, dimV = dimImf + dimKerf.*

Chứng thinh. Giả sử Imf có cơ sở $(\xi) = \{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, ..., \vec{\xi}_m\}$. Với mỗi $\vec{\xi}_i$ ta chọn một $\vec{\varepsilon}_j$ cố định thuộc V sao cho $f(\vec{\varepsilon}_j) = \vec{\xi}_j$. Khi đó $\{\vec{\varepsilon}_1, ..., \vec{\varepsilon}_2, ..., \vec{\varepsilon}_m\}$ là một hệ vectơ độc lập tuyến tính của V.

Thật vậy, nếu $r_1\vec{\varepsilon}_1 + r_2\vec{\varepsilon}_2 + ... + r_m\vec{\varepsilon}_m = \vec{0}_V$

thì $\vec{0}_W = f(r_1\vec{\varepsilon}_1 + r_2\vec{\varepsilon}_2 + ... + r_n\vec{\varepsilon}_n) = r_1f(\vec{\varepsilon}_1) + r_2f(\vec{\varepsilon}_2) + ... + r_nf(\vec{\varepsilon}_n)$

$= r_1\vec{\xi}_1 + r_2\vec{\xi}_2 + ... + r_m\vec{\xi}_m$.

Vì hệ vectơ (ξ) độc lập tuyến tính nên $r_1 = r_2 ... = r_m = 0$.

Gọi U là không gian con của V sinh bởi hệ vectơ $\{\vec{\varepsilon}_1, ..., \vec{\varepsilon}_2, ..., \vec{\varepsilon}_m\}$ ta sẽ chứng minh rằng V = Kerf + U. Với $\vec{\alpha} \in$ V, ta có $f(\vec{\alpha}) \in$ Imf. Vì (ξ) là cơ sở của Imf nên

$$f(\vec{\alpha}) = \sum_{j=1}^{m} s_j\vec{\xi}_j, \text{ với } s_j \in K, j \in \{1, 2, ..., m\}.$$

Do đó

$$f(\vec{\alpha}) = \sum_{j=1}^{m} s_j\vec{\xi}_j = \sum_{j=1}^{m} s_j f(\vec{\varepsilon}) = f(\sum_{j=1}^{m} s_j\vec{\varepsilon}_j), \text{ với } \sum_{j=1}^{m} s_j\vec{\varepsilon}_j \in U.$$

Suy ra $f(\vec{\alpha}) - f(\sum_{j=1}^{m} s_j\vec{\varepsilon}_j) = \vec{0}$ hay $f(\vec{\alpha} - \sum_{j=1}^{m} s_j\vec{\varepsilon}_j) = \vec{0}$.

Điều này có nghĩa là $\vec{\alpha} - \sum_{j=1}^{m} s_j\vec{\varepsilon}_j \in$ Kerf.

Đặt $\vec{\alpha} - \sum_{j=1}^{m} s_j\vec{\varepsilon}_j = \vec{\beta} \in$ Kerf, ta có $\vec{\alpha} = \vec{\beta} + \sum_{j=1}^{m} s_j\vec{\varepsilon}_j \in$ Kerf + U. Vậy V = Kerf + U.

Hơn nữa U ∩ Kerf = $\vec{0}$. Thật vậy, nếu $\vec{\alpha} \in$ U ∩ Kerf thì, chẳng hạn,

$$\vec{\alpha} = x_1\vec{\varepsilon}_1 + x_2\vec{\varepsilon}_2 + \ldots + x_m\vec{\varepsilon}_m$$

và

$$\vec{0} = f(\vec{\alpha}) = f(x_1\vec{\varepsilon}_1 + x_2\vec{\varepsilon}_2 + \ldots + x_m\vec{\varepsilon}_m)$$
$$= x_1f(\vec{\varepsilon}_1) + x_2f(\vec{\varepsilon}_2) + \ldots + x_mf(\vec{\varepsilon}_m) = x_1\vec{\xi}_1 + x_2\vec{\xi}_2 + \ldots + x_m\vec{\xi}_m.$$

Vì (ξ) là một cơ sở của Imf nên $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$; suy ra $\vec{\alpha} = \vec{0}$.

Do đó U ∩ Kerf $= \vec{0}$. Theo định lí 2, mục 5.2, Ch.II.

$$\dim V = \dim U + \dim \mathrm{Kerf} - \dim(U \cap \mathrm{Kerf}).$$

Nhưng dim(U ∩ Kerf) = 0 và dimU = m = dimImf.

Vậy dimV = dimImf + dimKerf. □

Ví dụ. Cho ánh xạ tuyến tính f: $\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ xác định bởi:

$$f(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_1 - a_2, a_3).$$

Tìm số chiều của Imf và của Kerf.

Giải

Gọi (ε) là cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}^4$. Theo định lí , mục 2.1, Imf sinh bởi hệ vectơ f(ε) = $\{f(\vec{\varepsilon}_1), f(\vec{\varepsilon}_2), f(\vec{\varepsilon}_3), f(\vec{\varepsilon}_4)\}$. Do đó chỉ cần tìm hạng của hệ vectơ (f(ε). Theo định nghĩa của ánh xạ f, ta có:

$$f(\vec{\varepsilon}_1) = f(1, 0, 0, 0) = (1 - 0, 0) = (1, 0)$$
$$f(\vec{\varepsilon}_2) = f(0, 1, 0, 0) = (0 - 1, 0) = (-1, 0)$$
$$f(\vec{\varepsilon}_3) = f(0, 0, 1, 0) = (0 - 0, 1) = (0, 1)$$
$$f(\vec{\varepsilon}_4) = f(0, 0, 0, 1) = (0 - 0, 0) = (0, 0).$$

Hạng(f(ε)) bằng hạng của ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dễ thấy hạng của ma trận này bằng 2. Do đó dimImf = 2. Theo định lí trên, ta có:

$$\dim \text{Kerf} = \dim \mathbf{R}^4 - \dim \text{Imf} = 4 - 2 = 2.$$

Nhờ định lí trên, ta có được mối liên hệ giữa hai không gian vectơ đẳng cấu.

2.3. Sự đẳng cấu giữa hai không gian cùng số chiều

Định lí. *Hai **K**-không gian vectơ đẳng cấu khi và chỉ khi chúng có cùng một số chiều.*

Chứng minh. "$\Rightarrow$" Giả sử f. $V \cong W$ là một đẳng cấu. Khi đó f đồng thời là một đơn cấu và một toàn cấu. Do đó Kerf = $\vec{0}$ và Imf = W. Theo định lí 2.2,

$$\dim V = \dim W + \dim \text{Kerf}.$$

Vì $\qquad \dim \text{Kerf} = 0$ nên

$$\dim V = \dim W.$$

"$\Leftarrow$" Giả sử dimV = dimW - n , $(\varepsilon) = \{\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_n\}$ là một cơ sở của v, còn $(\xi) = \{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \ldots, \vec{\xi}_n\}$ là một cơ sở của w. Theo định lí ở mục 1.2, có ánh xạ tuyến tính

f: $V \to W$ s ao cho $f(\vec{\varepsilon}_i) = \vec{\xi}_i$, với mọi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Theo định lí 2.2, Imf cũng sinh bởi hệ cơ sở (ξ). Do đó Imf = W; nghĩa là f là một toàn cấu. Theo định lí 2.2,

$$\dim \text{Kerf} = \dim V - \dim \text{Imf} = \dim V - \dim W = 0.$$

Theo hệ quả 2, mục 2.1, f là một đơn cấu.

Vậy $\qquad f: V \cong W.$ □

Hệ quả. *Giả sử V và W là hai K-không gian vectơ. Ánh xạ tuyến tính f: $V \to W$ là một đẳng cấu khi và chỉ khi nó biến một cơ sở của V thành một cơ sở của W.*

Chứng minh. Xin dành cho bạn đọc. □

Theo định lí trên đây, mọi **R**-không gian vectơ n chiều đều đẳng cấu với không gian $\mathbf{R}^n$. Vì thế, muốn nghiên cứu các tính chất chung của **R**-không gian vectơ, chỉ cần nghiên cứu trên không gian $\mathbf{R}^n$. Điều này cho thấy tầm quan trọng của không gian $\mathbf{R}^n$.

§3. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP CÁC ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH - HOMK(V, W)

Kí hiệu tập hợp các ánh xạ tuyến tính từ **K**-không gian vectơ V đến **K**-không gian vectơ W bởi HomK(V, W). Ta sẽ xác định các phép toán trên HomK(V, W).

3.1. Phép cộng hai ánh xạ tuyến tính

Mệnh đề và định nghĩa. *Với hai ánh xạ tuyến tính bất kì f, g ∈ HomK(V, W), ánh xạ f + g: V → W xác định bởi:*

$$(f+g)(\vec{\alpha}) = f(\vec{\alpha}) + g(\vec{\alpha}), \text{ với mọi } \vec{\alpha} \in V,$$

là một ánh xạ tuyến tính.

f + g được gọi là tổng của hai ánh xạ tuyến tính f và g.

Chứng minh. Thật vậy, với $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ và với r, s ∈ k, ta có:

$$\begin{aligned}(f+g)(r\vec{\alpha}+s\vec{\beta}) &= f(r\vec{\alpha}+s\vec{\beta}) + g(r\vec{\alpha}+s\vec{\beta}) = rf(\vec{\alpha}) + sf(\vec{\beta}) + rg(\vec{\alpha}) + sg(\vec{\beta}) \\ &= r(f(\vec{\alpha}) + g(\vec{\alpha})) + s(f(\vec{\beta}) + g(\vec{\beta})) = r(f+g)(\vec{\alpha}) + s(f+g)(\vec{\beta}).\end{aligned}$$

Vậy f + g là một ánh xạ tuyến tính. □

Ví dụ. Cho f, g ∈ $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^2)$, xác định bởi:

$$f(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_1, -a_3), \quad g(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_1, a_3 + a_4).$$

Xác định f + g. Tìm Im(f + g) và Ker(f + gì.

Giải

Theo định nghĩa, với $\vec{\alpha} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ tuỳ ý thuộc $\mathbf{R}^4$, ta có:

$(f + g)(a_1, a_2, a_3, a_4) = (f + g)(\vec{\alpha}) = f(\vec{\alpha}) + g(\vec{\alpha}) = f(a_1, a_2, a_3, a_4) +$
$g(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_1, -a_3) + (a_1, a_3 + a_4) = (2a_1, a_4).$

Như vậy với mỗi $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, nếu chọn $a_1 = \frac{1}{2}x_1$ và $a_4 = x_2$, thì

$$(f + g)(\frac{1}{2}x_1, 0, 0, x_2) = (2.\frac{1}{2}x_1, x_2) = (x_1, x_2);$$

nghĩa là f + g là một toàn cấu. Vậy $\mathrm{Im}(f + g) = \mathbf{R}^2$.

$\mathrm{Ker}(f + g) = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \mid (2a_1, a_4) = (f + g)(a_1, a_2, a_3, a_4) = (0, 0)$ với $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbf{R}\}$.

Suy ra

$$2a_1 = 0,\ a_4 = 0, \text{ hay } a_1 = a_4 = 0.\{0\}\times\{0\}\times$$

Vậy $\mathrm{Ker}(f + g) = \{(0, a_2, a_3, 0) \mid \text{ với } 0, a_2, a_3 \in \mathbf{R}\} = \{0\}\times\mathbf{R}^2\times\{0\}.$

3.2. Phép nhân một ánh xạ tuyến tính với một số

Mệnh đề. *Với ánh xạ tuyến tính bất kì $f \in Hom_K(V, W)$ và số $k \in$ **K**, ánh xạ kf: $V \to W$ xác đinh bởi:*

$$(kf)(\vec{\alpha}) = k(f(\vec{\alpha})), \text{ với mọi } \vec{\alpha} \in V,$$

là một ánh xạ tuyến tính.

kf được gọi là tích của ánh xạ tuyến tính f và số k.

Với k = - 1, ánh xạ (- 1)f được gọi là ánh xạ đôi của f và được kí hiệu bởi – f.

Chứng minh. Xin dành cho bạn đọc. □

Ví dụ. Cho P_2 là không gian vectơ gồm đa thức 0 và các đa thức có bậc bé hơn hay bằng 2, thuộc **R**[x], ánh xạ f: $P_2 \to \mathbf{R}^3$ xác định bởi:

$$f(ax^2 + bx + c) = (a, -b, -c).$$

Chứng minh rằng f là một ánh xạ tuyến tính và 3f là một đẳng cấu.

Giải

• Ta chứng minh f là một ánh xạ tuyến tính. Giả sử $ax^2 + bx + c$, $a'x^2 + b'x + c'$ thuộc P_2 và r, s $\in$ R. Khi đó

$r(ax^2 + bx + c) + s(a'x^2 + b'x + c') = (ra + sa')x^2 + (rb + sb')x + rc + sc'$.

Theo giả thiết

$f(r(ax^2 + bx + c) + s(a'x^2 + b'x + c'))$

$= f((ra + sa')x^2 + (rb + sb')x + rc + sc')$

$= (ra + sa', -(rb + sb'), -(rc + sc')) = r(a, -b , -c) + s(a', -b', - c')$

$= rf(ax^2 + bx + c) + sf(a'x^2 + b'x + c')$.

Theo hệ quả ở mục 1.1, f là một ánh xạ tuyến tính.

• Bây giờ ta chứng minh 3f là một đẳng cấu.

Trước hết, nếu $ax^2 + bx + c \in \text{Ker}3f$ thì

$(0, 0, 0) = 3f(ax^2 + bx + c) = 3(a, -b, -c) = (3a, -3b, -3c)$.

Suy ra $3a = - 3b = - 3c = 0$ hay $a = b = c = 0$. Do đó $\text{Ker}f= \{0\}$. Vậy f là một đơn cấu.

Với $(r_1, r_2, r_3) \in \mathbf{R}^3$, nếu chọn đa thức $\frac{r_1}{3}x^2 - \frac{r_2}{3}x - \frac{r_3}{3} \in$ P2 thì

$$(3f)\left(\frac{r_1}{3}x^2 - \frac{r_2}{3}x - \frac{r_3}{3}\right) = 3\left[f\left(\frac{r_1}{3}x^2 - \frac{r_2}{3}x - \frac{r_3}{3}\right)\right] = 3\left(\frac{r_1}{3}, \frac{r_2}{3}, \frac{r_3}{3}\right) = (r_1, r_2, r_3).$$

Điều này chứng tỏ 3f là một toàn cấu.

Vậy $f\colon\ P_2 \cong \mathbf{R}^3$.

3.3. Không gian vectơ $\text{Hom}_K(V, W)$

Mệnh đề. *Phép cộng hai ánh xạ tuyến tính và phép nhân một ánh xạ tuyến tính với một số thoả mãn các tính chất sau:*

$f + g = g + f$,

$(f + g) + h = f + (g + h)$;

$f + 0 = f$ *trong đó 0 là đồng cấu không;*

$f + (- t) = 0$;

$k(f + g) = kf + kg$;

$(k + 1)f = kf + lf$,

$(k1)f = k(1f)$;

1f= f,

với mọi f, g, h thuộc HomK(V, W), k, 1, 1 thuộc trường K.

Nói cách khác $Hom_K(V, W)$ là một K-không gian vectơ.

Chứng minh. Với các định nghĩa của hai phép toán nói trên, bạn đọc có thể dễ dàng kiểm tra các tính chất này. □

3.4. Tích hai ánh xạ tuyến tính

Mệnh đề 1. *Giả sử f: V → W, g: W~ Um hai ánh xạ tuyến tính. Thế thì ánh xạ gf : V → U xác định bởi $(gf)(\vec{\alpha}) = g(f(\vec{\alpha}))$, với mọi $\vec{\alpha} \in V$, cũng là một ánh xạ tuyến tính.*

Nó được gọi là tích của hai ánh xạ tuyến tính f và g.

Chứng minh. Vì f và g là những ánh xạ tuyến tính nên với $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ và với r, s ∈ **K**, ta có:

$$(gf)(r\vec{\alpha} + s\vec{\beta}) = g(f(r\vec{\alpha} + s\vec{\beta})) = g(rf(\vec{\alpha}) + sf(\vec{\beta})) = r(gf)(\vec{\alpha}) + s(gf)(\vec{\beta}).$$

Điều này chứng tỏ gf là một ánh xạ tuyến tính. □

Ví dụ. Cho f. $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$. g: $\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ xác định bởi:

$$f(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - a_2, 0, a_3, a_2),\ \ g(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_2 - a_1, a_3 + a_4).$$

Khi đó ánh xạ tuyến tính gf được xác định bởi:

$$\begin{aligned} gf(a_1, a_2, a_3) &= g(f(a_1, a_2, a_3)) = g(a_1 - a_2, 0, a_3, a_2) \\ &= (0 - a_1 + a_2, a_3 + a_2) = (a_2 - a_1, a_3 + a_2). \end{aligned}$$

Ta thấy rằng tích gf chỉ được xác định khi tập nguồn của g là tập đích của f. Do đó nếu V ≠ W thì, nói chung, trong $Hom_{\mathbf{K}}(V, W)$ không có khái niệm tích nói trên của hai ánh xạ tuyến tính.

Mệnh đề 2. *Giả sử f, g , h là những ánh xạ tuyến tính. Khi đó:.*

$$h(gf) = (hg)f,$$

$$h(f + g) = hf + hg,\ (f + g)h = fh + gh,$$

nếu các phép toán ở hai vế của đẳng thức đều có nghĩa.

Chứng minh. Đẳng thức thứ nhất là đúng đối với ba ánh xạ bất kì. Ta phải chứng minh hai đẳng thức còn lại. Để làm ví dụ, chứng minh đẳng thức h(f + g) = hf + hg.

Giả sử f, g: U $\to$ V, h: V $\to$ W, ta phải chứng tỏ rằng $h(f+g)(\vec{\alpha}) = (hf+hg)(\vec{\alpha})$, với mọi $\vec{\alpha} \in U$. Theo cách xác định tổng hai ánh xạ, ta có

$$(f+g)(\vec{\alpha}) - f(\vec{\alpha}) + g(\vec{\alpha}).$$

Theo cách xác định của tích hai ánh xạ ta có:

$$h(f+g)(\vec{\alpha}) = h((f+g)(\vec{\alpha})) = h(f(\vec{\alpha}) + g(\vec{\alpha})).$$

Vì h là một ánh xạ tuyến tính nên:

$$h(f(\vec{\alpha}) + g(\vec{\alpha})) = h(f(\vec{\alpha})) + h(g(\vec{\alpha})).$$

Lại theo định nghĩa của tích hai ánh xạ, ta được:

$$h(f(\vec{\alpha})) + h(g(\vec{\alpha})) = (hf)(\vec{\alpha}) + (hg)(\vec{\alpha}).$$

Lại theo định nghĩa của tổng hai ánh xạ:

$$(hf)(\vec{\alpha})) + (hg)(\vec{\alpha}) = (hf + hg)(\vec{\alpha}).$$

Kết cục $\quad h(f+g)(\vec{\alpha}) = (hf+hg)(\vec{\alpha})$, với mọi $\vec{\alpha} \in U$.

Vậy $\quad h(f+g) = hf + hg.$

Bạn đọc tự chứng minh đẳng thức còn lại. □

TÓM TẮT

V, W, U là những **K**-không gian vectơ.

f: V $\to$ W, là một ánh xạ tuyến tính nếu $f(\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ - $f(\vec{\alpha}) + f(\vec{\beta})$, $f(r\vec{\alpha}) = rf(\vec{\alpha})$ hay

$f(r\vec{\alpha}) + s\vec{\beta}) = rf(\vec{\alpha}) + sf(\vec{\beta})$, với mọi $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta} \in$ V, mọi r, s $\in$ K.

Nếu $(\varepsilon) = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_n\}$ là một cơ sở của v thì mỗi hệ vectơ $\{\vec{\delta}_1,..., \vec{\delta}_n\}$ của W xác định duy nhất một ánh xạ tuyến tính f : V $\to$ W sao cho $f(\vec{\varepsilon}_i) = \vec{\delta}_i$, với mọi i $\in$ {1,..., n}.

f là một đơn cấu nếu nó là một đơn ánh, là một toàn cấu nếu nó là một toàn ánh và là một đẳng cấu nếu nó đồng thời là đơn cấu và toàn cấu.

$$f: V \cong W \Leftrightarrow \dim V = \dim W.$$

Ánh xạ tuyến tính f tạo nên mối liên hệ giữa tập các không gian con của V và tập các không gian con của W.

A là một không gian con của V thì

$f(A) = \{\vec{\beta} \in W \mid \vec{\beta} = f(\vec{\alpha})$ với một $\vec{\alpha} \in A\}$ là một không gian con của W.

B là một không gian con của W thì:

f lại) = $\{\vec{\alpha} \in V \mid f(\vec{\alpha}) \in B\}$ là một không gian con của V.

Imf = f(V) được gọi là ảnh của V hay ảnh của f, Kerf = $f^{-1}\{\vec{0}_w\}$ được gọi là hạt nhân của f.

Nếu $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, ,..., \vec{\alpha}_m\}$ là một hệ sinh của không gian vectơ V thì $\{(\vec{\alpha}_1), f(\vec{\alpha}_2), ,..., f(\vec{\alpha}_m)\}$ là một hệ sinh của Imf.

f : V $\to$ W là một toàn cấu $\Leftrightarrow$ khi Imf = W, hà một đơn cấu $\Leftrightarrow$ Kerf $= \{\vec{0}\}$.

$$\dim V = \dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Ker} f.$$

$\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(V, W)$ là tập các ánh xạ tuyến tính từ V đến W. Với f, g $\in$ $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(V, W)$, k $\in$ **K**, f + g xác định bởi: (f + g) ($\vec{\alpha}$) - f($\vec{\alpha}$) + g($\vec{\alpha}$),

kf xác định bởi: (kf)($\vec{\alpha}$) = kf($\vec{\alpha}$), với mọi $\vec{\alpha} \in$ V.

Nếu f : V $\rightarrow$ W và g: f : W $\rightarrow$ U thì (gf)($\vec{\alpha}$) - g(f($\vec{\alpha}$)), với mọi $\vec{\alpha} \in$ V.

BÀI TẬP

§1. ĐỊNH NGHĨA - SỰ XÁC ĐỊNH MỘT ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

1. Trong các ánh xạ sau đây, ánh xạ nào 1à ánh xạ tuyến tính?

a) f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ xác định bởi $f(a_1, a_2, a_3) = (a_1, 0, 0)$,

b) g: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ xác định bởi $g(a_1, a_2, a_3) = (a_1, 0, a_1\text{-}a_2)$;

c) h: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ xác dịnh bởi $h(a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2\text{-}2 , 0)$;

d) k: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ xác định bởi $k(a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2 + a_3)$;

e) l: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ xác dịnh bởi $l(a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2a_3)$;

f) P: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ xác định bởi $p(a_1, a_2, a_3) = (a_1, 3a_2)$;

g) q: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ xác định bởi $q(a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_1\text{-}a_2, 0, a_2\text{-}a_3)$;

h) t: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ xác định bởi $t(a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_1 + a_2,a_3)$?

2. Trong các ánh xạ ở bài tập 1, ánh xạ nào 1à đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu ?

3. Cho $\vec{\varepsilon}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{\varepsilon}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{\varepsilon}_3 = (0, 0, 1)$ 1ập thành cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}^3$ và ba vectơ $\vec{\delta}_1 = (1, 2, 0)$, $\vec{\delta}_2 = (1, 0, -1)$, $\vec{\delta}_3\ (0, -2, 2)$. Ánh xạ tuyến tính f : $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ được xác định bởi $f(\vec{\varepsilon}_i) = \vec{\delta}_i = 1, 2, 3$. Tìm ảnh của các vectơ $\vec{\alpha} = (-3, 0, 5)$, $\vec{\beta} = (2, 2, -7)$, $\vec{\gamma} = (0, 5, 0)$, $\vec{\delta} = (x_1, x_2, x_3)$.

4. Cho các vectơ $\vec{\alpha}_1 = (2, 3, 1)$, $\vec{\alpha}_2 = (0, 1, 2)$, $\vec{\alpha}_3 = (1, 0, 0)$, $\vec{\delta}_1 = (1, 1, -1)$, $\vec{\delta}_2 = (1, 1, 1)$, $\vec{\delta}_3 = (2, 1 , 2)$. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính f : $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ sao cho $f(\vec{\alpha}_i) = \vec{\delta}_i$. Tìm f(1, 0, 0).

5. Cho ánh xạ tuyến tính f : $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ thoả mãn điều kiện:

f(1, 1, 0) = (1, -1 0) , f(1, 0, 1) = (2, 0, 1), f(0, - 1, 0) = (0, - 2, 0).

Tìm $\vec{\alpha}$ sao cho: $f(\vec{\alpha})$ - (3, 0, 0).

6. Cho ánh xạ tuyến tính f : V → W và hệ vectơ $\mathcal{A} = \{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2,..., \vec{\alpha}_m\}$ trong V. Chứng minh rằng nếu hệ vectơ $\{f(\vec{\alpha}_1), (\vec{\alpha}_2),..., (\vec{\alpha}_m)\}$ độc lập tuyến tính thì hệ $\mathcal{A}$ cũng độc lập tuyến tính.

7. Cho V, W là hai **K**-không gian vectơ, f : V → W là một đơn cấu và hệ vectơ $\mathscr{A} = \{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2,..., \vec{\alpha}_m\}$ độc lập tuyến tính trong V. Chứng minh rằng hệ vectơ $\{f(\vec{\alpha}_1), (\vec{\alpha}_2),..., (\vec{\alpha}_m)\}$ độc lập tuyến tính trong W.

8. Cho V, W là hai **K**-không gian vectơ, f : V → W là một toàn cấu và hệ vectơ $\mathscr{B} = \{\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2,..., \vec{\beta}_m\}$ độc lập tuyến tính trong W. Với mỗi $\vec{\beta}_i$ ta chọn một $\tilde{a}$; cố định sao cho $f(\vec{\alpha}_i) = \vec{\beta}_i$ - 1, 2,..., m. Chứng minh rằng:

a) Hệ vectơ $\mathscr{A} = \{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2,..., \vec{\alpha}_m\}$ độc lập tuyến tính trong V.

b) Nếu hệ vectơ $\mathscr{A}$ là một cơ sở của V thì f là một đẳng cấu.

§2. ẢNH VÀ HẠT NHÂN CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

9. Xét các ánh xạ tuyến tính trong bài tập 1.

a) Tìm ảnh và hạt nhân của mỗi ánh xạ.

b) Nhờ ảnh và hạt nhân suy ra ánh xạ nào là đơn cấu, là toàn cấu.

c) Tìm số chiều của ảnh, của hạt nhân của mỗi ánh xạ.

10. Cho P_2 là **R**-không gian vectơ gồm đa thức 0 và các đa thức f(x) ∈ **R**[x] với bậc f(x) ≤ 2. d: $P_2 \to P_2$ xác định bởi d(f(x)) = f '(x), ở đây f'(x) là đạo hàm của f(x). Tìm Imd, Kerd, dimImd, dimKerd.

11. Cho A và B là hai **K**-không gian vectơ. V = A × B là **K**-không gian vectơ với hai phép toán sau:

$$(\vec{\alpha}_1, \vec{\beta}_1) + (\vec{\alpha}_2, \vec{\beta}_2) = (\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2, \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2),\ \ k(\vec{\alpha}\ , \vec{\beta}) = (k\vec{\alpha}, k\vec{\beta}).$$

(xem bài tập 5, Ch. II)

Chứng minh rằng:

a) Ánh xạ p: V → A xác định bởi $p(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$: $\vec{\alpha}$ là một toàn cấu. Tìm Kerd.

b) Ánh xạ u: B → V xác định bởi $u(\vec{\beta}) = (\vec{0}, \vec{\beta})$ là một đơn cấu. Tìm Imu.

12. Cho f. V → W là một toàn cấu, $\{\vec{\varepsilon}_1,..., \vec{\varepsilon}_r\}$ là một cơ sở của Kerf. Bổ sung vào hệ vectơ này để được một cơ sở $\{\vec{\varepsilon}_1,..., \vec{\varepsilon}_r, \vec{\varepsilon}_{r+1},..., \vec{\varepsilon}_n\}$ của V. Chứng minh rằng:

a) Hệ vectơ $\{f(\vec{\varepsilon}_{r+1}),..., f(\vec{\varepsilon}_n)\}$là một cơ sở của W.

b) Gọi U là không gian con sinh bởi hệ vectơ $\{\vec{\varepsilon}_{r+1},..., \vec{\varepsilon}_n\}$. Chứng minh rằng

$$f_{|U}: U \to W \text{ là một đẳng cấu.}$$

§3. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN CÁC ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

13. Trong mỗi trường hợp dưới đây hãy xác định f + g, f - g, fg, gf rồi tìm ảnh, hạt nhân, số chiều của ảnh, số chiều của hạt nhân của chúng:

a) f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f(a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2, 0)$,

g: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $g(a_1, a_2, a_3)$ = (ai- a2' 0, a3).

b) f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f(a_1, a_2) = (a_1 + a_2, a_1 - a_2)$,

g: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $g(a_1, a_2) = (2a_1, 0)$.

14. Cho f. $\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$, g: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, trong đó $f(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_1 + a_2, a_3, a_4)$, $g(a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2 - a_3,)$.

a) xác đinh ánh xạ gf.

b) Tìm Imgf, Kergf.

c) gf có phải là một toàn cấu không?

15. Chứng minh rằng:

a) Tích của hai đơn cấu là một đơn cấu;

b) Tích của hai toàn cấu là một toàn cấu;

c) Tích của hai đẳng cấu là một đẳng cấu.

16. Tổng của hai đơn cấu có phải là một đơn cấu không? Cho ví dụ minh họa câu trả lời. Cùng câu hỏi đối với hai toàn cấu.

17. Cho f. U $\to$ V, g: V $\to$ W là hai ánh xạ tuyến tính. Chứng minh rằng:

a) Nếu gf là một đơn cấu thì f là một đơn cấu;

b) Nếu gf là một toàn cấu thì g là một toàn cấu.

18. Cho f: V $\to$ W là một ánh xạ tuyến tính. Chứng minh rằng:

a) Nếu f là một đơn cấu thì tồn tại một toàn cấu g: W $\to$ V sao cho gf

$= I_v$, (1_v là đồng cấu đồng nhất trên V).

b) Nếu f là một toàn cấu thì tồn tại một đơn cấu g: W $\to$ V sao cho fg $= 1_w$, (1_w là đồng cấu đồng nhất trên W).

19. Cho f, g $\in$ $Hom_{\mathbf{K}}$(V, W). Chứng minh rằng:

a) Ker(kf) + g) $\supseteq$ Kerf $\cap$ Kerg;

b) Ker(kf) = Kerf với mọi k $\in$ **K**, k $\neq$ 0.

20. Cho f. U $\to$V, g: V $\to$ W là hai ánh xạ tuyến tính. Chứng minh rằng:

a) Im(gf) = g(Imf);

b) Ker(gf) = f^{-1}(Kerg).

21. Cho f: V $\to$ W là một ánh xạ tuyến tính, A là một không gian con của V, B là một không gian con của W. Chứng minh rằng:

a) f^{-1}(f(A)) = A + Kerf,

b) f(f^{-1}(B)) = W $\cap$ Imf.

22. (Bài tập tổng hợp) Cho f và g là hai ánh xạ từ không gian vectơ $\mathbf{R}^4$ đến $\mathbf{R}^4$ xác định lần lượt bởi :

$f(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_1, a_2, - a_3, a_4)$, $g(a_1, a_2, a_3, a_4) = (2a_1, a_2, a_3, - a_4)$.

a) chứng minh rằng f và g là những tự đẳng cấu của $\mathbf{R}^4$.

b) Kí hiệu h = f + g. Ánh xạ tuyến tính h có phải là một đơn cấu, một toàn cấu không?

c) Tìm một cơ sở (ε) của Kerh và một cơ sở (δ) của Imh.

d) Với mỗi vectơ $\vec{\delta}_j$ trong cơ sở của Imh ta chọn một $\vec{\xi}_j$ sao cho h($\vec{\xi}_j$) = $\vec{\delta}_j$. Gọi U là không gian vectơ sinh bởi các vectơ $\vec{\xi}_j$ vừa chọn. Chứng minh rằng $\mathbf{R}^4$ là tổng trực tiếp của U và Kerh (xem bài tập 28, Ch. II).

e) Tìm vectơ (x_1, x_2, x_3, x_4) sao cho $gf(x_1, x_2, x_3, x_4) = (- 2, 0, 1, 0)$.

f) Gọi W là không gian con của $\mathbf{R}^4$ sinh bởi hai vectơ $\vec{\alpha}_1$ = (0, 2, -1, 0), $\vec{\alpha}_2$ = (1, 0, 1, 0).

Tìm một cơ sở của f^{-1}(w).

Tìm một cơ sở của g(w).

VÀI NÉT LỊCH SỬ

Như đã nói trong mục vài nét lịch sử của chương II, một trong những người sáng tạo ra khái niệm không gian vectơ là nhà toán học Đức tên là Hermann Gunther Grassmann. Sau đó, Peano, nhà toán học người Italia vào năm 1888, đã đưa ra định nghĩa tiên đề của không gian vectơ (hữu hạn chiều hoặc vô hạn chiều) trên trường số thực với các kí hiệu hoàn toàn hiện đại, ông cũng đã định nghĩa khái niệm ánh xạ tuyến tính từ một không gian này vào một không gian khác. Peano là một trong số những người sáng lập phương pháp tiên đề, và cũng là một trong số những người đầu tiên đánh giá đúng đắn giá trị của những cống hiến của Grassmann. Sau đó ít lâu, Pinkerle đã thử phát triển những ứng dụng của Đại số tuyến tính vào lý thuyết hàm. Điều đó giúp ông tìm hiểu được những trường hợp "liên hợp Lagrange đặc biệt" của những ánh xạ tuyến tính liên hợp và nó đã mau chóng ảnh hưởng đến không những việc nghiên cứu phương trình vi phân mà cả phương trình đạo hàm riêng. Kết quả của Pinkerle được thể hiện trong các công trình của Hilbert và trường phái của ông về không gian Hilbert, và cũng được thể hiện trong các ứng dụng của chúng vào giải tích. Cũng nhờ ánh xạ tuyến tính, vào năm 1922, Banach đã định nghĩa không gian mà sau này mang tên ông; đó là những không gian không đẳng cấu với không gian liên hợp với nó.

Chân dung Hilbert

Chương IV

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

MỞ ĐẦU

Nội dung giáo trình toán ở trường Phổ thông là các tập hợp số, đa thức, phân thức, hàm số và phương trình, trong đó có phương trình bậc nhất. Ở đó mới chỉ nghiên cứu cách giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

Một trong những phương hướng mở rộng toán học phổ thông là tổng quát hoá hệ phương trình bậc nhất. Đó là hệ phương trình tuyến tính. Chương này sẽ trình bày lý thuyết tổng quát về hệ phương trình này. Ta sẽ thấy ở đây không đòi hỏi một điều kiện nào về số phương trình, số ẩn. Lý thuyết này rất quan trọng và nó được hoàn thiện nhờ không gian vectơ và định thức. Nó có nhiều ứng dụng không những trong nhiều ngành toán học khác như: Đại số, Hình học; Giải tích; Lý thuyết phương trình vi phân, phương trình đạo hàm riêng; Quy hoạch tuyến tính, mà còn trong nhiều lĩnh vực khoa học khác và cả trong kinh tế.

Nội dung của chương này là:

Điều kiện có nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính tổng quát,

- Phương pháp giải;
- Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất;
- Mối liên hệ giữa nghiệm của hệ tổng quát với hệ thuần nhất.

Đó cũng là những vấn đề mà bạn đọc cần nắm vững. Bạn đọc cần giải nhiều bài tập để có kĩ năng giải các hệ phương trình và để có thể vận dụng chúng trong khi nghiên cứu các môn khoa học khác hoặc ứng dụng vào thực tế.

Để hiểu được cặn kẽ lý thuyết hệ phương trình tuyến tính, bạn đọc cần nắm vững những điều cơ bản về không gian vectơ như cơ sở, hạng của hệ vectơ, hạng của ma trận. Để giải được các hệ phương trình tuyến tính cần có kĩ năng tính định thức.

§1. PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH - PHƯƠNG PHÁP GAUSS

Trước hết, ta nhắc lại định nghĩa hệ phương trình tuyến tính đã được nói đến ở mục 6.1, Ch.I.

1.1. Định nghĩa.

1) Hệ phương trình tuyến tính n ẩn là hệ có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

trong đó $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *là các ẩn;* a_{ij}, b_i *thuộc trường số K, với* $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

a_{ij} *được gọi là hệ số của ẩn* x_j, b_i *được gọi là hạng tử tự do.*

2) Một nghiệm của hệ (1) là một bộ n số (c1, $c_2, \ldots, c_j, \ldots, c_n$*) thuộc trường K sao cho khi thay* $x_j = c_j$ *thì mọi đẳng thức trong hệ (1) đều là những đẳng thức số đúng.*

3) Ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

được gọi là ma trận các hệ số của hệ phương trình.

Ma trận

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

được gọi là ma trận bổ sung của hệ phương trình.

4) Hai hệ phương trình tuyến tính được gọi là tương đương nên *chúng có cùng một tập nghiệm.*

Ta có thể viết gọn hệ phương trình (1) dưới dạng:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ \ i \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

• Nếu coi mỗi cột của ma trận B như một vectơ trong không gian $\mathbf{K}^m$, chẳng hạn:

$$\vec{\alpha}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}),\ \vec{\beta} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$$

thì có thể viết hệ (1) dưới dạng:

$$\vec{\alpha}_1 x_1 + \vec{\alpha}_2 x_2 + \ldots + \vec{\alpha}_n x_n = \vec{\beta}\ .$$

và gọi đó là *dạng vectơ* của hệ (1). Như vậy, với ngôn ngữ không gian vectơ giải hệ phương trình (1) là tìm các hệ số x; trong cách biểu diễn tuyến tính $\vec{\beta}$ qua hệ vectơ $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n\}$.

• Nếu xét ánh xạ tuyến tính $\mathcal{A}$ xác định bởi hệ vectơ cột $\mathcal{A} = \{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_n\}$ của ma trận A, như đã định nghĩa ở ví dụ 4, mục 2.1, Ch.III và coi $\vec{\xi} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ như một vectơ ẩn thì hệ phương trình (1) có dạng:

$$\mathcal{A}(\vec{\xi}) = \vec{\beta}$$

Đó là *dạng ánh xạ tuyến tính* của hệ (1). Giải hệ phương trình (1) cc nghĩa là tìm tập các vectơ có dạng $\vec{\gamma} = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbf{K}^n$ sao cho $\mathcal{A}(\vec{\gamma}) = \vec{\beta}$, hay tìm $\mathcal{A}^{-1}(\vec{\beta})$.

1.2. Giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp Gauss (khử dần ẩn số)

Ở trường Phổ thông ta đã biết giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số. Phương pháp này dựa vào định lí sau đây về biến đổi tương đương hệ phương trình.

Định lí.

1) Nếu đổi chỗ một phương trình trong hệ thì được một hệ tương đương với hệ đã cho.

2) Nếu nhân một phương trình với một số khác 0 thì được một hệ tương đương với hệ đã cho.

3) Nếu nhân một phương trình với một sôi khác 0 rồi cộng vào một phương trình trong hệ thì được một hệ tương đương với hệ đã cho.

Chứng minh. Xin dành cho bạn đọc.

Dựa vào những phép biến đổi này ta có thể khử dần ẩn số của hệ; nói chính xác hơn là, biến hệ đã cho thành một hệ tương đương, trong đó các phương trình càng về cuối thì số ẩn càng ít.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 4x_3 = -7 & (1) \\ 2x_1 - 9x_2 - x_3 = 4 & (2) \\ 3x_1 - 11x_2 - 7x_3 = 17 & (3) \end{cases}$$

Giải

Nhân hai vế của phương trình (1) lần lượt với - 2, - 3 rồi cộng lũ lượt vào phương trình (2) và phương trình (3), ta được hệ:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 4x_3 = -7 & (1) \\ x_2 - 9x_3 = 18 & (4) \\ 4x_2 - 19x_3 = 38 & (5) \end{cases}$$

Nhân hai vế của phương trình (4) với - 4 rồi cộng vào phương trình (5) được:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 4x_3 = -7 & (1) \\ x_2 - 9x_3 = 18 & (4) \\ 17x_3 = -34 & (6) \end{cases}$$

Từ (6) suy ra $x_3 = -2$. Thay $x_3 = -2$ vào phương trình (4) ta tính được $x_2 = 0$. Thay $x_2 = 0$, $x_3 = -2$ Vào phương trình (1) ta tìm được $x_1 = 1$. Hệ có nghiệm duy nhất (1, 0, - 2).

Phương pháp giải trên đây được gọi là phương pháp khử dần ẩn số do K. Gauss đề xuất nên còn gọi là phương pháp Gauss.

Cụ thể, khi thực hiện phương pháp này ta chỉ thực hiện các phép biến đổi sau đây trên các dòng của ma trận bổ sung B của hệ phương trình:

a) Đổi chỗ hai dòng cho nhau;

b) Nhân các thành phần của một dòng với cùng một số khác 0;

c) Nhân các thành phần của một dòng với cùng một số rồi cộng vào một dòng khác.

Đó là *những phép biến đổi sơ cấp trên ma trận* đã nói đến ở mục 7.4, Ch.II.

Chẳng hạn, để giải hệ phương trình trong ví dụ 1, ta trình bày như sau:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 4 & -7 \\ 2 & -9 & -1 & 4 \\ 3 & -11 & -7 & 17 \end{array}\right)$$

(Phần của ma trận đứng bên trái gạch thẳng đứng là ma trận A)

Nhân dòng thứ nhất lần lượt với - 2, - 3, rồi lần lượt cộng vào dòng thứ hai và dòng thứ ba:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -9 & 18 \\ 0 & 4 & -19 & 38 \end{array}\right)$$

Nhân dòng thứ hai với - 4 rồi cộng vào dòng thứ ba:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -9 & 18 \\ 0 & 0 & 17 & -34 \end{array}\right)$$

Ma trận cuối cùng chính là ma trận bổ sung của hệ phương trình cuối cùng.

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 11 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$$

Giải

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -3 & 11 \\ 4 & 1 & -1 & 7 \end{array}\right)$$

Đổi chỗ dòng thứ nhất và dòng thứ hai cho nhau:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -3 & 11 \\ 4 & 1 & -1 & 7 \end{array}\right)$$

Nhân dòng thứ nhất lần lượt với - 4, - 2, - 4, rồi lần lượt cộng vào các dòng thứ hai, thứ ba, thứ tư:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & -3 & 15 \\ 0 & 5 & -5 & 15 \\ 0 & 5 & -5 & 15 \end{array}\right).$$

Nhân dòng thứ ba với - 1 rồi cộng lần lượt vào dòng thứ hai và dòng

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Nhân dòng thứ hai với - 5 rồi cộng vào dòng thứ ba:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ma trận này là ma trận bổ sung của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ -15x_3 = 15 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases}.$$

Rõ ràng mọi nghiệm của hệ ba phương trình đầu của hệ này đều là nghiệm của phương trình cuối cùng. Do đó chỉ cần giải hệ gồm ba phương trình đầu.

Hệ có nghiệm duy nhất: (1, 2, -1).

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -9 \\ 12x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -10 \end{cases}.$$

Giải

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & -6 & -9 \\ 12 & -2 & 1 & -2 & -10 \end{array}\right).$$

Đổi chỗ dòng thứ nhất với dòng thứ ba rồi tiếp tục biến đổi ta được:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -6 & -9 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 12 & -2 & 1 & -2 & -10 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -6 & -9 \\ 0 & -2 & -5 & 10 & 14 \\ 0 & -4 & -10 & 20 & 28 \\ 0 & -14 & -35 & 70 & 98 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -6 & -9 \\ 0 & -2 & -5 & 10 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ma trận cuối cùng ứng với hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + \quad x_2 + 3x_3 - \ 6x_4 = -9 \\ \quad - \ 2x_2 - 5x_3 + 10x_4 = 14 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \ 0x_4 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \ 0x_4 = 0 \end{cases}$$

Ta lại chỉ cần giải hệ gồm hai phương trình đầu của hệ này.

Viết nó dưới dạng:

$$\begin{cases} x_1 + \ x_2 = -3x_3 + \ 6x_4 - 9 \\ \quad -2x_2 = \ 5x_3 - 10x_4 + 14 \end{cases}$$

Nếu cho $x_3 = c_3$, $x_4 = c_4$, với c_3, c_4 thuộc trường số K thì vế phải của mỗi phương trình trong hệ này là một số và hệ trở thành một hệ Cramer vì định thức của nó là $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Do đó x_1, x_2 được xác định duy nhất bởi các đẳng thức:

$$x_1 = \frac{-c_3 + 2c_4 - 4}{2}, \ x_2 = \frac{-5c_3 + 10c_4 - 14}{2}.$$

Như vậy hệ phương trình có nghiệm là :

$$\left(\frac{-c_3 + 2c_4 - 4}{2}, \ \frac{-5c_3 + 10c_4 - 14}{2}, \ c_3, c_4\right) \quad (*)$$

Vì c_3, c_4 có thể nhận giá trị tuỳ ý trong K nên hệ có vô số nghiệm và nói (*) là *nghiệm tổng quát* của hệ.

Nếu cho c_3, c_4 một giá trị cụ thể thì ta được một *nghiệm riêng* của hệ. Chẳng hạn, với $c_3 = 0$, $c_4 = 1$, ta được một nghiệm riêng là (-1, - 2, 0, 1).

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + \ x_3 - 3x_4 = 7 \\ \ x_1 - \ x_2 + \ x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + \ x_4 = 3 \\ 4x_1 + \ x_2 - \ x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases}.$$

Giải

Bạn đọc hãy tự tìm hiểu những phép biến đổi sau:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -3 & | & 7 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & | & 5 \\ 2 & 3 & -3 & 1 & | & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 5 & | & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & | & 5 \\ 4 & 2 & 1 & -3 & | & 7 \\ 2 & 3 & -3 & 1 & | & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 5 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & | & 5 \\ 0 & 6 & -3 & -11 & | & -13 \\ 0 & 5 & -5 & -3 & | & -7 \\ 0 & 5 & -5 & -3 & | & -19 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & | & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -8 & | & -13 \\ 0 & 5 & -5 & -3 & | & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -12 \end{pmatrix}.$$

Ma trận cuối cùng ứng với hệ phương trình tương đương với hệ phương trình đã cho mà phương trình cuối cùng là: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = - 1\ 2$. Phương trình này vô nghiệm. Vậy hệ đã cho vô nghiệm.

1.3. Thực hiện phương pháp Gauss trên máy tính điện tử

Qua các ví dụ trên, ta thấy việc giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp Gauss được thực hiện bằng cách đưa ma trận bổ sung B của hệ về dạng mà ta tạm gọi là *"dạng thu gọn"*. Do đó giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp này trên máy tính thực chất là yêu cầu máy tính đưa ma trận B về dạng thu gọn.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 4x_3 = -7 & (1) \\ 2x_1 - 9x_2 - x_3 = 4 & (2) \\ 3x_1 - 11x_2 - 7x_3 = 17 & (3) \end{cases}.$$

Giải

Tạo ma trận bổ sung B rồi thu gọn:

{{1, - 5, 4, - 7}, {2, - 9, -1, 4}, {3, - 11, - 7, 17}} //RowReduce// MatrixForm↵

Màn hình xuất hiện:

Out[] =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

vậy nghiệm của hệ phương trình là (1, 0, - 2) vì ma trận này ứng với hệ Phương trình:

$$\begin{cases} x_1 & & & = 1 \\ & x_2 & & = 0 \\ & & x_3 & = -2 \end{cases}.$$

Ta tiếp tục giải lại các hệ phương trình trong các ví dụ 2, 3, 4 của mục 1, 2.

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 11 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$$

Giải.

{{4, 2, 1, 7}, {1, -1, 1, -2}, {2, 3, - 3, 11}, {4, 1, - 7}}//RowReduce// MatrixForm↵

Màn hình xuất hiện:

Out[] =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nghiệm của hệ là: (1, 2, -1).

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -9 \\ 12x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -10 \end{cases}.$$

Giải

{{3,-1,-1,2,1},{1,-1,-2,4,5}, {1,1,3,-6,-9}, {12,-2,1,-2,-10}}//RowReduce//MatrixForm↵

Màn hình xuất hiện:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ma trận này ứng vớ hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 \qquad + \frac{1}{2}x_3 - x_4 = -2 \\ \qquad x_2 + \frac{5}{2}x_3 - 5x_4 = -7 \end{cases}$$

Cho $x_3 = c_3$, $x_4 = c_4$, suy ra nghiệm tổng quát của hệ là:

$$\left(-\frac{1}{2}c_3 + c_4 - 2, -\frac{5}{2}c_3 + 5c_4 - 7,\ c_3,\ c_4\right).$$

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases}.$$

{{4,2,1,-3,7},{1,-1,1,2,5},{2,3,-3,1,3},{4,1,-1,5,1}}

//RowReduoe//MatrixForm↵

Màn hình xuất hiện:

Out[] =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{46}{15} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{37}{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hệ vô nghiệm vì ma trận này cho thấy phương trình cuối là $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + ox_4 = 1$.

§2. DIỀU KIỆN ĐỂ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH CÓ NGHIỆM

Ta đã dùng phương pháp Gauss để giải một hệ phương trình tuyến tính tuỳ ý. Song trong trường hợp tổng quát ta chưa trả lời câu hỏi: Với điều kiện nào thì hệ (1) có nghiệm? Định lí sau cho ta câu trả lời.

2.1. Điều kiện có nghiệm

Điều kiện này liên quan đến hạng của ma trận A và ma trận bổ sung B của hệ phương trình, cho nên ta cần nhớ lại rằng: Hạng của một hệ vectơ bằng số chiều của không gian sinh bởi hệ vectơ ấy; hạng của ma trận bằng hạng của hệ vectơ cột của nó.

Định lí Kronerker-Capelli. *Hệ phương trình tuyến tính (1) có nghiệm khi và chỉ khi hạng(A) = hạng(B).*

Chứng minh. Ta kí hiệu $\mathcal{A} = \{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, ..., \vec{\alpha}_n\}$ là hệ vectơ cột của ma trận A, $\mathcal{B} = \{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, ..., \vec{\alpha}_n, \vec{\beta}\}$ là hệ vectơ cột của ma trận bổ sung B của hệ phương trình (1), U là không gian sinh bởi hệ vectơ $\mathcal{A}$, W là không gian sinh bởi hệ vectơ $\mathcal{B}$. Vì $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ nên $U \subset W$.

"⇒" Giả sử hệ có nghiệm $(c_1, c_2,..., c_n)$. Khi đó $\vec{\beta} = c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + ... + c_n\vec{\alpha}_n$. Điều này có nghĩa là ta đã thêm vào hệ $\mathcal{A}$ vectơ $\vec{\beta}$ là tổ hợp tuyến tính của hệ $\mathcal{A}$ để được hệ $\mathcal{B}$. Theo mệnh đề mục 7.1, Ch.II, hạng(A) = hạng($\mathcal{A}$) = hạng($\mathcal{B}$) = hạng(B).

"⇐" Giả sử hạng(A) - hạng(B). Thế thì hạng($\mathcal{A}$) - hạng($\mathcal{B}$). Suy ra dimU = dimW. Vì $U \subset W$ nên theo định lí 1, mục 5.2, Ch.II, U = W.

Do đó $\vec{\beta} \in U$. Vì thế tồn tại bộ n số

$(c_1, c_2, ..., c_n)$ sao cho $\vec{\beta} = c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + ... + c_n\vec{\alpha}_n$. Vậy hệ (1) có nghiệm. □

Ví dụ 1. Mọi hệ Cramer đều có định thức |A| ≠ 0. Do đó hạng(a) = n. Ma trận B chỉ có n dòng và |A| cũng là định thức con cấp cao nhất khác 0 của B. Vì thế hạng(A) = hạng(B). Vậy mọi hệ Cramer đều có nghiệm.

Ví dụ 2. Xét hệ phương trình trong ví dụ 3 của mục 1.3. Các phép biến đổi sơ cấp đưa các ma trận A và B về dạng thu gọn sau đây:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Theo định lí ở mục 7.4, Ch.II, các phép biến đổi sơ cấp không làm thay đổi hạng của ma trận. Do đó ma trận này cho thấy hạng(A) = 2 = hạng(B). Vậy hệ đã cho có nghiệm.

Ví dụ 3. Xét hệ phương trình trong ví dụ 4 của mục 1.3. Các phép biến đổi sơ cấp đưa các ma trận A và B về dạng thu gọn sau đây:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{46}{15} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{37}{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ta thấy hạng(a) = 3, hạng(b) = 4. Hệ vô nghiệm.

2.2. Giải hệ phương trình tuyến tính bằng định thức

Bây giờ ta nghiên cứu cách giải hệ phương trình tuyến tính (1) bằng định thức.

Ta đã biết định thức con cấp cao nhất khác 0 của ma trận A cho ta biết số chiều và cơ sở của không gian sinh bởi hệ vectơ dòng của ma trận

A. Giả sử hạng(A) = hạng(B) = r, và không làm mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết định thức con cấp cao nhất khác 0 của A và B là:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots\dots\dots a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} \dots\dots\dots a_{2r} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_{r1} & a_{r2} \dots\dots\dots a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

Nếu r = n thì hệ phương trình đã cho là một hệ Cramer, nó có nghiệm duy nhất.

Nếu r < n thì ta xét hệ phương trình gồm r phương trình đầu.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r + a_{1r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r + a_{rr+1}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases} \quad (3)$$

Mọi vectơ dòng của ma trận bổ sung B đều là tổ hợp tuyến tính của r vectơ dòng đầu. Vì thế mỗi nghiệm của hệ (3) cũng là nghiệm của mỗi phương trình từ thứ r + 1 đến thứ m; do đó là nghiệm của hệ (1). Ngược lại, hiển nhiên mỗi nghiệm của hệ (1) là một nghiệm của hệ (3). Vì thế chỉ cần giải hệ (3).

Ta viết nó dưới dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{cases} \quad (4)$$

và gọi các ẩn $x_{r+1},\dots, x_n$ là những *ẩn tự do.*

Với mỗi bộ n - r số $(c_{r+1},\dots, c_n) \in \mathbf{K}^{n-r}$ các vế phải của r phương trình này là những hằng số. Vì định thức D ≠ 0 nên khi đó hệ (3) trở thành một hệ Cramer, ta tìm được giá trị duy nhất của $x_1,\dots, x_r$, chẳng hạn, $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2,\dots, x_r = c=$. Khi đó

$$(c_1, c_2,\dots, c_r , c_{r+1}, \dots ,c_n)$$

là một nghiệm của hệ (4). Như vậy các giá trị của $c_1, c_2,\dots, c_r$ phụ thuộc vào n - r tham số $c_{r+1},\dots, c_n$. Do $c_{r+1},\dots, c_n$ có thể nhận vô số giá trị nên hệ phương trình (4) có vô số nghiệm.

Vậy khi r < n hệ (1) có vô số nghiệm phụ thuộc vào n - r tham số.

Nếu coi rằng $c_{r+1},..., c_n$ nhận giá trị tuỳ ý thì nghiệm $(c_1, c_2,..., c_r, c_{r+1})$ được gọi là *nghiệm tổng quát*. Nếu cho mỗi c_j, $j = r + 1,... , n$, một giá trị xác định thì ta được một *nghiệm riêng*.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 4x_2 = -6 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ 5x_1 + 4x_3 = 9 \end{cases}$$

Giải

Tìm hạng của các ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & -5 & 1 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Định thức $D = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 36$. Do đó hạng(A) = 3.

Để tính hạng của B ta chỉ cần tính các định thức con của B bao quanh D.

Đó là:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & -5 & 1 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 0 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Vì thế hạng(B) = 3 = hạng(B). Vậy hệ có nghiệm. Giải hệ phương trình (gồm các phương trình ứng với các dòng của định thức D):

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 4x_2 \qquad = -6 \\ 2x_1 + \ x_2 + 3x_3 = \ 3 \end{cases}$$

Đó là một hệ Cramer vì D ≠ 0. Áp dụng công thức Cramer ta tìm được nghiệm là: (1, - 2, 1).

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình trong ví dụ 3 ở mục 1.2.

$$\begin{cases} 3x_1 - \ x_2 - \ x_3 + 2x_4 = 1 \\ \ x_1 - \ x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5 \\ \ x_1 + \ x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -9 \\ 12x_1 - 2x_2 + \ x_3 - 2x_4 = -10 \end{cases}.$$

Giải

Tìm hạng của các ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & -6 \\ 12 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & -6 & -9 \\ 12 & -2 & 1 & -2 & -10 \end{pmatrix}.$$

Ta thấy định thức

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Tính các định thức con cấp ba của A bao quanh D. Chúng đều bằng 0. Do đó hạng(A) = 2. Làm tương tự ta tìm được hạng(B) = 2. Vậy hệ có nghiệm. Giải hệ (gồm các phương trình ứng với các dòng của định thức D):

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - \ x_3 + 2x_4 = 1 \\ \ x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}.$$

Viết hệ này dưới dạng:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = \ x_3 - 2x_4 + 1 \\ \ x_1 - x_2 = 2x_3 - 4x_4 + 5 \end{cases}.$$

Cho $x_3 = c_3$, $x_4 = c_4$, ta có hệ Cramer:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = c_3 - 2c_4 + 1 \\ x_1 - x_2 = 2c_3 - 4c_4 + 5 \end{cases}.$$

Giải hệ này ta được $x_1 = \frac{-c_3 + 2c_4 - 4}{2}$, $x_2 = \frac{-5c_3 + 10c_4 - 14}{2}$.

Nghiệm tổng quát: $(\frac{-c_3 + 2c_4 - 4}{2}, \frac{-5c_3 + 10c_4 - 14}{2}, c_3, c_4)$.

Nếu cho, chẳng hạn, $c_3 = 0$, $C_4 = 1$ thì được một nghiệm riêng: (-1, -2, 0, 1).

Ví dụ 3. Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

Giải

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2(a+2).$$

• Nếu $a \neq 1$, $a \neq -2$ thì $D \neq 0$, hệ đã cho là một hệ Cramer.

$$D_x = -(a-1)^2(a+1),\ D_y = (a-1)^2,\ D_z = (a^2-1)^2.$$

Hệ có nghiệm duy nhất:

$$\left(-\frac{a+1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{(a+1)^2}{a+2}\right)$$

• Nếu a - 1 thì hệ phương trình chỉ có một phương trình:

$$x + y + z = 1 \text{ hay } x = -y - z + 1.$$

Nghiệm tổng quát của hệ là $(-c_2 - c_3 + 1, c_2, c_3)$.

• Nếu a = - 2 thì ma trận

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

có định thức bằng 0 nhưng có định thức con

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0;$$

còn ma trận bổ sung $B = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ có định thức cấp ba

$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 9$; nghĩa là hạng(B) = 3 ≠ hạng(A).

Vậy hệ vô nghiệm.

§3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT

3.1. Định nghĩa

Cho hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Hệ phương trình

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

được gọi là hệ thuần nhất liên kết với hệ (1).

Nếu viết dưới dạng vectơ thì hệ (1) và hệ (2) có dạng tương ứng là:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j\vec{\alpha}_j = \vec{\beta} \quad (1), \qquad\qquad \sum_{j=1}^{n} x_j\vec{\alpha}_j = \vec{0} \qquad (2).$$

Nếu viết dưới dạng ánh xạ tuyến tính thì hệ (1) và hệ (2) có dạng tương ứng là:

$$\mathcal{A}(\vec{\xi}) = \vec{\beta} \ (1), \qquad\qquad \mathcal{A}(\vec{\xi}) = \vec{0} \qquad (2).$$

Giải hệ thuần nhất (2) chính là tìm tập hợp các vectơ có dạng $\vec{\gamma} = (c_1, c_2,..., c_n) \in \mathbf{K}^n$ sao cho $\mathcal{A}(\vec{\gamma}) = \vec{0}$, hay tìm Ker$\mathcal{A}$.

Ví dụ: Hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

là một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.

Rõ ràng hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có một nghiệm là (0, 0, 0). Nó được gọi là *nghiệm tầm thường*. Nếu A là ma trận các hệ số còn B là ma trận bổ sung của hệ thuần nhất thì ta luôn luôn có: hạng(A) = hạng(B) vì mọi thành phần ở cột cuối của ma trận B đều bằng 0.

Giả sử hạng(A) = r. Nếu r = n thì (0, 0,... , 0) là nghiệm duy nhất. Nếu r < n thì hệ có vô số nghiệm, do đó hệ có nghiệm khác (0, 0,..., 0).

Bây giờ, ta hãy xét xem tập nghiệm của hệ này có cấu trúc như thế nào và nghiệm của nó liên quan với nghiệm của hệ phương trình tuyến tính liên kết như thế nào.

3.2. Không gian nghiệm của hệ thuần nhất

Định lí. *Giả sử S là tập nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (2). Khi đó:*

1) S là một không gian con của không gian vectơ $\boldsymbol{K}^n$.

2) Nếu A là ma trận các hệ số và hạng(A) = r thì dimS = n - r.

Chứng minh.

1) Xét hệ tuyến tính thuần nhất (2) dưới dạng ánh xạ tuyến tính. Như trong định nghĩa 3.1 đã nói, tập nghiệm S = Ker$\mathcal{A}$. Theo hệ quả 1, mục

2.1, Ch.III, S = Ker$\mathscr{A}$ là một không gian con của không gian $\mathbf{K}^n$.

2) Giả sử hạng(A) = r. Theo ví dụ 4, mục 2.1, Ch. III, Im$\mathscr{A}$ là không gian sinh bởi hệ vectơ cột của ma trận A nên từ định lí 2.2, Ch.III, suy ra:

dimS = dimKer$\mathscr{A}$ = dimK^n – dimIm$\mathscr{A}$ = n - hạng($\mathscr{A}$) = n - hạng(A) = n - r. □

Định nghĩa. *Mỗi cơ sở của không gian S các nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất được gọi là một hệ nghiệm cơ bản.*

Để tìm hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (2) ta làm như sau.

Giả sử r < n và không làm mất tính tổng quát ta có thể giả thiết rằng định thức con cấp cao nhất khác 0 của ma trận A là

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots\dots\dots a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} \dots\dots\dots a_{2r} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_{r1} & a_{r2} \dots\dots\dots a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

Khi đó hệ (2) tương đương với hệ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

Mỗi nghiệm của hệ phụ thuộc vào n - r ẩn tự do: $x_{r+1}, x_{r+2}, .., x_n$.

Cho $x_{r+1} = 1$ $x_{r+2} = \dots = x_n = 0$ ta được một nghiệm có dạng: $\vec{\xi}_1 = (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1r}, 1, 0, \dots, 0)$.

Lần lượt cho $x_{r+1} = 0$, $x_{r+2} = 1$, $x_{r+1} = \dots = x_n = 0$, v.v... Kết cục, ta được n - r nghiệm riêng:

$\vec{\xi}_1 = (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1r}, 1, 0, \dots, 0)$, (ứng với: $x_{r+1} = 1$, $x_{r+2} = \dots = x_n = 0$),

$\vec{\xi}_2 = (c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2r}, 0, 1, \dots, 0)$, (ứng với: $x_{r+1} = 0$, $x_{r+2} = 1$, $x_{r+3} = \dots = x_n = 0$),

....,

$\vec{\xi}_{n-r} = (c_{n-r1}, c_{n-r2}, \dots, c_{n-rr}, 0, 0, \dots, 1)$, (ứng với: $x_{r+1} = x_{r+2} = \dots = x_{n-1} = 0$, $x_n = 1$).

Đó là n - r vectơ thuộc S.

Ma trận mà các dòng là những vectơ này có định thức con cấp n - r

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 1 \ \ldots & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ 0 & 0 \ \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1 .$$

Do đó hạng của hệ vectơ $\{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \ldots, \vec{\xi}_{n-r}\}$ bằng n - r. Vậy hệ độc lập tuyến tính. Vì dimS = n - r nên theo hệ quả, mục 5.1, Ch.II, hệ vectơ này là một cơ sở của S. Vậy hệ nghiệm $\{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \ldots, \vec{\xi}_{n-r}\}$ là một hệ nghiệm cơ bản.

Chú ý: Trong cách tìm $\vec{\xi}_j$ của hệ nghiệm cơ bản trên đây, không nhất thiết phải chọn $x_{r+j} = 1$, mà có thể chọn x_{r+j} là một số khác 0 nào đó thuận tiện cho việc tính toán.

Ví dụ 1. Tìm hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}.$$

Ma trận các hệ số có định thức con cấp hai

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Hệ phương trình đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = -2x_1 - x_4 \\ 2x_2 + x_3 = -4x_1 + 3x_4 \end{cases}$$

Các ẩn tự do là x_1, x_4. Giải hệ này ta được:

$$\begin{cases} x_2 = -2x_1 + \dfrac{2}{3}x_4 \\ x_3 = \dfrac{5}{3}x_4 \end{cases}$$

Cho $x_1 = 1$, $x_4 = 0$, ta được x2 = -2, $x_3 = 0$. Nghiệm riêng tương ứng là (1, -2, 0, 0).

Cho $x_1 = 0$, $x_4 = 1$, ta được $x_2 = \dfrac{2}{3}$ $x_3 = \dfrac{5}{3}$. Nghiệm riêng tương ứng là $(0, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1)$.

Vậy hệ nghiệm cơ bản là:

$$\begin{cases}(1, -2, 0, 0)\\ (0, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1)\end{cases}$$

Nếu khi tìm vectơ thứ hai của hệ nghiệm cơ bản ta cho $x_1 = 0$, $x_4 = 3$ thì ta được nghiệm riêng tương ứng là (0, 2, 5, 3) và hệ vectơ

$$\begin{cases}(1, & -2, 0, 0)\\ (0, & 2, 5, 3)\end{cases}$$

cũng độc lập tuyến tính vì có định thức con $\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 2\end{vmatrix} = 2$.Vì dimS = 2 nên hệ vectơ này cũng là một cơ sở của S; do đó nó cũng là một nghiệm cơ bản.

Chú ý: Biết một hệ nghiệm cơ bản $\{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \ldots, \vec{\xi}_{n-r}\}$ của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất là biết tất cả các nghiệm của nó vì khi đó mỗi nghiệm là một tổ hợp tuyến tính của hệ nghiệm cơ bản này; tức là mỗi nghiệm đều có dạng

$$\sum_{i=1}^{n-r} s_i\xi_i \text{, với } s_i \in \mathbf{R},\ i \in \{1, 2, \ldots, n-r\}.$$

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss, rồi tìm hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình:

$$\begin{cases}3x_1 \qquad\quad - 3x_3 + 3x_4 = 0\\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0\\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 0\\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = 0\end{cases}.$$

Biến đổi ma trận A:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & -1 \\ 3 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 3 & -6 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hệ đã cho trở thành hệ tương đương:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_2 - 6x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x_1 - x_2 = -x_3 - 2x_4 \\ x_2 = 2x_3 + x_4 \end{cases}.$$

Nghiệm tổng quát của hệ là $(c_3 - c_4, 2c_3 + c_4, c_3, c_4)$

cho $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, ta được một nghiệm riêng: (1, 2, 1, 0).

Cho $x_3 = 0$, $X_4 = 1$, ta được một nghiệm riêng: (-1, 1, 0, 1).

Hệ nghiệm cơ bản là: $\begin{cases} (1, 2, 1, 0) \\ (-1, 2, 0, 1) \end{cases}$

Ta xét tiếp mối liên hệ giữa các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính và của hệ thuần nhất liên kết. Nhắc lại rằng mỗi nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính n ẩn là một vectơ của không gian Kết.

3.3. Liên hệ giữa nghiệm của hệ phương trình tuyến tính và nghiệm của hệ thuần nhất liên kết

Định lí. *Nếu $\vec{\gamma} \in K^n$ là một nghiệm riêng của hệ phương trình tuyến tính thì mỗi nghiệm của hệ này là tổng của $\vec{\gamma}$ với một nghiệm của hệ thuần nhất liên kết.*

Nói chung, nghiệm tổng quát của hệ phương trình tuyến tính bằng tổng của một nghiệm riêng của nó và nghiệm tổng quát của hệ thuần nhất liên kết.

Chứng minh. Giả sử $\vec{\gamma} = (c_1, c_2, ..., c_n)$ là một nghiệm riêng của hệ phương trình tuyến tính (1) và $\vec{\delta} = (d_1, d_2, ..., d_n)$ là một nghiệm bất kì của hệ thuần nhất (2). Khi đó:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\vec{\alpha}_j = \vec{\beta}, \quad \sum_{j=1}^{n} d_j\vec{\alpha}_j = \vec{0}.$$

Do đó $$\sum_{j=1}^{n}(c_j + d_j)\vec{\alpha}_j = \sum_{j=1}^{n} c_j\vec{\alpha}_j + \sum_{j=1}^{n} d_j\vec{\alpha}_j = \vec{\beta} + \vec{0} = \vec{\beta}.$$

Điều này có nghĩa là $\vec{\gamma} + \vec{\delta} = (c_1 + d_1, c_2 + d_2,..., c_n + d_n)$ là một nghiệm của hệ phương trình tuyến tính (1).

Ngược lại, giả sử $\vec{\kappa} = (k_1, k_2,..., k_n)$ là một nghiệm tuỳ ý của hệ phương trình tuyến tính (1); nghĩa là $\sum_{j=1}^{n}\vec{k}_j\vec{\alpha}_j = \vec{B}$

Đặt $\vec{\delta} = \vec{\kappa} - \vec{\gamma} = (k_1 - c_1, k_2 - c_2,..., k_n - c_n)$, ta có:

$$\sum_{j=1}^{n}(k_j - c_j)\vec{\alpha}_j = \sum_{j=1}^{n} k_j\vec{\alpha}_j - \sum_{j=1}^{n} c_j\vec{\alpha}_j = \vec{\beta} - \vec{\beta} = \vec{0}.$$

Điều này có nghĩa là $\vec{\delta}$ là một nghiệm của hệ thuần nhất (2). Hơn nữa từ $\vec{\delta} = \vec{\kappa} - \vec{\gamma}$ Suy ra $\vec{\kappa} = \vec{\gamma} + \vec{\delta}$. □

Chú ý. Ý nghĩa của định lí trên đây là: Nếu biết một nghiệm riêng của một hệ phương trình tuyến tính và biết một hệ nghiệm cơ bản của hệ thuần nhất liên kết thì biết được tất cả các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính ấy. Nhờ điều này mà máy tính có thể giải hệ phương trình tuyến tính tuỳ ý.

3.4. Giải hệ phương trình tuyến tính bằng máy tính điện tử

Khi giải hệ phương trình tuyến tính (1) với hạng(A) ≠ hạng(B) máy trả lời hệ vô nghiệm. Khi hạng(A) - hạng(B) - r < n thì máy chỉ có thể cho một nghiệm riêng. Nhưng vì máy có thể cho hệ nghiệm cơ bản của hệ thuần nhất liên kết nên ta có thể tìm được công thức nghiệm tổng quát của hệ phương trình tuyến tính.

Theo một chương trình tính toán đã cài đặt trong máy tính của bạn cũng có nhiều phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính. Ở đây xin giới thiệu một phương pháp đơn giản nhất, theo chương trình "MATHEMATICA 4.0""

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -9 \\ 12x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -10 \end{cases}.$$

Giải

Tạo ma trận các hệ số, đánh lệnh:

A={{3,-1,-1,2},{1,-1,-2,4},{1,1,3,-6},{12,-2,1,-2}}↵

Màn hình xuất hiện:

Out[1]={{3,-1,-1,2},{1,-1,-2,4},{1,1,3,-6},{12,-2,1,-2}}

• Giải hệ phương trình, đánh lệnh:

LinearSolve[A,{1,5,- 910}]↵

Màn hình xuất hiện:

Out[2]-{-2,-7,0,0}

Đó là một nghiệm riêng của hệ đã cho.

• Tìm hệ nghiệm cơ bản của hệ thuần nhất liên kết, đánh lệnh:

NullSpace[A] ↵

Màn hình xuất hiện hệ nghiệm cơ bản của hệ thuần nhất:

Out[3]={{1,5,0,1}, {-1,-5,2,0}}.

Muốn tìm nghiệm tổng quát của hệ đã cho ta chỉ việc lấy tổng của một nghiệm riêng của hệ đã cho với một tổ hợp tuyến tính của hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình thuần nhất liên kết:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2, -7, 0, 0) + c_3(-1, -5, 2, 0) + c_4(1, 5, 0, 1) = (-2-c3+ c_4, -7- 5c_3 + 5c_4, 2c_3, c_4).$$

Chú ý: Nếu quan sát nghiệm tổng quát ở đây với nghiệm tổng quát ở ví dụ 2, mục 2.2, ta thấy chúng khác nhau. Song nếu thay c3 ở đây bởi $c_3 = \frac{1}{2}c_3$ thì ta được công thức nghiệm tổng quát ở ví dụ 2, mục 2.2. Hơn nữa một hệ phương trình tuyến tính có thể có vô số nghiệm riêng và hệ thuần nhất cũng có thể có vô số hệ nghiệm cơ bản. Do đó, theo định lí 3.4, nói chung, có vô số cách biểu diễn nghiệm tổng quát.

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -9 \\ 12x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 10 \end{cases}.$$

Giải

• Tạo ma trận các hệ số.

A={{3,-17-1,2},{1,-1,-2,4},{1,1,3,-6},{12,-2,1,-2}} ↵

Màn hình xuất hiện:

Out[1]={{3,-1,-1,2},{1,-1,-2,4},{1,1,3,-6},{12,-2,1,-2}}

• Giải hệ phương trình, đánh lệnh:

LinearSolve[A,{1,5,-9,10}}] ↵

Màn hình xuất hiện:

LinearSolve: nosol: Linear equation encountered which has no solution

Out[2]=linearsolve[{{3,-1,-1,2},1,-1,-2,4~1,1,3,-6},{12,-2,1,-2}},{1,5,-9,10}].

Điều này có nghĩa rằng hệ vô nghiệm. Sở dĩ hệ vô nghiệm là vì hạng(A) = 2, còn hạng(B) - 3.

TÓM TẮT

Chương này trình bày lý thuyết về hệ phương trình tuyến tính.

Về phương diện lý thuyết, nhờ các kiến thức về không gian vectơ và định thức, chương này cho ta biết: hệ có nghiệm khi và chỉ khi hạng(A) = hạng(B), trong đó A là ma trận các hệ số của hệ phương trình, B là ma trận bổ sung.

Trong trường hợp hệ có n ẩn, nếu hạng(A) = hạng(B) = n thì đó là hệ Cramer, nó có nghiệm duy nhất; nếu hạng(a) = hạng(b) - r < n thì hệ có vô số nghiệm mà giá trị của các ẩn phụ thuộc vào n - r ẩn tự do. Khi đó, nếu cho mỗi ẩn tự do một giá trị xác định ta được một nghiệm riêng nếu coi mỗi ẩn tự do như một tham số thì ta được nghiệm tổng quát.

Về phương diện thực hành, ta có hai cách giải hệ phương trình tuyến tính: phương pháp Gauss khử dần ẩn số và phương pháp dùng định thức. Khi dùng phương pháp định thức ta chỉ cần giải hệ phương trình gồm những phương trình ứng với các dòng của định thức con cấp cao nhất khác 0. Các ẩn tự do là những ẩn mà hệ số nằm ngoài định thức con cấp cao nhất khác 0 ấy.

Hệ phương trình tuyến tính mà các hệ số tự do bằng 0 gọi là một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất. Hệ này luôn luôn có nghiệm vì hạng(A) = hạng(B). Tập S các nghiệm của hệ thuần nhất n ẩn là một không gian con của không gian $\mathbf{K}^n$. Nếu hạng(A) - r thì dims = n - r. Nếu biết một nghiệm riêng của một hệ phương trình tuyến tính thì nghiệm tổng quát của nó bằng nghiệm riêng đó cộng với nghiệm tổng quát của hệ thuần nhất liên kết.

BÀI TẬP

§1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾNTÍNH PHƯƠNG PHÁP GAUSS

1. Giải hệ phương trình bằng phương pháp Gauss

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1 \\ 7x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 11 \\ x_1 + 7x_2 - 13x_3 = 15 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 11x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 10x_4 = 1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 - 3x_4 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 - x_4 = 9 \\ 4x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 7 \\ 3x_1 + 15x_2 - 9x_3 + x_4 = 19 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -7 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 7x_4 = -12 \\ 3x_1 + 5x_2 - 10x_3 + 16x_4 = -17 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 9x_4 = 6 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ 5x_1 - 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = 12 \end{cases}$

2. Chứng minh định tí ở mục 1.2.

§2. ĐIỀU KIỆN ĐỂ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH CÓ NGHIỆM

3. Xét xem các hệ phương trình sau có nghiệm hay không:

a) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ 3x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 5x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 7x_4 = 3 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 3x_4 = -7 \end{cases}$

4. Đối với mỗi hệ phương trình sau, tìm giá trị của tham số a, b để hệ có nghiệm:

a) $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x + by + z = 3 \\ x + 2by + z = 4 \end{cases}$

5. Tìm điều kiện cần và đủ để hệ phương trình

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

có nghiệm .

6. Chứng minh rằng với mọi giá trị của a, b, c hệ phương trình

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = a^3 \\ x + by + b^2z = b^3 \\ x + cy + c^2z = c^3 \end{cases}$$

luôn luôn có nghiệm.

7. Tìm giá trị của tham số a để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = a \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = -12 \end{cases}$$

8. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp định thức:

a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -12 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 14x_2 + 7x_3 = -19 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -12 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + 9x_4 = -12 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 11x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -5 \\ 4x_1 - x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 5x_2 - 13x_3 + 3x_4 = -1 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 8 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 9 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 3 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = -3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 10 \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 1 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$ j) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$

9. Với điều kiện nào thì ba đường thẳng phân biệt

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ đồng quy?

10. Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm: A(2, 1), C(0, 2), C(0, 1).

11. Tìm các hệ số a, b, c, d để đồ thị của hàm số $y = ax_3 + bx_2 + cx + d$ đi qua bốn điểm:

$M_1(1, 0)$, $M_2(0, -1)$, $M_3(-1, -2)$, $M_4(2, 7)$.

12. xác đinh tam thức bậc hai f(x) = ax2 + bx + c biết rằng f(1) = -1, f(-3) = 47, f(2) = 12.

13. Trong không gian vectơ R4 cho hệ vectơ:

$\vec{\alpha}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{\alpha}_2 = (2, 2, 2, 2)$, $\vec{\alpha}_3 = (3, 0, -1, 1)$.

Hãy biểu thị tuyến tính vectơ $\vec{\alpha} = (-12, 3, 8, -2)$ qua hệ vectơ đã cho.

14. Trong không gian vectơ $\mathbf{R}^3$ cho hai cơ sở:

$$(\varepsilon):\ \vec{\varepsilon}_1 = (1, 0, 0),\ \vec{\varepsilon}_2 = (0, 1, 0),\ \vec{\varepsilon}_3 = (0, 0, 1);$$
$$(\xi):\ \vec{\xi}_1 = (2, -1, 3),\ \vec{\xi}_2 = (-3, 1, -2),\ \vec{\xi}_3 = (0, 4, 5).$$

Tìm ma trận chuyển từ cơ sở (ε) sang cơ sở (ξ). Tìm tọa độ của vectơ $\vec{\alpha} = (-1, 2, 0)$ đối với cơ sở (ξ).

15. Trong không gian vectơ $\mathbf{R}^3$ cho hai cơ sở:

$$(\varepsilon):\ \vec{\varepsilon}_1 = (1, 1, -1),\ \vec{\varepsilon}_2 = (1, 1, 0),\ \vec{\varepsilon}_3 = (2, 0, 0);$$
$$(\xi):\ \vec{\xi}_1 = (1, -1, 0),\ \vec{\xi}_2 = (2, -1, 0),\ \vec{\xi}_3 = (1, 1, -1).$$

Tìm ma trận chuyển từ cơ sở (ξ) sang cơ sở (ε).

§3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT

16. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$.

17. Dùng hệ phương trình tuyến tính và định nghĩa của hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính để chứng tỏ các hệ vectơ sau trong không gian vectơ R4 là phụ thuộc tuyến tính:

a) $\vec{\alpha}_1 = (3, 2, 4, 7)$, $\vec{\alpha}_2 = (4, -3, 11, 2)$, $\vec{\alpha}_3 = (-5, 3, -13, 1)$, $\vec{\alpha}_4 = (7, -2, 16, 3)$;

b) $\vec{\beta}_1 = (1, 7, 3, 5)$, $\vec{\beta}_2 = (3, 5, 1, 7)$, $\vec{\beta}_3 = (1, -1, -1, 1)$, $\vec{\beta}_4 = (1, 5, 2, 4)$.

18. Các hệ vectơ sau:

a) $\vec{\alpha}_1 = (1, -2, 1, 0, 0)$, $\vec{\alpha}_2 = (1, -2, 0, 1, 0)$, $\vec{\alpha}_3 = (0, 0, 1, -1, 0)$, $\vec{\alpha}_4 = (1, -2, 3, -2, 0)$;

b) $\vec{\beta}_1 = (1, -2, 1, 0, 0)$, $\vec{\beta}_2 = (0, 0, -1, 1, 0)$, $\vec{\beta}_3 = (4, 0, 0, -6, 2)$;

hệ nào là hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \end{cases} ?$$

19. Tìm hệ nghiệm cơ bản và số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 6x_4 - 12x_5 + 3x_6 = 0 \\ x_1 + x_3 - x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - 3x_5 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 - 6x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ 3x_1 - 12x_2 - 6x_3 + x_4 + x_5 + 3x_6 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - x_4 + x_5 - x_6 = 0 \\ 3x_2 - x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$

20. Cho hai hệ phương trình:

$$\text{a)} \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1 \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1 \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1 \end{cases}$$

Biết một nghiệm riêng của hệ a) là $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0)$, của hệ bị là $(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, 0, 0, 0)$. Đối với mỗi hệ phương trình:

• Tìm nghiệm tổng quát của mỗi hệ nhờ hệ nghiệm cơ bản của hệ thuần nhất liên kết tương ứng;

• Nhờ nghiệm tổng quát vừa tìm được, tìm một nghiệm riêng mà các thành phần tọa độ là những số nguyên.

21. Cho hệ ba phương trình bậc nhất:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \\ a_3x + b_3y = c_3 \end{cases}$$

Dùng hạng(A), hạng(B), hãy xét sự có nghiệm và vô nghiệm của hệ trong tất cả các trường hợp có thể xảy ra và minh họa hình học cho mỗi trường hợp.

VÀI NÉT LỊCH SỬ

Phương trình tuyến tính và hệ phương trình tuyến tính là những bài toán cổ nhất của đại số. Ngay từ buổi sơ khai của toán học người ta đã giải những bài toán bằng một phép nhân hoặc một phép chia, tức là tìm nghiệm của một phương trình dạng ax = b. Việc giải các phương trình bậc nhất đã được các nhà toán học Babilon cổ Hilạp biết đến. Các tác phẩm toán học của Điôphăng là đỉnh cao của những thành tựu nghiên cứu toán học thời kì này (thế kỉ thứ ba trước công nguyên). Sau đó những vấn đề về phương trình lại được phát triển bởi các nhà toán học ấn độ như Ariabkhata (thế kỉ thứ Vi), Bramagupta (thế kỉ thứ VII) và Khaskara (thế kỉ thứ XII). Người ta cũng thấy những bài toán về phương trình bậc nhất ở Trung Quốc từ thế kỉ thứ II trước công nguyên.

Nói tóm lại, phương trình tuyến tính được biết đến từ rất sớm. Tuy nhiên nó lại phát triển khá muộn, vì người ta coi rằng để đưa một phương trình tuyến tính về dạng ax = b thì chỉ cần biết quy tắc chuyển Bố hạng từ vế này sang vế kia và rút gọn các số hạng đồng dạng là đủ, và muốn giải hệ nhiều phương trình tuyến tính thì chỉ cần khử dần cho đến khi chỉ còn một ẩn. Do đó trong một thời gian dài nó hầu như không phát triển.

Lý thuyết về hệ phương trình tuyến tính sau này được phát triển là do những nhu cầu về tính toán, chẳng hạn phải xác định phương trình của một đường cong đi qua những điểm cho trước. Vì thế lúc đầu người ta chỉ biết đến những hệ phương trình có số phương trình bằng số ẩn; và nếu có xuất hiện những hệ phương trình mà số phương trình khác số ẩn thì người ta coi rằng bài toán đặt ra như thế là bài toán tồi. Ngược lại, nhờ có đại số tuyến tính nói chung và hệ phương trình tuyến tính nói riêng mà Hình học giải tích được hoàn thiện đến mức mẫu mực.

Nhờ có định thức đưa ra bởi Leibnitz (1646-1716), Cramer (1704-1752), và không gian vectơ được đề xướng bởi Grassmann và Hamilton (1805-1865) và khái niệm ma trận được hình thành bởi nhà toán học Anh J. Sylvester (1814-1897) mà lý thuyết phương trình tuyến tính ngày càng được hoàn thiện. Cramer trình bày lời giải bài toán xác định đường conic đi qua 5 điểm cho trước bởi việc giải một hệ phương trình tuyến tính nhờ định thức (tuy nhiên khi đó chưa có tên gọi định thức). Nhờ phương pháp của Cramer mà sau này vào năm 1771, Vandermonde (1735-1796), nhà toán học Pháp, đã thiết lập công thức nghiệm của hệ phương trình tuyến tính mà ngày nay gọi là công thức Cramer. Chính Sylvester đã đưa ra cả khái niệm hạng của ma trận nhưng chưa đặt tên gọi cho ma trận.

Lý thuyết hệ phương trình tuyến tính đã ảnh hưởng sâu rộng đến các lĩnh vực khác như phương trình vi phân, phương trình đạo hàm riêng. Lagrange, Euler đã ứng dụng nó vào việc nghiên cứu những hệ phương trình vi phân tuyến tính và chính các vị này đã nói đến hệ phương trình tuyến tính thuần nhất và coi rằng mỗi nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất là tổng của một nghiệm riêng của nó với nghiệm tổng quát của hệ thuần nhất liên kết. Còn nhiều nhà toán học khác cũng có công lao trong việc nghiên cứu lý thuyết hệ phương trình tuyến tính, chẳng hạn, K.Gauss (1777-1855), Kronecker (1823-1891) (hai toán học Đức) trong bài giảng của mình ở trường Đại học Berlin Kronecker, đã đưa ra định nghĩa tiên đề cho định thức.

Chương V

MA TRẬN

MỞ ĐẦU

Ta đã biết ma trận góp phần vào việc nghiên cứu lý thuyết hệ phương trình tuyến tính. Bây giờ ta tiếp tục tìm hiểu ma trận sâu hơn nữa; đặc biệt nghiên cứu mối liên hệ giữa ma trận và ánh xạ tuyến tính. Ta sẽ thấy rằng, ma trận và ánh xạ tuyến tính liên hệ mật thiết với nhau. Khi đã cố định hai cơ sở của hai không gian vectơ thì một ánh xạ tuyến tính giữa hai không gian ấy cho một ma trận và ngược lại, một ma trận xác định một ánh xạ tuyến tính duy nhất.

Nhờ có ma trận mà ta xác định được giá trị riêng và vectơ riêng một ánh xạ tuyến tính; do đó xác định được những không gian con bất biến ứng với những giá trị riêng. Ma trận cũng xác định những dạng ánh xạ tuyến tính đặc biệt được dùng đến ở chương Vi như các phép biến đổi đối xứng, biến đổi trực giao. Trái lại, nhờ các vectơ riêng và giá trị riêng của ánh xạ tuyến tính mà có thể đưa ma trận trở về dạng đơn giản; đó là ma trận chéo.

Nội dưng của chương này là:

- Các phép toán trên các ma trận;
- Ma trận nghịch đảo của một ma trận vuông;
- Giá trị riêng, vectơ riêng;
- Chéo hoá một ma trận.

Bạn đọc cần nắm vững những vấn đề này vì chúng được áp dụng vào ngay chương sau và trong nhiều lĩnh vực khoa học khác.

Để học tốt chương này bạn đọc cần nắm vững những kiến thức về không gian vectơ và ánh xạ tuyến tính.

Trong cuốn sách này ta kí hiệu tập hợp các ma trận kiểu (m,n) với các thành phần trong trường **K** bởi Mat(m.n)(**K**).

§1. MA TRẬN CỦA MỘT ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

1.1. Định nghĩa. *Giả sử V và W là hai K-không gian vectơ với cơ sở lần lượt là* (ε) = {$\vec{\varepsilon}_1$,..., $\vec{\varepsilon}_2$,..., $\vec{\varepsilon}_n$}, (ξ) = {$\vec{\xi}_1$, $\vec{\xi}_2$,..., $\vec{\xi}_m$} *f: V → W là một ánh xạ tuyến tính mà*

$$\begin{aligned} f(\vec{\varepsilon}_1) &= a_{11}\vec{\xi}_1 + a_{21}\vec{\xi}_2 + \dots + a_{m1}\vec{\xi}_m \\ f(\vec{\varepsilon}_2) &= a_{12}\vec{\xi}_1 + a_{22}\vec{\xi}_2 + \dots + a_{m2}\vec{\xi}_m \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(\vec{\varepsilon}_n) &= a_{1n}\vec{\xi}_1 + a_{2n}\vec{\xi}_2 + \dots + a_{mn}\vec{\xi}_m \end{aligned} \quad (1)$$

Ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots\dots\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots\dots\dots a_{2n} \\ \dots & \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots\dots\dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

được gọi là ma trận của ánh xạ tuyến tính f đối với hai cơ sở (ε) *và* (ξ)

Có thể viết gọn các đẳng thức (1) như sau:

$$f(\vec{\varepsilon}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{\xi}_i, \text{ với mọi } j \in \{1, 2,..., n\}.$$

Chú ý: Vì (ξ) là một cơ sở của **W** nên các thành phần an được xác định duy nhất; do đó ma trận A được xác định duy nhất.

Ví dụ 1. Giả sử I_v = V → V là đồng cấu đồng nhất của không gian vectơ V, và (ε) = {$\vec{\varepsilon}_1$,..., $\vec{\varepsilon}_2$,..., $\vec{\varepsilon}_n$} là một cơ sở bất kì trong V. Khi đó:

$$\begin{aligned} 1_V(\vec{\varepsilon}_1) &= \vec{\varepsilon}_1 + 0\vec{\varepsilon}_2 + \dots + 0\vec{\varepsilon}_m \\ 1_V(\vec{\varepsilon}_2) &= 0\vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2 + \dots + 0\vec{\varepsilon}_m \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 1_V(\vec{\varepsilon}_n) &= 0\vec{\varepsilon}_1 + 0\vec{\varepsilon}_2 + \dots + \vec{\varepsilon}_m \end{aligned}$$

Do đó ma trận của IV đối với cơ sở (ε) là:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

I được gọi là ma trận đơn vị.

Ma trận vuông I = (a_{ij}) được gọi là ma trận đơn vị nếu

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{khi } i = j \\ 0, & \text{khi } i \neq j \end{cases}$$

Ví dụ 2. Nếu V, W là hai **K**-không gian vectơ với dimV = n, dimW = m thì đồng cấu 0 có ma trận đối với mọi cơ sở của V và của W là ma trận **O** kiểu (m,n) dưới đây:

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

O được gọi là *ma trận không,* tức là ma trận mà mọi thành phần đều bằng 0.

Ví dụ 3. Giả sử trong $\mathbf{R}^2$ và $\mathbf{R}^3$ đã chọn các cơ sở chính tắc:

$$(\varepsilon): \quad \vec{\varepsilon}_1 = (1, 0), \quad \vec{\varepsilon}_2 = (0, 1),$$

$$(\xi): \quad \vec{\xi}_1 = (1, 0, 0), \ \vec{\xi}_2 = (0, 1, 0), \ \vec{\xi}_3 = (0, 0, 1) .$$

f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ xác định bởi f(a_1, a_2) = (a_1, $3a_2$, a_2 - $5a_1$). Khi đó:

$$f(\vec{\varepsilon}_1) = f(1, 0) = (1, 0, 0-5) = \vec{\xi}_1 + 0\vec{\xi}_2 - 5\vec{\xi}_3$$

$$f(\vec{\varepsilon}_2) = f(0,1) = (0, 3, 1-0) = 0\vec{\xi}_1 + 3\vec{\xi}_2 + \vec{\xi}_3$$

Do đó ma trận của f đối với hai cơ sở này là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 4. Giả sử P_3, P_2 là các không gian gồm đa thức 0 và các đa thức thuộc **R**[x] có bậc tương ứng không vượt quá 3, không vượt quá 2. d: $P_3 \to P_2$ là phép lấy đạo hàm, (ε) = {1, x, x^2, x^3}, (ξ) = {1, x, x^2} lần lượt là cơ sở của P_3 và P_2. Thế thì:

$$d(1) = 0 = 0.1 + 0x + 0x^2$$

$$d(x) = 1 = 1.1 + 0x + 0x^2$$

$d(x^2) = 2x = 0.1 + 2x + 0x^2$

$d(x^3) = 3x^2 = 0.1 + 0x + 3x^2$

Do đó ma trận của d đối với hai cơ sở này là

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Trên đây ta đã thấy khi đã cố định hai cơ sở (ε) và (ξ) của V và W, thì mỗi ánh xạ tuyến tính f. $V \to W$ xác định một ma trận duy nhất. Ngược lại ta sẽ thấy, khi đó mỗi ma trận cũng xác định ánh xạ tuyến tính duy nhất.

1.2. Liên hệ giữa $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ với $\mathrm{Mat}_{(m,n)}(K)$

Mệnh đề. *Giả sử* ***V****,* ***W*** *là hai* ***K****-không gian vectơ và*

$$(\varepsilon) = \{\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_n\}, \quad (\xi) = \{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \ldots, \vec{\xi}_m\}$$

lần lượt là cơ sở cơm ích của V và W. Khi đó:

1) Mỗi ma trận kiểu (m, n) xác định duy nhất một ánh xạ tuyến tính f: $V \to W$.

2) Có một song ánh Φ: $\mathrm{Hom}_K(V, W) \to \mathrm{Mat}_{(m, n)}(K)$.

Chứng minh.

1) Giả sử

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Đặt $a_{1j}\vec{\xi}_1 + a_{2j}\vec{\xi}_2 + \ldots + a_{mj}\vec{\xi}_m\}$, với mọi $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ thì theo định lí 1.2, Ch.III, có ánh xạ tuyến tính f duy nhất xác định bởi

$$f(\vec{\varepsilon}_j) = a_{1j}\vec{\xi}_1 + a_{2j}\vec{\xi}_2 + \ldots + a_{mj}\vec{\xi}_m = \vec{\delta}_j, \text{ với mọi } j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Hơn nữa, ma trận của f là A.

2) Cố định hai cơ sở trong V và W. Với mỗi $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$, f xác

định một ma trận A duy nhất. Xác định ánh xạ

$$\mathbf{\Phi: Hom_K(V, W) \rightarrow Mat_{(m,\,n)}(K) \text{ bởi } \Phi(f) = A.}$$

Với mỗi $A \in Mat_{(m,\,n)}(K)$, có một ánh xạ tuyến tính f duy nhất mà A là ma trận của nó; tức là $\Phi(f) = A$. Do đó Φ là một toàn ánh. Vì f được xác định duy nhất bởi A nên Φ là đơn ánh.

Vậy Φ là một song ánh. □

§2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN CÁC TẬP MA TRẬN

Ta đã biết trên tập hợp $Hom_K(V, W)$ có phép cộng hai ánh xạ tuyến tính và phép nhân một ánh xạ tuyến tính với một số. Hơn nữa, khi đã cố định hai cơ sở của V và W, ta có song ánh

$$\Phi: Hom_K(V, W) \to Mat_{(m,n)}(K).$$

Bây giờ ta muốn định nghĩa các phép toán trên các ma trận sao cho "phù hợp" với các phép toán trên các ánh xạ tuyến tính; chẳng hạn ma trận của tổng hai ánh xạ phải bằng tổng hai ma trận của những ánh xạ ấy.

2.1. Phép cộng

Mệnh đề và định nghĩa. *Giả sử* $A = (a_{ij})_{(m,n)}$ *và* $B = (b_{ij})_{(m,n)}$ *lần lượt là các ma trận của hai ánh xạ tuyến tính* $f, g \in Hom_K(V, W)$ *đối với hai cơ sở* (ε) *và* (ξ) *đã chọn trong V và W. Thêm thì ma trận của ánh xạ tuyến tính* $f + g$ *đối với hai cơ sở ấy là* $C = (a_{ij} + b_{ij})_{(m,n)}$.

Ma trận C được gọi là tổng của hai ma trận A và B, kí hiệu là A + B.

Chứng minh. Theo giả thiết

$$f(\vec{\varepsilon}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{\xi}_i, \quad g(\vec{\varepsilon}_j) = \sum_{i=1}^{m} b_{ij}\vec{\xi}_i, \text{ với mọi } j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Do đó :

$$(f + g)(\vec{\varepsilon}_j) = f(\vec{\varepsilon}_j) + g(\vec{\varepsilon}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{\xi}_i + \sum_{i=1}^{m} b_{ij}\vec{\xi}_i = \sum_{i=1}^{m} (a_{ij} + b_{ij})\vec{\xi}_i, \text{ với}$$

mọi $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Vậy ma trận của $f + g$ đối với hai cơ sở đã cho là $(a_{ij} + b_{ij})_{(m,n)}$. Quy tắc cộng ma trận. *Muôn cộng hai ma trận ta chỉ việc cộng các thành phần tương ứng (cùng dòng, cùng cột) của chúng:*

$$(a_{ij})_{(m,n)} + (b_{ij})_{(m,n)} = (a_{ij} + b_{ij})_{(m,n)}.$$

Ví dụ 1. Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 14 \\ 6 & 13 & -8 \end{pmatrix}$.

$$A + B = \begin{pmatrix} 3-1 & 0+5 & 5+14 \\ -2+6 & 7+13 & 4-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 19 \\ 4 & 20 & -4 \end{pmatrix}$$

Ví dụ 2. Cho $C = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 8 \\ -19 \\ 21 \end{pmatrix}$.

$$C + D = \begin{pmatrix} 10+8 \\ 7-19 \\ -2+21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -12 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

2.2. Phép nhân một ma trận với một số

Mệnh đề và định nghĩa. *Giả sửa =* $(a_{ij})_{(m,n)}$ *là ma trận của ánh xạ tuyến tính* $f \in Hom_K(V, W)$ *đối với hai cơ sở* (ε) *và* (ξ) *đã chọn trong V và* W $k \in K$. *Thế thì ma trận của ánh xạ tuyến tính kf đối với hai cơ sở ấy là ma trận* $C = (ka_{ij})_{(m,n)}$.

Ma trận C được gọi là tích của ma trận A với số k, kí hiệu là kA.

Chứng minh. Xin dành cho bạn đọc. ∈

Quy tắc nhân ma trận với một số. *Muốn nhân một ma trận A với một số k ta chỉ việc nhân số k với mọi thành phần của A.*

Ví dụ 1. $A = (-3, 0, 6, 11)$ thì $\frac{1}{2}A = \left(-\frac{3}{2}, 0, 3, \frac{11}{2}\right)$.

Ví dụ 2. $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ thì $4B = 4\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -28 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ví dụ 3. $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -5 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ thì $\left(-\frac{1}{3}\right)C = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{7}{3} \\ \frac{5}{3} & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

2.3. Phép trừ

Định nghĩa.

Ma trận (-1) A được gọi là đối của ma trận A. Kí hiệu là –A.

Với hai ma trận A và B, tổng A + (-B) được gọi là hiệu của A và B. Kí kiệu A - B.

Như vậy, với $A = (a_{ij})_{(m,n)}$ và $B - (b_{ij})_{(m,n)}$ ta có: $- B = (- b_{ij})_{(m,n)}$,

$A - B = (a_{ij}\text{-}b_ij)_{(m,n)}$.

Ví dụ 1. Cho $A = \begin{pmatrix} 11 & 5 & -3 \\ 4 & -9 & 15 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -12 \\ -7 & 5 & 10 \end{pmatrix}$.

$$A - B = \begin{pmatrix} 11-8 & 5+3 & -3+12 \\ 4+7 & -9-5 & 15-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 9 \\ 11 & -14 & 5 \end{pmatrix}.$$

2.4. Không gian vectơ $Mat_{(m,n)}(K)$

Bạn đọc có thể dễ dàng chứng minh rằng, cũng như $Hom_K(V, W)$, tập hợp $Mat_{(m,n)}(K)$ là một **K**-không gian vectơ.

Mệnh đề. *Phép cộng ma trận và phép nhân một ma trận với một số thuộc trường K có các tính chất sau:*

1) $A + B = B + A$;

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$;

3) $A + 0 = A$;

4) $A + (-A) = 0$;

5) $k(A + B) = kA + kB$;

6) $(k + 1)A = kA + lA$;

7) $(k1)A = k(1a)$;

*8) $1.A = A$, (1 là đơn vị của trường **K**),*

với mọi $A, B, C \in Mat_{(m,n)}(K)$, mọi $k, l \in K$

*Nói gọn, với phép cộng hai ma trận và phép nhân một ma trận với một số, $Mat_{(n.n)}(K)$ là một **K**-không gian vectơ.* ∈

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} -4 & 13 \\ 7 & -9 \\ 15 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 11 & 8 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận X thoả mãn điều kiện 2X + A = B.

Giải. Áp dụng mệnh đề 2.4, cộng - A vào hai vế của đẳng thức 2X + A - B, ta có :

$$2X = B - A$$

hay
$$2X = \begin{pmatrix} 2+4 & 0-13 \\ 11-7 & 8+9 \\ -3-15 & 1-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -13 \\ 4 & 17 \\ -18 & -5 \end{pmatrix},$$

Suy ra
$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -13 \\ 4 & 17 \\ -18 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{13}{2} \\ 2 & \frac{17}{2} \\ -9 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \text{ (tính chất 7).}$$

2.5. Tích của hai ma trận

Mệnh đề 1. *Giả sử trong mỗi không gian U, V, W đã chọn một cơ sở cô định, $A = (a_{ij})_{(m,n)}$ là ma trận của ánh xạ tuyến tính $f: V \to W$, $B = (b_{jk})_{(n,p)}$ là ma trận của ánh xạ tuyến tính $g: U \to V$. Thế thì ma trận của ánh xạ tuyến tính fg là ma trận*

$$C = (c_{ik})_{(m,p)}, \text{ trong đó } c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}.$$

Ma trận C được gọi là tích của hai ma trận A và B, kí hiệu là AB.

Chứng minh.

Giả sử $(\varepsilon) = \{\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_p\}$ là cơ sở của U, $(\xi) = \{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \ldots, \vec{\xi}_n\}$ là cơ sở của V, $(\xi) = \{\vec{\xi}_2, \ldots, \vec{\xi}_m\}$ là cơ sở của W. Theo định nghĩa ma trận của ánh xạ tuyến tính, ta có:

$$f(\vec{\xi}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{\zeta}_i ,\; g(\vec{\varepsilon}_k) = \sum_{j=1}^{n} b_{jk}\vec{\xi}_j ,\; fg(\vec{\varepsilon}_k) = \sum_{i=1}^{m} c_{ik}\vec{\zeta}_i .$$

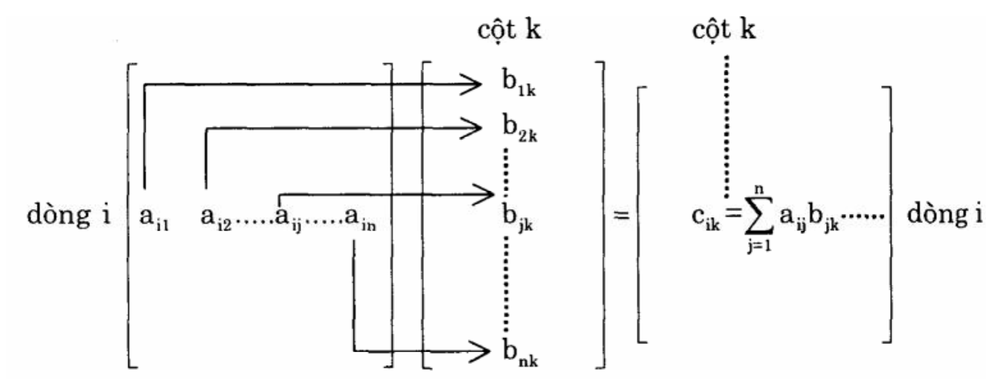
Do đó $fg(\vec{\varepsilon}_k) = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} f(\vec{\xi}_j) = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{\zeta}_i = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk})\vec{\zeta}_i$.

Vậy $\sum_{i=1}^{m} c_{ik}\vec{\zeta}_i = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk})\vec{\zeta}_i$.

Vì hệ vectơ (ζ) độc lập tuyến tính nên $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$. □

Quy tắc nhân hai ma trận. *Muốn tìm thành phần c_{ik} của ma trận tích AB ta phải lấy mỗi thành phần a_{ij} của dòng thứ i trong ma trận A nhân với thành phần b_{jk} của cột thứ k của ma trận B rồi cộng lại.*

Có thể mô tả bởi sơ đồ sau:



Ví dụ 1. Cho $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \end{pmatrix}.$$

Chú ý:

1) Theo định nghĩa, tích AB chỉ được xác định khi số cột của ma trận A bằng số dòng của ma trận B.

2) Phép nhân ma trận không có tính giao hoán.

Ví dụ 2. Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 3.1+5.(-2) & 3.4+5.4 & 3.(-7)+5.3 \\ -1.1+4.(-2) & -1.4+4.4 & -1.(-7)+4.3 \\ 7.1+0.(-2) & 7.4+0.4 & 7.(-7)+0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 32 & -6 \\ -9 & 12 & 19 \\ 7 & 28 & -49 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1.3+4.(-1)+(-7).7 & 1.5+4.4+(-7).0 \\ (-2).3+4.(-1)+3.7 & (-2).5+4.4+3.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -50 & 21 \\ 11 & 6 \end{pmatrix} \neq AB.$$

Ví dụ 3. Giả sử $(\varepsilon) = \{\vec{\varepsilon}_1,..., \vec{\varepsilon}_2,..., \vec{\varepsilon}_n\}$ và $(\xi) = \{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2,..., \vec{\xi}_n\}$ là hai cơ sở của **K**-không gian vectơ V, $T = (t_{ij})$ là ma trận chuyển từ cơ sở (ε) sang cơ sở (ξ) $(x_1, x_2,..., x_n)$, $(y_1, y_2,..., y_n)$ lần lượt là tọa độ của vectơ $\vec{\alpha}$ đối với cơ sở (ε) và cơ sở (ξ). Thế thì theo định lí 6.3, Ch. II:

$$\begin{aligned} x_1 &= t_{11}y_1 + t_{12}y_2 + \dots + t_{1n}y_n, \\ x_2 &= t_{21}y_1 + t_{22}y_2 + \dots + t_{2n}y_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= t_{n1}y_1 + t_{n2}y_2 + \dots + t_{nn}y_n, \end{aligned}$$

Nếu viết hai vectơ tọa độ dưới dạng ma trận cột

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

thì các đẳng thức trên đây có thể viết là:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \dots\dots\dots t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} \dots\dots\dots t_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\ t_{n1} & t_{n2} \dots\dots\dots t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

hay $$X = TY.$$

Ví dụ 4. Giả sử hai **K**-không gian vectơ V và W có cơ sở lần lượt là $(\varepsilon) = \{\vec{\varepsilon}_1,..., \vec{\varepsilon}_n\}$, $(\xi) = \{\vec{\xi}_1,..., \vec{\xi}_m\}$ và ma trận của ánh xạ tuyến tính f đối với hai cơ sở này là

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2}\ldots\ldots\ldots\ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

tọa độ của vectơ $\vec{\alpha} \in V$ đối với cơ sở (ε) và tọa độ của $f(\vec{\varepsilon})$ đối với cơ sở (ξ) được viết dưới dạng ma trận cột lần lượt là

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Thế thì

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2}\ldots\ldots\ldots\ldots a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ hay } Y = AX.$$

Thật vậy, vì $\vec{\alpha} = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{\varepsilon}_j$ nên

$$f(\vec{\alpha}) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(\vec{\varepsilon}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \vec{\xi}_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} \right) \vec{\xi}_i .$$

Mặt khác

$$f(\vec{\alpha}) = \sum_{i=1}^{m} y_i \vec{\xi}_i .$$

Do đó: $$\sum_{i=1}^{m} y_i \vec{\xi}_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} \right) \vec{\xi}_i .$$

Suy ra $y_i = \sum_{j=1}^{n} ai_j x_j$, với mọi in $\{1, 2,\ldots, m\}$. Điều này chứng tỏ Y = AX.

Ví dụ 5. Xét hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Nếu đặt $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ thì hệ (1) có dạng:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2}\ldots\ldots\ldots\ldots a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

hay $$AX = b.$$

Ví dụ 6. Giả sử $A = (a_{ij})_{(m,n)}$ và I_n là ma trận đơn vị cấp n. Khi đó:

$$AI_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2}\ldots\ldots\ldots\ldots a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2}\ldots\ldots\ldots\ldots a_{mn} \end{pmatrix} = A.$$

Tương tự, nếu I_m là ma trận đơn vị cấp m thì $I_mA = A$.

Mệnh đề 2. *Với các ma trận A, B, C và mọi số $k \in K$, ta có các đẳng thức sau (nếu các phép toán có nghĩa):*

1) Tính kết hợp: $(AB)C = A(BC)$;

2) Tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng:

$$A(B + C) = AB + AC,\ (A + B)C = AC + BC,$$

3) k(AB) = (kA)B = A(kB).

Chứng minh. 1) Coi các ma trận A, B, C lần lượt như ma trận của các ánh xạ tuyến tính h: U → X, g: W → U, f: V → W (với cơ sở đã chọn trong mỗi **K**-không gian vectơ V, W, U, X). Theo mệnh đề 1, mục 2.5, (AB)C là ma trận của ánh xạ tuyến tính (hg)f, còn A(BC) là ma trận của ánh xạ h(gf). Theo mệnh đề 2, mục 3.4, Ch.III, (hg)f-h(gf). Nhờ song ánh

Φ: $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(V, X) \cong \mathrm{Mat}_{(m,q)}(\mathbf{K})$, (trong đó m = dimX, q = dimV),

suy ra (AB)C = Φ((hg)f) = Φ h(gf)) = A(BC).

2) và 3) được chứng minh tương tự. €

2.6. Thực hiện các phép toán ma trận bằng máy tính bỏ túi và mây tính điện tử

Ví dụ 1. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 11 \\ -4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -8 & 12 & 0 \\ 14 & -7 & 20 \end{pmatrix}$.

a) Dùng máy tính bỏ túi CASIO-fx570MS.

Tính A + B, A - B, 6A.

Giải. Tính A + B.

• Chọn MODE ma trận:

$\boxed{\text{MODE}}\ \boxed{\text{MODE}}\ \boxed{\text{MODE}}\ \boxed{2}$

• Tạo ma trận A kiểu (2,3)

$\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\text{MAT}}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{=}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$ (số 1 thứ nhất là chỉ kiểu ma trận,số 1 thứ hai là kí hiệu ma trận A).

• Chọn các thành phần của A:

$\boxed{3}\ \boxed{=}\ \boxed{5}\ \boxed{=}\ \boxed{11}\ \boxed{=}\ \boxed{(-)}\ \boxed{4}\ \boxed{=}\ \boxed{0}\ \boxed{=}\ \boxed{9}\ \boxed{=}\ \boxed{\text{AC}}$

• Tạo ma trận B kiểu (2,3):

$\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\text{MAT}}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{=}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$ (số 2 thứ nhất là kí hiệu ma trận B)

$\boxed{(-)}\ \boxed{8}\ \boxed{=}\ \boxed{12}\ \boxed{=}\ \boxed{0}\ \boxed{=}\ \boxed{14}\ \boxed{=}\ \boxed{(-)}\ \boxed{7}\ \boxed{=}\ \boxed{20}\ \boxed{=}\ \boxed{\text{AC}}$

• Thực hiện phép cộng:

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{MAT}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{1}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{MAT}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$

Ở cửa sổ máy tính xuất hiện: - 5. Đó là thành phần cơ của tổng hai ma trận. Nháy con trỏ sang phải ta được thành phần c_{12}. Tiếp tục nháy con trỏ sang phải mỗi lần được một thành phần tiếp theo.

Ma trận A + B = $\begin{vmatrix} -5 & 17 & 11 \\ 10 & -7 & 29 \end{vmatrix}$

- Tính A - B tương tự.

- Tính 6A.

• Chọn MODE ma trận:

$\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{2}$

• Tạo ma trận A kiểu (2,3)

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{MAT}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$

• Chọn các thành phần của A:

$\boxed{3}$ $\boxed{=}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$ $\boxed{11}$ $\boxed{=}$ $\boxed{(-)}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$ $\boxed{0}$ $\boxed{=}$ $\boxed{9}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{AC}}$

$\boxed{6}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{MAT}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$

Màn hình xuất hiện: 18. Đó là thành phần cơ của ma trận 6A. Nháy con trỏ sang phải, mỗi lần được một thành phần theo thứ tự: c_{12}, c_{13}, c_{21}.

Ví dụ 2. Nhân ma trận.

Cho A = $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 11 \\ -4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 10 & 0 & -6 \\ 9 & 11 & 5 \end{pmatrix}$. Tính AB.

Giải.

Thao tác như khi làm tính cộng.

$\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{2}$

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{MAT}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$

$\boxed{3}$ $\boxed{=}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{(-)}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$ $\boxed{0}$ $\boxed{=}$ $\boxed{9}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{AC}}$

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{MAT}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$

$\boxed{(-)}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$ $\boxed{7}$ $\boxed{=}$ $\boxed{1}$ $\boxed{0}$ $\boxed{=}$ $\boxed{0}$ $\boxed{=}$ $\boxed{(-)}$ $\boxed{6}$ $\boxed{=}$ $\boxed{9}$ $\boxed{=}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{AC}}$

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{MAT}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{MAT}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$

Màn hình xuất hiện: 146. Đó là thành phần cơ của tích. Tiếp tục nháy con chở sang phải lần lượt ta được các thành phần tiếp theo của ma trận tích.

$$AB = \begin{pmatrix} 146 & 133 & 46 \\ 85 & 83 & 17 \end{pmatrix}.$$

b) Dùng máy tính điện tử

Ta thực hiện theo chương trình MATHEMATICA 4.0.

A = {{3, 5,II}, {- 4, 0, 9}}↵

Màn hình xuất hiện:

Out[1]= {{3, 5,11}, {-4, 0, 9}}

B={{ - 8, 12, O},{14, - 7, 20}}↵

Màn hình xuất hiện:

Out[2]= {{ - 8, 12, 0},{14, - 7, 20}}

A+B//1MatrixForm↵

Màn hình xuất hiện:

$$\text{Out[3]=}\begin{pmatrix} -5 & 17 & 11 \\ 10 & -7 & 29 \end{pmatrix}$$

A-B//MatrixForm↵

Màn hình xuất hiện:

$$\text{Out[4]=}\begin{pmatrix} 11 & -7 & 11 \\ -18 & 7 & -11 \end{pmatrix}$$

6A//MatnxForm↵

$$\text{Out[4]=}\begin{pmatrix} 18 & 30 & 66 \\ -24 & 0 & 54 \end{pmatrix}$$

Phép nhân được thực hiện bằng mọi thao tác như đối với phép cộng nhưng phải thay dấu cộng ("+") bởi dấu chấm (".").

§3. ĐẠI SỐ MATN(K) CÁC MA TRẬN VUÔNG CẤP N

Ta kí hiệu tập hợp các ma trận vuông cấp n với các thành phần thuộc trường **K** bởi Matn(K). Theo mệnh đề 2.4, Matn(K) là một K-không gian vectơ. Hơn nữa, trong Matn(K) tích của hai ma trận bất kì luôn luôn xác định; tuy nhiên, phép nhân không giao hoán. Theo mệnh đề 2, mục 2.5, phép nhân có tính kết hợp và phân phối đối với phép cộng và có *ma trận đơn vị*

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Trong ví dụ 6, mục 3.1, đã chứng minh ma trận đơn vị I có tính chất: AI = A = IA, với mọi A ∈ Matn(K). Như vậy, Matn(K) là một không gian vectơ đồng thời là một vành có đơn vị, không giao hoán.

Người ta nói, Mat_n(**K**) là một *đại số trên trường **K*** hay một ***K**-đại số.*

Vì mỗi ma trận thuộc A ∈ Mat_n(**K**) là một ma trận vuông nên nó có định thức |A|.

Ta hãy xét mối liên hệ giữa định thức và các phép toán trong Mat_n(**K**). Bạn đọc có thể cho những ví dụ chứng tỏ rằng: với A, B là hai ma trận vuông cấp n và số k ∈ K, nói chung:

1) $|A + B| \neq |A| + |B|$.

2) $|kA| \neq k\,|A|$.

Trái lại, ta lại có: $|AB| = |A|.|B|$ với mọi ma trận A,B thuộc Mat_n(**K**).

3.1. Định thức của tích hai ma trận

Định lí. *Định thức của tích hai ma trận vuông bằng tích các định thức của hai ma trận ấy.*

Chứng minh.

Giả sử:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \ldots\ldots\ldots\ldots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \ldots\ldots\ldots\ldots b_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n1} & b_{n2} \ldots\ldots\ldots\ldots b_{nn} \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \ldots\ldots\ldots\ldots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \ldots\ldots\ldots\ldots c_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n1} & c_{n2} \ldots\ldots\ldots\ldots c_{nn} \end{pmatrix}, \text{ với } c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}.$$

Ta xét định thức

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n} & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n} & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{nn} & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ -1 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 0 & b_{11} & b_{12} \ldots\ldots\ldots b_{1n} \\ 0 & -1 \ldots\ldots\ldots\ldots 0 & b_{21} & b_{22} \ldots\ldots\ldots b_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots -1 & b_{n1} & b_{n2} \ldots\ldots\ldots b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Trong định thức D, định thức con ở góc trên bên trái là định thức $|A|$, mọi định thức con khác tạo bởi n dòng đầu đều bằng 0 vì có một cột với các thành phán đều bằng 0; tương tự, định thức con ở góc dưới bên phải là định thức $|B|$, mọi định thức con khác tạo bởi n dòng cuối đều bằng 0. Theo định lí Laplace, $D = (-1)^{2(1+2+\ldots+n)} |A|.|B| = |A|.|B|$.

Bây giờ nhân lần lượt các dòng thứ n + 1 với a_{11}, dòng thứ n + 2 với a_{12},.., dòng thứ n + j với a_{1j},... dòng thử 2n với a_{1n}, rồi cộng vào dòng đầu. Khi đó dòng đầu của D biến thành

$$0, 0, \ldots, 0, c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1n}.$$

Tổng quát, nhân dòng thứ n +1 với a_{1i},.., dòng thứ n + i với a_{ij},..., dòng thứ 2n với a_{in} rồi cộng vào dòng thứ i thì dòng thứ i trong D biến thành

$$0, 0, \ldots, 0, c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{in}.$$

Theo tính chất của định thức, những phép biến đổi trên không thay đổi định thức D.

Do vậy:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 \ldots\ldots\ldots & 0 & c_{11} & c_{12} \ldots\ldots c_{1n} \\ 0 & 0 \ldots\ldots\ldots & 0 & c_{21} & c_{22} \ldots\ldots c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots\ldots\ldots & 0 & c_{n1} & c_{n2} \ldots\ldots c_{nn} \\ -1 & 0 \ldots\ldots\ldots & 0 & b_{11} & b_{12} \ldots\ldots b_{1n} \\ 0 & -1 \ldots\ldots\ldots & 0 & b_{21} & b_{22} \ldots\ldots b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots\ldots\ldots & -1 & b_{n1} & b_{n2} \ldots\ldots b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Bây giờ trong n dòng đầu của định thức này có làm ở góc trên bên phải, các định thức con khác đều bằng 0. Theo định lí Laplace,

$$D = (-1)^{(1+2+\ldots+n)+(n+1+n+2+\ldots+2n)} |AB| . \begin{vmatrix} -1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & -1 & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{(1+2+\ldots+n)+(n+1+n+2+\ldots+2n)} |AB| .(-1)^n = (-1)^{(1+2+\ldots+n)+(n+1+n+2+\ldots+2n)+n} |AB|$$

$$= (-1)^{2n(n+1)} |AB| = |AB| .$$

Vậy $\qquad |AB| = |A| . |B| .$ □

Giả sử trong hai **K**-không gian vectơ n chiều V và W cố định hai cơ sở. Nếu A là ma trận của đẳng cấu f. $V \cong W$, B là ma trận của f^1 thì theo mệnh đề 1 mục 2.5, AB là ma trận của $ff^{-1} = 1w$, BA là ma trận của $f^{-1}f$: 1_V. Vì ma trận của IV và ma trận của 1_W đều là ma trận đơn vị I nên AB = I = BA. Người ta gọi A và B là hai ma trận nghịch đảo của nhau.

3.2. Ma trận nghịch đảo

Định nghĩa. *Ma trận $A \in Mat_n(\mathbf{K})$ được gọi là khả nghịch nếu tồn tại một ma trận $B \in Mat_n(K)$ sao cho*

$$AB = I = BA.$$

B được gọi là ma trận nghịch đảo của A, kí hiệu $B = A^{-1}$.

Ví dụ 1. Hiển nhiên I là ma trận khả nghịch vì I.I = I. Như vậy I là ma trận nghịch đảo của chính nó.

Ví dụ 2. Trong $Mat_2(\mathbf{R})$ ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ có ma trận nghịch đảo $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.3+5(-1) & 2.5+5.(-2) \\ (-1).3+(-3)(-1) & (-1).5+(-3).(-2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.\,2+5(-1) & 32.5+5.(-3) \\ (-1).2+(-2)(-1) & (-1).5+(-2).(-3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Có những câu hỏi đặt ra là: Có phải mọi ma trận trong $Mat_n(\mathbf{K})$ đều có nghịch đảo không? Nếu có thì tìm ma trận nghịch đảo như thế nào? Định lí sau sẽ trả lời những câu hỏi này.

Định lí. *Ma trận vuông A có ma trận nghịch đảo khi và chỉ khi* |A| = 0.

Chứng minh.

"⇒" Giả sử ma trận A có nghịch đảo là A 1. Khi đó theo định lí 3.1,

$$|A| . |A^{-1}| = |A.A^{-1}| = |I| = 1. \text{ Do đó } |A| \neq 0.$$

"⇐" Giả sử lại bé 0 và

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Đặt $b_{jk} = \dfrac{A_{kj}}{|A|}$ trong đó A_{kj} là là phần bù đại số của thành phần a_{kj} của ma trận A (xem định nghĩa 4.1, Ch. I). Xét ma trận vuông B - (b_{jk}), hay

$$B = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \ldots\ldots\ldots\ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \ldots\ldots\ldots\ldots & A_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ A_{1n} & A_{2n} \ldots\ldots\ldots\ldots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Khi đó AB có thành phần

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{A_{kj}}{|A|} = \frac{1}{|A|} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj}$$

Nhưng theo định lí và hệ quả, mục 4.2, Ch.I,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = \begin{cases} |A|, & \text{nếu } i = k \\ 0, & \text{nếu } i \neq k \end{cases}$$

Do đó $$c_{ik} = \frac{1}{|A|} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{nếu } i = k \\ 0, & \text{nếu } i \neq k \end{cases}$$

Vậy $$AB = I \text{ và } A^{-1} = B = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \ldots\ldots\ldots\ldots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \ldots\ldots\ldots\ldots A_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{1n} & a_{2n} \ldots\ldots\ldots\ldots A_{nn} \end{pmatrix}. \quad \square$$

Ma trận mà định thức của nó khác 0 được gọi là *ma trận không suy biến.* Với khái niệm này có thể phát biểu định lí trên như sau:

Một ma trận là khả nghịch khi và chỉ khi nó không suy biến.

3.3. Tìm ma trận nghịch đảo

1) Tìm ta trận nghịch đảo bằng định thức

Chứng minh định lí trên đây cho ta cách tìm ma trận nghịch đảo của một ma trận có định thức khác 0.

Ví dụ. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Giải. Tính định thức lai

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 11 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}(-1)(11-9) = 2.$$

Tìm các phần bù đại số

$A_{11} = 11$, $A_{12} = -3$, $A_{13} = -6$, $A_{21} = -15$, $A_{22} = 5$, $A_{23} = 8$, $A_{31} = -3$, $A_{32} = 1$, $A_{33} = 2$.

• Thiết lập ma trận nghịch đảo

$$\text{Vậy } A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 11 & -15 & -3 \\ -3 & 5 & 1 \\ -6 & 8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & -\frac{15}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Tìm ma trận nghịch đảo bằng các phép biến đổi sơ cấp

Nhắc lại rằng, các phép biến đổi sau đây trên một ma trận là những phép biến đổi sơ cấp:

1) Đổi chỗ hai dòng (hai cột) cho nhau;

2) Nhân mỗi thành phần trong một dòng (cột) với cùng một số khác 0;

3) Nhân mỗi thành phần trong một dòng (cột) với cùng một số rồi cộng vào thành phần cùng cột (dòng) trong một dòng (cột) khác. Bạn đọc có thể tự kiểm tra rằng với ma trận A:

Phép biến đổi 1) chính là nhân ma trận

$$P = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \text{(dòng thứ i)} \\ \\ \text{(dòng thứ j)} \\ \\ \\ \end{array}$$

vào bên trái (phải) của A.

Phép biến đổi 2) chính là nhân ma trận

$$Q = \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & k & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{(dòng thứ i)} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

(cột thứ i)

vào bên trái (phải) của A.

Phép biến đổi 3) chính là nhân ma trận

$$R = \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & k & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

$$\text{(tương ứng ma trận } S = \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & k & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right) \text{)}$$

(cột thứ i) (cột thứ j)

vào bên trái (phải) của A.

Hơn nữa dễ thấy rằng các ma trận P, Q, R, S đều không suy biến. Do đó ta có định lí sau:

Định lí. *Nếu thực hiện những phép biến đổi sơ cấp như nhau trên ma trận không suy diễn A và ma trận đơn vị I mà A biến thành I thì I biến thành* A^{-1}.

Chứng minh. Như nhận xét trên khi thực hiện những phép biến đổi sơ cấp trên các dòng của ma trận A thực chất là nhân vào bên trái A một số hữu hạn những ma trận dạng P, Q, R. Gọi B là tích của những ma trận đã nhân vào bên trái A như thế để được 1, ta có BA = I. Suy ra:

$$B = A^{-1}$$

Theo giả thiết, ta cũng đồng thời nhân B vào bên trái của I và được:

$$BI = B = A^{-1}.$$

Ví dụ. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Giải. Ta viết hai ma trận A và I liền nhau. Mỗi khi thực hiện một phép biến đổi sơ cấp nào trên A thì cũng thực hiện phấp biến đổi ấy trên I.

$$\begin{array}{cc} A & I \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Nhân dòng thứ nhất với -3 rồi cộng vào dòng thứ ba:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -8 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nhân dòng thứ hai với $\frac{1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -8 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nhân dòng thứ hai với - 3 rồi cộng vào dòng thứ nhất và nhân dòng thứ hai với 8 rồi cộng vào dòng thứ ba:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Nhân dòng thứ ba với $-\frac{3}{2}$ rồi cộng vào dòng thứ nhất, nhân dòng thứ ba với $\frac{1}{2}$ rồi cộng vào dòng thứ hai:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{2} & -\frac{15}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Ta thấy lại kết quả tìm được ở ví dụ trong mục 4.3.

3) Tìm ma trận nghịch đảo bằng máy tính bỏ túi và máy tính điện tử

a) Dùng máy tính CASIO-fx-570MS.

(Chỉ áp dụng được đối với ma trận cấp 2 và cấp 3)

Ví dụ. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Giải. • Tạo ma trận A như thường lệ:

$\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{2}$

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{MAT}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$

$\boxed{4}$ $\boxed{=}$ $\boxed{7}$ $\boxed{=}$ $\boxed{0}$ $\boxed{=}$ $\boxed{(-)}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$ $\boxed{0}$ $\boxed{=}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{6}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{AC}}$

• Tìm ma trận nghịch đảo

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{MAT}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{1}$ $\boxed{x^{-1}}$ $\boxed{=}$

Màn hình xuất hiện thành phần ba của ma trận nghịch đảo. Nháy con trỏ sang phải mỗi lần ta được một thành phần tiếp theo: b_{12}, b_{13}, b_{21}, b_{22},... Kết quả:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{88} & -\frac{21}{44} & \frac{35}{88} \\ \frac{3}{22} & \frac{3}{11} & -\frac{5}{22} \\ -\frac{1}{44} & -\frac{1}{22} & \frac{9}{44} \end{pmatrix}.$$

b) Dùng máy tính điện tử (theo chương trình "MATHEMATICA 4.0").

Ví dụ. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 7 \\ 6 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 7 & 0 \\ -4 & 3 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

Giải. • Tạo ma trận

B = {{3,1,0,7},{6,-2,2,1},{5,1,7,0},{-4,3,8,-5}} ↵

Màn hình xuất hiện:

Out[1] = {{3,1,0,7},{6, - 2,2,1},{5,1,7,0},{- 4,3,8, - 5}}

Tìm ma trận nghịch đảo:

Inverse[B]//MatrixForm ↵

Màn hình xuất hiện:

$$\text{Out[2]=} \begin{pmatrix} -\frac{67}{379} & -\frac{126}{379} & \frac{172}{379} & -\frac{119}{379} \\ -\frac{92}{379} & -\frac{371}{379} & \frac{338}{379} & -\frac{203}{379} \\ \frac{61}{379} & \frac{143}{379} & -\frac{117}{379} & \frac{114}{379} \\ \frac{96}{379} & \frac{107}{379} & -\frac{122}{379} & \frac{80}{379} \end{pmatrix}.$$

Đó là ma trận nghịch đảo B^{-1}.

3.4. Một vài ứng dụng đầu tiên của ma trận nghịch đảo

1) Tìm ma trận chuyển.

Vì ma trận chuyển từ cơ sở (ε) sang cơ sở (ξ) và ma trận chuyển từ cơ sở (ξ) sang cơ sở (ε) là hai ma trận của hai ánh xạ ngược nhau nên nếu T là ma trận chuyển từ cơ sở (E) sang cơ sở (ε) thì ma trận chuyển từ cơ sở (ξ) sang cơ sở (ε) là T^{-1}.

Ví dụ. Tìm ma trận chuyển từ cơ sở (ξ) gồm các vectơ $\vec{\xi}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{\xi}_2 = (0, 1, 1)$, $\vec{\xi}_3 = (1, 0, 1)$ sang cơ sở chính tắc của không gian $\mathbf{R}^3$.

Giải. Dễ dàng tìm được ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc (ε) sang cơ sở (ξ) là:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tìm ma trận nghịch đảo của T ta được ma trận chuyển từ cơ sở (ξ) sang cơ sở chính tắc là:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2) Giải hệ Cramer

Ví dụ 4, mục 2.5, đã cho cách viết hệ phương trình dưới dạng ma trận

$$AX = b$$

trong đó A là ma trận của hệ phương trình, X là ma trận cột các ẩn, b là ma trận cột các hạng tử tự do.

Từ đó suy ra: $$X = A^{-1}b.$$

Ứng dụng này chỉ mang tính lý thuyết: nó chứng minh rằng hệ Cramer có nghiệm duy nhất. Trong thực hành, nó không đem lại lợi ích gì hơn cách giải bằng định thức.

Ở đầu mục này ta đã thấy nếu một đẳng cấu f xác định bởi ma trận A thì A khả nghịch. Bây giờ ta chứng minh đầy đủ một đặc trưng của đẳng cấu bởi ma trận.

3.5. Ma trận của một đẳng cấu

Mệnh đề. *Một ánh xạ tuyến tính là một đẳng cấu khi và chỉ khi ma trận của nó không suy biến.*

Chứng minh. Giả sử f. V → W là một ánh xạ tuyến tính. Cố định hai cơ sở trong V và W. Gọi A là ma trận của f. Ta có dãy các tương đương sau đây:

f là đẳng cấu ⇔ tồn tại $f^{-1} = W \to V$ với ma trận B sao cho $f^{-1}f = 1_v$, $ff^{-1} = 1_v$ với ma trận B sao cho BA= I = AB ⇔ A khả nghịch ⇔ $|A| \neq 0$ ⇔ A không suy biến.

§4. SỰ THAY ĐỔI CỦA MA TRẬN CỦA MỘT ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH KHI THAY ĐỔI CƠ SỞ - MA TRẬN ĐỒNG DẠNG

4.1. Sự thay đổi của ma trận của một ánh xạ tuyến tính khi thay đổi cơ sở

Ma trận của ánh xạ tuyến tính f: V → W phụ thuộc vào hai cơ sở của V và W Chẳng hạn, ví dụ 1, mục 1.1 cho thấy ma trận của đồng cấu 1_v = V → V đối với cơ sở (ε) là ma trận đơn vị I. Giả sử S = (s_{ij}) là ma trận chuyển từ cơ sở (ε) sang cơ sở (ε'). Khi đó ta có:

$$1_V(\vec{\varepsilon}'_1) = \vec{\varepsilon}'_1 = s_{11}\vec{\varepsilon}_1 + s_{21}\vec{\varepsilon}_2 + \ldots + s_{n1}\vec{\varepsilon}_n$$

$$1_V(\vec{\varepsilon}'_2) = \vec{\varepsilon}'_2 = s_{12}\vec{\varepsilon}_1 + s_{22}\vec{\varepsilon}_2 + \ldots + s_{n2}\vec{\varepsilon}_n$$

....

$$1_V(\vec{\varepsilon}'_n) = \vec{\varepsilon}'_n = s_{1n}\vec{\varepsilon}_1 + s_{2n}\vec{\varepsilon}_2 + \ldots + s_{nn}\vec{\varepsilon}_n$$

Điều này chứng tỏ ma trận chuyển từ cơ sở (ε) sang cơ sở (ε') là ma trận của đồng cấu đồng nhất 1_v đối với hai cơ sở (ε') và (ε). Như vậy, ma trận của 1_v đã thay đổi khi đổi cơ sở.

Vậy tổng quát, khi đổi cơ sở thì ma trận của ánh xạ tuyến tính thay đổi như thế nào?

Định lí. *A và B là hai ma trận của cùng một ánh xạ tuyến tính khi và chỉ khi tồn tại hai ma trận không suy biến S và T sao cho*

$$B = T^{-1}AS.$$

Chứng minh. "⇒" Giả sử A là ma trận của ánh xạ tuyến tính f: V → W đối với hai cơ sở (ε) và (ξ) tương ứng trong V và W, B là ma trận của f đối với hai cơ sở (ε') và (ξ'). Gọi S là ma trận chuyển từ cơ sở (ε) sang cơ sở (ε'), T là ma trận chuyển từ cơ sở (ε') và (ε'). Như trên đã nói, S là ma trận của đồng cấu đồng nhất 1v đối với hai cơ sở (ε') và (ε). Tương tự, T là ma trận của đồng cấu đồng nhất 1_w đối với hai cơ sở (ξ') và (ξ). Hiển nhiên

$$1_w.f = f = f.1_v.$$

Theo mệnh đề 3.2, TB là ma trận của 1_w.f còn AS là ma trận của f.1_v đối với hai cơ sở (ε') và (ξ'). Như vậy:

$$TB = AS.$$

Vì các ma trận chuyển khả nghịch nên từ đó suy ra:

$$B = T^{-1}AS.$$

"$\Leftarrow$" Giả sử $B - T^{-1}AS$, A là ma trận của f đối với hai cơ sở (ε) và (ξ) S và T là những ma trận không suy biến. Coi S và là ma trận chuyển từ cơ sở (ε) sang cơ sở (ε') nào đó, còn T là ma trận chuyển từ cơ sở (ξ) sang cơ sở (ξ') nào đó. Khi đó T^{-1} là ma trận chuyển từ cơ sở (ξ') sang cơ sở (ξ). Theo nhận xét trước định lí, S và T^{-1} lần lượt là ma trận của các ánh xạ tuyến tính 1_v và 1_w. Theo mệnh đề 1, mục 2.5, B là ma trận của $1_w.f.1_v$

$$V \xrightarrow{1_V} V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{1_W} W$$

Nhưng $1_w.f.1_v = f$ nên B cũng là ma trận của f.

Nói riêng, khi V = W và (ε) = (ξ), (ε') = (ξ') thì S = T và $B = T^{-1}AT$.

4.2. Ma trận đồng dạng

Định nghĩa. *Hai ma trận A và B được gọi là đồng dạng nếu có một ma trận T sao cho $B = T^{1}AT$. Kí hiệu $A \sim B$.*

Theo định nghĩa này, muốn tìm một ma trận đồng dạng với một ma trận A chỉ cần lấy một ma trận T không suy biến rồi lấy ma trận tích T IAT.

Hệ quả. *Hai ma trận đồng dạng khi và chỉ khi chúng là hai ma trận của cùng một tự đồng cấu.*

Ví dụ. Cho

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

là ma trận của tự đồng cấu f. $V \to V$ đối với cơ sở $\{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2\}$ của V.

Tìm ma trận của f đối với cơ sở gồm các vectơ:

$$\vec{\varepsilon}'_1 = \vec{\varepsilon}_1 - 2\vec{\varepsilon}_2$$
$$\vec{\varepsilon}'_2 = -\vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2$$

Giải. Ma trận chuyển từ cơ sở (ε) sang cơ sở (ε') là

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$T^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Định nghĩa 4.2 cho ta thấy một điều lí thú về mối liên quan giữa hai ma trận của cùng một tự đồng cấu đối với hai cơ sở khác nhau. Bây giờ ta muốn tiến xa hơn nữa: đối với một tự đồng cấu f: $V \to V$ ta muốn tìm một cơ sở $(\xi) = \{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, ..., \vec{\xi}_n\}$ của không gian V sao cho ma trận của nó có dạng "đẹp nhất", đó là ma trận $A = (a_{ij})$ có dạng

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad ((a_{ij}) = 0 \text{ nếu } i \neq j).$$

Ta gọi đó là *ma trận chéo.*

Khi đó $f(\vec{\xi}_j) = a_{jj}\vec{\xi}_j$ và nói rằng $\vec{\xi}_j$ là một vectơ riêng của f, còn lại là giá trị riêng của f ứng với vectơ $\vec{\xi}_j$.

§5. VECTƠ RIÊNG-GIÁ TRỊ RIÊNG

5.1. Vectơ riêng- Giá trị riêng

Định nghĩa 1. *Giả sử V là một không gian vectơ, f: V $\rightarrow$ V là một tự đồng cấu. Vectơ $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ của V được gọi là một vectơ riêng của f nếu tồn tại một số $\in$ K sao cho*

$$f(\vec{\alpha}) = k\vec{\alpha}.$$

Số k được gọi là giá trị riêng của f ứng với vectơ riêng $\vec{\alpha}$.

Nêu A là ma trận của tự đồng cấu f thì giá trị riêng của f cũng được gọi là giá trị riêng của ma trận A.

Ví dụ 1. Cho phép biến đổi tuyến tính f: $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ có ma trận đối với cơ sở chính tắc (ε) là

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

f có hai giá trị riêng là $k_1 = 1$, $k_2 = -2$, $\vec{\alpha} = (4, -1)$ là vectơ riêng ứng với k_1, $\vec{\beta} = (1, -1)$ là vectơ riêng ứng với k_2. Thật vậy, vì $f(\vec{\varepsilon}_1) = 2\vec{\varepsilon}_1 - \vec{\varepsilon}_2$, $f(\vec{\varepsilon}_2) = 4\vec{\varepsilon}_1 - 3\vec{\varepsilon}_2$, $\vec{\alpha} = 4\vec{\varepsilon}_1 - \vec{\varepsilon}_2$ nên

$$\begin{aligned} f(\vec{\alpha}) &= f(4\vec{\varepsilon}_1 - \vec{\varepsilon}_2) = 4f(\vec{\varepsilon}_1) - f(\vec{\varepsilon}_2) \\ &= 4(2\vec{\varepsilon}_1 - \vec{\varepsilon}_2) - 4\vec{\varepsilon}_1 + 3\vec{\varepsilon}_2 \\ &= 4\vec{\varepsilon}_1 - \vec{\varepsilon}_2 = \vec{\alpha} = 1\vec{\alpha}. \end{aligned}$$

Tương tự, $\vec{\beta} = \vec{\varepsilon}_1 - \vec{\varepsilon}_2$. Do đó:

$$\begin{aligned} f(\vec{\beta}) &= f(\vec{\varepsilon}_1 - \vec{\varepsilon}_2) = f(\vec{\varepsilon}_1) - f(\vec{\varepsilon}_2) \\ &= 2\vec{\varepsilon}_1 - \vec{\varepsilon}_2 - 4\vec{\varepsilon}_1 + 3\vec{\varepsilon}_2 \\ &= -2(\vec{\varepsilon}_1 - \vec{\varepsilon}_2) = -2\vec{\beta}. \end{aligned}$$

Có những tự đồng cấu mà mọi vectơ khác $\vec{0}$ đều là vectơ riêng.

Ví dụ 2. Giả sử f: V $\rightarrow$ V là một tự đồng cấu của **R**-không gian vectơ V, xác định bởi $f(\vec{\alpha}) = 3\vec{\alpha}$, với mọi $\vec{\alpha} \in$ V. Dễ kiểm tra rằng f là một tự đồng cấu của không gian vectơ V. Rõ ràng mọi vectơ khác $\vec{0}$ của V đều là vectơ riêng ứng với giá trị riêng k = 3.

Lại có những tự đồng cấu không có vectơ riêng nào.

Ví dụ 3. Tự đồng cấu f: $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ xác định bởi $f(a_1, a_2) = (-a_2, a_1)$ không có vectơ riêng nào. Thật vậy, nếu $\vec{\alpha} = (a_1, a_2)$ là vectơ riêng ứng với giá trị riêng k thì $k(a_1, a_2) = f(a_1, a_2) = (-a_2, a_1)$ hay $(ka_1, ka2) = (-a_2, a_1)$. Suy ra:

$$\begin{cases} ka_1 = -a_2 \\ ka_2 = a_1 \end{cases}.$$

Vì $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ nên, chẳng hạn, $a_1 \neq 0$. Từ các đẳng thức trên suy ra $a_1 = -k^2a_1$, kéo theo $k_2 = -1$. Đó là điều vô lí.

Theo định nghĩa của vectơ riêng ta thấy rằng ứng với một giá trị riêng có vô số vectơ riêng. Chẳng hạn, nếu $\vec{\alpha}$ là một vectơ riêng ứng với giá trị riêng k của tự đồng cấu f: $V \rightarrow V$ thì mọi vectơ của không gian con U sinh bởi $\vec{\alpha}$ cũng là vectơ riêng ứng với giá trị riêng k; hơn nữa $f(U) \subseteq U$. Thật vậy, với mọi $r\vec{\alpha} \in U$ ta có:

$$f(r\vec{\alpha}) = rf(\vec{\alpha}) = r(k\vec{\alpha}) = k(r\vec{\alpha}) \in U.$$

Người ta nói U là một không gian con bất biến của V đối với f. Tổng quát ta có định nghĩa sau.

Định nghĩa 2. *Giả sử f: $V \rightarrow V$ là một tự đồng cấu của không gian vectơ V. Không gian con W của V được gọi là một không gian con bất biến đối với f nếu với mọi $\vec{\alpha} \in W$ ta đều có $f(\vec{\alpha}) \in W$.*

Bây giờ ta xét tập hợp các vectơ riêng ứng với một giá trị riêng.

Mệnh đề. *Giả sử V là một không gian vectơ, tập hợp gồm vectơ $\vec{0}$ và các vectơ riêng ứng với giá trị riêng k của tự đồng cấu f: $V \rightarrow V$ là một không gian con bất biến của V và được gọi là không gian riêng ứng với giá trị riêng k.*

Chứng minh. Gọi W là tập hợp gồm vectơ $\vec{0}$ và các vectơ riêng ứng với giá trị riêng k của f. Rõ ràng $W \neq \varnothing$ vì $\vec{0} \in W$. Giả sử $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in W$ và $r, s \in K$. Vì f là ánh xạ tuyến tính nên:

$$\begin{aligned} f(r\vec{\alpha} + s\vec{\beta}) &= f(r\vec{\alpha}) + f(s\vec{\beta}) = r f(\vec{\alpha}) + sf(\vec{\beta}) = r(k\vec{\alpha}) + s(k\vec{\beta}) \\ &= k(r\vec{\alpha} + s\vec{\beta}). \end{aligned}$$

Điều đó chứng tỏ $r\vec{\alpha} + s\vec{\beta}$ 1à một vectơ riêng ứng với k. Do đó $r\vec{\alpha}$ +

$s\vec{\beta} \in W$. Vậy W là một không gian con của V. Hơn nữa W bất biến đối với f vì nếu $\vec{\alpha} \in W$ thì $f(\vec{\alpha}) = k(\vec{\alpha}) \in W$.

Các vectơ riêng ứng với các giá trị riêng phân biệt của một tự đồng cấu liên quan với nhau như thế nào?

Định lí. *Nếu $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_p$ là những vectơ riêng tương ứng với các giá trị riêng đôi một phân biệt $k_1, k_2, \ldots, k_p$ của tự đồng cấu f thì chúng lập thành một hệ vectơ độc lập tuyến tính.*

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp theo p.

Khi p = 1, mệnh đề đúng vì $\vec{\alpha}_1 \neq \vec{0}$.

Giả sử p > 1 và mệnh đề đúng với p – 1. Ta phải chứng minh rằng nếu có đẳng thức

$$r\vec{\alpha}_1 + r_2\vec{\alpha}_2 + \ldots + r_{p-1}\vec{\alpha}_{p-1} + r_p\vec{\alpha}_p = \vec{0} \quad (1)$$

thì bắt buộc $r_1 = r_2 = \ldots = r_{p-1} = r_p = 0$.

Vì $\vec{\alpha}_i$ là những vectơ riêng ứng với giá trị riêng k_i nên tác động f vào hai vế của đẳng thức (1) ta được:

$$r_1k_1\vec{\alpha}_1 + r_2k_2\vec{\alpha}_2 + \ldots + r_{p-1}k_{p-1}\vec{\alpha}_{p-1} + r_pk_p\vec{\alpha}_p = \vec{0}. \quad (2)$$

Bây giờ nhân hai vế của (1) với úp rồi trừ vào (2) ta có:

$$r_1(k_1 - k_p)\vec{\alpha}_1 + r_2(k_2 - k_p)\vec{\alpha}_2 + \ldots + r_{p-1}(k_{p-1} - k_p)\vec{\alpha}_{p-1} = \vec{0}.$$

Theo giả thiết quy nạp, hệ vectơ $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_{p-1}\}$ độc lập tuyến tính. Do đó:

$$r_1(k_1 - k_p) = r_2(k_2 - k_p) = \ldots = r_{p-1}(k_{p-1} - k_p) = 0.$$

Vì các k_i đôi một khác nhau nên $r_1 = r_2 = \ldots = ra = 0$.

Thay các giá trị này vào (1) ta lại có $r_p\vec{\alpha}_p = \vec{0}$. Nhưng $\vec{\alpha}_p \neq 0$ nên $r_p = 0$.

Vậy hệ vectơ $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_p\}$ độc lập tuyến tính.

5.2. Da thức đặc trưng - Cách tìm vectơ riêng

Để tìm vectơ riêng ta chỉ cần tìm tọa độ của chúng đối với cơ sở đã cho.

Giả sử ma trận của tự đồng cấu f. V → V đối với cơ sở (ε) là

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots\ldots\ldots\ldots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$\vec{\alpha}$ có tọa độ là $(x_1, x_2,.., x_n)$ là một vectơ riêng ứng với giá trị riêng k khi và chỉ khi $f(\vec{\alpha}) = k\vec{\alpha}$. Nhưng khi đó tọa độ của $f(\vec{\alpha})$ là $(kx_1, kx_2,..., kx_n)$. Theo ví dụ 4, mục 2.5,

$$\sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j = kx_i \text{ với mọi } i \in \{1, 2,..., n\}.$$

Cụ thể hơn là:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 +\ldots+ a_{1n}x_n = kx_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 +\ldots+ a_{2n}x_n = kx_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 +\ldots+ a_{nn}x_n = kx_n \end{cases} \qquad (*)$$

hay

$$\begin{cases} (a_{11} - k)x_1 + a_{12}x_2 +\ldots+ a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - k)x_2 +\ldots+ a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 +\ldots+ (a_{nn} - k)x_n = 0 \end{cases} \qquad (**)$$

Nói tóm lại $\vec{\alpha}$ là một vectơ riêng ứng với giá trị riêng k khi và chỉ khi tọa độ $(x_1, x_2,..., x_n)$. Của nó là nghiệm của hệ phương trình (**).

Vì vectơ riêng khác $\vec{0}$ nên hệ phương trình này có nghiệm không tầm thường. Do đó định thức

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12}\ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k\ldots\ldots\ldots & a_{in} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots\ldots a_{nn} & - k \end{vmatrix} = 0 \qquad (***)$$

Điều này chứng tỏ một tự đồng cấu mà ma trận của nó là A =

$(a_{ij})_{(m,n)}$, có vectơ riêng khi và chỉ khi phương trình (***) đối với ẩn k có nghiệm.

Định thức D chính là định thức của ma trận A - kI, trong đó I là ma trận đơn vị. Định thức này viết được dưới dạng một đa thức bậc n của k:

$$|A - kI| = D = (-1)^n k^n + \ldots + |A|.$$

Chú ý rằng nếu A và B là hai ma trận của cùng một tự đồng cấu thì có một ma trận không suy biến T sao cho $B = T^{-1}AT$. Do đó:

$$|B| = |T^{-1}AT| = |T^{-1}|.|A|.|T| = |T^{-1}|.|T|.|A| = |T^{-1}T|.|A| = |I|.|A| = |A|.$$

$$|B - kI| = |T^{-1}AT - kT^{-1}T| = |T^{-1}(A - kI)T| = |T^{-1}|.|A - kI|.|T| = |T^{-1}|.|T|.|A - kI|$$

$$= |T^{-1}T|.|A - kI| = |I|.|A - kI| = |A - kI|.$$

Như vậy, đối với một tự đồng cấu, đa thức nói trên không phụ thuộc vào cơ sở của không gian vectơ.

Định nghĩa. *Giả sử A là ma trận của tự đồng cấu f. Ma trận A - kI được gọi là ma trận đặc trưng, còn đa thức*

$$|A - kI| = (-1)^n k^n + \ldots + |A|$$

được gọi là đa thức đặc trưng của tự đồng cấu f.

Từ những điều nói trên suy ra cách tìm vectơ riêng như sau.

Cách tìm vectơ riêng.

1) Tìm nghiệm của đa thức đặc trưng (tức là nghiệm của phương trình (***)). Đó là các giá trị riêng,

2) Thay mỗi giá trị riêng tìm được vào vị trí của k trong hệ (**) rồi giải hệ này. Mỗi nghiệm riêng của hệ là tọa độ của một vectơ riêng ứng với giá trị riêng ấy. Không gian nghiệm của hệ (**) xác định không gian riêng ứng với giá trị riêng vừa chọn.

Ví dụ 1. Cho phép biến đổi tuyến tính f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ có ma trận đối với cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Tìm các giá trị riêng của f và ứng với mỗi giá trị riêng tìm một vectơ riêng. Tìm các không gian bất biến tương ứng của f.

Giải. Giải phương trình

$$\begin{vmatrix} 1-k & 2 & -2 \\ 1 & -k & 3 \\ 1 & 3 & -k \end{vmatrix} = 0 \quad \text{hay } (k+3)(k^2-4k+3) = 0.$$

ta được: $k_1 = -3$, $k_2 = 1$, $k_3 = 3$.

- Với $k_1 = 3$, hệ phương trình (**) là hệ:

$$\begin{cases} (1-(-3))x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + (0-(-3))x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + (0-(-3))x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}.$$

Giải hệ này được nghiệm tổng quát là $(\frac{6}{5}c, -\frac{7}{5}c, c)$.

Cho $c_3 = 5$ ta được một nghiệm riêng $\vec{\alpha}_1 = (6, -7, 5)$.

Không gian bất biến gồm tất các các vectơ có dạng $(\frac{6}{5}c, -\frac{7}{5}c, c)$ hay $\frac{c}{5}(6, -7, 5)$. Đó là không gian sinh bởi $\vec{\alpha}_1$.

- Với k2 = 1, giải hệ

$$\begin{cases} 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

ta được nghiệm tổng quát $(-2c_3, c_3, c_3)$.

Cho $c_3 = 1$, được một nghiệm riêng $\vec{\alpha}_2 = (-2, 1, 1)$.

Không gian bất biến tương ứng gồm các vectơ có dạng $c_3(-2, 1, 1) = c_3\vec{\alpha}_2$. Vậy không gian bất biến này sinh bởi $\vec{\alpha}_2$.

- Với kết = 3, giải hệ

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

ta được nghiệm tổng quát: (0, c, c).

Cho c = 1 ta có một vectơ riêng ứng với $k_3 = 3$ là $\vec{\alpha}_3 = (0, 1, 1)$.

Không gian bất biến tương ứng gồm các vectơ có dạng: (0, c, c) = c(0, 1, 1) = $c\vec{\alpha}_3$. Vậy không gian bất biến này sinh bởi $\vec{\alpha}_3$.

Vì ba vectơ riêng $\vec{\alpha}_1$, $\vec{\alpha}_2$, $\vec{\alpha}_2$ tương ứng với ba giá trị riêng phân biệt nên theo định lí ở mục 5.1, chúng độc lập tuyến tính. Vì $\dim\mathbf{R}^3 = 3$ nên chúng tạo thành một cơ sở của $\mathbf{R}^3$.

Ví dụ 2. Cho tự đồng cấu f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ có ma trận đối với cơ sở chính

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tìm các giá trị riêng và với một không gian riêng tìm một cơ sở.

Giải. Giải phương trình

$$\begin{vmatrix} 1-k & -4 & -8 \\ -4 & 7-k & -4 \\ -8 & -4 & 1-k \end{vmatrix} = 0 \text{ hay } (k-9)^2(k+9) = 0,$$

ta được: $k_1 = -9$, $k_2 = k_3 = 9$.

• Với $k_1 = -9$, giải hệ

$$\begin{cases} 10x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0 \\ -4x_1 + 16x_2 - 4x_3 = 0 \\ -8x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases}$$

ta được nghiệm tổng quát: (2c, c, 2c). Vì hạng của ma trận của hệ phương trình này bằng 2 nên theo định lí 3.2, Ch.IV, không gian riêng W_1 tương ứng (tức là không gian nghiệm) có $\dim W_1 = \dim\mathbf{R}^3 - 2 = 1$. Do đó một vectơ riêng bất kì là một cơ sở, chẳng hạn, với c = 1, $\vec{\alpha} = (2, 1, 2)$ là một cơ sở.

• Với $k_2 = 9$, giải hệ

$$\begin{cases} -8x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0 \\ -4x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ -8x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0 \end{cases} \text{ hay } 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

ta được nghiệm tổng quát: (c_1, - $2c_1$-$2c_3$, c_3). Hạng của ma trận của hệ phương trình này bằng 1 nên không gian riêng tương ứng W_2 (không gian nghiệm) có

$$\dim W_2 = \dim \mathbf{R}^3 - 1 = 2.$$

Một cơ sở của nó là một hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình.

Với $c_1 = 1$, $c_3 = 0$ ta có nghiệm riêng $\vec{\beta}_1 = (1, - 2, 0)$, với $c_1 = 0$, $c_3 = 1$ ta có nghiệm riêng $\vec{\beta}_2 = (0, - 2, 1)$. Hệ vectơ $\{\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2\}$ là một cơ sở của W_2.

5.3. Tìm giá trị riêng và vectơ riêng bằng máy tính điện tử

Ta lấy lại hai ví dụ trong mục 5.2.

Ví dụ. Cho một tự đồng cấu có ma trận

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Tìm giá trị riêng.

b) Tìm vectơ riêng.

Giải. a) Tìm giá trị riêng

B={{1,- 4,- 8},{- 4,7,- 4},{- 8, - 4, 1}}↵

Màn hình xuất hiện ma trận:

Out[1]={{1, - 4, - 8}, {- 4, 7, - 4},{- 8, - 4, 1}}

Eigenvalues[B] ↵

Màn hình xuất hiện:

Out[2]={-9,9,9}.

b) Tìm vectơ riêng:

Tạo các ma trận như trên. Nếu đã có ma trận trên màn hình thì không cần tạo nữa.

Để tìm vectơ riêng đánh lệnh:

Eigenvectors [B] ↵

Màn hình xuất hiện:

Out[]={{2,1,2},{-1,0,1},{-1,2,0}}.

c) Tìm đồng thời cả giá trị riêng và vectơ riêng

{vals, vecs}=Eigensystem[B] ↵

Màn hình xuất hiện:

Out[]={{-9,9,9},{{2,1,2},{-1,0,1},{-1,2,0}}}

§6. CHÉO HOÁ MA TRẬN

Như đã nói ở trước §5, khi cho ma trận của một tự đồng cấu đối với một cơ sở nào đó, ta muốn tìm những cơ sở mà đối với chúng ma trận của tự đồng cấu đã cho có dạng "đẹp nhất"- dạng chéo. Khi đó ta nói rằng ma trận đã cho chéo hoá được.

6.1. Định nghĩa

Một ma trận vuông được gọi là chéo hoá được nếu nó đồng dạng với một ma trận chéo.

Ví dụ Ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 10 & -7 \end{pmatrix}$$

chéo hoá được. Thật vậy, với $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ta có: $T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ và bạn đọc có thể kiểm tra rằng $A = T^{-1}BT$, nghĩa là $A \sim B$.

Phải chăng mọi ma trận đều chéo hoá được?

Trước hết ta thấy: nếu tự đồng cấu có ma trận chéo đối với một cơ sở nào đó thì mỗi vectơ của cơ sở ấy là một vectơ riêng. Ta sẽ thấy điều ngược lại cũng đúng.

6.2. Điều kiện để một ma trận chéo hoá được

Định lí. *Một ma trận vuông chéo hoá được khi và chỉ khi nó là ma trận của một tự đồng cấu có một hệ vectơ riêng là cơ sở của không gian.*

Chứng minh. Coi A như ma trận của một tự đồng cấu f. $V \to V$ đối với cơ sở (ε).

A là ma trận vuông chéo hoá được khi và chỉ khi có một ma trận T sao cho:

$$T^{-1}AT = B = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_n \end{pmatrix}.$$

Theo định lí 5.1, điều này xảy ra khi và chỉ khi B là ma trận của f đối với một cơ sở (ε) mà $f(\vec{\varepsilon}_j) = k_j\vec{\varepsilon}_j$, với mọi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$; nghĩa là (ε') là một cơ sở gồm những vectơ riêng.

Hệ quả. *Nếu A là ma trận vuông cấp n mà đa thức đặc trưng* $|A - kI|$ *có n nghiệm phân biệt thì A chéo hoá được.*

Ví dụ 1. Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Chéo hoá ma trận.

b) Giả sử ma trận chéo vừa tìm được là B. Hãy tìm ma trận T để $B = T^{-1}AT$.

Giải. a) Ở ví dụ 1 mục 5.2, ta đã thấy, nếu coi A như ma trận của tự đồng cấu f của $\mathbf{R}^3$ đối với cơ sở chính tắc thì f có ba giá trị riêng phân biệt là : kì - - 3, k2 = 1, k3 = 3. Các vectơ riêng tương ứng: $\vec{\alpha}_1 = (6, -7, 5)$, $\vec{\alpha}_2 = (-2, 1, 1)$, $\vec{\alpha}_3 = (0, 1, 1)$ lập thành một cơ sở của $\mathbf{R}^3$. Theo chứng minh của định lí 6.2.

$$A \sim B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Gọi T là ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}^3$ sang cơ sở $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3\}$. Vì

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_1 &= 6\vec{\varepsilon}_1 - 7\vec{\varepsilon}_2 + 5\vec{\varepsilon}_3 \\ \vec{\alpha}_2 &= -2\vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2 + \vec{\varepsilon}_3 \\ \vec{\alpha}_3 &= \vec{\varepsilon}_2 + \vec{\varepsilon}_3 \end{aligned}$$

nên ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3\}$ là

$$T = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Theo chứng minh định lí 4.1, $B = T^{-1}AT$.

Bây giờ ta xét trường hợp đa thức đặc trưng của ma trận A có nghiệm bội. Chẳng hạn,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Đa thức đặc trưng $|A - kI| = \begin{vmatrix} 1-k & 2 & 5 \\ 0 & 2-k & 4 \\ 1 & 0 & 1-k \end{vmatrix} = -k^3 + 4k^2$

$= k^2(k - 4)$ có nghiệm đơn là kì 4, nghiệm kép $k_2 = k_3 = 0$.

Với $k_1 = 4$, không gian riêng W_1 tương ứng gồm các vectơ có dạng (3c, 2c, c) hay W_1 sinh bởi vectơ (3,2,1). Do đó $\dim W_1$ 1.

Với $k_2 = k_3 = 0$, không gian riêng W_2 tương ứng gồm các vectơ có dạng (c, 2c, - c) hay cả, 2, - 1); tức là W_2 sinh bởi vectơ (1, 2, -1) và $\dim W_2 = 1$.

Vì A chỉ có hai giá trị riêng k = 0 và k = 4 nên nếu A chéo hoá được thì A đồng dạng với ma trận có dạng

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{hoặc } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Nếu A đồng dạng với B thì **R**3 có một cơ sở $\{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3\}$ sao cho $f(\vec{\xi}_1) = \vec{0} = f(\vec{\xi}_2)$. Suy ra $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2$ thuộc không gian riêng W_2. Nhưng hai vectơ này độc lập tuyến tính. Trái với nhận xét trên rằng $\dim W_2 = 1$. Tương tự, nếu A đồng dạng với C. Vậy A không chéo hoá được.

Tóm lại, nếu số bội của nghiệm riêng lớn hơn số chiều của không gian riêng tương ứng thì ma trận không chéo hoá được. Khi số bội của mọi nghiệm riêng đều bằng số chiều của không gian riêng tương ứng thì sao? Ta có định lí sau.

6.3. Định lí

Giả sửa là một ma trận vuông cấp n; $k_1, k_2,..., k_p$ là các nghiệm của đa thức đặc trưng $|A - kI|$, m_i là số bội của nghiệm k_i, với mọi $i \in \{1, 2,..., p\}$, $m_1 + m_2+...+ m_p = n$, tức là:

$$|A - kI| = (-1)^n (k - k_1)^{m_1} (k - k_2)^{m_2} \ldots (k - k_p)^{m_p}$$

và hạng$(A - k_iI) = n - m_i$. Khi đó A chéo hoá được.

Chứng minh. Giả sử A là ma trận của tự đồng cấu f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ đối với cơ sở chính tắc. Gọi W_i là không gian riêng ứng với giá trị riêng ki. Vì hạng$(A - k_iI) = n - m_i$, nên theo định lí 3.2, Ch. IV,

$$\dim W_i = n - (n - m_i) = m_i.$$

Với mỗi i ∈ = {1, 2,..., p}, ta chọn một cơ sở $\{\vec{\xi}_{i1}, \vec{\xi}_{i2},..., \vec{\xi}_{im_i}\}$ của W_i. Hệ vectơ

$$\{\vec{\xi}_{11}, \vec{\xi}_{12},..., \vec{\xi}_{1m_1}, \vec{\xi}_{21}, \vec{\xi}_{22},..., \vec{\xi}_{2m_2}, ..., \vec{\xi}_{p1}, \vec{\xi}_{p2},..., \vec{\xi}_{pm_p}\} \quad (1)$$

độc lập tuyến tính. Thật vậy, giả sử

$$\{\xi_{11}, \xi_{12},..., \xi_{1m_1}, \xi_{21}, \xi_{22},..., \xi_{2m_2}, ..., \xi_{p1}, \xi_{p2},..., \xi_{pm_p}\} \quad (1)$$

độc lập tuyến tính. Thật vậy, giả sử

$$r_{11}\vec{\xi}_{11}+...+ r_{1m_1}\vec{\xi}_{1m_1} + r_{21}\vec{\xi}_{21}+...+ r_{2m_2}\vec{\xi}_{2m_2} +...+ r_{p1}\vec{\xi}_{p1}+...+ r_{pm_p}\vec{\xi}_{pm_p} = \vec{0}. \quad (2)$$

Đặt $\vec{\alpha}_i = r_{i1}\vec{\xi}_{i1} +...+ r_{im_i}\vec{\xi}_{im_i}$, với mọi i ∈ {1, 2,...,p}, (2) trở thành:

$$\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 +...+ \vec{\alpha}_p = \vec{0}. \quad (3)$$

Vì $\vec{\alpha}_i \in W_i$ nên nó là vectơ riêng ứng với giá trị riêng k_i. Nhưng các k_i là những giá trị riêng đôi một phân biệt của f. Theo định h ở mục 5.1, hệ vectơ $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2,..., \vec{\alpha}_p\}$ gục lập tuyến tính.

Từ (3) suy ra $\vec{\alpha}_i = r_{1i}\vec{\xi}_{il} +...+ r_{imi}\vec{\xi}_{imi} = 0$.

Theo cách chọn, hệ $\{\vec{\xi}_{i1}, \vec{\xi}_{i2},..., \vec{\xi}_{imi}\}$ độc lập tuyến tính. Do đó các hệ số $r_{ij} = 0$, với mỗi i ∈ {1, 2,..., p} và mọi j ∈ {1, 2,..., m_i}. Vì dim$\mathbf{R}^n$ = n và hệ (1) gồm n vectơ riêng độc lập tuyến tính nên nó là một cơ sở của $\mathbf{R}^n$. Theo định lí 7.2, A chéo hoá được.

TÓM TẮT

Chương này đã nêu lên các quy tắc tính trên tập các ma trận.

Phép cộng hai ma trận cùng kiểu và phép nhân một ma trận với một số được thực hiện trên các thành phần tương ứng. Tập hợp các ma trận cùng kiểu là một **K**-không gian vectơ.

Nhân ma trận $A = (a_{ij})_{(m,n)}$ với ma trận $B = (b_{jj})_{(n,p)}$ được ma trận $C = (c_{ik})_{(m.p)}$

với

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} .$$

Phép nhân có tính chất kết hợp nhưng không giao hoán.

Tập hợp các ma trận vuông cấp n vừa là một **K** - không gian vectơ vừa là một vành, được gọi là một **K** - đại số.

Trong đại số $Mat_n(\mathbf{K})$ có những ma trận khả nghịch. Đó là những ma trận có định thức khác 0, gọi là những ma trận không suy biến. Ma trận nghịch đảo của ma trận A là ma trận

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \ldots\ldots\ldots\ldots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \ldots\ldots\ldots\ldots A_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{1n} & a_{2n} \ldots\ldots\ldots\ldots A_{nn} \end{pmatrix}$$

trong đó A_{ij} là phần bù đại số của thành phần aij của ma trận A.

Hai ma trận vuông A và B được gọi là đồng dạng nếu có ma trận T sao cho

$$B = T^{-1}AT$$

Ở đây ta cũng chứng minh được định thức của tích hai ma trận bằng tích hai định thức của hai ma trận ấy:

$$|AB| = |A|.|B|$$

Ma trận có mối liên quan mật thiết với ánh xạ tuyến tính: đối với hai cơ sở (ε) và (ξ) tương ứng của hai không gian V và W một ánh xạ tuyến tính $f: V \to W$ xác định và được xác định bởi một ma trận duy nhất A =

(a_{ij}) gọi là ma trận của f đối với hai cơ sở (ε) và (ξ). Nó thoả mãn các đẳng thức:

$$f(\vec{\varepsilon}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{\xi}_i,\ j \in \{1,\dots,n\},\ (n = \dim V,\ m = \dim W).$$

Nếu A và B lần lượt là hai ma trận của hai ánh xạ tuyến tính f và g thì A + B là ma trận của f + g, ma trận AB là ma trận của fg (nếu các phép toán có nghĩa); nếu $k \in K$ thì kết là ma trận của ánh xạ tuyến tính kf.

Nói riêng, đối với các tự đồng cấu $f : V \to V$, ta có khái niệm vectơ riêng và giá trị riêng. Vectơ $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ và $f(\vec{\alpha}) = k\vec{\alpha}$ với một số k nào đó được gọi là một vectơ riêng của f, còn k được gọi là giá trị riêng ứng với $\vec{\alpha}$. Nhờ ma trận $A = (a_{ij})$ của f và định thức $|A - kI|$ ta tìm được các giá trị riêng của f, đó là các nghiệm của phương trình $|A - kI| = 0$. Ma trận $A - kI$ được gọi là ma trận đặc trưng, $|A - kI|$ là đa thức đặc trưng của f (hay của ma trận A). Muốn tìm tọa độ của vectơ riêng ứng với giá trị riêng k, ta giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (a_{11} - k)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - k)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - k)x_n = 0 \end{cases} \qquad (**)$$

Tập hợp W gồm $\vec{0}$ và các vectơ riêng ứng với một giá trị riêng là một không gian con bất biến đối với f, tức là $f(W) \subseteq W$.

p vectơ riêng ứng với p giá trị riêng đôi một phân biệt thì độc lập tuyến tính. Do đó nếu $\dim V = n$ và đa thức đặc trưng có n nghiệm phân biệt thì V có một cơ sở gồm các vectơ riêng.

Ma trận A được gọi là chéo hoá được nếu nó đồng dạng với một ma trận chéo. Một ma trận chéo hoá được khi và chỉ khi nó là ma trận của một tự đồng cấu có một hệ vectơ riêng là cơ sở của không gian V.

BÀI TẬP

Trước hết nhắc lại rằng cơ sở chính tắc của không gian vectơ $\mathbf{R}^a$ là cơ sở gồm các vectơ:

$\vec{\varepsilon}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$,

$\vec{\varepsilon}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$,

....

$\vec{\varepsilon}_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, (số 1 đứng ở vị trí thứ j, các thành phần khác bằng 0)

....

$\vec{\varepsilon}_n = (0, 0, \ldots, 1)$.

§1. MA TRẬN CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

1. Cho hai không gian vectơ V và W có cơ sở lần rượt là $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3\}$, $(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2,\}$ và ánh xạ tuyến tính f: v → W xác định bởi:

$$\begin{aligned} f(\vec{\varepsilon}_1) &= -2\vec{\xi}_1 + 5\vec{\xi}_2 - \vec{\xi}_3, \\ f(\vec{\varepsilon}_2) &= 4\vec{\xi}_1 + \vec{\xi}_2 - 3\vec{\xi}_4, \\ f(\vec{\varepsilon}_3) &= 7\vec{\xi}_2 + 4\vec{\xi}_3. \end{aligned}$$

a) Tìm ma trận của f đối với hai cơ sở đã cho.

b) Cho $\vec{\alpha} = 3\vec{\varepsilon}_2 + \vec{\varepsilon}_3$. Tìm ảnh $f(\vec{\alpha})$.

2. Cho ánh xạ tuyến tính f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ xác định bởi:

$f(\vec{\varepsilon}_1) = (-2, 3)$, $f(\vec{\varepsilon}_2) = (0, 5)$, $f(\vec{\varepsilon}_3) = (7, -1)$, trong đó $\{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}^3$.

a) Tìm ma trận của f đối với các cơ sở chính tắc của hai không gian.

b) Tìm vectơ $f(\vec{\alpha})$, với $\vec{\alpha} = (5, -1, 1)$.

3. Cho ánh xạ tuyến tính f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ xác định bởi

$$f(a_1, a_2, a_3) = (a_1 + a_3, -3a_3).$$

a) Tìm ma trận của f đối với hai cơ sở chính tắc (ε) và (ξ) của hai không gian.

b) Tìm ma trận của f đối với cơ sở (ε') gồm các vectơ

$\vec{\varepsilon}'_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{\varepsilon}'_2 = (0, 1, 1)$, $\vec{\varepsilon}'_3 = (1, 0, 1)$ của $\mathbf{R}^3$ và cơ sở chính tắc (ξ) của $\mathbf{R}^2$.

4. Xác định ánh xạ tuyến tính f : $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, biết rằng ma trận của nó đối với cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}^3$ là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Cho $\vec{\alpha} = (3, -2, 0)$. Tìm $f(\vec{\alpha})$ đối với cơ sở chính tắc.

5. Cho

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

là ma trận của ánh xạ tuyến tính f: V → W đối với cơ sở $\{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3\}$ của v và cơ sở $\{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2\}$ của W, $\vec{\alpha} \in$ V có tọa độ là (-1, 2, 3). Tìm tọa độ của $f(\vec{\alpha})$ đối với cơ sở $\{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2\}$.

6. Cho P_2, P_3 lần lượt là những không gian con gồm 0 và các đa thức bậc không vượt quá 2, quá 3, φ: $P_2 \to P_3$ là ánh xạ tuyến tính xác định bởi:

$$\varphi(a + bx + cx^2) = a + (a + b)x + (b + c)x^2 + cx^3.$$

a) Tìm ma trận của φ đối với cơ sở $\{1, x, x^2\}$ của P_2 và cơ sở $\{1, x, x^2, x^3\}$ của P_3.

b) Cho $\vec{\alpha} = 2 - 5x + x^2$. Tìm tọa độ của $\varphi(\vec{\alpha})$ đối với cơ sở đã cho ở câu a).

7. Cho phép biến đổi tuyến tính f: $\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ có ma trận đối với cơ sở chính tắc là:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Tìm tọa độ của $f(\vec{\alpha})$, trong đó $\vec{\alpha} = (2, 5, 1, -2)$.

b) Tìm Kerf.

§2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP CÁC MA TRẬN

8. Cho các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 7 \\ 1 & -5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -5 & 1 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 8 & 0 \\ 11 & -3 \end{pmatrix}.$$

Tính :

a) A + B - C;

b) 2A - 7B;

c) 3A + 5B - 2C.

9. Cho hai ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ -2 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tìm ma trận X sao cho:

a) A - X = B;

b) 3B + 2X = A;

C) 5X - 2A = 4B.

10. Cho hai ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -5 & 1 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Tìm ma trận X trong mỗi trường hợp sau:

a) $X = A + {}^tB$;

b) $3\,{}^tB - 2X = 2A$;

c) $3X + {}^tA - 2B = 0$, (0 ở đây là ma trận 0).

11. Với điều kiện nào của hai ma trận A và B thì $A + {}^tB$ xác định? ${}^tA$

- B xác định?

12. Cho:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

lần lượt là ma trận của hai ánh xạ tuyến tính f và g (đối với cùng những cơ sở). Tìm ma trận của ánh xạ f- 2g.

13. Nhân các ma trận:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}; \qquad \text{b) } \begin{pmatrix} 9 & 5 & -1 \\ 4 & 12 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -3 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 4 & 0 & 7 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 9 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{d) } (a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

14. Cho hai ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \\ 7 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tính AB và BA. Có kết luận gì về tính giao hoán của phép nhân ma trận?

15. Cho các ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & .0 & -2 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Tính AB, BC.

b) Tính (AB)C và A(BC). So sánh hai kết quả.

16. Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Tìm tất cả các ma trận X sao cho AX = I, (I là ma trận đơn vị).

17. Giả sử A là một ma trận vuông, $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, ta kí hiệu

$$f(A) = a_0I + a_1A + \ldots + a_nA^n.$$

Cho ma trận

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ và đa thức $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

Tính f(A).

18. Cho AB là tích của hai ma trận A và B. Chứng minh rằng: ${}^t(AB) = {}^tB.{}^tA$.

19. Gọi (ε) và (ξ) lần lượt là cơ sở chính tắc của hai không gian $\mathbf{R}^4$ và $\mathbf{R}^3$. Các ánh xạ tuyến tính f: $\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$, g: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ xác định bởi:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1, x_2 - x_3, x_4),$$

$$g(y_1, y_2, y_3) = (y_1 + y_2, y_3, 0).$$

Tìm ma trận của ánh xạ gf đối với các cơ sở chính tắc đã cho.

§4. ĐẠI SỐ CÁC MA TRẬN VUÔNG CẤP N

20. Chứng minh rằng với A và B là hai ma trận vuông cấp n khả nghịch ta có:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

21. Cho các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tính định thức của AB.

22. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 8 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & -3 \\ 3 & 8 & -1 & -6 \end{pmatrix}.$$

23. Cho các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Tìm ma trận X thoả mãn đẳng thức AX + B - C.

24. a) Tìm một ma trận vuông A khác ma trận 0, cấp lớn hơn 1, mà A = 0.

b) Chứng minh rằng nếu ma trận vuông A thoả mãn điều kiện $A^2 = 0$ thì I + A và I - A là hai ma trận nghịch đảo của nhau, (ở đây I là ma trận đơn vị).

25. Chứng minh rằng nếu một trong hai ma trận A và B không suy biến thì hai ma trận AB và BA đồng dạng.

26. Cho f: V → V là một tự đồng cấu có ma trận đối với cơ sở

$(\varepsilon) = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3\}$ là

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hãy tìm ma trận của f đối với cơ sở (ε') gồm các vectơ:

$$\vec{\varepsilon}'_1 = \vec{\varepsilon}_1 - \vec{\varepsilon}_2,$$
$$\vec{\varepsilon}'_2 = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2 - 2\vec{\varepsilon}_3,$$
$$\vec{\varepsilon}'_3 = \vec{\varepsilon}_2 + \vec{\varepsilon}_3.$$

27. Trong không gian vectơ V cho cơ sở $(\varepsilon) = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3\}$ và cơ sở (ε') gồm các vectơ:

$$\vec{\varepsilon}'_1 = 2\vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2,$$
$$\vec{\varepsilon}'_2 = \vec{\varepsilon}_2 - \vec{\varepsilon}_3,$$
$$\vec{\varepsilon}'_3 = \vec{\varepsilon}_1 + 2\vec{\varepsilon}_3.$$

Ma trận của tự đồng cấu y: V → V có ma trận đối với cơ sở (ε') là

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tìm ma trận của f đối với cơ sơ (ε).

28. f và g là hai tự đồng cấu của không gian vectơ $\mathbf{R}^2$. Ma trận của f đối với cơ sở gồm hai vectơ $\vec{\xi}_1 = (1, 2)$, $\vec{\xi}_2 = (2, 3)$ là $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Ma trận của g đối với cơ sở gồm hai vectơ $\vec{\delta}_1 = (3, 1)$, $\vec{\delta}_2 = (4, 2)$ là $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận của tự đồng cấu f + g đối với cơ sở $\{\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2\}$.

§5. VECTƠ RIÊNG - GIÁ TRỊ RIÊNG

29. Giả sử A là ma trận của tự đồng cấu f của không gian vectơ V đối với một cơ sở đã chọn. Hãy xét xem trong mỗi trường hợp sau vectơ nào là vectơ riêng:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$, $\vec{\alpha} = (-1,3)$, $\vec{\beta} = (2, -4)$, $\vec{\gamma} = (1, 2)$;

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{\alpha} = (1, 1, 3)$, $\vec{\beta} = (1, 0, 5)$, $\vec{\gamma} = (2, 2, 2)$;

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{\alpha} = (-1, 2, 0)$, $\vec{\beta} = (1, 0, -3)$, $\vec{\gamma} = (-4, 0, 1)$;

30. Giả sử $\vec{\alpha}$ là vectơ riêng của hai tự đồng cấu f và g ứng với hai giá trị riêng tương ứng là kì, k2' chứng minh rằng *a* cũng là vectơ riêng của các tự đồng cấu fg và f + g. Tìm các giá trị riêng ứng với *a* của từng tự đồng cấu ấy.

31. Tìm vectơ riêng của các tự đồng cấu có ma trận dưới đây:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & -8 \\ 2 & -4 & 7 & -4 \\ -1 & -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

32. Tìm vectơ riêng và không gian riêng tương ứng với mỗi giá trị riêng của các tự đồng cấu có ma trận dưới đây:

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

33. Hai ma trận sau có đồng dạng không:

$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

§6. CHÉO HOÁ MA TRẬN

34. Trong các ma trận sau ma trận nào chéo hoá được? Nếu được hãy đưa nó về dạng chéo.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

35. Với mỗi ma trận A sau đây hãy tìm một ma trận T để ^{t}|A| là một ma trận chéo:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

36. Giả sử A là ma trận của tự đồng cấu f trong không gian $\mathbf{R}^3$ đối với cơ sở chính tắc. Hãy tìm một cơ sở của $\mathbf{R}^3$ để ma trận của f là ma trận chéo:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

37. Bài tập tự kiểm tra

Cho f. $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ và g: $\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ xác định lần lượt bởi

$f(a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2, a_1 - a_2, a_3)$, $g(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_1 + a_2, a_3, a_4)$.

a) Tìm ma trận của f và ma trận của g đối với các cơ sở chính tắc trong R3 và R4.

b) Tìm ma trận của gf và fg đối với các cơ sở chính tắc.

c) Trong hai đồng cấu gf và fg, ánh xạ nào là đẳng cấu? Tìm ma trận của ánh xạ ngược của đẳng cấu.

d) Tìm một cơ sở của Ker(fg), một cơ sở của Im(fg).

e) Tìm các giá trị riêng và các không gian con bất biến tương ứng của gf và của fg.

f) Trong hai ma trận của gf và fg, ma trận nào chéo hoá được? Hãy chéo hoá trong trường hợp có thể.

VÀI NÉT LỊCH SỬ

Ma trận đã có từ rất sớm. Trong cuốn "Cửu chương toán số" người Trung Quốc đã dùng ma trận để giải phương trình vô định. Còn ở Châu âu lần đầu tiên ma trận xuất hiện vào thế kỉ XIX, trong công trình của nhà toán học Anh tên là J. J. Sylvester (1814-1897) về việc giải hệ phương trình tuyến tính (tuy nhiên lúc đó chưa có tên ma trận). Chính Sylvester cũng đã định nghĩa khái niệm hạng của ma trận. Về sau, Kelly (1821-1895), nhà toán học Anh đã đưa ra các quy tắc tính trên các ma trận. Các công trình của Sylvester và Kelly có liên quan đến định thức. Kronecker (nhà toán học Đức (1823-1891)) và Capelli (nhà toán học Italia) cũng đã dùng ma trận để nghiên cứu lý thuyết hệ phương trình tuyến tính.

Ngày nay, ma trận được ứng dụng rộng rãi trong toán học tính toán, trong Vật lý, trong Kinh tế và trong nhiều ngành khoa học khác.

Chương VI

DẠNG SONG TUYẾN TÍNH
DẠNG TOÀN PHƯƠNG

MỞ ĐẦU

Trong Hình học, khi nghiên cứu những đường bậc hai, mặt bậc hai, việc đưa phương trình của chúng về dạng chính tắc có một ý nghĩa rất quan trọng, vì ở dạng chính tắc ta dễ nhận biết dạng và các đặc tính của chúng, phân loại chúng. Công việc này thực hiện được nhờ những khái niệm về dạng như: dạng tuyến tính, dạng song tuyến tính, dạng toàn phương, và khái niệm không gian vectơ Ơclit. Như vậy việc nghiên cứu Hình học được thực hiện bằng những phương tiện Đại số. Bạn đọc sẽ thấy rằng phương tiện này tỏ ra rất hữu hiệu.

Một ánh xạ tuyến tính từ một **K**-không gian vectơ đến **K**-không gian vectơ **K** được gọi là một dạng tuyến tính. Mở rộng khái niệm này ta có những khái niệm: dạng song tuyến tính, dạng song tuyến tính đối xứng, dạng song tuyến tính thay phiên, dạng toàn phương. Lại nhờ khái niệm dạng song tuyến tính đối xứng và dạng toàn phương mà ta sẽ định nghĩa được khái mềm tích vô hướng trong không gian vectơ - một khái niệm đã được làm quen từ khi học lớp 10 trường Trung học Phổ thông. Tích vô hướng giúp ta xây dựng không gian vectơ Ơclit.

Khi học chương này các bạn cần nắm được:

- Các khái niệm dạng tuyến tính, dạng song tuyến tính, dạng toàn phương;

- Các phương pháp đưa một dạng toàn phương về dạng chính tắc;

- Định lí quán tính của dạng toàn phương;

- Khái niệm không gian vectơ Ơclit;

- Khái niệm hệ cơ sở trực chuẩn và cách dựng một hệ cơ sở trực chuẩn; một số ứng dụng của những kiến thức nói trên đồng thời vận dụng được những kiến thức này trong việc học tập Hình học và một số môn học liên quan khác.

Để học tập chương này được dễ dàng, bạn đọc cần nắm vững các kiến thức về không gian vectơ, ánh xạ tuyến tính, ma trận.

§1. DẠNG TUYẾN TÍNH VÀ DẠNG SONG TUYẾN TÍNH

1.1. Định nghĩa, ví dụ

Định nghĩa. *Giả sử V là không gian vectơ.*

1) Ánh xạ $f : V \to \mathbf{R}$ được gọi là một dạng tuyến tính trên V nếu:

$$f(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = f(\vec{\alpha}) + f(\vec{\beta}), \forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V;$$
$$f(k\vec{\alpha}) = kf(\vec{\alpha}), \forall \vec{\alpha} \in V, \forall k \in \mathbf{R}$$

2) Ánh xạ φ: $V \times V \to R$ được gọi là một dạng song tuyến tính trên V nếu:

(I)
$$\varphi(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2, \vec{\beta}) = \varphi(\vec{\alpha}_1, \vec{\beta}) + \varphi(\vec{\alpha}_2, \vec{\beta}),$$
$$\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2) = \varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}_1) + \varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}_2),$$

(II)
$$\varphi(\kappa\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \kappa\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \varphi(\vec{\alpha}, \kappa\vec{\beta})$$

*với mọi $\vec{\alpha}$, $\vec{\alpha}_1$, $\vec{\alpha}_2$, $\vec{\beta}$, $\vec{\beta}_1$, $\vec{\beta}_2$ thuộc V và mọi $k \in$ **R**.*

3) Dạng song tuyến tính φ được gọi là đối xứng nếu:

$$\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \varphi(\vec{\beta}, \vec{\alpha}), \forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V.$$

Dạng song tuyến tính φ được gọi là thay phiên nếu:

$$\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = -\varphi(\vec{\beta}, \vec{\alpha}), \forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V.$$

Ví dụ 1. Với V = $\mathbf{R}^n$, $\vec{\alpha} = (a_1..., a_n)$ ' với mỗi i = 1, 2,..., n, ta có phép chiếu f_i từ $\mathbf{R}^n$ đến **R** xác định bởi $f_i(\vec{\alpha}) = a_i$ là dạng tuyến tính trên $\mathbf{R}^n$.

Ví dụ 2. Ký hiệu P_n là không gian véc tơ gồm đa thức 0 và các đa thức một ẩn x có bậc bé hơn hoặc bằng n, với hệ số thực, $\vec{\alpha} = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.

Ánh xạ f : $P_n \to \mathbf{R}$, xác định bởi f ($\vec{\alpha}$) = $\sum_{i=0}^{n} a_i$; là một dạng tuyến tính trên P_n.

Ví dụ 3. Với V = $\mathbf{R}^2$, $\vec{\alpha} = (a_1, a_2)$, $\vec{\beta} = (b_1, b_2)$. Ánh xạ: $\varphi = \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to$ R, xác định bởi $\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ (định thức cấp hai), là một dạng song tuyến tính thay phiên.

Thật vậy, với bất kỳ $\vec{\alpha} = (a_1, a_2)$, $\vec{\beta} = (b_1, b_2)$, $\vec{\alpha}' = (a'_1, a'_2)$, $\vec{\beta}' = (b'_1, b'_2) \in \mathbf{R}^2$ và $k \in \mathbf{R}$ ta có:

$$\varphi\left(\vec{\alpha} + \vec{\alpha}', \vec{\beta}\right) = \begin{vmatrix} a_1 + a'_1 & a_2 + a'_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 \\ b'_1 & b'_2 \end{vmatrix}$$

$$= \varphi\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) + \varphi\left(\vec{\alpha}', \vec{\beta}'\right);$$

Tương tự: $\varphi\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} + \vec{\beta}'\right) = \varphi\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) + \varphi\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}'\right)$;

$$\varphi\left(k\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \begin{vmatrix} ka_1 & ka_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = k\varphi\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ kb_1 & kb_2 \end{vmatrix} = \varphi\left(\vec{\alpha}, k\vec{\beta}\right).;$$

Hơn nữa ta có $\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = -\varphi(\vec{\beta}, \vec{\alpha})$

Ví dụ 4. Ánh xạ $\varphi = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ xác định bởi $\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$, với $\vec{\alpha} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\vec{\beta} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, là một dạng song tuyến tính đối xứng trên $\mathbf{R}^n$.

Ví dụ 5. Giả sử V là không gian các vectơ (hình học) có chung gốc O. Ánh xạ φ từ V × V vào **R** xác định như sau:

Với $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$, $\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = |\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}|$ là cos ($\vec{\alpha}, \vec{\beta}$) (tích vô hướng của $\vec{\alpha}$ và $\vec{\beta}$), là một dạng song tuyến tính đối xứng.

Thật vậy, như đã biết trong giáo trình hình học trường phổ thông, với ký hiệu $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ là tích vô hướng của hai vectơ $\vec{\alpha}$ và $\vec{\beta}$, ta có:

$$\varphi(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2, \vec{\beta}) = (\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2)\vec{\beta} = \vec{\alpha}_1.\vec{\beta} + \vec{\alpha}_2.\vec{\beta} = \varphi(\vec{\alpha}_1, \vec{\beta}) + (\vec{\alpha}_2, \vec{\beta}),$$

$$\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2) = \vec{\alpha}(\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2) = \vec{\alpha}.\vec{\beta}_1 + \vec{\alpha}.\vec{\beta}_2 = \varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}_1) + (\vec{\alpha}, \vec{\beta}_2),$$

$$\varphi(k\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = (k\vec{\alpha}).\vec{\beta} = k(\vec{\alpha}.\vec{\beta}) = k\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}),$$

$$\varphi(\vec{\alpha}, k\vec{\beta}) = \vec{\alpha}.(k\vec{\beta}) = k(\vec{\alpha}.\vec{\beta}) = k\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta});$$

$$\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \vec{\alpha}.\vec{\beta} = \vec{\beta}.\vec{\alpha} = \varphi(\vec{\beta}, \vec{\alpha}).$$

Nhận xét:

- Một dạng tuyến tính trên V thực chất là một ánh xạ tuyến tính từ V vào R, ở đó R được xét như một không gian vectơ trên chính nó

- Ánh xạ $\varphi : V \times V \to R$ là một *dạng song tuyến tính* trên V nếu và chỉ nếu nó là dạng tuyến tính trên V đối với biến x khi ta cố định biến y và tương tự là dạng tuyến tính trên V đối với biến y khi ta cố định biến x.

- Mọi dạng song tuyến tính trên V đều có thể biểu diễn được thành tổng của một dạng song tuyến tính đối xứng và một dạng song tuyến tính thay phiên trên V.

Thật vậy: với $\forall\ \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ đặt :

$$\varphi_1(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{1}{2}\{\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) + \varphi(\vec{\beta}, \vec{\alpha})\};$$

$$\varphi_2(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{1}{2}\{\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) - \varphi(\vec{\beta}, \vec{\alpha})\}$$

Dễ dàng chứng minh được φ_1 là dạng song tuyến tính đối xứng và φ_2 là dạng song tuyến tính thay phiên thỏa mãn $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

Định lý 1. *Giả sử V là không gian vectơ n chiều với cơ sở là* $\{\vec{\varepsilon}_1,..., \vec{\varepsilon}_2,..., \vec{\varepsilon}_n\}$. *Ánh xạ* $f : V \to \mathbf{R}$ *là một dạng tuyến tính trên V khi và chỉ khi tồn tại n số thực* $c_1,..., c_n$ *sao cho* $f(\vec{\varepsilon}) = \sum_{i=1}^{n} a_j c_j$ *với mọi* $\vec{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{n} a_i\vec{\varepsilon}_i \in V$. *Khi đó* $f(\vec{\varepsilon}_i) = c_i$, *với mọi* $i = 1,..., n$ *và* f *là dạng tuyến tính duy nhất trên V thỏa mãn điều kiện này.*

Chứng minh. Đây là trường hợp đặc biệt của định lý về sự xác định một ánh xạ tuyến tính (Ch.III).

Định lý 2. *Giả sử V là không gian vectơ n chiều với cơ sở là* $\{\{\vec{\varepsilon}_1,..., \vec{\varepsilon}_2,..., \vec{\varepsilon}_n\}$. *Ánh xạ* $\varphi : V \times V \to R$ *là một dạng song tuyến tính trên V khi và chỉ khi tồn tại* n^2 *số thực* $\{d_{ij}|\ i, j = 1, 2,..., n\}$ *sao cho* $\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) =$

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j d_{ij}$ *với mọi* $\vec{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\varepsilon}_i$, $\vec{\beta} = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{\varepsilon}_i \in V$. *Khi đó* $\varphi(\vec{\varepsilon}_i, \vec{\varepsilon}_j) = d_{ij}$, *với mọi i, j = 1,..., n và* φ *là dạng song tuyến tính duy nhất trên V thỏa mãn điều kiện này.*

Chứng minh. Giả sử φ là một dạng song tuyến tính tùy ý trên V. Với mỗi cặp (i, j), i, i =1,..., n đặt $\varphi(\vec{\varepsilon}_i, \vec{\varepsilon}_j) = d_{ij}$. Khi đó với hai vectơ bất kỳ $\vec{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\varepsilon}_i$, $\vec{\beta} = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{\varepsilon}_i \in V$ ta có :

$$\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\varepsilon}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{\varepsilon}_j\Big) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi\Big(\vec{\varepsilon}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{\varepsilon}_j\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \varphi(\vec{\varepsilon}_i, \vec{\varepsilon}_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j d_{ij}$$

Ngược lại, giả sử tồn tại n^2 số thực $\{d_{ij} \mid i, i = 1, 2,..., n\}$ sao cho ánh xạ φ từ $V \times V$ vào **R** thoả mãn điều kiện trong định lí. Khi đó với bất kỳ $\vec{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\varepsilon}_i$, $\vec{\xi} = \sum_{i=1}^{n} z_i \vec{\varepsilon}_i$, $\vec{\beta} = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{\varepsilon}_i \in V$, $k \in \mathbf{R}$ ta có:

$$\varphi(\vec{\alpha} + \vec{\xi}, \vec{\beta}) = \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\varepsilon}_i + \sum_{i=1}^{n} z_i \vec{\varepsilon}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{\varepsilon}_j\Big) = \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} (x_i + z_i) \vec{\varepsilon}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{\varepsilon}_j\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (x_i + z_i) y_j d_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j d_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_i y_j d_{ij}$$

$$= \varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) + \varphi(\vec{\xi}, \vec{\beta}).$$

$$\varphi(k\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \varphi\Big(k\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\varepsilon}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{\varepsilon}_j\Big) = \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} k x_i \vec{\varepsilon}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{\varepsilon}_j\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k x_i y_j d_{ij}$$

$$= k\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j d_{ij} = k\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}).$$

Tương tự ta cũng chứng minh được $\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\xi} + \vec{\beta}) = \varphi(\vec{\alpha}, \vec{\xi}) + \varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ và $\varphi(\vec{\alpha}, k\vec{\beta}) = k\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$. Do đó φ là một dạng song tuyến tính trên V. Khi $\vec{\alpha} = \vec{\varepsilon}_i$, $\vec{\beta} = \vec{\varepsilon}_j$ thì $x_i = 1$ và $x_t = 0$ với $t \neq i$, $y_j = 1$ và $y_h = 0$ với $h \neq i$. Vì vậy ta có : $\varphi(\vec{\varepsilon}_i, \vec{\varepsilon}_j) = d_{ij}$ với mọi cặp (i, j).

Giả sử ψ là một dạng song tuyến tính trên V thỏa mãn $\psi(\vec{\varepsilon}_i, \vec{\varepsilon}_j) = d_{ij}$, khi đó với hai vectơ bất kỳ $\vec{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{\varepsilon}_i$, $\vec{\beta} = \sum_{i=1}^{n} y_i\vec{\varepsilon}_i \in$ V ta có:

$\psi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j d_{ij} = \varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$. Vậy $\psi = \varphi$. Định lý được chứng minh.

Ví dụ:

Xét V = $\mathbf{R}^n$, và $\{\vec{\varepsilon}_1,..., \vec{\varepsilon}_2,..., \vec{\varepsilon}_n\}$ là cơ sở chính tắc của V. Dạng song tuyến tính φ trên $\mathbf{R}^n$ xác định bởi $\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = x_1y_1 + x_2y_2 +...+ x_ny_n$, với $\vec{\alpha}$ = $(x_1, x_2,..., x_n)$, $\vec{\beta} = (y_1, y_2,..., y_n) \in$ V là dạng song tuyến tính duy nhất trên $\mathbf{R}^n$ thỏa mãn $\varphi(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2) = \delta_{ij}$, trong đó $\delta_{ij} = 1$ khi i = j và $\delta_{ij} = 0$ khi i $\neq$ j.

1.2. Ma trận của dạng song tuyến tính

Định nghĩa. *Giả sử* $\{\vec{\varepsilon}_1,..., \vec{\varepsilon}_2,..., \vec{\varepsilon}_v\}$ *là một cơ sở của không gian vectơ n chiều V trên trường số thực* R, φ *là một dạng song tuyến tính trên V, ký hiệu* $\varphi(\vec{\varepsilon}_i, \vec{\varepsilon}_j) = a_{ij} \in \mathbf{R}$, $\forall i, j = 1, 2,..., n$. *Ma trận vuông cấp n sau đây được gọi là ma trận của dạng song tuyến tính* φ *đối với cơ sở* $\{\vec{\varepsilon}_1,..., \vec{\varepsilon}_2,..., \vec{\varepsilon}_v\}$ *đã cho*

$$A = (a_{ij})_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Nhận xét: Giả sử V là không gian vectơ với cơ sở $\{\vec{\varepsilon}_1,..., \vec{\varepsilon}_2,..., \vec{\varepsilon}_n\}$ và A = (a_{ij})n là ma trận của dạng song tuyến tính ép trên V. Khi đó với $\vec{\alpha}$ = $\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{\varepsilon}_i$, $\vec{\beta} = \sum_{i=1}^{n} y_i\vec{\varepsilon}_i \in$ V, áp dụng định lý 2, mục 1.1, ta có: $\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ = $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$.

Như vậy, nếu biết ma trận của dạng song tuyến tính q) đối với một cơ sở nào đó, thì ta có thể xác định ảnh $\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ của cặp $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ tuỳ ý; nghĩa là: một dạng song tuyến tính được hoàn toàn xác định bởi ma trận của nó đối với một cơ sở đã cho.

Ví dụ 1. Trong Ví dụ 3 của mục 1.1, nếu chọn cơ sở của **R** là $\vec{\varepsilon}_1 =$ (1, 0), $\vec{\varepsilon}_2 =$ (0, 1 thì

$$a_{11} = \varphi(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad a_{12} = \varphi(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$a_{21} = \varphi(\vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad a_{22} = \varphi(\vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_2) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ma trận của φ là $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ và với $\vec{\alpha} = (a_1, a_2)$, $\vec{\beta} = (b_1, b_2)$ ta có:

$$\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0.a_1b_1 + 1.a_1b_2 + (-1).a_2b_1 + 0.a_2b_2 = a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Ví dụ 2. Trong ví dụ 4 của mục 1.1, nếu chọn cơ sở của V là hai vectơ $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$, trong đó $|\vec{i}| \perp |\vec{j}| = = 1$ thì:

$$a_{11} = \varphi(\vec{i}, \vec{i}) = |\vec{i}|^2 = 1, \quad a_{12} = \vec{i}.\vec{j} = 0, \quad a_{21} = \vec{j}.\vec{i} = 0, \quad a_{22} = |\vec{j}|^2 = 1.$$

Do đó ma trận của φ là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Với hai vectơ $\vec{\alpha} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$, $\vec{\beta} = y_1\vec{i} + y_2\vec{j}$

$$\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = x_1y_1 + 0x_1y_2 + 0x_2y_1 + 1x_2y_2 = x_1y_1 + x_2y_2.$$

1.3. Liên hệ giữa hai ma trận của cùng một dạng song tuyến tính đối với hai cơ sở khác nhau

Theo định nghĩa, ma trận của dạng song tuyến tính thay đổi khi ta đổi cơ sở của không gian vectơ. Ta hãy xét mối liên quan giữa hai ma trận của cùng một dạng song tuyến tính đối với hai cơ sở khác nhau.

Định lý. *Giả sử* $(\varepsilon) = \{\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_n\}$, $(\xi) = \{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \ldots, \vec{\xi}_n\}$ *là hai cơ sở của cùng một **R**-không gian vectơ n chiều V,* $A = (a_{ij})_n$ *và* $B = (b_{ij})_n$ *lần lượt là các ma trận của dạng song tuyến tính* φ *trên V đối với các cơ sở tương ứng* (ε) *và* (ξ), $T = (t_{ij})_n$ *là ma trận chuyển từ* (ε) *sang* (ξ). *Khi đó* $B = {}^tTAT$.

Chứng minh. Vì T là ma trận chuyển từ cơ sở (ε) sang (ξ) nên

$\vec{\xi} = t_{1j}\vec{\varepsilon}_1 + t_{2j}\vec{\varepsilon}_2 + \ldots + t_{nj}\vec{\varepsilon}_n$. Do đó:

$$b_{ij} = \varphi\left(\vec{\xi}_i, \vec{\xi}_j\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}t_{ki}t_{lj} = \sum_{k=1}^{n} t_{ki} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}t_{lj} = \sum_{k=1}^{n} t'_{ik} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}t_{lj},$$ ở đây $t'_{ik} = t_{ki}$.

Ta có $c_{kj} = \sum_{l=1}^{n} a_{kl}t_{lj}$ là phần tử ở dòng k cột j trong ma trận tích AT và ma trận $\left(t'_{ik}\right)_n$ là ma trận chuyển vị của ma trận T, nên $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} t'_{ik}\left(\sum_{l=1}^{n} a_{kl}t_{lj}\right) = \sum_{k=1}^{n} t'_{ik}c_{kj}$ là phần tử dòng thứ i và cột thứ j của ma trận tích ${}^{t}TAT$. Vậy $B = {}^{t}TAT$.

Ví dụ. Trên không gian vectơ $\mathbf{R}^3$ trên trường số thực $\mathbf{R}$ cho dạng song tuyến tính φ xác định như sau: Với $\vec{\alpha} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{\beta} = (y_1, y_2, y_3)$,

$$\varphi\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = 2x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_3 - 3x_3y_3.$$

Đối với cơ sở (ε): $\vec{\varepsilon}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{\varepsilon}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{\varepsilon}_3 = (0, 0, 1)$, φ có ma trận là

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Nếu xét cơ sở (ξ) : (ξ) = (1, 1, 1), $\vec{\xi}_2 = (1, 0, 1)$, $\vec{\xi}_2 = (0, -1, 1)$ thì ma vận chuyển từ cơ sở (ε) sang (ξ) là $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ma trận của φ đối với cơ sở (ξ) sẽ là:

$$B = {}^{t}TAT = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

hay $$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & -4 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Cũng có thể tìm ma trận B bằng cách tính trực tiếp $b_{ij} = \varphi(\vec{\xi}_i, \vec{\xi}_j)$.

Chẳng hạn $b_{13} = \varphi(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_3) = 2.1.0+1(-1)= 1.1 - 3.1.1 = -1 -1 - 3 = -5$.

§2. DẠNG TOÀN PHƯƠNG

2.1. Định nghĩa

Định nghĩa. *Ánh xạ* $\Gamma : V \to \boldsymbol{R}$ (**R** *là trường số thực) được gọi là một dạng toàn phương trên* V *nếu tồn tại một dạng song tuyến tính* f *trên V sao cho* $\Gamma(\vec{\alpha}) = f(\vec{\alpha}, \vec{\alpha})$ *với mọi* $\vec{\alpha} \in V$. *Khi đó f được gọi là dạng song tuyến tính sinh ra dạng toàn phương* Γ.

Ví dụ: Dạng song tuyến tính $f(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 3x_1y_2 - x_2y_1$, với mọi vectơ $\vec{\alpha} = (x_1, x_2)$, $\vec{\beta} = (y_1, y_2) \in R_2$, sinh ra dạng toàn phương $\Gamma(\vec{\alpha}) = 2x_1x_2$.

Nhận xét

(i) Có thể có nhiều dạng song tuyến tính cùng sinh ra một dạng toàn phương. Chẳng hạn, nếu f là một dạng song tuyến tính không đối xứng, đặt $g(\vec{\beta}, \vec{\alpha}) = f(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$, $\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ thì các dạng song tuyến tính f và g trên V cùng sinh ra một dạng toàn phương, nhưng $f \neq g$.

(ii) Ta có thể chứng minh tồn tại tương ứng 1-1 giữa các dạng toàn phương trên V và các dạng song tuyến tính đối xứng trên V; nghĩa là nếu Γ là một dạng toàn phương trên V thì tồn tại một và chỉ một dạng song tuyến tính đối xứng φ sinh ra Γ.

Thực vậy, giả sử f là dạng song tuyến tính nào đó sinh ra dạng toàn phương Γ, $\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \in V$, đặt $\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{1}{2}\{\Gamma(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) - \Gamma(\vec{\alpha}) - \Gamma(\vec{\beta})\}$. Có thể thấy ngay φ là một dạng song tuyến tính đối xứng trên V sinh ra Γ. Giả sử ψ cũng là một dạng song tuyến tính đối xứng trên V sinh ra Γ. Khi đó $\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ ta có:

$$\begin{aligned}\Gamma(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) &= \psi(\vec{\alpha}+\vec{\beta}, \vec{\alpha}+\vec{\beta}) = \psi(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \psi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) + \psi(\vec{\beta}, \vec{\alpha}) + \psi(\vec{\beta}, \vec{\beta}) \\ &= \Gamma(\vec{\alpha}) + 2\psi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) + \Gamma(\vec{\beta})\end{aligned}$$

Vì vậy dạng song tuyến tính đối xứng ψ hoàn toàn được xác định bởi r qua công thức:

$$\psi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{1}{2}\{\Gamma(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) - \Gamma(\vec{\alpha}) - \Gamma(\vec{\beta})\} = \varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}).$$

Dạng song tuyến tính đối xứng φ sinh ra dạng toàn phương r được gọi là *dạng cực* của Γ.

(iii) Từ định lý mục 1.2 suy ra rằng nếu V là không gian vectơ n chiều với cơ sở là $\{\vec{\varepsilon}_1,..., \vec{\varepsilon}_2,..., \vec{\varepsilon}_n\}$ thì ánh xạ $\Gamma : V \to R$ là một dạng toàn phương trên V khi và chỉ khi $\Gamma(\vec{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j$ với mọi $\vec{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\varepsilon}_i \in V$, trong đó a_{ij} (i, j = 1, 2,..., n) là dãy các số thực xác định.

2.2. Ma trận của dạng toàn phương

Định nghĩa. *Giả sử Γ là dạng toàn phương tương ứng với dạng song tuyến tính đối xứng φ. Ma trận của φ đối với cơ sở* $\{\vec{\varepsilon}_1,..., \vec{\varepsilon}_2,..., \vec{\varepsilon}_n\}$ *cũng được gọi là ma trận của dạng toàn phương Γ đối với cơ sở ấy.*

Như *vậy nên* $A = (a_{ij})_n$ *là ma trận của dạng toàn phương Γ đối với cơ* sở $\{\vec{\varepsilon}_1,..., \vec{\varepsilon}_2,..., \vec{\varepsilon}_n\}$, *thì A có tính chất* $a_{ij} = \varphi(\vec{\varepsilon}_i, \vec{\varepsilon}_j) = \varphi(\vec{\varepsilon}_j, \vec{\varepsilon}_i)$ = ai;. *Ma trận có tính chất này được gọi là ma trận đối xứng.*

Với $\vec{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\varepsilon}_i$, *biểu thức* $\Gamma(\vec{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j$ *được gọi là biểu thức tọa độ của* Γ.

Ví dụ. Ánh xạ $\Gamma : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ xác định như sau:

Với $\vec{\alpha} = (x_1, x_2, x_3)$, $\Gamma(\vec{\alpha}) = 2x^2_1 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x^2_2 + 3x^2_3$, là một dạng toàn phương ứng với dạng song tuyến tính đối xứng q) xác định bởi:

$$\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 2x_1y_1 - x_1y_2 + 2x_1y_3 - x_2y_1 - x_2y_2 + 2x_3y_1 + 3x_3y_3,$$ ở

ở đây $\vec{\beta} = (y_1, y_2, y_3)$. Đối với cơ sở (ε) : $\vec{\varepsilon}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{\varepsilon}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{\varepsilon}_3 = (0, 0, 1)$, φ và Γ có ma trận là:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Vì ma trận của dạng toàn phương là đối xứng, tức là $a_{ij} = a_{ji}$, nên đối với $\vec{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\varepsilon}_i$, biểu thức tọa độ $\Gamma(\vec{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$ có thể viết là:

$$\Gamma(\vec{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j.$$

Chẳng hạn đối với dạng toàn phương trong ví dụ ta có:

$$\Gamma(\vec{\alpha}) = 2x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3.$$

Ngược lại, nếu dạng toàn phương Γ được xác định bởi đẳng thức

$\Gamma(\vec{\alpha}) = \sum_{1 \le i \le j \le n} b_{ij} x_i x_j$, với $\vec{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\varepsilon}_i$, thì nó có ma trận là $A = (a_{ij})_n$ với

$$a_{ij} = a_{ji} = \begin{cases} b_{ii}, & \text{nếu } i = j \\ \dfrac{b_{ij}}{2}, & \text{nếu } i < j \end{cases}$$

2.3. Dạng toàn phương xác định

Định nghĩa. *Dạng toàn phương Γ trên không gian vectơ V được gọi là xác định nếu:* $\Gamma(\vec{\alpha}) = 0$ *kéo theo* $\vec{\alpha} = \vec{0}$.

Định lý. *Nếu Γ là một dạng toàn phương xác định thì rắn có cùng một dấu với mọi $a \in V$.*

Chứng minh. Cố định vectơ $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, với $\vec{\beta}$ bất kỳ của V, ta xét biểu thức:

$$\Gamma(\vec{\alpha} - x\vec{\beta}) = \varphi(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) - 2x\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) + x^2\varphi(\vec{\beta}, \vec{\beta})$$
$$= x^2\Gamma(\vec{\beta}) - 2x\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) + \Gamma(\vec{\alpha})$$

trong đó φ là dạng song tuyến tính đối xứng tương ứng của Γ.

Nếu có giá trị $x = k \in R$ $(k \neq 0)$ sao cho $\vec{\alpha} = k\vec{\beta}$ thì

$$\Gamma(\vec{\alpha}) = \varphi(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) = \varphi(k\vec{\beta}, k\vec{\beta}) = k^2\varphi(\vec{\beta}, \vec{\beta}) = k^2\Gamma(\vec{\beta}).$$

Do đó $\Gamma(\vec{\beta})$ cùng dấu với $\Gamma(\vec{\alpha})$.

Nếu $\vec{\alpha} \neq$ với mọi $x \in R$, tức là $\vec{\alpha} - x\vec{\beta} \neq 0$ thì vì Γ là dạng toàn phương xác định nên

$$x^2\Gamma(\vec{\beta}) - 2x\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) + \Gamma(\vec{\alpha}) \neq 0, \text{ với mọi } x \in \mathbf{R}.$$

Điều này có nghĩa là phương trình $x^2\Gamma(\vec{\beta}) - 2x\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) + \Gamma(\vec{\alpha}) = 0$ đối với ẩn x vô nghiệm. Vì thế $\Delta' = [\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}]^2 - \Gamma(\vec{\alpha})\,\Gamma(\vec{\beta}) < 0$ hay

$$\Gamma(\vec{\alpha})\Gamma(\vec{\beta}) > \left[(\vec{\alpha}, \vec{\beta})\right]^2 \geq 0$$

Vậy $\Gamma(\vec{\beta})$ cùng dấu với $\Gamma(\vec{\alpha})$.

Định nghĩa. *Dạng toàn phương Γ trên không gian vectơ V được gọi là xác định dương* (âm) *nếu* $\Gamma(\vec{\alpha}) > 0$ ($\Gamma(\vec{\alpha}) < 0$) *với mọi* $\vec{\alpha} \neq 0$ *thuộc V.*

Hệ quả. *Nếu Γ là một dạng toàn phương xác định dương* (*âm*) *trên không gian vectơ V và W là một không gian con của V thì thu hẹp của Γ trên W (ký hiệu là $\Gamma|_W$) cũng là một dạng toàn phương xác định dương* (*âm*) *trên W.*

§3. ĐƯA DẠNG TOÀN PHƯƠNG VỀ DẠNG CHÍNH TẮC

3.1. Định nghĩa

Giả sử Γ là một dạng toàn phương trên không gian vectơ V. Nếu đối với cơ sở (ξ) = { $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \ldots, \vec{\xi}_n$} *của V biểu thức tọa độ của Γ là*

$$\Gamma(\vec{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} k_i x_i^2, \quad \left(\vec{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\xi}_i\right) \qquad (1)$$

thì biểu thức này được gọi là dạng chính tắc của dạng toàn phương Γ. Trong trường hợp này ma trận của dạng toàn phương Γ đối với cơ sở (ξ) *là một ma trận chéo ($a_{ij} = a_{ji} = 0$ với $i \neq j$).*

Việc đổi cơ sở đến một dạng toàn phương đã cho đối với cơ sở mới có dạng chính tắc được gọi là đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc.

3.2. Định lý

Mọi dạng toàn phương đều đưa được về dạng chính tắc.

Chứng minh. Giả sử Γ là một dạng toàn phương trên không gian vectơ V. Ta chứng minh định lý bằng quy nạp theo số chiều n của V.

Nếu n > 1 thì Γ có biểu thức tọa độ dạng $\Gamma(\vec{\alpha}) = ax^2$. Đó là đúng chính tắc.

Giả sử n > 1 và mệnh đề đúng với (n - 1), hơn nữa đối với cơ sở (ε) = $\{\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_n\}$ của V, Γ có biểu thức tọa độ $\Gamma(\vec{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$, với $\vec{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\varepsilon}_i$.

a) Trường hợp có một $a_{ii} \neq 0$.

Giả sử $a_{11} \neq 0$, ta viết $\Gamma(\vec{\alpha})$ dưới dạng:

$$\Gamma(\vec{\alpha}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_2 + \sum_{i=2}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{2 \le i < j \le n} a_{ij}x_ix_j$$

$$= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 - \sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1i}^2}{a_{11}}x_i^2 - 2\sum_{2 \le i \le n} \frac{a_{1i}a_{1j}}{a_{11}}x_ix_j$$

$$+ \sum_{i=2}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{2 \le i < j \le n} a_{ij}x_ix_j$$

$$= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + \sum_{i=2}^{n}\left(a_{ii} - \frac{a_{1i}^2}{a_{11}}\right)x_i^2$$

$$+ 2\sum_{2 \le i < j \le n}\left(a_{ij} - \frac{a_{1i}a_{1j}}{a_{11}}\right)x_ix_j$$

Đặt:
$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n \\ y_i = x_i \quad \text{khi} \quad i = 2, \ldots, n \end{cases} \qquad (I)$$

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ii} - \dfrac{a_{1i}^2}{a_{11}}, & \text{nếu} \quad i = j,\ i = 2, \ldots, n \\ a_{ij} - \dfrac{a_{1i}a_{1j}}{a_{11}}, & \text{nếu} \quad 2 \text{ Ê } i < j \text{ Ê } n \end{cases}$$

Ta có: $$\Gamma(\vec{\alpha}) = a_{11}y_1^2 + \sum_{i=2}^{n} b_{ii}y_i^2 + 2\sum_{2 \le i < j \le n} b_{ij}y_iy_j$$

Công thức tọa độ (I) có thể viết thành:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - \dfrac{a_{12}}{a_{11}} y_2 - \ldots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} y_n \\ x_i = y_i, \quad i = 2,\ldots,n \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

Công thức biến đổi tọa độ (II) cho ta ma trận

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \ldots & -\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Mà định thức $|T| = 1 \neq 0$. Do đó theo công thức liên hệ tọa độ của $\vec{\alpha}$ đối với hai cơ sở khác nhau thì T là ma trận chuyển từ cơ sở (ε) sang cơ sở $(\xi) = \{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \ldots, \vec{\xi}_n\}$, mà đối với nó $\vec{\alpha} = \sum_{i=2}^{n} y_j \vec{\xi}_n$. Gọi W là không gian vectơ con của V sinh bởi các vectơ $\{\vec{\xi}_2, \ldots, \vec{\xi}_n\}$. Đặt $\vec{\beta} = \sum_{i=2}^{n} y_j \vec{\xi}_n \in$ W, ta có biểu thức $\Gamma'(\vec{\beta}) = \sum_{i=2}^{n} k_i z_i^2 + 2 \sum_{2 \le i \le j \le n} b_{ij} y_i y_j$ xác định dạng toàn phương thu hẹp của Γ trên W. Theo giả thiết qui nạp, Γ' có thể đưa về dạng chính tắc $\Gamma'(\vec{\beta}) = \sum_{i=2}^{n} k_i z_i^2$.

Đặt $a_{11} = k_1$, $y_1 = z_1$, ta có: $\Gamma(\vec{\beta}) = \sum_{i=2}^{n} k_i z_i^2$.

b) Trường hợp $a_{ii} = 0$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$.

Trong trường hợp này biểu thức tọa độ của Γ là $\Gamma(a) = \sum_{2 \le i \le j \le n} a_{ij} x_i x_j$.

Hiển nhiên phải có một $a_{kh} \neq 0$. Biến đổi tọa độ:

$$\begin{cases} x_k = y_k + y_h \\ x_h = y_k - y_h \\ x_i = y_i, & \text{Với } i \neq h,\ i \neq k \end{cases}$$

Phép biến đổi tọa độ này xác định ma trận:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Với $|S| = 2 \neq 0$. S lại là ma trận chuyển từ cơ sở (ε) sang một cơ sở (ζ) mà đối với nó $\vec{\alpha} = \sum_{i=2}^{n} y_j \vec{\xi}_n$ và biểu thức tọa độ của Γ có dạng:

$$\Gamma(\vec{\alpha}\ \vec{\alpha}\ \vec{\alpha}) = 2a_{kh}\left(y_k^2 - y_h^2\right) + 2\sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij}x_i x_j,\ (i, j) \neq (k, h)$$

Đặt $b_{kk} = 2a_{kh} \neq 0$, ta lại trở về trường hợp a). Định lý được chứng minh.

Hệ quả. *Giả sử* r *là một dạng toàn phương có dạng chính tắc* $\Gamma(\vec{\alpha}) = \sum_{i=2}^{n} k_i z_i^2$. *Thế thì* Γ *là dạng toàn phương xác định dương khi và chỉ khi* $k_1 > 0$, *với mọi* $i = 1,..., n$.

Chứng minh. "⇒" Giả sử Γ là xác định dương và trong biểu diễn chính tắc đối với một cơ sở nào đó có một hệ số, chẳng hạn $k_1 < 0$. Khi đó với $\vec{\alpha}$ ($\vec{\alpha} \neq 0$) có tọa độ đối với cơ sở trên là (1, 0,..., 0), ta có. $\Gamma(\vec{\alpha}) = k_1 \le 0$.

Trái với giả thiết rằng r là một dạng xác định dương.

Vậy $k_i > 0$ với mọi i = 1,..., n.

"⇐" Hiển nhiên.

Có nhiều phương pháp khác nhau để đưa một dạng toàn phương về dạng chính tắc: phương pháp chéo hóa ma trận, phương pháp Jacobi... Quy trình rút gọn dạng toàn phương trình bày trong định lý trên được gọi là phương pháp Lagrange. Đây là phương pháp dùng liên tiếp nhiều phép biến đổi tuyến tính để đưa một dạng toàn phương về dạng chính tắc.

Ví dụ: Đưa dạng toàn phương sau trên $\mathbf{R}^3$ về dạng chính tắc

$$\Gamma(\vec{\alpha}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

Giải.

$$\Gamma(\vec{\alpha}) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$
$$= (x_1 - 2x_2)^2 - 2x_2^{\,2} + 3x_3^{\,2} - 4x_2x_3.$$

Đặt: $\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$

ta có:

$$\Gamma(\vec{\alpha}) = y_1^{\,2} - 2y_2^{\,2} + 3y_3^{\,2} - 4y_2y_3 = y_1^{\,2} - 2\left(y_2^{\,2} + 2y_2y_3 + y_3^{\,2}\right) + 2y_3^{\,2} + 3y_3^{\,2}$$
$$= y_1^{\,2} - 2(y_2 + y_3)^2 + 5y_3^{\,2}.$$

Đặt: $\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_2 + y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$

ta được: $\Gamma(\vec{\alpha}) = z_1^{\,2} - 2z_2^{\,2} + 5z_3^{\,2}.$

Ví dụ 2. Đưa dạng toàn phương $\Gamma(\vec{\alpha}) = 4x_1x_2 + 3x_2x_3$ trên $\mathbf{R}^3$ về dạng chính tắc.

Giải.

Đặt $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

Khi đó ta có:

$$\Gamma(\vec{\alpha}) = 4(y_1+y_2)(y_1-y_2)+3(y_1-y_2)y_3 = 4y_1^2-4y_2^2+3y_1y_3-3y_2y_3$$

$$= 4\left(y_1^2+2y_1\frac{3y_3}{8}+\frac{9y_3^2}{64}\right)-\frac{9y_3^2}{16}-4y_2^2-3y_2y_3$$

$$= 4\left(y_1+\frac{3y_3}{8}\right)^2-4\left(y_2^2+2.y_2.\frac{3y_3}{8}+\frac{9y_3^2}{64}\right)$$

$$= 4\left(y_1+\frac{3y_3}{8}\right)^2-4\left(y_2+\frac{3y_3}{8}\right)^2.$$

Dùng phép biến đổi toạ độ: $\begin{cases} z_1 = y_1+\dfrac{3y_3}{8} \\ z_2 = y_2+\dfrac{3y_3}{8} \\ z_3 = y_3 \end{cases}$

Ta được $\Gamma(\vec{\alpha}) = 4z_1^2 - 4z_2^2$

Ví dụ 3. Đưa dạng toàn phương $\Gamma(\vec{\alpha})\ 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + x_3^3$ trên $\mathbf{R}^3$ về dạng chính tắc.

Giải: Ta có $\Gamma(\vec{\alpha}) = 2(x_1^2+\frac{3}{2}x_1x_2+2x_1x_3)+x_2^2+x_3^2$

Đặt : $y_1 = x_1+\frac{3}{4}x_2+x_3$, ta được:

$$\Gamma(\vec{\alpha}) = 2(y_1^2-\frac{9}{6}x_2^2-x_3^2-\frac{3}{2}2x_1x_3)+x_2^2+x_3^2 = 2y_1^2-\frac{1}{8}x_2^2-x_3^2-3x_2x_3$$

$$= 2y_1^2-\frac{1}{8}x_2^2-(x_3+\frac{3}{2}x_2)^2+\frac{9}{4}x_2^2 = 2y_1^2+\frac{15}{8}x_2^2-(x_3+\frac{3}{2}x_2)^2$$

Đặt: $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3+\frac{3}{2}x_2$

ta nhận dược biểu thức của Γ đối với cơ sở mới $(\vec{\xi}) = \{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3\}$ là:

$$\Gamma(\vec{\alpha}) = 2y_1^2+\frac{15}{8}y_2^2-y_3^2.$$

3.3. Dưa dạng toàn phương về dạng chinh tác bằng máy tính điện tử

Ta có thể sử dụng phương pháp Lagrange với sự hỗ trợ của phần mềm toán Maple để dưa biểu thức tọa độ của dạng toàn phương về dạng chính tắc. Quy trình cụ thể như sau:

Trước tiên ta phải sử dụng hai lệnh tạo môi trường tính toán là:

>restart;

>with(student);

[D,Diff, Int, Limit, Lineint, Product, Sum, Tripleint, Changevar, Completesquare, Distance, Equate, Integranớ, Intercept, Intpart, leftbox, leftsum, makeproc, miớdlebox, middlesum, midpoint, powsubs, rightbox, rightsum, showtangent, símpon, slope, summand, trapezoid]

Trong quá trình biến đổi cần chú ý phân biệt trường hợp $a_{1i} \neq 0$ với $a_{ii} = 0$.

Ví dụ 1. Đưa dạng toàn phương $\Gamma(\vec{\alpha}) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^3 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$ trên $\mathbf{R}^3$ về dạng chính tắc.

Ta sử dụng lệnh của Maple theo từng bước sau:

Bước 1: Đánh lệnh

>completesquare(x1^2+5*x2^2-4*x3^2+2*x1*x2-4*x1*x3,x1);

Ta nhận được $\Gamma(\vec{\alpha}) = (x_1 + x_2 - 2x_3) + 4x_2^2 + 4x_2x_3 - 8x_3^2$

Ta đặt $y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3$.

Bước 2: Đánh lệnh sau:

> completesquare(y1^2+4*x2^2+4*x2*x3-8*x3^2,x2);

Ta nhận được: $\Gamma(\vec{\alpha}) = 4(x_2 + \frac{1}{2}x_3)^2 - 9x_3^2 + y_1^2$.

Ta đặt tiếp : $y_2 = x_2 + \frac{1}{2}x_3$, $y_3 = x_3$.

Ta nhận được biểu thức chính tắc của dạng toàn phương r là:

$\Gamma(\vec{\alpha}) = y_1^2 + 4y_2^2 - 9y_3^2$.

Ví dụ 2. Đưa dạng toàn phương $\Gamma(\vec{\alpha}) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ trên R^3 về dạng chính tắc.

Ta sử dụng lệnh của Maple theo từng bước sau:

Bước 1 : Đánh lệnh

```
>completesquare(x1^2+4*x2^2+x3^2+4*x1*x2+2*x1*x3+2*x2*x3,x1);
```

Ta nhận được: $\Gamma(\vec{\alpha}) = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3$

Đặt $y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3$, ta có $\Gamma(\vec{\alpha}) = y_1^2 - 2x_2x_3$

Đặt $x_2 = y_2 + y_3$, $x_3 = y_2 - y_3$,

Bước 2. Tiếp tục thực hiện lệnh

```
> completesquare(y1^2-2*(y2+y3)*(y2-y3),y2),
```

Ta được: $\Gamma(\vec{\alpha}) = y_1^2 - 2y_2^2 + 2y_3^2$.

Chú ý. Để giữ lại được hệ phương trình biểu diễn các phép biến đổi, ta cần ghi lại phép đặt ẩn phụ trong quá trình làm các câu lệnh của Maple. Như vậy, sau khi tiến hành giải bài toán bằng phương pháp Lagrange, ta có thể kiểm tra lại từng bước của các phép biến đổi đã làm. Trong một số trường hợp quá khó, ta có thể sử dụng Maple để tìm trước kết quả sau đó đưa ra các phép biến đổi cho phù hợp.

3.4. Định lý quán tính

Một dạng toàn phương có thể có nhiều dạng chính tắc. Song chúng có một điểm chung được thể hiện bởi định lý sau:

Định lý 1. **(1uật quán tính)** *Trong hai dạng chính tắc bất kỳ của cung một dạng toàn phương số các hệ số dương bằng nhau, số các hệ số âm bằng nhau.*

Chứng minh. Giả sử: $\Gamma(\vec{\alpha}) = a_1 x_1^2 + \ldots + a_r x_r^2 - b_1 x_{r+1}^2 - \ldots - b_3 x_{r+3}^2$ là dạng chính tắc của Γ đối với cơ sở $(\varepsilon') = \{\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_n\}$, trong đó $a_i > 0$, $i = 1, \ldots r$, $b_j > 0$, $j = 1, \ldots, s$.

$\Gamma(c) = c_1 y_1^2 + \ldots + c_t y_t^2 - d_1 y_{t+1}^2 - \ldots - d_u y_{t+u}^2$, là dạng chính tắc của r đối với cơ sở $(\zeta) = \{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \ldots, \vec{\xi}_n\}$, trong đó $c_k > 0$, $k = 1, \ldots, t$, $d_l > 0$, $l = 1, \ldots, u$.

Ta phải chứng minh r = t, s = u.

Giả sử r < t. Xét không gian con W sinh bởi hệ vectơ $\{\vec{\varepsilon}_{r+1}, \ldots, \vec{\varepsilon}_n\}$ và không gian con U sinh bởi hệ vectơ $\{\vec{\xi}_1, \ldots, \vec{\xi}_t\}$. Ta có dimW = n - r, dimU = t. Vì r < t nên t - r > 0. Từ đó suy ra dimW + dimU = n + t - r > n = dimV.

Do dimW + dimU - dim (W ∩ U) = dim (U + W) ≤ dimV, nên dim (W ∩ U) ≥ dimW + dimU - dimV = n + t - r - n = t - r > 0.

Vì thế: $W \cap U \neq \{\vec{0}\}$.

Giả sử $\vec{\beta} \in W \cap U$ và $\vec{\beta} \neq \vec{0}$,

$$\vec{\beta} = x'_{r+1}\vec{\varepsilon}_{r+1} + \ldots + x'_{r+s}\vec{\varepsilon}_{r+s} + \ldots + x'_n\vec{\varepsilon}_n = y_1'\vec{\xi}_1 + \ldots + y_t'\vec{\xi}_t$$

Khi đó: $0 > -b_1x'^2_{r+1} - \ldots - b_sx'^2_{r+s} = \Gamma(\vec{\beta}) = c_1y'^2_1 + \ldots + c_ty'^2_t > 0$

Đó là điều không thể được. Vậy r ≥ t. Thay đổi vai trò của r và t, ta lại suy ra t ≥ r. Do đó r - t.

Cũng lập luận như vậy đối với s và u, ta được u = s.

Định lý trên đây được gọi là *luật quán tính* của dạng toàn phương.

Để phát biểu một tiêu chuẩn của dạng toàn phương xác định dương ta đưa ra khái niệm sau.

Đối với ma trận vuông

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

mỗi định thức

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

được gọi là một *định thức con chính* của ma trận A.

Định lý 2. *Giả sửa là ma trận của dạng toàn phương Γ trên không gian vectơ n chiều V. Khi đó Γ là dạng toàn phương xác định dương nếu và chỉ nên mọi định thức con chính của A đều dương.*

Chứng minh. Giả sử Γ là dạng toàn phương trên V và A là ma trận của nó đối với cơ sở $(\varepsilon) = \{\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_n\}$.

Gọi V_k là không gian con của V, sinh bởi các vectơ $\{\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_k\}$

(k = 1, 2,..., n). Khi đó thu hẹp của r trên V_k (ký hiệu là $\Gamma|_{V_k}$ là một dạng toàn phương với ma trận

$$D_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

"⇒" Nếu Γ xác định dương thì $\Gamma|_{V_k}$, cũng xác định dương. Do đó $D_k > 0$ Với mọi k = 1, 2,..., n.

"⇐" Giả sử $D_k > 0$ với mọi k = 1, 2,..., n. Ta sẽ chứng minh Γ là dạng toàn phương xác định dương bằng qui nạp theo n.

Với n = 1, $D_1 = a_{11} > 0$, biểu thức của dạng toàn phương là $\Gamma(\vec{\alpha}) = a_{11}x_1^2 > 0$.

Giả sử với mọi n > 1, điều khẳng định đúng với in - 1). Khi đó dạng toàn phương

$\Gamma_{n-1} = \Gamma|_{V_{n-1}}$ có ma trận là A_{n-1}. Theo giả thiết, các định thức con chính của A_{n-1} đều dương. Do đó, theo giả thiết qui nạp, Γ_{n-1}. Xác định dương. Vì thế có một cơ sở $\{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2,..., \vec{\xi}_{n-1}\}$ của V_{n-1} Sao cho r_{n-1} có dạng chính tắc, trong trường hợp này ta có

$\Gamma_{n-1}(\vec{\xi}) = k_i > 0$, i = 1, 2,..., n-1. Khi đó đối với cơ sở $\{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2,..., \vec{\varepsilon}_n\}$ Γ có ma trận

$$B = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 & b_{1n} \\ 0 & k_2 & \dots & 0 & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_{n-1} & b_{n-1n} \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Trong đó $b_{in} = b_{in} = \varphi(\vec{\xi}_i, \vec{\varepsilon}_n)$, với φ là dạng song tuyến tính đối xứng tương ứng của Γ. với

$$\vec{\alpha} = \sum_{i-1}^{n-1} y_i\vec{\xi}_i + y_n\vec{\varepsilon}_n$$

Suy ra $\Gamma(\vec{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n-1} k_i y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} b_{in} y_i y_n + a_{nn} y_n^2$

Bằng phép đổi toạ độ: $\begin{cases} z_i = y_i + \dfrac{b_{in}}{k_i} & i = 1, 2,..., n-1 \\ z_n = y_n \end{cases}$

Tìm được cơ sở $(\zeta) = \{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2,..., \vec{\xi}_n\}$ của V, đối với nó, ma trận của Γ Có dạng:

$$C = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k_n \end{pmatrix}.$$

Gọi T là ma trận chuyển từ cơ sở (ε) sang cơ sở (ζ) ta có $C = T^{-1}AT$.

Do đó: $k_1...k_{n-1}\, k_n = |C| = |T^{-1}|.|A|.|T| = |T^{-1}|.|T|.|A| = |A|$.

Vì $|A| > 0$ theo giả thiết và $k_i > 0$, với i = 1, 2,..., n- nên

$k_n = \dfrac{|A|}{k_1 k_2 ...k_{n-1}} > 0$. Như vậy đối với cơ sở (ζ), Γ có dạng $\Gamma(\{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2,..., \vec{\xi}_m\}) = \sum_{i=1}^{n} k_i z_i^2$, trong đó $k_i > 0$ với mọi i = 1, 2,..., n. Vậy Γ là dạng toàn phương xác định dương.

§4. KHÔNG GIAN VECTƠ ƠCLIT

4.1. Định nghĩa không gian vectơ Ơclit

Định nghĩa.

1) Dạng song tuyến tính đối xứng φ trên không gian vectơ V được gọi là một tích vô hướng trên V nếu $\forall\ \vec{\alpha} \neq 0$ thuộc V ta có $\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) > 0$.

Với $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta} \in$ V, số thực $\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ được gọi là tích vô hướng của $\vec{\alpha}$ và $\vec{\beta}$, kí hiệu bởi $\vec{\alpha}.\vec{\beta}$. Nếu $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$, thay cho $\vec{\alpha}.\vec{\alpha}$ ta viết $\vec{\alpha}^2$

2) Không gian vectơ V được gọi là một không gian vectơ Ơclit nếu *trên V có một tích vô hướng.*

Chú ý: Trên cùng một không gian vectơ thực V có thể xác định nhiều tích vô hướng khác nhau, và ta có thể nhận được những không gian vectơ Ơclit hoàn toàn khác nhau.

Ví dụ 1. Xét không gian V các vectơ hình học có chung gốc O. Trong không gian này, dạng song tuyến tính φ được xác định bởi: $\varphi(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = |\overrightarrow{OA}|.|\overrightarrow{OB}|\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, là một tích vô hướng trên V, với tích vô hướng đó, V là một không gian vectơ Ơclit.

Ví dụ 2. Trên không gian $\mathbf{R}^n$, dạng song tuyến φ được xác định bởi

$\varphi(\vec{\beta}, \vec{\beta}) = x_1y_1 + x_2y_2 + ...+ x_ny_n$, với $\vec{\beta} = (x_1, x_2,..., x_n)$ $\vec{\beta} = (y_1, y_2,..., y_n)$, là một tích vô hướng và $\mathbf{R}^n$ là một không gian vectơ Ơclit, tích vô hướng này được gọi là tích vô hướng chính tắc.

4.2. Cơ sở trực chuẩn

Định nghĩa. *Giả sử E là một không gian vectơ Ơclit.*

1) Hai vectơ $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ của E được gọi là trực giao nếu $\vec{\alpha}.\vec{\beta} = 0$; kí hiệu là $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

2) Với mỗi $\vec{\alpha} \in E$ ta gọi $\sqrt{(\vec{\alpha})^2}$ là chuẩn của vectơ $\vec{\alpha}$, kí hiệu $|\vec{\alpha}|$. Nếu $|\vec{\alpha}| = 1$ thì ta nói $\vec{\alpha}$ là vectơ định chuẩn.

3) *Cơ sở* $(\varepsilon) = \{\vec{\varepsilon}_1,..., \vec{\varepsilon}_2,..., \vec{\varepsilon}_n\}$ *của không gian vectơ Ơclit E được gọi là một cơ sở trực chuẩn nếu* $\vec{\varepsilon}_i, \vec{\varepsilon}_j = \delta_{ij}$. (*Trong đó* δ_{ij} *là ký hiệu Kronecker thỏa mãn* $\delta_{ij} = 1$ *khi* $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ *khi* $i \neq j$*).*

Ví dụ 1. Trong không gian V của ví dụ 1, mục 4.1, 3 vectơ tuỳ ý $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OJ}$, $\overrightarrow{OK}$ đôi một vuông góc và có độ dài bằng 1 lập thành cơ sở trực chuẩn.

Ví dụ 2. Trong không gian vectơ Ơclít $\mathbf{R}^n$ ở ví dụ 2, mục trên, cơ sở

$$(\varepsilon): \vec{\varepsilon}_1 = (1, 0,..., 0), \quad \vec{\varepsilon}_2 = (0, 1,..., 0),..., \vec{\varepsilon}_n = (0, 0,..., 1)$$

là một cơ sở trực chuẩn. Cơ sở (ε) được gọi là cơ sở chính tắc của không gian vectơ Ơclit $\mathbf{R}^n$.

Ví dụ 3. Hệ vectơ

$$(\beta): \vec{\beta}_1 = (0,1,0);\ \vec{\beta}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}});\ \vec{\beta}_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$$

là một cơ sở trực chuẩn trong không gian $\mathbf{R}^3$. Vectơ $\vec{\alpha} = (1, 4, 3) \in \mathbf{R}^3$ có biểu thức tọa độ đối với cơ sở $(\vec{\beta})$ như sau $\vec{\alpha} = 4.\vec{\beta}_1 + 2\sqrt{2}.\vec{\beta}_2 - \sqrt{2}\,\vec{\beta}_3$ véc tơ $\vec{\alpha}$ có tọa độ đối với cơ sở $(\vec{\beta})$ là $\vec{\alpha} = (4, 2\sqrt{2} - \sqrt{2})$. Ta có $|\vec{\alpha}| = \sqrt{26}$.

Định lý 1. *Giả sử E là một không gian vectơ Ơclit. Khi đó:*

1) Với $\vec{\alpha} \in E$, $\|\vec{\alpha}\| = 0$ khi và chỉ khi $\vec{\alpha} = \vec{0}$.

2) Với mọi $\vec{\alpha} \in E$, mọi $k \in \mathbf{R}$ ta có $\|k\vec{\alpha}\| = |k|.\|\vec{\alpha}\|$.

3) Với mọi $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in E$ ta có $|\vec{\alpha}.\vec{\beta}| \le \|\vec{\alpha}\|.\|\vec{\beta}\|$, (bất đẳng thức Cauchy Bunhiakovsky).

4) Với mọi $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in E$ ta có $\|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\| \le \|\vec{\alpha}\| + \|\vec{\beta}\|$, (bất đẳng thức tam giác).

Chứng minh. Gọi φ là tích vô hướng trên E.

1) Hiển nhiên nếu $\vec{\alpha} = \vec{0} \Rightarrow \|\vec{\alpha}\| = 0$.

Ngược lại nếu $\|\vec{\alpha}\| = 0$ thì $\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) = \vec{\alpha}^2 = \|\vec{\alpha}\|^2 = 0$. Từ đó suy ra suy ra $\vec{\alpha} = \vec{0}$ (do tính xác định của φ).

2) Rõ ràng: $\|k\vec{\alpha}\| = \sqrt{(k\vec{\alpha})^2} = \sqrt{k^2(\vec{\alpha})^2} = |k|.\sqrt{(\vec{\alpha})^2} = |k|.\|\vec{\alpha}\|$.

3) Với mọi $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in E$, với mọi giá trị của $x \in \mathbf{R}$ ta có:

$$0 \le \|\vec{\alpha} - x\vec{\beta}\|^2 = \vec{\alpha}^2 - 2x\vec{\alpha}.\vec{\beta} + x^2\vec{\beta}^2.$$

Do đó $\Delta' = (\vec{\alpha}.\vec{\beta}) - \vec{\alpha}^2.\vec{\beta}^2 \le 0 \Rightarrow |\vec{\alpha}.\vec{\beta}| \le \sqrt{(\vec{\alpha})^2}.\sqrt{(\vec{\beta})^2}$

Vậy $|\vec{\alpha}.\vec{\beta}| \le \|\vec{\alpha}\|.\|\vec{\beta}\|$.

Dấu bằng xảy ra khi $\vec{\alpha} = k.\vec{\beta}$ (hai vectơ $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ là phụ thuộc tuyến tính).

4) Với mọi $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in E$ ta có: $\|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\|^2 = (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 + 2.\ \vec{\alpha}.\vec{\beta} + \vec{\beta}^2$.

Theo 3) $\Rightarrow \vec{\alpha}.\vec{\beta} \le |\vec{\alpha}.\vec{\beta}| \le \|\vec{\alpha}\|.\|\vec{\beta}\| \Rightarrow \|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\|^2 \le \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 +$ $2\|\vec{\alpha}\|.\|\vec{\beta}\| = \|\vec{\alpha}\|^2 + \|\vec{\beta}\|^2 + 2\|\vec{\alpha}\|.\|\vec{\beta}\| = (\|\vec{\alpha}\| + \|\vec{\beta}\|)^2$.

Vậy $\|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\| \le \|\vec{\alpha}\| + \|\vec{\beta}\|$.

Dấu bằng xảy ra khi $\vec{\alpha} = k.\vec{\beta}$ (với $k \ge 0$).

Định lý 2. *Mọi hệ gồm những vectơ khác không, đôi một trực giao của* một *không gian vectơ Ơclit đều độc lập tuyến tính.*

Chứng minh. Giả sử $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, ..., \vec{\alpha}_n$ là những vectơ khác không, đôi một trực giao của không gian vectơ Ơclit E, xét đẳng thức $\sum_{i=1}^{r} k_i\alpha_i = \vec{0}$.

Với mỗi $\vec{\alpha}_j$, j = 1,..., r ta có

$$0 = \left(\sum_{i=1}^{r} k_i\,\vec{\alpha}_i\right)\vec{\alpha}_j = \sum_{i=1}^{r} k_1\,\vec{\alpha}_i\vec{\alpha}_j = k_j\vec{\alpha}_j^2 = k_j\|\vec{\alpha}_j\|^2, j = 1, 2, ..., r$$

Vì $\vec{\alpha}_j \ne \vec{\theta}$ nên $\|\vec{\alpha}\| \ne 0$ nên ta có $k_j = 0$. Vậy $k_j = 0\ \forall\ j = 1, ..., r$.

Vậy hệ véc tơ $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, ..., \vec{\alpha}_r$ là độc lập tuyến tính.

Định lý 3. *Mọi không gian vectơ Ơclit n chiều* ($n \ge 2$) *đều có cơ sở trực chuẩn.*

Chứng minh. Ta chứng minh bằng qui nạp theo n.

Với n = 1 dễ dàng chứng minh được mệnh đề.

Với n = 2, giả sử $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$ là một cơ sở nào đó của không gian vectơ Ơclit E.

Đặt $\vec{\varepsilon}_1 = \dfrac{\vec{\alpha}_1}{\|\vec{\alpha}_1\|}$, ta có: $\|\vec{\varepsilon}_1\| = 1$.

Tìm vectơ $\vec{\beta}$ có dạng: $\vec{\beta} = x_1\vec{\varepsilon}_1 + \vec{\alpha}_2$, thoả mãn điều kiện: $\vec{\beta} \perp \vec{\varepsilon}_1$,

Hay: $0 = \vec{\beta}.\vec{\varepsilon}_1 = x_1.\ \vec{\varepsilon}_1^{\,2} + \vec{\alpha}_2.\ \vec{\varepsilon}_1 = x_1 + \vec{\alpha}_2.\ \vec{\varepsilon}_1$.

Suy ra: $x_1 = -\ \vec{\alpha}_2.\ \vec{\varepsilon}_1$

Như vậy: $\vec{\beta} = \vec{\alpha}_2 - (\vec{\alpha}_2, \vec{\varepsilon}_1)\vec{\varepsilon}_1$ hoàn toàn được xác định.

Đặt: E2 = $\frac{\vec{\beta}}{\|\vec{\beta}\|}$, hiển nhiên $\|\vec{\varepsilon}_2\| = 1$, do $\vec{\varepsilon}_2 \perp \vec{\varepsilon}_1$ nên theo định lý 2 ta được hệ vectơ $\{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2\}$ là độc lập tuyến tính, do đó là một cơ sở trực chuẩn của không gian Ơclit 2 chiều E.

Bây giờ giả sử E là không gian vectơ Ơclit n-chiều với n > 2 và mệnh đề đã được chứng minh với mọi không gian có số chiều ≤ (n - 1). Gọi F là một không gian con (n – 1) chiều của E. Theo giả thiết qui nạp F có một cơ sở trực chuẩn, chẳng hạn: $\{\vec{\varepsilon}_1, ..., \vec{\varepsilon}_2, ..., \vec{\varepsilon}_{n-1}\}$.

Lấy tùy ý $\vec{\alpha}_n \in E \setminus F$. Tìm vectơ $\vec{\beta}_n$ có dạng: $\vec{\beta}_n = \sum_{i-1}^{n-1} x_i \vec{\varepsilon}_i + \vec{\alpha}_n$, thoả mãn điều kiện: $\vec{\beta}_n . \vec{\varepsilon}_j = 0$ (với mọi j = 1,2,..., n - 1). Suy ra $\sum_{i-1}^{n-1} x_i \vec{\varepsilon}_i \vec{\varepsilon}_j + \vec{\alpha}_n \vec{\varepsilon}_j = 0$, j =1,2,..., n - 1.

Vì $\vec{\varepsilon}_i \vec{\varepsilon}_j = \delta_{ij}$ nên đẳng thức trên chỉ là: xj + $\vec{\alpha}_n \vec{\varepsilon}_j = 0$.

Như vậy $\vec{\beta}_n$ được hoàn toàn xác định bởi các $x_j = - \vec{\alpha}_n \vec{\varepsilon}_j$ với mọi j = 1, 2,.., n - 1.

Đặt: $\vec{\varepsilon}_n = \frac{\vec{\beta}_n}{\|\vec{\beta}_n\|}$, hiển nhiên lẫn $\|\vec{\varepsilon}_n\| = 1$, ta được một hệ trực chuẩn gồm n vectơ $\{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, ... \vec{\varepsilon}_{n-1}, \vec{\varepsilon}_n\}$. Hơn nữa theo cách xác định véc tơ $\vec{\beta}$ ta có $\vec{\varepsilon}_n \perp \vec{\varepsilon}_i$ (i = 1,..., n - 1) nên theo định lý 2, hệ $\{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, ... \vec{\varepsilon}_{n-1}, \vec{\varepsilon}_n\}$ là độc lập tuyến tính. Vì dimE = n nên nó là một cơ sở trực chuẩn của E.

Việc xây dựng hệ trực chuẩn trên đây được gọi là *quá trình trực chuẩn hoá Giam - Smit.*

Quá trình trực chuẩn hoá có thể xuất phát từ một cơ sở bất kỳ $(\vec{\alpha}) = \{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, ..., \vec{\alpha}_n\}$ cho trước. Khi đó ta xác định $\vec{\varepsilon}_1 = \frac{\vec{\alpha}_1}{\|\vec{\alpha}_1\|}$ sau đó theo phương pháp trên ta xác định $\vec{\varepsilon}_2$ thông qua $\vec{\varepsilon}_1$ và $\vec{\alpha}_2$,..., xác định $\vec{\varepsilon}_i$ thông qua $\vec{\varepsilon}_1, ..., \vec{\varepsilon}_{i-1}$ và $\vec{\alpha}_i$,..., và cuối cùng xác định $\vec{\varepsilon}_n$ qua $\vec{\varepsilon}_1, ..., \vec{\varepsilon}_{n-1}$ và $\vec{\alpha}_n$.

Công thức tổng quát của quá trình trực chuẩn này là:

$$\vec{\beta}_1 = \vec{\alpha}_1$$

$$\vec{\beta}_2 = \alpha_2 - \frac{\vec{\alpha}_2 . \vec{\beta}_1}{\vec{\beta}_1^2} \vec{\beta}_1$$

...

$$\vec{\beta}_k = \vec{\alpha}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\vec{\alpha}_k . \vec{\beta}_i}{\vec{\beta}_i^2} \vec{\beta}_i \text{ , với } k = 3, ..., n.$$

Đặt $\vec{\varepsilon}_k = \dfrac{\vec{\beta}_k}{\|\vec{\beta}_k\|}$, với $k = 1, ..., n$.

Ta nhận được hệ $\{\vec{\varepsilon}_1, ..., \vec{\varepsilon}_2, ..., \vec{\varepsilon}_n\}$ là cơ sở trực chuẩn cần tìm.

Định lý 4. *Nếu* $(\varepsilon) = \{\vec{\varepsilon}_1, ..., \vec{\varepsilon}_2, ..., \vec{\varepsilon}_n\}$ *là một cơ sở trực chuẩn của không gian Ơclit n chiều E, thì với* $\forall \vec{\alpha} \in$ *E ta có :*

$$\vec{\alpha} = (\vec{\alpha} . \vec{\varepsilon}_1)\, \vec{\varepsilon}_1 + (\vec{\alpha} . \vec{\varepsilon}_2)\, \vec{\varepsilon}_2 + ... + (\vec{\alpha} . \vec{\varepsilon}_n)\, \vec{\varepsilon}_n.$$

Chứng minh. Vì $(\varepsilon) = \{\vec{\varepsilon}_1, ..., \vec{\varepsilon}_2, ..., \vec{\varepsilon}_n\}$ là cơ sở của E nên $\vec{\alpha}$ có sự biểu diễn duy nhất dưới dạng:

$$\vec{\alpha} = c_1 \vec{\varepsilon}_1 + c_2 \vec{\varepsilon}_2 + ... + c_n \vec{\varepsilon}_n.$$

Với mỗi i = 1, 2,..., n, nhân vô hướng hai vế của đẳng thức trên với $\vec{\varepsilon}_i$; ta có:

$$(\vec{\alpha} . \vec{\varepsilon}_i) = c_1 \vec{\varepsilon}_1 \vec{\varepsilon}_i + c_2 \vec{\varepsilon}_2 \vec{\varepsilon}_i + ... + c_n \vec{\varepsilon}_n \vec{\varepsilon}_i = c_i$$

Vậy $\vec{\alpha}$ có dạng cần chứng minh.

Như vậy, nếu $(\varepsilon) = \{\vec{\varepsilon}_1, ..., \vec{\varepsilon}_2, ..., \vec{\varepsilon}_n\}$ là cơ sở trực chuẩn của không gian ơcht n chiều E, thì ta có thể xác định ngay tọa độ của một véc tơ bất kỳ đối với cơ sở đã cho, đó là $(\vec{\alpha}\,\vec{\varepsilon}_1, \vec{\alpha}\,\vec{\varepsilon}_2, ..., \vec{\alpha}\,\vec{\varepsilon})$; nghĩa là $\vec{\alpha} = (x_i)$ với $x_i = \vec{\alpha}\,\vec{\varepsilon}_i$, i = 1,..., n.

Ví dụ: Trong không gian Ơclit $\mathbf{R}^3$ (với tích vô hướng chính tắc) xét hệ vectơ sau: $\vec{\varepsilon}_1 = (0, 1, 0)$; $\vec{\varepsilon}_2 = (-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5})$. $\vec{\varepsilon}_3\ (\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5})$. Dễ dàng kiểm tra được hệ vectơ $\vec{\varepsilon}_1$, $\vec{\varepsilon}_2$, $\vec{\varepsilon}_3$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbf{R}^3$. Để biểu diễn véc tơ $\vec{\alpha} = (1, 4, 7)$ là một tổ hợp tuyến tính của cơ sở trên ta thực hiện như sau:

Tính $\vec{\alpha}.\vec{\varepsilon}_1 = (1, 4, 7)(0, 1, 0) = 4;$

$$\vec{\alpha}.\vec{\varepsilon}_2 = (1, 4, 7)\left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) = \frac{17}{5}$$

$$\vec{\alpha}.\vec{\varepsilon}_3 = (1, 4, 7)\left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right) = \frac{31}{5}.$$

Vậy $\vec{\alpha} = (1, 4, 7) = 4\vec{\varepsilon}_1 + \frac{17}{5}\vec{\varepsilon}_2 + \frac{31}{5}\vec{\varepsilon}_3.$

4.3. Không gian con bù trực giao

Nhận xét: Giả sử F là một không gian con của không gian vectơ Ơclit E. Tập hợp

$H = \{\vec{\beta} \in E \mid \vec{\beta} \perp \vec{\alpha}, \forall \in F\}$ là một không gian con của E.

Thật vậy, hiển nhiên $H \neq \varnothing$ vì $\vec{0} \in H$. Với $\forall\ \vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2 \in H$ và $\forall\ k \in$ **R** ta có: $\vec{\beta}_1.\vec{\alpha} = 0$, $\vec{\beta}_2.\vec{\alpha} = 0$ Với mọi $\vec{\alpha} \in F$. Do đó $(\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2).\vec{\alpha} = \vec{\beta}_1.\vec{\alpha} + \vec{\beta}_2\vec{\alpha} = 0, \forall\vec{\alpha} \in F$. Điều này có nghĩa là $(\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2) \in H$.

Tương tự, ta có $(k\vec{\beta}).\vec{\alpha} = k(\vec{\beta}.\vec{\alpha}) = 0, \forall\vec{\alpha} \in F$. Do đó $k\vec{\beta} \in H$.

Vậy H là một không gian con của E.

Định nghĩa. *Không gian con $H = \{\vec{\beta} \in E \mid \vec{\beta} \perp \vec{\alpha}, \forall\vec{\alpha} \in F\}$ được gọi là không gian con bù trực giao với không gian con F.*

Định lý. *Nếu H là không gian con bù trực giao với không gian con F của không gian vectơ Ơclit n chiều E thì $F \cap H = \{\vec{0}\}$ và $E = F + H$.*

Chứng minh. Lấy tùy ý $\vec{\alpha} \in F \cap H$, theo cách xác định H ta thấy $\vec{\alpha}$ trực giao với chính nó, nghĩa là $\vec{\alpha}^2 = 0$. Theo định lý định lý 1 (4.2) ta có $\vec{\alpha} = \vec{0}$ vậy $F \cap H = \{\vec{0}\}$.

Giả sử $\{\vec{\varepsilon}_1,..., \vec{\varepsilon}_2,..., \vec{\varepsilon}_r\}$ là một cơ sở trực chuẩn của không gian con F. Bổ sung vào nó để được một cơ sở trực chuẩn của E: $\{\vec{\varepsilon}_1\vec{\varepsilon}_2,..., \vec{\varepsilon}_r, \vec{\varepsilon}_{r+1},..., \vec{\varepsilon}_n\}$.

Khi đó mỗi véc tơ $\vec{\alpha} \in E$ đều biểu diễn duy nhất dưới dạng:

$\vec{\alpha} = \sum_{i=1}^{r} x_i\vec{\varepsilon}_i + \sum_{j=r+1}^{n} x_j\vec{\varepsilon}_j = \vec{\beta} + \vec{\gamma}$, trong đó $\vec{\beta} = \sum_{i=1}^{r} x_i\vec{\varepsilon}_i$, và $\vec{\gamma} = \sum_{j=r+1}^{n} x_j\vec{\varepsilon}_j$.

Vì $\vec{\varepsilon}_i\vec{\varepsilon}_j = 0$ với mọi $i = 1,..., r$ và $j = r + 1,..., n$ nên với mọi $\vec{\lambda} = \sum_{i=1}^{r} y_i\vec{\varepsilon}_i \in F$ ta có:

$\vec{\lambda}.\vec{\gamma} = \vec{\lambda}\sum_{j=r+1}^{n} x_j\vec{\varepsilon}_j = \left(\sum_{i=1}^{r} y_i\vec{\varepsilon}_i\right)\left(\sum_{j=r+1}^{n} x_j\vec{\varepsilon}_j\right) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{n} x_j y_i \vec{\varepsilon}_j\vec{\varepsilon}_i = 0$. Nghĩa là

$\vec{\lambda} \perp \vec{\gamma}$, với mọi $\vec{\lambda} \in F$. Do đó $\vec{\gamma} \in H$. Vậy $\vec{\alpha} = \vec{\beta} + \vec{\gamma} \in F + H$, và do đó $E = F + H$. □

Khi V là không gian vectơ thỏa mãn $V = F + H$, $F \cap H = \{\vec{0}\}$, trong đó F, H là những không gian con của V, người ta nói rằng V là *tổng trực tiếp* của F và H.

4.4. Hình chiếu của một vectơ lên không gian con

Giả sử E là không gian Ơclit n chiều, F là không gian con tùy ý của E, khi đó $\forall\vec{\alpha} \in E$ ta luôn có biểu biến duy nhất $\vec{\alpha} = \vec{\beta} + \vec{\gamma}$, với $\vec{\beta} \in F$, $\vec{\gamma} \in H$, trong đó H là không gian con bù trực giao của F. Ta sẽ gọi vectơ $\vec{\beta}$ là *hình chiếu trực giao của* $\vec{\alpha}$ *lên F* và ký hiệu là $hch_F\vec{\alpha}$, còn vectơ $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} - hch_F\vec{\alpha}$ được gọi là thành phần của $\vec{\alpha}$ trực giao với F.

Ví dụ: Xét không gian Ơclit $\mathbf{R}^3$ (với tích vô hướng chính tắc) và không gian con F được sinh bởi các vectơ sau: $\vec{\varepsilon}_1 = (0, 1, 0)$; $\vec{\varepsilon}_2 = (-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5})$. Dễ dàng kiểm tra được đó là cơ sở trực chuẩn của F. Theo Ví dụ trên ta có hệ $\vec{\varepsilon}_1 = (0, 1, 0)$; $\vec{\varepsilon}_2 = (-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5})$; $\vec{\varepsilon}_3 = (\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5})$ là cơ sở trực chuẩn củ a $\mathbf{R}^3$.

Với $\vec{\alpha} = (2, 1, 3)$, ta có:

$$\vec{\alpha} = (\vec{\alpha}.\vec{\varepsilon}_1)\vec{\varepsilon}_1 + (\vec{\alpha}.\vec{\varepsilon}_2)\vec{\varepsilon}_2 + (\vec{\alpha}.\vec{\varepsilon}_3)\vec{\varepsilon}_3 = 1.\vec{\varepsilon}_1 + \frac{1}{5}\vec{\varepsilon}_2 + \frac{18}{5}\vec{\varepsilon}_3$$

Khi đó hình chiếu trực giao của $\vec{\alpha} = (2, 1, 3)$ lên F là:

$$hch_F\vec{\alpha} = 1.\vec{\varepsilon}_1 + \frac{1}{5}\vec{\varepsilon}_2 = (0, 1, 0) + \frac{1}{5}(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}) = (-\frac{4}{25}, 1, \frac{3}{25})$$

Thành phần của $\vec{\alpha}$ trực giao với F là : $\frac{18}{5}\vec{\varepsilon}_3 = (\frac{54}{25}, 0, \frac{72}{25})$.

4.5. Phép biến đổi trực giao - Ma trận trực giao

Định nghĩa. *Giả sử E là một không gian vectơ Ơclit n chiều. Tự đồng cấu f. E → E được gọi là một phép biến đổi trực giao nếu*

$$f(\vec{\alpha}).f(\vec{\beta}) = \vec{\alpha}.\vec{\beta} \text{ với mọi } \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in E.$$

Định lí 1. *Giả sử E là một không gian vectơ Ơclit n chiều. Tự đồng cấu f: E → E là phép biến đổi trực giao khi và chỉ khi nó biến cơ sở trực chuẩn thành cơ sở trực chuẩn.*

Chứng minh.

"⇒": Giả sử hà một phép biến đổi trực giao và (ε) = {$\vec{\varepsilon}_1$,..., $\vec{\varepsilon}_2$,..., $\vec{\varepsilon}_n$} là một cơ sở trực chuẩn bất kỳ của E. Khi đó $f(\vec{\varepsilon}_1).f(\vec{\varepsilon}_j) = \vec{\varepsilon}_i\vec{\varepsilon}_j = \delta_{ij}$, vơi mọi i, j = 1, 2,..., n. Như vậy ta có $f(\vec{\varepsilon}_i) \perp f(\vec{\varepsilon}_j)$ với i ≠ j, và $\|f(\vec{\varepsilon}_i)\|$ 1 với i j = 1, 2,..., n.

Vậy hệ {$f(\vec{\varepsilon}_1)$, $f(\vec{\varepsilon}_2)$,..., $f(\vec{\varepsilon}_n)$} là một cơ sở trực chuẩn của E.

"⇐" Giả sử f là một tự đồng cấu của E sao cho với mỗi cơ sở trực chuẩn {$\vec{\varepsilon}_1$,..., $\vec{\varepsilon}_2$,..., $\vec{\varepsilon}_n$} của E ta có hệ vectơ {$f(\vec{\varepsilon}_1)$, $f(\vec{\varepsilon}_2)$,..., $f(\vec{\varepsilon}_n)$} cũng là một cơ sở trực chuẩn của E. Với $\vec{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{\varepsilon}_i$ $\sum_{i=1}^{n} y_i\vec{\varepsilon}_i$ tùy ý thuộc E ta có:

$$f(\vec{\alpha}).f(\vec{\beta}) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{\varepsilon}_i).f(\sum_{i=1}^{n} y_i\vec{\varepsilon}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(\vec{\varepsilon}_i).\sum_{i=1}^{n} y_i f(\vec{\varepsilon}_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j f(\vec{\varepsilon}_i).f(\vec{\varepsilon}_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \vec{\varepsilon}_i.\vec{\varepsilon}_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \vec{\alpha}.\vec{\beta}$$

Vậy f là một phép biến đổi trực giao.

Định lý 2. *Giả sử E là một không gian vectơ Ơclit, A là ma trận của tự đồng cấu f: E → E đối với một cơ sở trực chuẩn* (ε) = {$\vec{\varepsilon}_1$,..., $\vec{\varepsilon}_2$,..., $\vec{\varepsilon}_n$}. *Tự đồng cấu f là trực giao khi và chỉ khi ${}^tAA = I$* (*I là ma trận đơn* vị).

Chứng minh.

"⇒": Giả sử f là một phép biến đổi trực giao có ma trận đối với cơ sở trực chuẩn (ε) = {$\vec{\varepsilon}_1$,..., $\vec{\varepsilon}_2$,..., $\vec{\varepsilon}_n$} là :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Khi đó $f(\vec{\varepsilon}_i).f(\vec{\varepsilon}_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\vec{\varepsilon}_k\right).\left(\sum_{h=1}^{n} a_{hj}\vec{\varepsilon}_h\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} a_{ki}a_{hj}\vec{\varepsilon}_k.\vec{\varepsilon}_h$.

Vì $f(\vec{\varepsilon}_i).f(\vec{\varepsilon}_j) = \vec{\varepsilon}_i.\vec{\varepsilon}_j = \delta_{ij}$, nên $\sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} a_{ki}a_{hj}\vec{\varepsilon}_k.\vec{\varepsilon}_h = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}$

Nhưng $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}$ chính là phần tử ở dòng thứ i và cột thứ j của ma trận tích ta.A.

Vậy $\qquad\qquad$ A.A = I.

"$\Leftarrow$" Giả sử ${}^tA.A = I$, cũng như trên ta có: $f(\vec{\varepsilon}_i).f(\vec{\varepsilon}_j) = \vec{\varepsilon}_i.\vec{\varepsilon}_j = \delta_{ij}$. Do đó hệ vectơ $\{f(\vec{\varepsilon}_1), f(\vec{\varepsilon}_2), \dots, f(\vec{\varepsilon}_n)\}$ là một cơ sở trực chuẩn của không gian vectơ Ơclit E. Vậy theo định lýl f là một phép biến đổi trực giao.

Định nghĩa. *Ma trận vuông* A *được gọi là một ma trận trực giao nếu*

$${}^tA.A = I \text{ (I là ma trận đơn vị).}$$

Hệ quả. *f là một phép biến đổi trực giao khi và chỉ khi ma trận của nó đối với một cơ sở trực chuẩn là một ma trận trực giao.*

Ví dụ: Các ma trận sau là những ma trận trực giao:

a) Ma trận đơn vị I;

b) $A = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$;

c) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4.6. Phép biến đổi đối xứng

Định nghĩa. *Giả sử E là một không gian vectơ Ơclit n chiều. Tự đồng cấu f: E $\rightarrow$ E được gọi là phép biến đổi đối xứng nến $\vec{\alpha}.f(\vec{\beta}) =$*

$f(\vec{\alpha}).\vec{\beta}$, $\forall\vec{\alpha}$, $\vec{\beta} \in E$.

Định lý. *Giả sử E là một không gian vectơ Oclit n chiều. Tự đồng cấu f của E là phép đối xứng nên và chỉ nếu ma trận của f đối với một cơ sở trực chuẩn là một ma trận đối xứng.*

Chứng minh.

"⇒" Giả sử f là phép biến đổi đối xứng của E và ma trận của f đối với cơ sở trực chuẩn $(\varepsilon) = \{\vec{\varepsilon}_1,\ldots, \vec{\varepsilon}_2,\ldots, \vec{\varepsilon}_n\}$ là ma trận $A = (a_{ij})_n$. Khi đó:

$f(\vec{\varepsilon}_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\vec{\varepsilon}_k$, nên:

$$\vec{\varepsilon}_i.f(\vec{\varepsilon}_j) = \vec{\varepsilon}_i.(\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\vec{\varepsilon}_k) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\vec{\varepsilon}_i.\vec{\varepsilon}_k = a_{ij} \quad (1)$$

$$f(\vec{\varepsilon}_i).\vec{\varepsilon}_j = (\sum_{h=1}^{n} a_{hi}\vec{\varepsilon}_h).\vec{\varepsilon}_j = \sum_{h=1}^{n} a_{hi}\vec{\varepsilon}_h.\vec{\varepsilon}_j = a_{ji} \quad (2)$$

Vì f là phép biến đổi đối xứng nên $\vec{\varepsilon}_i.f(\vec{\varepsilon}_j) = f(\vec{\varepsilon}_i).\vec{\varepsilon}_j$. Do đó $a_{ij} = a_{ji}$,

Ta có A là ma trận đối xứng.

"⇐": Giả sử ma trận của tự đồng cấu f đối với cơ sở trực chuẩn (ε) : $\{\vec{\varepsilon}_1,\ldots, \vec{\varepsilon}_2,\ldots, \vec{\varepsilon}_n\}$ là ma trận đối xứng $A = (a_{ij})_n$. Khi đó ta có các đẳng thức (1) và (2) ở trên. Với hai vectơ $\vec{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{\varepsilon}_i$, $\vec{\beta} = \sum_{i=1}^{n} y_i\vec{\varepsilon}_i$ tuỳ ý của E, ta có:

$$\vec{\alpha}.f(\vec{\beta}) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{\varepsilon}_i\right).\left(\sum_{j=1}^{n} y_j f(\vec{\varepsilon}_j)\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \vec{\varepsilon}_i.f(\vec{\varepsilon}_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j a_{ij}$$

$$f(\vec{\alpha})\vec{\beta} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i f(\vec{\varepsilon}_i)\right).\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\vec{\varepsilon}_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j f(\vec{\varepsilon}_i).\vec{\varepsilon}_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j a_{ji}$$

Vì $a_{ij} = a_{ji}$ do ma trận A đối xứng nên $\vec{\alpha}.f(\vec{\beta}) = f(\vec{\alpha})\vec{\beta}$.

Vậy f là phép đối xứng.

4.7. Ứng dụng

Để nêu lên một ứng dụng của phép biến đổi trực giao ta cần đến các định lý sau:

Định lí 1. *Nếu A là một ma trận đối xứng với các thành phần là* *những số thực thì mọi nghiệm của đa thức đặc trưng $|A - kI|$ đều là số thực.*

Chứng minh. Giả sử k là một nghiệm của phương trình $|A - kI| = 0$. Xét phương trình $(A - kI_n)X = 0$. Giả sử X^0 là một nghiệm không tầm thường của phương trình đó, ta có $(A - kI^n)X^0 = 0 \Rightarrow {}^t\overline{X^0}(A - kI_n)X^0 = 0$

$\Rightarrow {}^t\overline{X^0}AX^0 = k\,{}^t\overline{X^0}X^0$ (*)

Giả sử $X^0 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$. Khi đó ${}^t\overline{X^0} = (\overline{u_1}\ \overline{u_2} \dots u_n)$. Ta có ${}^t\overline{X^0}X^0 = \sum_{i=1}^{n} \overline{u_i} \cdot u_n$ là số thực. Do đó

$k\,{}^t\overline{X^0}X^0 = k.\sum_{i=1}^{n} \overline{u_i} \cdot u_n = k.\sum_{i=1}^{n} u_n \cdot \overline{u_i} = k\,{}^tX^0\,\overline{X^0} = {}^t(k\,{}^t\overline{X^0}X^0)$. Vì A là ma trận đối xứng với các phần tử là những số thực nên ta có ${}^t\overline{X^0}AX^0 = {}^t({}^t\overline{X^0}AX^0) = {}^tX^0\overline{X^0}$. Do đó $\overline{X^0}AX^0 = {}^tX^0\overline{X^0} = {}^t\overline{X^0}AX^0$. Vậy ${}^t\overline{X^0}AX^0$ là số thực. Từ (*) suy ra $k\,{}^t\overline{X^0}X^0 0$ là số thực. Theo nhận xét ở trên có ${}^t\overline{X^0}X^0$ là số thực, do đó k là số thực. Định lý được chứng minh.

Định lý 2. *Nếu f là một phép đối xứng của không gian vectơ ơclit n chiều E thì hai không gian con riêng ứng với hai giá trị riêng phân bổ của f phải trực giao với nhau.*

Chứng minh. Giả sử $f : E \to E$ là phép đối xứng, F_1, F_2 là hai không gian con lần lượt sinh bởi các vectơ riêng $\vec{\alpha}_1$, $\vec{\alpha}_2$ tương ứng với hai giá trị riêng phân biệt k_1, k_2. Khi đó, với hai vectơ tùy ý $\vec{\alpha} \in F_1$, $\vec{\beta} \in F_2$, ta có $f(\vec{\alpha}) = k_1\vec{\alpha}$; $f(\vec{\beta}) = k2\vec{\beta}$. Vì f là một phép biến đổi đối xứng nên $f(\vec{\alpha})\vec{\beta} = \vec{\alpha}f(\vec{\beta})$. Do đó $(k_1\vec{\alpha}).\vec{\beta} = \vec{\alpha}.(k_2\vec{\beta})$. Suy ra $(k_2 - k_1)(\vec{\alpha}.\vec{\beta}) = 0$. Vì $k_2 \neq k_1$ nên $\vec{\alpha}.\vec{\beta} = 0$. Vậy F_1 trực giao với F_2.

Định lý 3. *Nếu f là một phép biến đổi đối xứng của không gian vectơ Ơclit n chiều E, thì E có một cơ sở trực chuẩn gồm những vectơ riêng của f .*

Chứng minh. Vì ma trận A của f đối với cơ sở trực chuẩn (ε) =

$\{\vec{\varepsilon}_1,..., \vec{\varepsilon}_2,..., \vec{\varepsilon}_n\}$ là ma trận đối xứng nên theo định lý các giá trị riêng của f đều là số thực.

Ta chứng minh bằng qui nạp theo n.

Với n = 1, định lý hiển nhiên đúng.

Với n = 2, giả sử k_1 là một giá trị riêng của f và $\vec{\alpha}_1$ là vectơ riêng tương ứng. Gọi F là không gian con của E sinh bởi $\vec{\xi}_1 = \frac{1}{\|\vec{\alpha}_1\|}\vec{\alpha}_1$ và H là không gian con bù trực giao với F. Vì $F \cap H = \{\vec{\theta}\}$ và E = F + H, nên danH = dimE - dimF = 1.

Ta có $f(\vec{\beta}) \in H$ với $\forall \vec{\beta} \in H$. Thật vậy, lấy tùy ý $\vec{\alpha} \in F$ ta có $\vec{\alpha}.f(\vec{\beta}) = f(\vec{\alpha}).\vec{\beta} = 0$ vì $f(\vec{\alpha}) = k_1\vec{\alpha} \in F$ nên $f(\vec{\beta}) \in H$.

Giả sử $\vec{\alpha}_2$ là cơ sở của H. Đặt $\vec{\xi}_2 = \frac{1}{\|\vec{\alpha}_2\|}\vec{\alpha}_2$, hệ $\{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_1\}$ là một cơ sở trực chuẩn của E. Vì $f(\vec{\varepsilon}_2) \in H$ nên tồn tại $k_2 \in R$ sao cho $f(\vec{\varepsilon}_2) = k_2\vec{\varepsilon}_2$.

Như vậy hệ $\{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_1\}$ là cơ sở trực chuẩn của E gồm những véc tơ riêng của f.

Giả sử n > 2, và mệnh đề đúng với n - 1.

Gọi k_1 là một giá trị riêng của f và F, H cũng là những không gian như trên. Lặp lại lập luận trên ta có dimH = n - 1 và H là không gian con bất biến đối với f. Như vậy thu hẹp $f|_H$ là một phép biến đổi đối xứng của không gian n - 1 chiều H. Do đó, theo giả thiết qui nạp H có một cơ sở trực chuẩn $\{\vec{\xi}_1,..., \vec{\xi}_1\}$ gồm những vectơ riêng của f. Vì $\vec{\xi}_1 \perp \vec{\xi}_1$ với mọi = 2,..., n, nên $\{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2,..., \vec{\xi}_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của E gồm những vectơ riêng của f. Ta có điều cần chứng minh.

Từ đây về sau ta chỉ xét các dạng toàn phương trên không gian vectơ ơcht $\mathbf{R}^n$, và ta vẫn ký hiệu cơ sở chính tắc của Ra là cơ sở gồm các vectơ $\vec{\varepsilon}_1 = (1, 0,..., 0)$, $\vec{\varepsilon}_2$ (0, 1,..., 0),.., $\vec{\varepsilon}_n = (0, 0,.., 1)$.

Định lý 4. *Mỗi dạng toàn phương trên không gian vectơ Ơclit E^n đưa được về dạng chính tắc nhờ một ma trận trực giao.*

Chứng minh. Giả sử dạng toàn phương Γ trên E^n có ma trận đối với cơ sở chính tắc là A. Khi đó A là ma trận đối xứng. Coi A là ma trận của phép biến đổi tuyến tính f đối với cơ sở chính tắc. Do A là ma trận đối xứng, nên theo định lý 3, tồn tại một cơ sở trực chuẩn của Rn gồm những vectơ riêng của f, giả sử đó là (ξ) = {$\vec{\xi}_1$, $\vec{\xi}_2$,..., $\vec{\xi}_n$}. Khi đó ma trận B của f đối với cơ sở (ξ) là một ma trận chéo. Ký hiệu T là ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc (ε) = {$\vec{\varepsilon}_1$,..., $\vec{\varepsilon}_2$,..., $\vec{\varepsilon}_n$} sang cơ sở (ξ) khi đó T là ma trận trực giao. Ta có B - ^tTAT là ma trận của dạng toàn phương r đối với cơ sở (ξ) và là ma trận chéo, nên đối với cơ sở (ξ) dạng toàn phương Γ có dạng chính tắc.

Từ định lí trên suy ra: *Cách tìm ma trận trực giao đưa dạng toàn phương trên* $\mathbf{R}^n$ *về dạng chính tắc.*

Giả sử A là ma trận của dạng toàn phương đối với cơ sở chính tắc của Rn. Ta thực hiện các bước sau:

1) Tìm các giá trị riêng là nghiệm của đa thức đặc trưng |A – kI|.

2) Tìm các vectơ riêng tạo thành một cơ sở trực chuẩn của $\mathbf{R}^n$.

3) Tìm ma trận chuyển T từ cơ sở chính tắc sang cơ sở trực chuẩn vừa tìm được.

Ví dụ 1. Đưa dạng toàn phương trên RA về dạng chính tắc

$$\Gamma(\vec{\alpha}) = 5x_1^2 + 9x_2^2 + 9x_3^2 - 12x_1x_2 - 6x_1x_3, \text{ với } \vec{\alpha} = (x_1, x_2, x_3).$$

Giải. Ma trận của r đối với cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -3 \\ -6 & 9 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Tìm nghiệm của đa thức đặc trưng:

$$|A - kI| = \begin{vmatrix} 5-k & -6 & -3 \\ -6 & 9-k & 0 \\ -3 & 0 & 9-k \end{vmatrix} = k(9-k)(k-14)$$

Ta có $k_1 = 0$, $k_2 = 9$, $k_3 = 14$

• Tìm các vectơ riêng:

- Với $k_1 = 0$, giải hệ:

$$\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 0 \\ -6x_1 + 9x_2 \quad = 0 \\ -3x_1 + 9x_3 \quad = 0 \end{cases}$$

Vectơ riêng có dạng: $(3c_1, 2c_1, c_1)$.

- Với $k_2 = 9$, giải hệ:

$$\begin{cases} -4x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 0 \\ -6x_1 \quad = 0 \\ -3x_1 \quad = 0 \end{cases}$$

Vectơ riêng có dạng: $(0, c_2, -2c_2)$.

- Với $k_3 = 14$, vectơ riêng có dạng: $(-\frac{5}{3}c_3, 2c_3, c_3)$

Chọn cơ sở trực chuẩn (ξ) gồm những vectơ riêng:

$$\vec{\xi}_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}(3, 2, 1)$$

$$\vec{\xi}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, -2)$$

$$\vec{\xi}_3 = \frac{1}{\sqrt{70}}(-5, 6, 3)$$

Ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở (ξ) là

$$T = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{14}} & 0 & -\frac{5}{\sqrt{70}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{6}{\sqrt{70}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}$$

Nếu tọa độ của vectơ $\vec{\alpha}$ lần lượt đối với cơ sở chính tắc và cơ sở (ξ) là $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ và $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, thì ta có:

$$x_1 = \frac{3}{\sqrt{14}}y_1 \ - \frac{5}{\sqrt{70}}y_3$$

$$x_2 = \frac{2}{\sqrt{14}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_2 + \frac{6}{\sqrt{70}}y_3$$

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{14}}y_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}y_2 + \frac{3}{\sqrt{70}}y_3$$

Vậy đối với cơ sở (ξ), $\Gamma(\vec{\alpha}) = 9y_2^2 + 14y_3^2$.

Ví dụ 2. Tìm phép biến đổi trực giao đưa dạng toàn phương sau trên Ra về dạng chính tắc.

$$\Gamma(\vec{\alpha}) = x_1^2 - 8x_1x_2 - 16\,x_1x_3 + 7x_2^2 - 8x_2x_3 + x_3^2,\ \vec{\alpha} = (x_1, x_2, x_3)$$

Giải. Dạng toàn phương Γ có ma trận đối với cơ sở chính tắc là:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Đa thức đặc trưng:

$$|A - kI| = \begin{pmatrix} 1-k & -4 & -8 \\ -4 & 7-k & -4 \\ -8 & -4 & 1-k \end{pmatrix} = -k^3 + 9k^2 + 81k - 729 = (k-9)^2(k+9).$$

Các nghiệm của đa thức đặc trưng là: $k_1 = -9$, $k_2 = k_3 = 9$

- Với $k_1 = -9$, giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 10x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0 \\ -4x_1 + 16x_2 - 4x_3 = 0 \\ -8x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

ta được nghiệm có dạng (2c, c, 2c).

Chọn $\vec{\beta}_1 = (2, 1, 2)$ ta được nghiệm riêng ứng với $k_1 = -9$.

- Với $k_2 = k_3 = 9$, hệ phương trình tương ứng là:

$$\begin{cases} -8x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0 \\ -4x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ -8x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{hay} \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0.$$

Nghiệm của hệ phương trình này có dạng: (d, - 2d - 2e, e).

Vì hạng của hệ phương trình bằng 1 nên không gian các nghiệm có chiều bằng 2. Chọn một cơ sở của không gian này:

$$\vec{\beta}_2 = (1, -2, 0),$$
$$\vec{\beta}_3 = (0, -2, 1).$$

Đó là hai vectơ riêng ứng với $k_2 = k_3 = 9$. Theo định lý 2, ta có $\vec{\beta}_2$ về $\vec{\beta}_3$ trực giao với $\vec{\xi}_1$. Vì thế, muốn được một cơ sở trực chuẩn của $\mathbf{R}^3$ gần các vectơ riêng chỉ cần trực chuẩn hoá hệ vectơ $\{\vec{\beta}_2, \vec{\beta}_3\}$.

Đặt $\quad \vec{\xi}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$, ta có $\left\|\vec{\xi}_2\right\| \doteq 1$.

Chọn: $\vec{\lambda}_3 = t\vec{\xi}_2 + \vec{\beta}_3$ sao cho $\vec{\xi}_2\vec{\lambda}_3 = 0$.

Muốn vậy phải có: $0 = \vec{\xi}_2\vec{\lambda}_3 = t\vec{\xi}_2^{\,2} + \vec{\xi}_2\vec{\beta}_3 = t + \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)(-2) = t + \frac{4}{\sqrt{5}}$

Suy ra $\quad t = -\frac{4}{\sqrt{5}}$

Như vậy: $\vec{\lambda}_3 = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 1\right)$.

Đặt: $\vec{\xi}_3 = \frac{\vec{\lambda}_3}{\left\|\vec{\lambda}_3\right\|} = \left(-\frac{4}{3\sqrt{5}}, -\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}\right)$.

Hệ vectơ $(\xi) = \{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, ..., \vec{\xi}_m\}$ là một cơ sở chuẩn của $\mathbf{R}^3$.

Vì

$$\vec{\xi}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$
$$\vec{\xi}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$$
$$\vec{\xi}_3 = \left(-\frac{4}{3\sqrt{5}}, -\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}\right)$$

ta có ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc thành cơ sở (ξ) là:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Đây chính là ma trận của phép biến đổi tuyến tính trực giao để đưa dạng toàn phương đã cho về dạng chính tắc.

Đối với cơ sở (ξ), với $\vec{\alpha} = \{y_1\vec{\xi}_1 + y_2\vec{\xi}_2 + y_3\vec{\xi}_3\}$ ta có $\Gamma(\vec{\alpha}) = -9y_1^2 + 9y_2^2 + 9y_2^3$.

Việc tìm phép biến đổi trực giao đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc như đã làm trong các Ví dụ trên sẽ được sử dụng nhiều khi đưa phương trình của đường bậc hai, mặt bậc hai về dạng chính tắc.

TÓM TẮT

§1. DẠNG TUYẾN TÍNH, DẠNG SONG TUYẾN TÍNH

1.1. Định nghĩa

Cho V là không gian vectơ

1) Ánh xạ f : V → R được gọi là một dạng tuyến tính trên V nếu

$$f\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)=f\left(\vec{\alpha}\right)+f\left(\vec{\beta}\right),\forall\vec{\alpha},\vec{\beta}\in V\ ;$$

$$f\left(k\vec{\alpha}\right)=kf\left(\vec{\alpha}\right),\forall\vec{\alpha}\in V,\forall k\in\mathbf{R}.$$

2) *Ánh xạ* φ : $V \times V \to \boldsymbol{R}$ *được gọi là một dạng song tuyến tính trên V nếu*

$$\begin{array}{ll}(I) & \varphi\left(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2,\vec{\beta}\right)=\varphi\left(\vec{\alpha}_1,\vec{\beta}\right)+\varphi\left(\vec{\alpha}_2,\vec{\beta}\right),\\ & \varphi\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2\right)=\varphi\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}_1\right)+\varphi\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}_2\right),\\ (II) & \varphi\left(k\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=k\varphi\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=\varphi\left(\vec{\alpha},k\vec{\beta}\right)\end{array}$$

với mọi $\vec{\alpha}$, $\vec{\alpha}_1$, $\vec{\alpha}_2$, $\vec{\beta}$, $\vec{\beta}_1$, $\vec{\beta}$ *thuộc V và mọi* $k \in \boldsymbol{R}$.

3) Dạng song tuyến tính φ được gọi là đối xứng nếu $\varphi(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \varphi(\vec{\beta}\,\vec{\alpha})$, $\forall\vec{\alpha},\vec{\beta} \in V$. *Dạng song tuyến tính φ được gọi là thay phiên nếu* $\varphi(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = -\varphi(\vec{\beta},\vec{\alpha})$, $\forall\vec{\alpha},\ \vec{\beta} \in V$.

Định lý 1. *Giả sử V là không gian vectơ n chiều với cơ sở là* $\{\vec{\varepsilon}_1,\ldots, \vec{\varepsilon}_2,\ldots, \vec{\varepsilon}_n\}$. *Ánh xạ f : V → R là một dạng tuyến tính trên V khi và chỉ khi tồn tại n số thực* $c_b,\ldots, c_n$ *sao cho* $f(\vec{\varepsilon}) = \sum_{i=1}^{n} a_i c_i$, *với mọi* $\vec{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{n} a_i\vec{\varepsilon}_i \in V$. *Khi đó* $f(\vec{\varepsilon}_i) = c_i$, *với mọi i = 1,..., n, và f là dạng tuyến tính duy nhất trên V thỏa mãn điều kiện này.*

Định lý 2. *Giả sử V là không gian vectơ n chiều với cơ sở là* $\{\vec{\varepsilon}_1,\ldots, \vec{\varepsilon}_2,\ldots, \vec{\varepsilon}_n\}$. *Ánh xạ* φ: $V \times V \to \boldsymbol{R}$ *là một dạng song tuyến tính trên V khi và chỉ khi tồn tại* n^2 *số thực* $\{d_{ij} \mid i, j = 1, 2,\ldots, n\}$ *sao cho*

$\varphi(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j d_{ij}$, *với mọi* $\vec{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\varepsilon}_i$, $\vec{\beta} = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{\varepsilon}_i \in V$. *Khi đó* $\varphi(\vec{\varepsilon}_i,\vec{\varepsilon}_j) = d_{ij}$, *với mọi i, j = 1,..., n và* φ *là dạng song tuyến tính duy nhất trên V thỏa mãn điều kiện này.*

1.2. Ma trận của dạng song tuyến tính

Định nghĩa. *Cho* $\{\vec{\varepsilon}_1,..., \vec{\varepsilon}_2,..., \vec{\varepsilon}_n\}$ *là một cơ sở của không gian vectơ n chiều V trên trường số thực* **R**, φ *là một dạng song tuyến tính trên V, ký hiệu* $\varphi(\vec{\varepsilon}_i, \vec{\varepsilon}_j) = a_{ij} \in \mathbf{R}$, ∀ i, j = 1, 2,..., n.

Ma trận vuông cấp n sau được gọi là ma trận của dạng song tuyến tính φ đối với cơ sở $\{\vec{\varepsilon}_1,..., \vec{\varepsilon}_2,..., \vec{\varepsilon}_n\}$ *đã cho.*

$$A = (a_{ij})_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Nhận xét. Giả sử V là không gian vectơ với cơ sở $\{\vec{\varepsilon}_1,...,\vec{\varepsilon}_2,...,\vec{\varepsilon}_n\}$ và $A = (a_{ij})_n$ là ma trận của dạng song tuyến tính φ trên V. Khi đó với mọi

$\vec{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{\varepsilon}_i$, $\vec{\beta} = \sum_{i=1}^{n} y_i\vec{\varepsilon}_i \in V$ ta có: $\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$.

Như vậy, nếu biết ma trận của dạng song tuyến tính φ đối với một cơ sở nào đó, thì ta có thể xác định ảnh $\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ của cặp $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ tuỳ ý; nghĩa là một dạng song tuyến tính được hoàn toàn xác định bởi ma trận của nó đối với một cơ sở đã cho.

1.3. Liên hệ giữa hai ma trận của cùng một dạng song tuyến tính đối với hai cơ sở khác nhau

Định lý. *Cho* (ε) = $\{\vec{\varepsilon}_1,..., \vec{\varepsilon}_2,..., \vec{\varepsilon}_n\}$, (ξ) = $\{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2,..., \vec{\xi}_m\}$ *là hai cơ sở của cùng một không gian vectơ n chiều V trên* R, $A = (a_{ij})_n$ *và* $B = (b_{ij})_n$ *lần lưu là các ma trận của cùng một dạng song tuyến tính do trên V đối với các cơ sở tương ứng* (ε) *và* (ξ), $T = (t_{ij})_n$ *là ma trận chuyển từ* (ε) *sang* (ξ). *Khi đó* $B = {}^tTAT$.

§2. DẠNG TOÀN PHƯƠNG

2.1. Dạng toàn phương

Định nghĩa. *Ánh xạ $\Gamma : V \to \boldsymbol{R}$ ($\boldsymbol{R}$ là trường số thực) được gọi là một dạng toàn phương trên V nếu tồn tại một dạng song tuyến tính f trên V sao cho $\Gamma(\vec{\alpha})$ - $f(\vec{\alpha}, \vec{\alpha})$ với mọi $\vec{\alpha} \in V$. Khi đó f được gọi là dạng song tuyến tính sinh ra dạng toàn phương Γ.*

Tồn tại tương ứng 1-1 giữa các dạng toàn phương trên V và các dạng song tuyến tính đối xứng trên V; nghĩa là nếu r là một dạng toàn phương trên V thì tồn tại một và chỉ một dạng song tuyến tính đối xứng φ sinh ra Γ.

Dạng song tuyến tính đối xứng φ sinh ra dạng toàn phương Γ được gọi là *dạng cực* của Γ.

Giả sử V là không gian vectơ n chiều với cơ sở là $\{\vec{\varepsilon}_1,..., \vec{\varepsilon}_2,..., \vec{\varepsilon}_n\}$. Ánh xạ $\Gamma : V \times V \to \mathbf{R}$ là một dạng toàn phương trên V khi và chỉ khi $\Gamma(\vec{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j a_{ij}$, với mọi $\vec{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\varepsilon}_i$, $\in$ V, trong đó a_{ij} (i, j : 1, 2,..., n) là dãy các số thực xác định.

2.2. Ma trận của dạng toàn phương

Định nghĩa. *Cho Γ là dạng toàn phương tương ứng với dạng song tuyến tính đối xứng φ. Ma trận của φ đối với cơ sở $\{\vec{\varepsilon}_1,..., \vec{\varepsilon}_2,..., \vec{\varepsilon}_n\}$ cũng được gọi là ma trận của dạng toàn phương Γ đối với cơ sở ấy.*

Nếu $A = (a_{ij})_n$ là ma trận của dạng toàn phương Γ đối với cớ sở $\{\vec{\varepsilon}_1,..., \vec{\varepsilon}_2,..., \vec{\varepsilon}_n\}$, *thì A có tính chất $a_{ij} = \varphi(\vec{\varepsilon}_i, \vec{\varepsilon}_j) = \varphi(\vec{\varepsilon}_j, \vec{\varepsilon}_i) = a_{ij}$.*

Ma trận có tính chất này được gọi là một *ma trận đối xứng*.

Với $\vec{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\varepsilon}_i$, biểu thức $\Gamma(\vec{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j a_{ij}$ được gọi là biểu thức tọa độ của Γ.

2.3. Dạng toàn phương xác định

Định nghĩa. *Dạng toàn phương Γ trên không gian vectơ V được gọi là xác định nếu $\Gamma(\vec{\alpha}) = 0$ kéo theo $\vec{\alpha} = 0$.*

Định lý. *Nếu Γ là một dạng toàn phương xác đinh thì $\Gamma(\vec{\alpha})$ có cùng một dấu với mọi $\vec{\alpha} \in V$.*

Dạng toàn phương Γ trên không gian vectơ V độc gọi là xác định dương (âm) nếu $\Gamma(\vec{\alpha}) > 0$ ($\Gamma(\vec{\alpha}) < 0$) với mọi $a \neq 0$ thuộc V. Nếu Γ là một dạng toàn phương xác định dương (âm) trên không gian vectơ V và W là một không gian con của V thì thu hẹp của Γ trên W (ký hiệu là Γ_W) cũng là một dạng toàn phương xác định dương (âm) trên W.

§3. ĐƯA DẠNG TOÀN PHƯƠNG VỀ DẠNG CHÍNH TẮC

3.1. Định nghĩa. *Giả sử Γ là một dạng toàn phương trên không gian vectơ V. Nêu đối với cơ sở* $(\xi) = \{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \ldots, \vec{\xi}_n\}$ *của V biểu thức tọa độ của Γ là*

$$\Gamma(\vec{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} k_i x_i^2, \quad \left(\vec{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\xi}_i\right) \qquad (1)$$

thì biểu thức này được gọi là dạng chính tắc của dạng toàn phương Γ.

Trong trường hợp này ma trận của dạng toàn phương Γ đối với cơ sở (ξ) *là một ma trận chéo ($a_{ij} = a_{ji} = 0$ với $i \neq j$).*

Việc đổi cơ sở để một dạng toàn phương đã cho đối với cơ sở mới có dạng chính tắc được gọi là đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc.

3.2. Định lý. *Mọi dạng toàn phương đều đưa được về dạng chính tắc.*

Hệ quả. *Giả sử Γ là một dạng toàn phương có dạng chính tắc $\Gamma(\vec{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} k_i x_1^2$. Thế thì Γ là dạng toàn phương xác định dương khi và chỉ khi $k_i > 0$, với mọi $i = 1, \ldots, n$.*

Có nhiều phương pháp khác nhau để đưa một dạng toàn phương về dạng chính tắc: phương pháp chéo hóa ma trận, phương pháp Jacobi, phương pháp LagTange.

3.3. Dùng phần mềm Maple để đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc

Ta có thể sử dụng phương pháp LagTange với sự hỗ trợ của phần mềm toán Maple để đưa biểu thức tọa độ của dạng toàn phương về dạng chính tắc. Quy trình cụ thể như sau:

Trước tiên ta phải sử dụng hai lệnh tạo môi trường tính toán là:

>restart;

>with(student);

[D,Diff, Int, Limit, Lineint, Product, Sum, Tripleint, Changevar, Completesquare, Distance, Equate, Integrand, Intercept, Intparts, leftbox, leftsum, makeproc, middlebox, middlesum, midpoint, powsubs, rightbox, rightsum, showtangent, símpon, slope, summand, trapezoid]

Trong quá trình biến đổi cần chú ý phân biệt trường hợp $a_{ii} \neq 0$ với $a_{ii} = 0$.

3.4. Định lý quán tính

Định lý 1. (1uật quán tính) *Trong hai dạng chính tắc bất kỳ của cùng một dạng toàn phương số các hệ số dương bằng nhau, số các hệ số tìm bằng nhau.*

Đối với ma trận vuông

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

mỗi định thức

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

được gọi là một định thức con chính *của ma trận A.*

Định lý 2. *Giả sử A là ma trận của dạng toàn phương Γ trên không gian vectơ n chiều V. Khi đó Γ là dạng toàn phương xác định dương nếu và chỉ nên mọi định thức con chính của A đều dương.*

§4. KHÔNG GIAN VECTƠ ƠCLIT

4.1. Định nghĩa

1) Dạng song tuyến tính đối xứng φ trên không gian vectơ V được gọi là một tích vô hướng trên V nếu $\forall \vec{\alpha} \neq 0$ thuộc V ta có $\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) > 0$.

Với $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ V số thực $\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ được gọi là tích vô hướng của $\vec{\alpha}$ và $\vec{\beta}$ kí hiệu bởi $\vec{\alpha}.\vec{\beta}$. Nếu $\vec{\alpha}$ = 6, thay cho $\vec{\alpha}.\vec{\alpha}$ ta viết $\vec{\alpha}^2$.

2) Không gian vectơ V được gọi là một không gian vectơ Ơclit nếu trên V có một tích vô hướng.

4.2. Cơ sở trực chuẩn

Định nghĩa. *Giả sử E là một không gian vectơ Ơclit.*

1) Hai vectơ $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ của E được gọi là trực giao nếu $\vec{\alpha}.\vec{\beta}$ = 0; kí hiệu $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

2) Với mỗi $\vec{\alpha} \in E$, ta gọi $\sqrt{(\vec{x})^2}$ là chuẩn của vectơ $\vec{\alpha}$, kí hiệu $|\vec{\alpha}||$. Nếu $||\vec{\alpha}||$ = 1 thì ta nói $\vec{\alpha}$ là vectơ định chuẩn.

3) Cơ sở $(\varepsilon) = \{\vec{\varepsilon}_1, ..., \vec{\varepsilon}_2, ..., \vec{\varepsilon}_n\}$ của không gian vectơ Ơclit E được gọi là một cơ sở trực chuẩn nếu $\vec{\varepsilon}_i$, $\vec{\varepsilon}_j = \delta_{ij}$ (Trong đó δ_{ij} là ký hiệu Kronecker thỏa mãn $\delta_{ij} = 1$ khi $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ khi $i \neq j$).

Định lý 1. *Giả sử E là một không gian vectơ Ơclit. Khi đó:*

1) Với $\vec{\alpha} \in E$, $||\vec{\alpha}|| = 0$ khi và chỉ khi $\vec{\alpha} = \vec{0}$.

2) Với mọi $\vec{\alpha} \in$ E, mọi $k \in R$ ta có $||k\vec{\alpha}|| = |k| . ||\vec{\alpha}||$.

3) Với mọi $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta} \in E$ ta có $|\vec{\alpha}| \leq ||\vec{\alpha}||.||\vec{\beta}||$ (bất đẳng thức Cauchy-Bunhiakovsky).

4) Với mọi $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta} \in E$ ta có $||\vec{\alpha} + \vec{\beta}|| \leq ||\vec{\alpha}|| + ||\vec{\beta}||$ (bất đẳng thức tam giác).

Định lý 2. *Mọi hệ gồm những vectơ khác không, đôi một trực giao của một không gian uectơ Ơclit đều độc lập tuyến tính.*

Định lý 3. *Mọi không gian vectơ Ơclit n chiều đều có cơ sở trực* *chuẩn.*

Định lý 4. *Nếu* (ε) = {$\vec{\varepsilon}_1$,..., $\vec{\varepsilon}_2$,..., $\vec{\varepsilon}_n$} *là một cơ sở trực chuẩn của không gian Ơclit n chiều* E, *thì với* ∀ $\vec{\alpha}$ ∈ E *ta có* :

$$\vec{\alpha} = (\vec{\alpha}\cdot\vec{\varepsilon}_1)\vec{\varepsilon}_1 + (\vec{\alpha}\cdot\vec{\varepsilon}_2)\vec{\varepsilon}_2 + \ldots + (\vec{\alpha}\cdot\vec{\varepsilon}_n)\vec{\varepsilon}_n.$$

4.3. Không gian con bù trực giao

Định nghĩa. *Không gian con H* = {$\vec{\beta}$ ∈ *E* | $\vec{\beta}$ ⊥ $\vec{\alpha}$, ta ∀$\vec{\alpha}$∈ F} *được gọi là không gian con bù trực giao* với không gian con F.

Định lý 1. *Nếu H là không gian con bù trực giao với không gian con* F *của không gian vectơ Ơclit n chiều E thì F*$\cap$*H* = {$\vec{\theta}$} *và E* = *F* + *H.*

4.4. Hình chiếu của một vectơ lên không gian con

Định nghĩa. *Giả sử E là không gian Ơclit n chiều, F là không gian con tùy ý của* E, *khi đó* ∀ $\vec{\alpha}$ ∈ *E ta luôn có biểu diễn duy nhất* $\vec{\alpha}$ = $\vec{\beta}$ + $\vec{\gamma}$, *với,* $\vec{\beta}$ ∈ F, $\vec{\gamma}$ ∈ H, *trong đó H là không gian con* $\vec{\alpha}$ *trực giao của F. Ta sẽ gọi vectơ* $\vec{\beta}$ *là hình chiếu trực giao của* $\vec{\alpha}$ *lên F và ký hiệu là* hch_F $\vec{\alpha}$, *còn vectơ* $\vec{\gamma}$ = $\vec{\alpha}$ - $\vec{\beta}$ = $\vec{\alpha}$ - $hch_F\vec{\alpha}$ *được gọi là thành phần của* $\vec{\alpha}$ *trực giao với F.*

4.5. Phép biến đổi trực giao - Ma trận trực giao

Định nghĩa. *Giả* sử *E là một không gian vectơ Ơclit n chiều. Tự đồng cấu f. E* ∈ *E được gọi là một phép biến đổi trực giao nếu* f($\vec{\alpha}$). f($\vec{\alpha}$,$\vec{\beta}$)= $\vec{\alpha}$. *với mọi* $\vec{\alpha}$,$\vec{\beta}$ ∈ *E.*

Định lý 1. *Giả* sử *E là* một *không gian vectơ ơclit n chiều. Tự đồng cấu f: E* → *E là phép biến đổi trực giao khi và chỉ khi nó biến mỗi cơ* sở *trực chuẩn thành cơ sở trực chuẩn.*

Định lý 2. *Giả sử E là một không gian vectơ ơclit, A là ma trận của Từ đồng cấu f: E* → *E đối với một cơ sở trực chuẩn* (ε) = {$\vec{\varepsilon}_1$,..., $\vec{\varepsilon}_2$,..., $\vec{\varepsilon}_n$}. *Từ đồng cấu f là trực giao khi và chỉ khi* $^tAA = I$ (I *là ma trận đơn* vị).

Định nghĩa. *Ma trận vuông A được gọi là một ma trận trực giao nếu*

$^tAA = I$ (I *là ma trận đơn vị)*

Hệ quả. *f là một phép biến đổi trực giao khi và chỉ khi ma trận của nó đối với một cơ* sở *trực chuẩn là* một ma *trận trực giao.*

4.6. Phép biến đổi đối xứng

Định nghĩa. *Giả* sử *E là một không gian vectơ ơclit n chiều. Tự đồng cấu f: E → E được gọi là phép đối xứng nếu* $\vec{\alpha}.f(\vec{\beta}) = f(\vec{\alpha}).\vec{\beta}$, $\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in E$.

Định lý 1. *Giả sử E là một không gian vectơ ơclit n chiều. Tự đồng cấu f của E là phép đối xứng nếu và chỉ nếu ma trận của f đối với một cơ sở trực chuẩn là một ma trận đối xứng.*

4.7. Ứng dụng

Định lý 1. *Nếu A là một ma trận đôi xứng với các thành phần là những sô thực thì mọi nghiệm của đa thức đặc trưng* | A – *kI* | *đều là số thưc.*

Định lý 2. *Nếu f là một phép đối xứng của không gian vectơ ơclit n chiều E thì hai không gian con riêng ứng với hai giá trị riêng phân biệt của f phải trực giao với nhau.*

Định lý 3. *Nếu f là một phép đối xứng của không gian vectơ ơclit n chiều* E, *thì E có một cơ sở trực chuẩn gồm những vectơ riêng của f.*

Định lý 4. *Mỗi dạng toàn phương trên không gian vectơ ơclit* E^n *chiều đưa được về dạng chính tắc nhờ một ma trận trực giao.*

Tìm ma trận trực giao đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc:

Giả sử A là ma trận của dạng toàn phương đối với cơ sở chính tắc của R^n. Ta thực hiện các bước sau:

1) Tìm các giá trị riêng là nghiệm của đa thức đặc trưng | A – *kI* | .

2) Tìm các vectơ riêng tạo thành một cơ sở trực chuẩn của R^n.

3) Tìm ma trận chuyển T từ cơ sở chính tắc sang cơ sở trực chuẩn vừa tìm được.

BÀI TẬP

§1. DẠNG SONG TUYẾN TÍNH

1. Viết ma trận của dạng song tuyến tính trên R3, ở đây

$$\vec{\alpha} = (x_1, x_2, x_3),\ \vec{\beta} = \vec{\beta}(y_1, y_2, y_3)$$

a) $\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 2x_1y_1 - 3x_2y_3 + 4x_3y_1 - x_3y_3$

b) $\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 4x_1y_2 - 5\,x_1y_3 + 8x_2y_1 - 6x_2y_3 + x_3y_3$

2. Tìm ma trận của dạng song tuyến tính đối xứng trên R3:

a) $\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 5\,x_1y_1 + 4\,x_1y_2 - 3\,x_2y_2 + 6\,x_2y_3 - x_3y_3$

b) $\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 2\,x_1y_2 - 6\,x_1y_3 + x_2y_2 - x_2y_3 + 5\,x_3y_3$.

3. Cho ma trận của dạng song tuyến tính φ trên R^3 có ma trận đối với cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Tìm ma trận của φ đối với cơ sở ξ gồm các vectơ:

$\vec{\xi}_1 = (0, 2, 1),\ \vec{\xi}_2 = (1, 1, 0),\ \vec{\xi}_3 = (-1, 3, 0)$.

4. Cho dạng song tuyến tính φ trên $\mathbf{R}^3$ có ma trận đối với cơ sở (ε) là

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ma trận chuyển từ cơ sở (ε) sang cơ sở (ξ) của R^n là

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Tìm ma trận của φ đối với cơ sở (ξ) .

§2. DẠNG TOÀN PHƯƠNG

5. Tìm ma trận của dạng toàn phương trên R3 có biểu thức toạ độ sau:

a) $\Gamma(\vec{\alpha}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$;

b) $\Gamma(\vec{\alpha}) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 10x_2x_3$;

c) $\Gamma(\vec{\alpha}) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 - x_2x_3$.

6. Cho các dạng toàn phương sau đây được viết dưới dạng ma trận. Hãy viết chúng dưới trạng thông thường:

$$\text{a) } (x_1 \;\; x_2 \;\; x_3)\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};$$

$$\text{b) } (x_1 \;\; x_2 \;\; x_3)\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

7. Viết các dạng toàn phương sau đây dưới dạng ma trận:

a) $\Gamma(\vec{\alpha}) = 3x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2$, $\vec{\alpha} = (x_1, x_2)$;

b) $\Gamma(\vec{\alpha}) = x_1^2 + 2x_2^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2x_3$.

8. Tìm biểu thức toạ độ của mỗi dạng toàn phương dưới đây sau khi thức hiện Phép biến đổi toạ độ tương ứng

a) $\Gamma(\vec{\alpha}) = 5x_1^2 - 3x_2^2 + 6x_1x_2,\ \vec{\alpha} = (x_1, x_2, x_3)$

$$\begin{cases} x_1 = -y_1 + 2y_2 \\ x_2 = -y_2 \end{cases}$$

b) $\Gamma(\vec{\alpha}) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_2x_3,\ \vec{\alpha} = (x_1, x_2, x_3)$

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_1 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_2 - y_3 \end{cases}$$

c) $\Gamma(\vec{\alpha}) = 2x_1^2 - 3x_2^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3,\ \vec{\alpha} = (x_1, x_2, x_3)$

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_2 - \dfrac{y_3}{2} \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 - y_2 \end{cases}$$

d) $\Gamma(\vec{\alpha}) = x_1^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3,\ \vec{\alpha} = (x_1, x_2, x_3)$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_2 - x_3 \end{cases}$$

§3. ĐƯA DẠNG TOÀN PHƯƠNG VỀ DẠNG CHÍNH TẮC

9. Đưa các dạng toàn phương sau về dạng chính tắc, với

$\vec{\alpha} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$.

a) $\Gamma(\vec{\alpha}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3$;

b) $\Gamma(\vec{\alpha}) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_2$;

c) $\Gamma(\vec{\alpha}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

d) $\Gamma(\vec{\alpha}) = 2x_1^2 + x_2^2 - 3x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$

e) $\Gamma(\vec{\alpha}) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 4\sqrt{2}\, x_2x_3$;

f) $\Gamma(\vec{\alpha}) = 2x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.

10. Với các ký hiệu trước định lý 6.7, chứng minh rằng một dạng toàn phương xác định âm khi và chỉ khi $(-1)^k D_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

§4. KHÔNG GIAN VECTƠ ƠCLIT

11. Trong không gian vectơ Ơclit ta đặt: $\cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \dfrac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{\|\vec{\alpha}\| \cdot \|\vec{\beta}\|}$, và gọi đó là co sin của góc giữa hai vectơ $\vec{\alpha}$ và $\vec{\beta}$.

Hãy tính chuẩn và co sin của góc giữa hai vectơ sau trong $\mathbf{R}^3$:

a) $\vec{\alpha} = (1, 2, 3)$, $\vec{\beta} = (0, 2, 1)$;

b) $\vec{\alpha} = (1, 0, 0)$, $\vec{\beta} = (0, 1, -1)$.

12. Trong không gian vectơ ơclit R^3 cho cơ sở gồm:

$\vec{\varepsilon}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{\varepsilon}_2 = (0, 2, 0)$, $\vec{\varepsilon}_3 = (0, 0, 3)$. Trực chuẩn hoá hệ vectơ đã cho.

13. Trong không gian vectơ ơcht R4, hãy trực chuẩn hoá hệ vectơ gồm các vectơ sau:

$\vec{\varepsilon}_1 = (1, 0, 1, 2)$, $\vec{\varepsilon}_2 = (-1, 0, -1, 0)$, $\vec{\varepsilon}_3 = (0, 1, 1, 1)$

14. Trong không gian vectơ ơclit E với cơ sở trực chuẩn $\{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3\}$.

Hãy tính $\vec{\alpha}.\vec{\beta}$, $\|\vec{\alpha}\|$, $\|\vec{\beta}\|$, $\cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$

a) $\vec{\alpha} = 3\vec{\varepsilon}_1 - 2\vec{\varepsilon}_2$, $\vec{\beta} = \vec{\varepsilon}_2 + 4\vec{\varepsilon}_3$,

b) $\vec{\alpha} = \vec{\varepsilon}_1 + 3\vec{\varepsilon}_2 - \vec{\varepsilon}_3$, $\vec{\beta} = -\vec{\varepsilon}_1 + 2\vec{\varepsilon}_2 + \vec{\varepsilon}_3$

c) $\vec{\alpha} = 4\vec{\varepsilon}_2 + \vec{\varepsilon}_3$, $\vec{\beta} = -5\vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_3$

d) $\vec{\alpha} = 2\vec{\varepsilon}_1 - \vec{\varepsilon}_2 + \vec{\varepsilon}_3$, $\vec{\beta} = 2\vec{\varepsilon}_2 + 3\vec{\varepsilon}_3$

e) $\vec{\alpha} = -5\vec{\varepsilon}_1 + 2\vec{\varepsilon}_2 + \vec{\varepsilon}_3$, $\vec{\beta} = \vec{\varepsilon}_1 - \vec{\varepsilon}_2 + 5\vec{\varepsilon}_3$.

15. Tìm ma trận trực giao đưa các dạng toàn phương trên R^3 sau đây về dạng chính tắc, $\vec{\alpha} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$:

a) $\Gamma(\vec{\alpha}) = 5x_1^2 + 9x_2^2 + 9x_3^2 - 12x_1x_2 - 6x_1x_3$;

b) $\Gamma(\vec{\alpha}) = 4x_1^2 + x_2^2 + 9x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_2x_3 + 12x_1x_3$;

c) $\Gamma(\vec{\alpha}) = 5x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 - 2x_1x_3$;

d) $\Gamma(\vec{\alpha}) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 - 4x_1x_3$.

VÀI NÉT LỊCH SỬ

Các dạng toàn phương bắt đầu được nghiên cứu khoảng từ năm 300 đến năm 200 trước công nguyên bởi các nhà toán học Hy lạp Euclid, Archimedes và Apollonios. Euclid nổi tiếng với bộ sách "Cơ sở" gồm 13 tập trình bày một cách hệ thống toàn bộ kiến thức toán học lúc bấy giờ. Archimedes được nhiều người đánh giá là nhà toán học vĩ đại nhất trong lịch sử bởi các phát minh khoa học của mình. Apollonios nổi tiếng vì bộ sách "Các nhát cắt hình nón" gồm 8 tập với khoảng 400 định lý. ông là người đưa ra các khái niệm trực giao, công thức chính tắc và chứng minh được sự tồn tại các dạng chính tắc trục chính trong trường hợp hai chiều. Chính Apollonios là người đưa ra tên gọi các mặt bậc hai như dịp, hyperbol và parabol. Việc phân loại các dạng toàn phương trong không gian 3 chiều được hoàn thành năm 1748 bởi nhà toán học Thụy Sĩ Euler. Dạng chính tắc của các dạng toàn phương nhiều chiều được Lagrange chứng minh năm 1759. Luật quán tính được Sylvester và Jacobi phát hiện phát hiện vào khoảng năm 1850. Gauss là người đầu tiên sử dụng ma trận để nghiên cứu các dạng toàn phương.

Không gian Euclid (ơclit) ban đầu được hiểu như là không gian thực 3 chiều với hệ tiên đề Euchd. Nhà toán học người Ba lan, Banach (1892-1945), là người đầu tiên mở rộng sự nghiên cứu sang không gian nhiều chiều và ông được coi là ông tổ của các không gian định chuẩn. Ma trận trực giao được định nghĩa đầu tiên bởi Frobemus. Weierstrass là người đưa ra chứng minh chính xác "mọi ma trận đối xứng thực là chéo hóa được" vào năm 1858.

Chương VII

QUY HOẠCH TUYẾN ANH

MỞ DẦU

Tư tưởng tối ưu hoá đã có từ thời xa xưa, ngay từ khi con người phải suy nghĩ để tìm cách hành động sao cho có lợi nhất cho mình theo những mục đích xác định. Những yêu cầu cấp bách của sự phát triển nền kinh tế và quốc phòng lại càng làm nảy sinh những ý tưởng tương tự. Do đó đã xuất hiện một bài toán cần phải giải quyết, đó là bài toán tìm quyết định tối ưu.

Để giải quyết một cách có hiệu quả bài toán ấy, trước hết cần phải xây dựng một mô hình toán học cho nó, trên đó thể hiện được bản chất của mỗi đối tượng đã được khảo sát và sự liên quan cần phải tôn trọng giữa chúng; ngoài ra, đương nhiên cần phải chỉ rõ mục tiêu mong muốn đạt được

Bài toán tìm quyết định tối ưu với mô hình toán học đã được xây dựng được gọi là *bài toán quy hoạch toán học* hay *bài toán tối ưu hoá.* Sự liên quan giữa các đối tượng đã được khảo sát trong quá trình xây dựng mô hình toán học thường được thể hiện dưới dạng một hệ phương trình và bất phương trình, coi đó như là những điều kiện (hay ràng buộc) không thể bỏ qua. Nếu tất cả các hàm có mặt trong bài toán ấy là các hàm tuyến tính thì ta có *bài toán quy hoạch tuyến tính.* Quy hoạch tuyến tính là một bộ phận cơ bản và có nhiều ứng dụng thực tiễn trong lĩnh vực tối ưu hoá.

Trong chương này ta chỉ xét các bài toán quy hoạch tuyến tính với các phương pháp và thuật toán giải chúng, được xem như một ứng dụng của Đại số tuyến tính.

§1. BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

1.1. Một vài bài toán thực tế

1) Bài toán lập kế hoạch sản xuất

Một cơ sở sản xuất dự định sản xuất hai loại sản phẩm A và B. Các sản phẩm này được chế tạo từ ba loại nguyên liệu I, II và III. Số lượng đơn vị dự trữ của từng loại nguyên liệu và số lượng đơn vị từng loại nguyên liệu cần dùng để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm mỗi loại được cho trong bảng dưới đây:

Loại nguyên liệu	Nguyên liệu dự trữ	số lượng đơn vị nguyên liệu cần dùng cho việc sản xuất một đơn vi sản phẩm	
		A	B
I	18	2	3
II	30	5	4
III	25	1	6

Hãy lập kế hoạch sản xuất, tức là tính xem cần sản xuất bao nhiêu đơn vị sản phẩm mỗi loại để tiền lãi thu được là lớn nhất biết rằng, bán một đơn vị sản phẩm A thu lãi 3 trăm nghìn đồng, bán một đơn vị sản phẩm B thu lãi 2 trăm nghìn đồng. Ta hãy xây dựng mô hình toán học cho bài toán trên. Gọi x và y theo thứ tự là số lượng đơn vị sản phẩm A và B cần sản xuất theo kế hoạch. Khi đó tiền lãi thu được sẽ là

$$z = 3x + 2y.$$

Do nguyên liệu dự trữ có hạn nên x và y phải chịu những ràng buộc nào đó, cụ thể là:

$2x + 3y \leq 18$ (Ràng buộc về nguyên liệu I)

$5x + 4y \leq 30$ (Ràng buộc về nguyên liệu II)

$x + 6y \leq 25$ (Ràng buộc về nguyên liệu III).

Ngoài ra còn các ràng buộc rất tự nhiên nữa là $x \geq 0$, $y \geq 0$ vì số đơn vị sản phẩm không thể âm.

Bằng ngôn ngữ toán học, bài toán trên có thể phát biểu như sau: Tìm x và y sao cho tại đó biểu thức $z = 3x + 2y$ đạt giá trị lớn nhất với các ràng buộc:

$$\begin{cases} 2x + 3y \le 18 \\ 5x + 4y \le 30 \\ x + 6y \le 25 \\ \quad x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$

Bài toán lập kế hoạch sản xuất tổng quát có thể phát biểu dưới dạng:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_i x_j$$

Hãy tìm vectơ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ Sao Cho tại đó hàm f đạt giá trị lớn nhất với các ràng buộc:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

2) Bài toán vận tải.

Có một loại hàng cần được vận chuyển từ hai kho (trạm phát) P_1 và P_2 tới ba nơi tiêu thụ (trạm thu) T_1, T_2 và T_3. Bảng dưới đây cho biết số lượng hàng cần vận chuyển đi ở mỗi kho và số lượng hàng cần nhận ở mỗi nơi tiêu thụ, và cước phí vận chuyển một đơn vị hàng từ mỗi kho tới nơi tiêu thụ tương ứng:

Trạm Phát	Trạm thu			Lương Phát
	T1	T2	T3	
Pl	5	2	3	30
P2	2	1	1	75
Lượng thu	35	25	45	

Hãy lập kế hoạch vận chuyển thoả mãn mọi yêu cầu thu phát sao cho chi phí vận chuyển là nhỏ nhất.

Nếu kí hiệu x_{ij} (i = 1, 2 và i = 1, 2, 3) là lượng hàng cần vận chuyển từ kho P_i tới nơi tiêu thụ T_j thì mô hình toán học của bài toán vận tải nói trên sẽ là:

Tìm các số x_{ij} (i = 1, 2 và j = 1, 2, 3) sao cho tại đó biểu thức

$$5x_{11} + 2x_{12} + 8x_{13} + 2x_{21} + x_{22} + x_{23}$$

đạt giá trị nhỏ nhất với các ràng buộc:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 30 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 75 \\ x_{11} + x_{21} = 35 \\ x_{12} + x_{22} = 25 \\ x_{13} + x_{23} = 45 \\ x_{ij} \geq 0,\ i = 1, 2 \text{ và } j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Để tổng quát hoá bài toán vận tải, ta gọi m là số trạm phát; n là số trạm thu; a; là lượng phát từ trạm phát thứ i (i = 1, 2,..., m); b_j là lượng thu của trạm thu thứ i (j = 1, 2 , … , n) ; c_{ij} là cước phí vận chuyển một đơn vị hàng từ trạm phát thứ i tới trạm thu thứ j; x_{ij} là lượng hàng cần vận chuyển theo kế hoạch từ trạm phát thứ i đến trạm thu thứ j (i = 1, 2,..., m; j = 1, 2, ..., n).

Bài toán vận tải tổng quát được phát biểu như sau:

Hãy tìm các số xu (i = 1, 2,..., m; j = 1, 2,..., n), tức là tìm ma trận x = (x_{ij}) kiểu (m,n) sao cho tại đó hàm

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

đạt giá trị nhỏ nhất với các ràng buộc:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_j,\ i = 1, 2, \ldots, m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1, 2, \ldots, n \\ x_{ij} \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

1.2. Bài toán quy hoạch tuyến tính

1) Dạng tổng quát của bài toán quy hoạch tuyến tính

Từ các bài toán đã nếu cùng rất nhiều các bài toán thực tế khác ta có thể thấy *bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát* có dạng như sau:

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1)$$

Hãy tìm vectơ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Sao cho tại đó hàm đạt giá trị nhỏ nhất (hoặc lớn nhấn với các ràng buộc:

trong đó: $I \subset M = \{1, 2, \ldots, m\}$

$J \subset N = \{1, 2, \ldots, n\}$

$I' = M \setminus I.$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \geq b_i, \quad i \in I \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = b_i, \quad i \in I' \qquad (3)$$

$$x_j \geq 0, \; j \in J \qquad (4)$$

Trong bài toán trên, hàm f(x) được gọi là *hàm mục tiêu;* các ràng buộc (2) và (3) được gọi là các *ràng buộc cưỡng bức;* ràng buộc (4) được gọi là *ràng buộc tự nhiên,* nó cũng thuộc loại ràng buộc (2) nhưng vì muốn nhấn mạnh nên ta vẫn tách riêng.

Mỗi vectơ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ thoả mãn tất cả các ràng buộc được gọi là một *phương án.* Phương án mà tại đó hàm mục tiêu đạt giá trị nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) được gọi là *phương án tối* ưu; giá trị ấy được gọi là *giá trị tối* ưu của hàm mục tiêu trên tập các phương án.

Đối với bài toán quy hoạch tuyến tính đòi hỏi giá trị hàm mục tiêu đạt giá trị nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) ta nói đó là *bài toán cực tiểu hoá* hay *bài toán dạng mịn* (hoặc *bài toán các đại hoá* hay *bài toán dạng max).* Phương án x được gọi là tốt hơn phương án y nếu: f(x) < f(y) đối với bài toán dạng mịn (f(x) > f(y) đối với bài toán dạng max).

Giải bài toán quy hoạch tuyến tính được hiểu là tìm được dù chỉ một phương án tối ưu; hoặc là chứng tỏ trên tập phương án *hàm mục tiêu không bị chặn,* tức là hàm mục tiêu có thể nhận giá từ nhỏ tuỳ ý (hoặc lớn tuỳ ý) đối với bài toán dạng mịn (hoặc max) trên tập phương án; hoặc là chứng tỏ tập phương án là rỗng (người ta đã chứng minh được rằng, đối với bài toán quy hoạch tuyến tính xảy ra một và chỉ một trong ba khả năng trên).

Ta có thể thấy rằng

$$f(\bar{x}) = \max_{x \in X} f(x) \Leftrightarrow -f(\bar{x}) = \min_{x \in X}[-f(x)]$$

Chính vì vậy, về mặt lí thuyết, dưới đây ta chỉ đề cập tới các bài toán quy hoạch tuyến tính dạng min, được viết dưới dạng gọn hơn:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, & i \in I \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & i \in I' \\ x_j \geq 0, & j \in J \end{cases}$$

Để việc trình bày được ngắn gọn, ta đưa ra các kí hiệu và quy ước sau đây:

a) Nếu A là ma trận kiểu (m, n) thì $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ là vectơ dòng (ma trận dòng) thứ i của A_i A_j : $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$ là vectơ cột (ma trận cột) thứ j của A.

b) Nếu $A = (a_{ij})$ và $B = (b_{ij})$ là hai ma trận cùng kiểu thì bất đẳng thức ma trận $A \geq B$ được hiểu là $a_{ij} \geq b_{ij}$ với mọi i, j.

Đặc biệt, với vectơ (ma trận) $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ thì $x \geq 0$ được hiểu là $x_j \geq 0$ với mọi j.

c) Mỗi vectơ được xem như ma trận cột trong các phép tính ma trận (nếu không nói gì thêm hoặc không có quy ước gì khác).

Nếu $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ và $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là hai vectơ nào đó thì biểu thức (cùng kí hiệu tương ứng)

$$\langle c, x \rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

được gọi là tích vô hướng của hai vectơ c và x.

Nếu xem c và x là hai ma trận cột thì

$$^{t}cx = \left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \right)$$

là ma trận cấp 1, trong đó ^{t}c là ma trận chuyển vị của c (còn có thể kí hiệu là c^{t} hay c^{T}). Để cho gọn, sau đây ta sẽ quy ước:

$$^{t}cx = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \langle c, x \rangle.$$

Như vậy, với các kí hiệu và quy ước nếu trên, bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát được viết dưới dạng gọn hơn như sau:

$$f(x) = {}^{t}cx \to \min \quad (1)$$

$$\begin{cases} A_i x \geq b_i, \ i \in I & (2) \\ A_i x = b_i, \ i \in I' & (3) \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \ j \in J \quad (4)$$

trong đó $A = (a_{ij})$ là ma trận kiểu (m, n).

2) Dạng chính tắc và dạng chuẩn tắc của bài toán quy hoạch tuyến tính.

Xét bài toán (1) - (4).

a) Nếu $I = \varnothing$ và $J = N$ thì ta có bài toán quy hoạch tuyến tính *dạng chính tắc,* nó có dạng:

$$f(x) = {}^{t}cx \to \min$$

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0, \end{cases}$$

trong đó $b = (b_1, b_2, .., b_m)$; A được gọi là *ma trận ràng buộc.*

b) Nếu $I' = \varnothing$ và $J = N$ thì ta có bài toán quy hoạch tuyến tính *dạng chuẩn tắc,* nó có dạng:

$$f(x) = {}^t cx \to \min$$

$$\begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Dễ thấy rằng, bằng các phép biến đổi thích hợp ta có thể đưa bài toán quy hoạch tuyến tính bất kì về dạng chính tắc hoặc là dạng chuẩn tắc, cụ thể là:

- Mỗi phương trình $A_i x = b_i$ được thay bởi hệ hai bất phương trình

$$A_i x \geq b \text{ , và } -A_i x \geq -b \text{ .}$$

- Mỗi bất phương trình Alx > b, được thay bởi hệ

$$A_i x - x_{n+1} = b_i \text{ và } x_{n+i} \geq 0$$

trong đó ẩn mới x_{n+i} được gọi là ẩn bù (hay biến bù)

- Mỗi bất phương trình $A_i x \leq b_i$ được thay bởi hệ

$$A_i x - x_{n+1} = b_i \text{ và } x_{n+i} \leq 0$$

trong đó ẩn mới x_{n+i} được gọi là ẩn bù (hay biến bù).

- Mỗi ẩn x_j không có ràng buộc về dấu đều có thể viết thành hiệu của hai ẩn mới không âm: $x_j = x'_j - x''_j \quad ; \quad x'_j \geq 0 \quad ; \quad x''_j \geq 0$

- Nếu ẩn x_j có điều kiện $x_j \leq 0$ thì ta đặt $x_j = -t_j$ với $t_j \geq 0$.

Ví dụ 1. Đưa bài toán sau về dạng chính tắc:

$$f(x) = 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + x_3 \geq 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 \leq -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 11 \\ x_1 \geq 0 \ , \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Giải

Bài toán đã cho là bài toán dạng max nên ta đổi dấu hàm mục tiêu để đưa về dạng mịn. Đưa vào hai ẩn bù t_4, t_5 ứng với ràng buộc thứ nhất và thứ hai. Ẩn x_3 không có ràng buộc về dấu nên ta đặt $x_3 = t_3 - t_6$. Cuối cùng, đặt $x_1 = t_1$, $x_2 = t_2$, và ta có bài toán dạng chính tắc sau:

$$F(t) = -5t_1 - 2t_2 + 4t_3 - 4t_6 \to \min$$

$$\begin{cases} 4t_1 + 7t_2 + t_3 - t_4 - t_6 = 3 \\ t_1 - t_2 - 2t_3 + t_5 + 2t_6 = -1 \\ 2t_1 + 3t_2 + 6t_3 - 6t_6 = 11 \\ t_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \end{cases}$$

Ví dụ 2. Đưa bài toán sau về dạng chuẩn tắc

$$f(x) = x_1 + 3x_2 - x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + x_3 \geq 5 \\ -3x_1 + 5x_2 - 2x_3 \leq -6 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0. \end{cases}$$

Giải

Đặt $x_1 = t_1$, $x_2 = -t_2$, $x_3 = t_3 - t_4$ rồi thế vào bài toán đã cho, sau khi đã nhân hai vế của ràng buộc thứ hai với - 1, ta có bài toán dưới dạng chuẩn tắc sau:

$$F(t) = t_1 - 3t_2 - t_3 + t_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 2t_1 - 7t_2 + t_3 - t_4 \geq 5 \\ 3t_1 + 5t_2 + 2t_3 - 2t_4 \geq 6 \\ t_1 + t_2 + t_3 - t_4 \geq 1 \\ -t_1 - t_2 - t_3 + t_4 \geq -1 \\ t_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

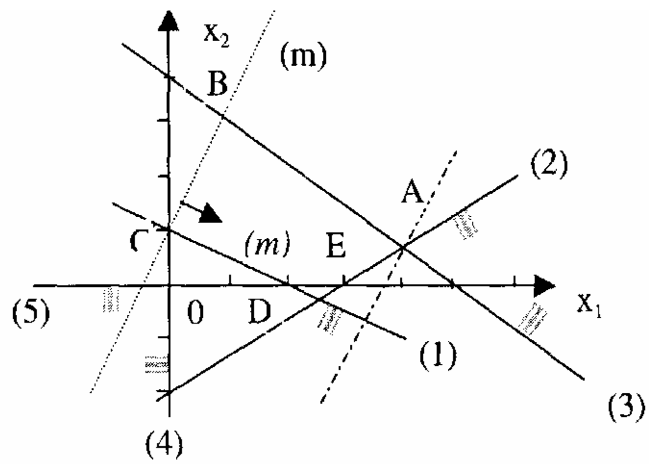
1.3. Ý nghĩa hình học và phương pháp đồ thị

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính hai ẩn

$$f(x) = -2x_1 + x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2 & (1) \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6 & (2) \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 20 & (3) \\ x_1 \geq 0 & (4) \\ x_2 \geq 0 & (5) \end{cases}$$

Sau đây ta đưa ra cách giải bài toán đã cho bằng phương pháp hình học. Trước hết ta hãy biểu diễn hình học tập phương án của bài toán (hình 1).



Hình 1

Trên mặt phẳng toạ độ $0x_1x_2$ các ràng buộc được biểu diễn bởi các nửa mặt phẳng. Các nửa mặt phẳng (1) - (5) được đánh số theo thứ tự các ràng buộc ngay trên bờ của chúng. Khi xác định mỗi nửa mặt phẳng ấy, để chỉ nửa mặt phẳng tương ứng bị loại bỏ ta xoá một cách tượng trưng bởi ba vạch song song liền nhau vuông góc với bờ của nó.

Như vậy tập phương án được biểu diễn bởi hình ngũ giác lồi ABCDE, ta kí hiệu nó là X.

Tập các điểm (x_1, x_2) sao cho tại đó hàm mục tiêu nhận giá trị z được xác định bởi phương trình f(x) = z, cụ thể là $-2x_1 + x_2 = z$. Đó là đường thẳng vuông góc với vectơ c = (-2, 1) mà ta sẽ gọi là *đường mức* (với mức là z) Khi z thay đổi ta có một họ đường mức song song.

Vẽ đường mức (m) đi qua một điểm nào đó của tập phương án, nếu nó khác rỗng, chẳng hạn qua điểm C(0, 1). Khi đó (m) có phương trình $-2x_1 + x_2 = 1$ vì f(C) = 1, đó là đường thẳng được thể hiện bởi đường "nét đứt" trên hình vẽ. Tịnh tiến đường mức (m) theo một hướng nào đó nhưng vẫn song song với chính nó sẽ tương ứng làm tăng dần giá trị hàm mục tiêu, theo hướng ngược lại, sẽ tương ứng làm giảm dần giá trị hàm mục tiêu. Ở bài toán này ta phải chọn hướng tịnh tiến đường mức (m) sao cho tương ứng làm giảm dần giá trị hàm mục tiêu. Muốn vậy ta tính giá trị hàm mục tiêu tại một điểm nào đó không thuộc (m), chẳng hạn điểm D(2, O). Khi đó ta có f(D) = - 4 < f(C) - 1. Như vậy ta đã xác định được hướng tịnh tiến, được chỉ rõ bởi mũi tên trên hình vẽ. Theo hướng ấy ta tịnh tiến đường mức (m) cho tới vị trí giới hạn (g), nếu có, tức là vị trí vẫn có chung với tập phương án ít nhất một điểm, đồng thời toàn bộ tập phương án nằm hoàn toàn về một phía của vị trí ấy. Trên hình vẽ, vị trí giới hạn (g) được thể hiện bởi đường "chấm gạch". Khi đó mỗi điểm chung nói trên là một plluullg án tối ưu. Rõ ràng ta có $X^* = (g) \cap X$ là tập phương án tối ưu của bài toán. Ở bài toán này, $X^* = \{A\}$. Như vậy bài toán có phương án tối ưu duy nhất, đó là giao các bờ của nửa mặt phẳng (2) và (3), các toạ độ của nó được xác định bởi hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 6 \\ 4x_1 + 5x_2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{45}{11} \\ x_2 = \dfrac{8}{11} \end{cases}$$

vậy $x^* = \left(\dfrac{45}{11}, \dfrac{8}{11}\right)$ phương án tối ưu của bài toán đã cho và

$f(x^*) = -\dfrac{82}{11}$.

Trong trường hợp tổng quát, nếu tập phương án khác rỗng mà không có vị trí giới hạn thì ta kết luận bài toán có hàm mục tiêu không bị chặn.

Chú ý.

Phương pháp đồ thị nói trên không những giải được các bài toán có hai ẩn mà còn có thể giải được một lớp các các bài toán có hai ràng buộc cưỡng bức với số ẩn tuỳ ý.

Trong trường hợp tổng quát, nếu tập phương án X c Ra của bài toán quy hoạch tuyến tính khác rỗng và tồn tại sốt > 0 sao cho:

$$X \subset \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \middle| \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \leq r \right\}$$

thì bài toán đó có phương án tối ưu.

Đối với bài toán hai ẩn thì, trong trường hợp ấy, X là một đa giác lồi (tập X chỉ có một phần tử cũng được xem là một đa giác lồi) và ít nhất một trong các đỉnh của nó là phương án tối ưu.

Trở lại ví dụ ở mục 1.3, tập phương án là đa giác lồi ABCDE.

Ta có: $f(A) = -\frac{82}{11}$, $f(B) = 5$, $f(C) = 1$, $f(D) = -4$, $f(E) = -6$ và $f(A)$ là giá trị nhỏ nhất trong chúng. Vậy A là phương án tối ưu.

§2. PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH VÀ CÁC THUẬT TOÁN CỦA NÓ

Như ta đã biết, mọi bài toán quy hoạch tuyến tính đều có thể đưa về dạng chính tắc. Từ các kết quả thu được khi nghiên cứu bài toán có dạng chính tắc đó ta dễ dàng suy ra các kết quả tương ứng của bài toán ban đầu Dưới đây, ta chỉ xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc, giả sử nó có dạng:

$$f(x) = {}^t cx \to \min$$
$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad (1)$$

trong đó giả thiết rằng A là ma trận kiểu (m, n) với m < n và hạng (A)=m

2.1. Một số tính chất của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

Định nghĩa 1. *Mỗi bộ gồm m vectơ cột độc lập tuyến tính của ma trận A được gọi là một cơ sở của nó.*

Giả sử $\{A^{ji} | i = 1, 2, \ldots, m\}$ *là một cơ sở của* A. *Nên đặt*

$J_o = \{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$ *và ma trận* $B = [A^{j1} A^{j2} \ldots A^{jm}]$

thì ta cũng nói J_o *hay B là một cơ sở của* A.

Định nghĩa 2. *Giả sử* J_o *là một cơ sở của ma trận* A *khi đó phương án* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *của gởi toán (1) được gọi là phương án cực biên ứng với cơ sở* J_o *nếu* $x_j = 0$ *với mọi* $j \notin J_o$ *(Ta cũng nói* J_0 *là cơ* sở *của phương án cực biến đó).*

Các ẩn x_j với $j \notin J_o$ được gọi là *ẩn phi cơ sở.* Các ẩn x_j với $j \in J_o$ được gọi là *ẩn cơ sở,* giá trị của chúng nhận được bằng cách giải hệ Cramer

$$\sum_{j \in J_o} x_j A^j = b \qquad (2)$$

Từ định nghĩa suy ra rằng, nếu J_o là một cơ sở của A và nghiệm của hệ (2) có ít nhất một thành phần âm thì không có phương án cực biên nào ứng với cơ sở J_o.

Ngoài ra, dễ thấy rằng số thành phần dương của một phương án cực biên của bài toán (1) tối đa là bằng m. Một phương án cực biên được gọi là *không suy biến* nếu nó có đúng m thành phần dương, được gọi là *suy biên* nếu nó có ít hơn m thành phần dương.

Bài toán (1) được gọi là *không suy biên* nếu mọi phương án cực biên của nó đều *không suy biến.*

Có thể thấy ngay rằng, số phương án cực biên của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc là hữu hạn, bởi vì số hệ con độc lập tuyến tính gồm đúng *m* vectơ của hệ hữu hạn các vectơ cột của ma trận A là hữu hạn.

Ví dụ. Tìm tất cả các cơ sở của ma trận ràng buộc và các phương án cực biên (nếu có) ứng với mỗi cơ sở ấy đối với bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có hệ ràng buộc:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Hãy biểu diễn hình học tập phương án của bài toán ấy.

Giải

Ma trận ràng buộc là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Trong 3 hệ con gồm đúng 2 vectơ của hệ gồm 3 vectơ cột của A chỉ có hai hệ độc lập tuyến tính, đó là các hệ $\{A^1,A^2\}$ và $\{A^1, A^3\}$; hệ còn lại là $\{A^2, A^3\}$ phụ thuộc tuyến tính vì $\det[A^1A^2 1 = 4 \neq 0$, $\det[A^1A^3] = -4 \neq 0$ và $\det[A^2A^3] = 0$.

Hai hệ con độc lập tuyến tính ấy chính là các cơ sở của ma trận A: $\{A^1, A^2\}$, $\{A^1, A^3\}$.

- Với hệ $\{A^1, A^2\}$ thì $x_3 = 0$; Còn x_1, x_2 được xác định bởi hệ

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 3x_1 + x_2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Vì x_1, $x_2 > 0$ nên ta có x = (2, 1, 0) là phương án cực biên (nó không suy biến vì có 2 thành phần dương).

- Với hệ $\{A^1, A^3\}$ thì $x_2 = 0$; còn x_1, x_3 được xác định bởi hệ

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_3 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

Như vậy, ứng với cơ sở $\{A^2, A^3\}$ không có một phương án cực biên nào vì x3 = - 1 < 0.

Vậy bài toán chỉ có một phương án cực biên không suy biến ứng với cơ sở $\{A^1, A^2\}$ hay cơ sở $J_o = \{1, 2\}$, đó là x = (2, 1, 0).

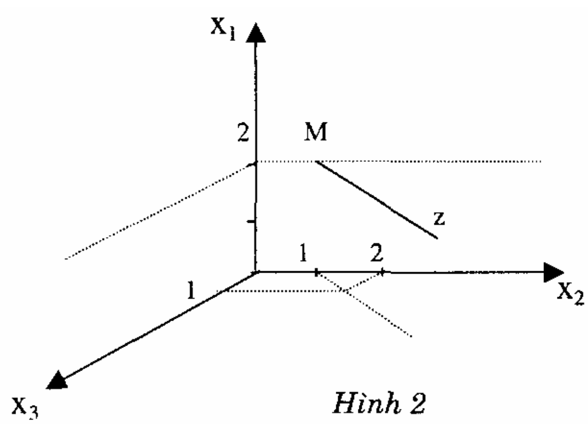
Biểu diễn hình học tập phương án:

Dễ thấy rằng, mọi phương án của bài toán đều có $x_1 = 2$ (cộng vế với vế hai phương trình trong hệ ràng buộc).

Vậy hệ ràng buộc dã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Tập phương án là tia Mz, M là điểm cực biên (hình 2)



Hình 2

Định lý 1. *Phương án* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$ *của bài toán (1) là phương án cực biên khi và chỉ khi hệ vectơ liên kết với nó, tức là hệ* $H(x) = \{A^j \mid x_j > 0\}$, *độc lập tuyến tính.*

Chứng minh. Điều kiện cần được suy ra từ định nghĩa. Ta sẽ chứng minh điều kiện đủ. Giả sử H(x) là hệ độc lập tuyến tính. Nếu tập chỉ số $J_x = \{j \mid x_j > 0\}$ có m phần tử thì H(x) chính là cơ sở của ma trận A tương ứng với x. Nếu trái lại, tức là số phần tử của J_x là $\mid J_x \mid < m$, thì ta có thể bổ sung vào H(x) một số vectơ cột của A để được một hệ gồm m vectơ độc lập tuyến tính, vì hạng(A) = m và H(x) là một hệ con của hệ các vectơ cột của A. Trong mọi trường hợp ta đều tìm được một cơ sở của A ứng với x. Vậy x là phương án cực biên.

Định lí 2. *Nếu bài toán (1) có tập phương án khác rỗng thì nó có ít nhất một phương án cực biên.*

Chứng minh. Trước hết ta quy ước rằng, nếu vectơ õ là phương án của bài toán (1) thì ta coi nó là phương án cực biên. Ta cũng giả thiết thêm rằng, mọi vectơ cột của A đều khác 0 . Giả sử $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là phương án có k thành phần dương và các thành phần còn lại đều bằng 0. Không làm mất tính chất tổng quát có thể giả thiết rằng $x_1, x_2, \ldots, x_k > 0$; $x_{k+1} = x_{k+2} = \ldots = x_n = 0$.

Vì x là phương án nên ta có

$$x_1A^1 + x_2A^2 + \ldots + x_kA^k = b. \tag{3}$$

Giả sử hạng của ma trận $[A^1A^2\ldots A^k]$ bằng r. Vì hạng (A) = m nên ta có r < m và hiển nhiên r < k. Nếu k = r thì rõ ràng x là phương án cực tiên vì $\{A^{1,} A^2, \ldots, A^k\}$ độc lập tuyến tính. Nếu trái lại, tức là r < k, thì, không làm mất tính chất tổng quát, ta giả thiết rằng ma trận

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_2 & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{bmatrix}$$

là không suy biến.

Xem (3) là hệ phương trình với các ẩn $x_1, x_2, \ldots, x_k$ nó tương đương với hệ r phương trình đầu . Giải hệ này, với các ẩn chính $x_1, \ldots, x_r$ và các ẩn tự do $x_{r+1}, \ldots, x_k$ ta được

$$x_j = p_j + \sum_{i=r+1}^{k} q_{ij}x_i \ , \qquad j = 1, 2, \ldots, r. \tag{4}$$

trong đó p_j và q_{ij} là các hằng số xác định nào đó.

Như vậy, nếu coi $x_1, x_2, \ldots, x_k$ là các ẩn thì hệ (3) và hệ (4) tương đương với nhau.

Với tham số θ, hệ (4) có thể viết

$$x_j - \theta q_{r+1,j} = p_j + q_{r+1,j}(x_{r+1} - \theta) + \sum_{i=r+2}^{k} q_{ij}x_i \ , \quad j = 1, 2, \ldots, r. \tag{5}$$

Nếu đặt

$$\overline{x}_j = \begin{cases} x_j - \theta \ , & \text{nếu} \quad j = r+1 \\ x_j \ , & \text{nếu} \quad j > r+1 \\ p_j + \sum\limits_{i=r+1} q_{ij}\overline{x}_i, & \text{nếu} \quad j < r+1 \end{cases}$$

thì từ hệ thức (5) suy ra

$$\overline{x}_j = p_j + \sum_{i=r+1} q_{ij}\overline{x}_i \ , \qquad j = 1, 2, \ldots, r \tag{6}$$

so sánh (4) và (6) ta thấy $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ là phương án của bài toán (1) khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \overline{x}_j = x_j - \theta q_{r+1,j} \ge 0, & j = 1,2,\ldots,r \\ \overline{x}_{r+1} = x_{r+1} - \theta & \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta \le \theta_o \\ \theta \le x_{r+1} \end{cases} \Leftrightarrow \theta \le \min\left(\theta_o, x_{r+1}\right),$$

$$\text{trong đó } \theta_o = \min\left\{ \frac{x_j}{q_{r+1,j}} \middle| q_{r+1,j} > 0 \ \text{ và } j = 1,2,\ldots,r \right\} = \frac{x_s}{q_{r+1,s}}$$

Ta chọn $\theta = \min(\theta_o, x_{r+1})$. Nếu $\theta = x_{r+1}$ thì $\overline{x}_{r+1} = 0$, nếu $\theta = \theta_o$ thì

$\overline{x}_s = x_s - \theta_0 q_{r+1,s} = 0$, và như vậy với cách chọn đó thì phương án x có số thành phần bằng 0 nhiều hơn so với x.

Cho $\overline{x}$ đóng vai trò x và quá trình cứ tiếp tục như trên, sau một số hữu hạn bước sẽ thu được một phương án mà hệ vectơ liên kết với nó độc lập tuyến tính hoặc thu được phương án 0, tức là thu được phương án cực biên.

Bổ đề 1. *Nếu phương án* $x = (x_1, x_2,\dots,x_n)$ *không phải là phương án cực biên của bài toán* (1) *thì tồn tại các phương án phân biệt* x^1 *và* x^2 *sao cho* $x = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2$.

Chứng minh. Vì x không phải là phương án cực biên nên $x \neq 0$. Không làm mất tính chất tổng quát ta có thể giả thiết rằng, x có r thành phần đầu tiên là dương và các thành phần còn lại bằng 0, nghĩa là nó có dạng $x = (x_1, x_2, \dots, x_r, 0,\dots,0)$ với $x_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, r$. Vì x không phải là phương án cực biên nên $H(x) = \{A^1, A^2,\dots, A^r\}$ phụ thuộc tuyến tính. Khi đó tồn tại các số $\alpha_1, \alpha_2,\dots,\alpha_r$ không đồng thời bằng 0 sao cho:

$$\alpha_1 A^1 + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_r A^r = 0.$$

Với α là số dương tuỳ ý ta cũng có:

$$\alpha\alpha_1 A^1 + \alpha\alpha_2 A^2 + \dots + \alpha\alpha_r A^r = 0 \qquad (7)$$

Vì x là phương án nên ta có:

$$x_1 A^1 + x_2 A^2 + \dots + x_r A^r = b. \qquad (8)$$

Từ đẳng thức (7) và (8) suy ra:

$$(x_1 \pm \alpha\alpha_1)A^1 + (x_2 \pm \alpha\alpha_2)A^2 + \ (x_r \pm \alpha\alpha_r)A^r = b. \qquad (9)$$

Lập hai vectơ sau đây:

$$x^1 = (x_1 - \alpha\alpha_1,\ x_2 - \alpha\alpha_2,\dots,x_r - \alpha\alpha_r,\ 0,\dots,\ 0) \in \mathbf{R}^n,$$

$$x^2 = (x_1 + \alpha\alpha_1,\ x_2 + \alpha\alpha_2,\dots,x_r + \alpha\alpha r,\ 0,\dots\ 0) \in \mathbf{R}^n.$$

Do $x_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, r$ nên có thể chọn được $\alpha > 0$ đủ bé sao cho $x_i \pm \alpha x_i \geq 0$. Khi đó cùng với đẳng thức (9), suy ra x^1, x^2 là các phương án. Dễ thấy $x^1 \neq x^2$ (suy ra từ các điều kiện $\alpha > 0$ và các số $\alpha_1,\dots, \alpha_r$

không đồng thời bằng không) và rõ ràng ta có

$$x = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2. \quad \square$$

Chú ý. Trong phép chứng minh bổ đề 1, có thể giả thiết trong các soát, $\alpha_1, \alpha_2\dots, \alpha_r$ có ít nhất một số dương. Khi đó dễ thấy rằng, $x^1 \geq 0$ khi và chỉ khi :

$$0 < \alpha \leq \alpha^+ = \min\left\{\frac{x_i}{\alpha_i} : \alpha_i > 0\right\}.$$

Nếu $\alpha_i \geq 0$ với mọi i thì $x^2 > 0$ Với mọi $\alpha > 0$. Nếu tồn tại chỉ số i sao cho $\alpha_i < 0$ thì $x^2 \geq 0$ khi và chỉ khi $0 < \alpha < \alpha^- = \min\{-\frac{x_i}{\alpha_i} : \alpha_i < 0\}$. Do đó ta có thể chọn α sao cho $x^1 \geq 0$, $x^2 \geq 0$, đồng thời trong r thành phần đầu tiên của x^1 hoặc x^2 có ít nhất một thành phần bằng 0, cụ thể là:

Chọn $\alpha = \alpha^+$ nếu $\alpha_i \geq 0$ với mọi i, hoặc $\alpha = \min(\alpha^+, a^-)$ nếu tồn tại sao cho $\alpha_i < 0$.

Như vậy, từ phương án x không phải là phương án cực biên có thể xây dựng được hai phương án phân biệt x^1, x^2 sao cho $x = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2$,

trong đó ít nhất một trong hai phương án xây dựng được có số thành phần dương ít hơn so với x.

Bổ đề 2. *Nếu* x^0 *là phương án tối ưu và* x^1, x^2 *các phương án phân biệt của bài toán (1) sao cho* $x^0 = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2$ *thì* x^1 *và* x^2 *cũng là phương án tối ưu của bài toán đó.*

Chứng minh. Vì f(x) là hàm tuyến tính nên

$$f(x^0) = f(\frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2) = \frac{1}{2}f(x^1) + \frac{1}{2}f(x^2).$$

Với giả thiết xo là phương án tối ưu, ta có :

$$f(x^0) \leq f(x^1) \text{ và } f(x^0) \leq f(x^2).$$

Giả sử ít nhất một trong hai bất đẳng thức trên xảy ra với dấu bất đẳng thức thực sự (<), chẳng hạn:

$$f(x^0) < f(x^1) \text{ và } f(x^0) \leq f(x^2).$$

Từ đó suy ra $f(x^0) < \frac{1}{2}f(x^1) + \frac{1}{2}f(x^2)$. Đó là điều vô lí. Vậy $f(x^o) = f(x^1) = f(x^2)$, tức là x^1, x^2 cũng là các phương án tối ưu.

Định lí 3. *Nếu bài toán (1) có phương án tôi ưu thì nó có ít nhất một Phương án cực biên là phương án tối ưu.*

Chứng minh. Giả sử x là phương án tối ưu của bài toán (1). Nếu x = 0 thì, theo quy ước, nó chính là phương án cực biên tối ưu . Giả sử $x \neq 0$ không phải là phương án cực biên. Theo bổ đề 1(và phần *chú ý* khi chứng minh nó) có thể xây dựng được hai phương án phân biệt x^1 và x^2 sao cho $x = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2$; trong đó ít nhất một trong hai phương án xi và x^2 có số thành phần dương ít hơn so với x, chẳng hạn x^1. Theo bổ đề 2 thì x^1 là phương án tối ưu. Nếu x^1 không phải là phương án cực biên thì cho x^1 đóng vai trò x, ta lại xây dựng được phương án tối ưu xa có số thành phần dương ít hơn so với x^1. Quá trình cứ tiếp tục như vậy, sau một số hữu hạn bước sẽ xây dựng được phương án tối ưu có hệ vectơ liên kết với nó độc lập tuyến tính hoặc đến lúc thấy vectơ 0 là phương án tối ưu. Dù trường hợp nào ta cũng thu được phương án cực biên tối ưu.

Định lí được chứng minh.

2.2. Phương pháp đơn hình

Cơ sở lí luận

Để giải bài toán quy hoạch tuyến tính bất kì nào đó, trước hết ta đưa bài toán về dạng chính tắc bằng một số phép biến đổi đơn giản đã biết. Đối với bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc, như trên đây đã trình bày, nếu có phương án thì có phương án cực biên, nếu có phương án tối ưu thì có phương án cực biên tối ưu. Điều đó cho thấy vai trò quan trọng của các phương án cực biên trong việc đề xuất các phương pháp giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc, đồng thời có thể sử dụng tính hữu hạn của số các phương án cực biên của bài toán đó. Phương pháp đơn hình là một trong các phương pháp dùng để giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc. Ý tưởng của phương pháp đơn hình là: Xuất phát từ một phương án cực biên đã biết (bằng cách nào đó), nếu nó không phải là phương án tối ưu thì tìm cách xây dựng một phương án cực biên khác tốt hơn phương án cực biên ban đầu. Quá trình cứ lặp lại như vậy, sau một số hữu hạn bước sẽ thu được phương án tối ưu hoặc nhận biết được bài toán đó có hàm mục tiêu không bị chặn.

Giả sử cần giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc:

$$f(x) = {}^t cx \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\begin{cases} Ax = b & (2) \\ x \geq 0 & (3) \end{cases}$$

trong đó A là ma trận kiểu (m, n) với m < n và hạng (A) = m.

Ràng buộc (2) còn có thể viết dưới dạng $x_1A^1 + x_2A^2 + \ldots + x_n A^n = b$

Ta giả thiết rằng bài toán (1), (2), (3) không suy biến (mọi phương án cực biên đều có đúng m thành phần dương), và đã biết một phương án cực biên có dạng $\overline{x} = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ trong đó $x_{i0} > 0$ với $i \in J_0$, $|J_0|=m$; $x_{j0}=0$ với $i \notin J_0$.

Như vậy, cơ sở ứng với $\overline{x}$ là J_0 hay $H(\overline{x}) = \{A^i : i \in J_0\}$ và mỗi vectơ A^j (j = 1,2,...,n) đều biểu thị tuyến tính duy nhất qua $H(\overline{x})$, chúng có

$$A^j = \sum_{i \in J_0} x_{ij} A^i, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \quad (4)$$

Nếu gọi B là ma trận có các cột là các vectơ trong cơ sở $\{A^i : i \in J_0\}$ và đặt $x^j = (x_{ij}) \in R^m$, $i \in J_0$ thì $A^j = Bx^j$ hay $x^j = B^{-1}A^j$, i = 1, 2,..., n.

Với kí hiệu $x^0 = (x_{i0}) \in R^m$ và $c^0 = (c_i) \in R^m$ với $i \in J_0$; $A^0 = b$ thì rõ ràng ta có:

$$f(\overline{x}) = {}^t c\overline{x} = {}^t c^0 x^0 = \sum_{i \in J_0} c_i \overline{x}_{i0} \quad ; \quad Bx^0 = b$$

và do đó $x^j = B^{-1} A^j$ cũng đúng với j = 0.

Định nghĩa. *Ta gọi $\Delta_j = {}^t c^0 x^j - c_j$, j = 1, 2 ,..., n là ước lượng của ẩn x_j (hay của vectơ A^j) ứng với cơ sở J_0.*

Rõ ràng ta có $\Delta_j = \sum_{i \in J_0} c_i x_{ij} - c_j$. *Chú ý rằng, nếu* j E J_0 *thì* $\Delta_j = 0$, *tức là* *ước lượng của mọi ẩn cơ sở đều bằng* 0*. Thật vậy, giả sử* $J_0 = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$*. Do* $B^{-1}B = I$ *là một ma trận đơn vị cấp m nên* $x^{j_i} = B^{-1}A^{j_i} = I^i$ *(* I^i *là cột thứ i của ma trận* I *).*

Ta có $\quad \Delta_{j_i} = {}^t c^0 x^{j_i} - c_{j_i} = {}^t c^0 I^i - c_{j_i} = c_{j_i} - c_{j_i} = 0 \quad$ với i = 1, 2,..., m.

Bổ đề 1. *Giả sử* $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ *là phương án bất kì của bài toán (1), (2), (3). Khi đó ta có các hệ thức:*

$$x_i = \bar{x}_i - \sum_{j \notin J_0} x_{ij} x_j \qquad (i \in J_0). \tag{5}$$

Chứng minh. Ta có

$$b = \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j A^j = \sum_{i \in J_0} \bar{x}_i A^i \ . \tag{6}$$

Mặt khác , vì x là phương án (chú ý đẳng thức (4)) nên:

$$b = \sum_{j=1}^{n} x_j A^j = \sum_{i \in J_0} x_i A^i + \sum_{j \notin J_0} x_j A^j = \sum_{i \in J_0} x_i A^i + \sum_{j \notin J_0} x_j \left(\sum_{i \in J_0} x_{ij} A^i \right)$$

$$= \sum_{i \in J_0} \left(x_i + \sum_{j \notin J_0} x_{ij} x_j \right) A^i \tag{7}$$

Vectơ b biểu thị tuyến tính một cách duy nhất qua cơ sở $\{A^i : i \in J_0\}$ nên từ (6) và (7) suy ra:

$$\bar{x}_i = x_i + \sum_{j \notin J_0} x_{ij} x_j \quad \text{với } i \in J_0 .$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Định lí 1. (dấu hiệu tối ưu)

Nếu ứng với phương án các biên $\bar{\mathbf{x}}$ *có cơ sở* J_0 *mà* $\Delta_j \le 0$ *với mọi* $j \notin J_0$ *thì* $\bar{\mathbf{x}}$ *là phương án tối ưu của bài toán* (1), (2), (3).

Chứng minh. Giả sử $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ là một phương án bất kì của bài toán (1),(2),(3). Nhân hai vế của(5) với c; rồi lấy tổng theo $i \in J_0$ cả hai vế ta được

$$\sum_{i\in J_0} c_i x_i = \sum_{i\in J_0} c_i \overline{x}_i - \sum_{i\in J_0} c_i \left(\sum_{j\notin J_0} x_{ij} x_j\right) = \sum_{i\in J_0} c_i \overline{x}_i - \sum_{j\notin J_0}\left(\sum_{i\in J_0} c_i x_{ij}\right) x_j$$

hay $$\sum_{i\in J_0} c_i x_i = f(\overline{x}) - \sum_{j\notin J_0}\left(\sum_{i\in J_0} c_i x_{ij}\right) x_j .$$

cộng cả hai vế của đẳng thức trên với $\sum_{j\notin J_0} \mathbf{c_j x_j}$ ta được

$$f(x) = f(\overline{x}) - \sum_{j\notin J_0}\left(\sum_{i\in J_0} c_i x_{ij} - c_j\right) x_j \text{ hay } f(x) = f(\overline{x}) - \sum_{j\notin J_0} \Delta_j x_j .$$

vì x là phương án nên $x_j \geq 0$ với mọi $j \notin J_0$, cùng với giả thiết $\Delta_j \leq 0$ với mọi $j \notin J_0$ từ (8) ta suy ra $f(\overline{\mathbf{x}}) \leq f(x)$. Bất đẳng thức này đúng với phương án x bất kì nên $\overline{\mathbf{x}}$ là phương án tối ưu. Đó là điều cần phải chứng minh.

Bổ đề 2. *Với mỗi $j \notin J_0$ ta xét vectơ n chiều $s^j = (s_{ij})$ với $i = 1, 2,..., n$ được xác định như sau:*

$$s_{ij} = \begin{cases} -x_{ij} & \text{nếu } i \in j_0 \\ 1 & \text{nếu } i = j \\ 0 & \text{nếu } i \notin i_0 \cup \{j\} \end{cases} \qquad (9)$$

Khi đó ta có ${}^t c s^j = -\Delta$, $As^j = 0$, và với tham số $\theta \geq 0$ thì vectơ $x(\theta) = \overline{\mathbf{x}} + \theta s^j$ là phương án của bài toán (1), (2), (3) khi và chỉ khi $x^0 - \theta x^j \geq 0$

Chung minh. Rõ ràng ${}^t c s^j = {}^t c^0 (-x^j) + c_j = -({}^t c^0 x^j - c_j = -\Delta_j$

Chú ý đến (4) ta có

$$As^j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} A^i = \sum_{i\in J_0} s_{ij} A^i + \sum_{i\notin J_0} s_{ij} A^i = -\sum_{i\in J_0} x_{ij} A^i + 1.A^j = -A^j + A^j = 0.$$

Cuối cùng ta xét vectol xiết. Rõ ràng ta có $Ax(\theta) : A\overline{\mathbf{x}} + \theta As^j = A\overline{\mathbf{x}} = b$. Do đó, để xiết là phương án thì điều kiện cần và đủ là $x(\theta) \geq 0$.

Nếu đặt $x(\theta) = \overline{\mathbf{x}} + \theta s^j = x' = (x'_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, n$ thì ta có

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{i0} - \theta x_{ij} & \text{nếu } i \in J_o \\ \theta & \text{nếu } i = j \\ 0 & \text{nếu } i \notin J_o \cup \{j\} \end{cases} \quad (10)$$

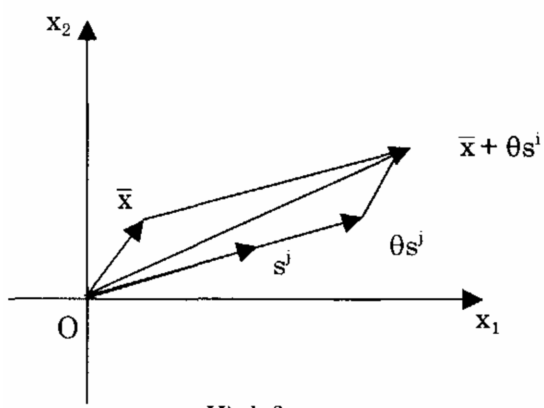
Như vậy, với $\theta \geq 0$ thì $x' \geq 0$ khi và chỉ khi $x_{i0} - \theta x_{ij} \geq 0$ với mọi $i \in J_0$ điều đó tương đương với $x^0 - \theta x^j \geq 0$. Định lí được chứng minh hoàn.

Chú ý.

- Nếu $x^j \leq 0$ thì rõ ràng $x^0 - \theta x^j > 0$ với mọi $\theta \geq 0$ Vì $x^0 > 0$, và như vậy khi đó $x(\theta)$ là phương án với mọi $\theta \geq 0$.

- Vì $x^0 > 0$ nên có thể chọn $\theta > 0$ đủ nhỏ sao cho $x(\theta) \geq 0$, nghĩa là $x(\theta)$ là phương án với $\theta > 0$ đủ nhỏ.

- Do ý nghĩa hình học, được mô tả bởi hình 3, nên si được gọi là hướng chấp nhận được tại $\overline{\mathbf{x}}$ nếu $x(\theta)$ là phương án, và khi đó ta nói $x(\theta)$ là *phương án tìm được theo hướng* sì *(từ* $\overline{\mathbf{x}}$*)* .



Hình 3

Định lý 2. (Dấu hiệu hàm mục tiêu không bị chặn)

Nên ứng với phương án các biến $\overline{\mathbf{x}}$ *có một chỉ* số j *để* $\Delta_j > 0$ *và* $x_j \leq 0$ *thì hàm mục tiêu của bài toán (1) , (2), (3) không bị chặn (tức là, trên tập phương án hàm mục tiêu có thể nhận giá trị nhỏ tuỳ ý.*

Chứng minh. Theo bổ đề 2, và chú ý sau đó, với giả thiết $x^j \leq 0$ thì $x(\theta) = \overline{\mathbf{x}} + \theta s^j$ là phương án với mọi $\theta \geq 0$. Ta có

$$f(x(\theta)) = {}^t c x(\theta) = {}^t c(\overline{x} + \theta s^j) = {}^t c \overline{x} + \theta {}^t c s^j = f(\overline{x}) - \theta \Delta_j \quad (11)$$

Do $\Delta_j > 0$ nên rõ ràng $f(x(\theta)) \to -\infty$ khi $\theta \to +\infty$,

Điều đó chứng tỏ hàm mục tiêu có thể nhận giá trị nhỏ tuỳ ý trên tập phương án, tức là hàm mục tiêu không bị chặn. Định lí được chứng minh.

Chú ý.

Theo phần chú ý sau bổ đề 2, với giả thiết $x^0 > 0$ (hay $\overline{\mathbf{x}}$ không suy biến) có vô số phương án dạng $x(\theta)$ với $\theta > 0$ đủ nhỏ. Khi đó, nếu tồn tại j sao cho $\Delta_j > 0$ thì từ (11) suy ra $f(x(\theta)) < f(\overline{\mathbf{x}})$, nghĩa là có vô số phương án tốt hơn $\overline{\mathbf{x}}$.

Nếu xuất hiện dấu hiệu hàm mục tiêu không bị chặn (tồn tại j sao cho $\Delta_j > 0$ và $x^i \le 0$) thì, theo (11), có thể tìm được phương án mà tại đó hàm mục tiêu nhận giá trị α cho trước, trong đó $\alpha < f(\overline{\mathbf{x}})$.

Thật vậy, từ (11) ta có

$$f(x(\theta)) = f(\overline{x}) - \theta\Delta_j = \alpha \Leftrightarrow \theta = \theta_0 = \frac{f(\overline{x}) - \alpha}{\Delta_i}$$

Như vậy phương án cần tìm là $x(\theta_0) = \overline{\mathbf{x}} + \theta_0 s^j$

Bổ đề 3. Nếu $\{ A^i : i \in J_0\}$ *là một hệ m vectơ độc lập tuyến tính trong* R^m *và nếu* $A^k = \sum_{i \in J_0} x_{ik} A^i$ *, trong đó* $x_{sk} \neq 0$ *m với* $s \in J_0$ *thì hệ m vectơgồm* A^i $(i \in J_0, i \neq s)$ *và* A^k *cũng độc lập tuyến tính.*

Chứng minh. Nếu có các số β, γ_i thoả mãn

$$\beta A^k + \sum_{\substack{i \in J_0 \\ i \neq s}} \gamma_i A^i = 0 \qquad (12)$$

thì thay A^k bởi biểu thức của nó ta được.

$$\beta \sum_{i \in J_0} x_{ik} A^i + \sum_{\substack{i \in J_0 \\ i \neq s}} \gamma_i A^i = \sum_{\substack{i \in J_0 \\ i \neq s}} (bx_{ik} + \gamma_i) A^i + \beta x_{sk} A^s = 0. \qquad (13)$$

vì hệ $\{A^i: i \in J_0\}$ độc lập tuyến tính nên từ (13) suy ra $\beta x_{sk} : \beta x_{ik} + \gamma_i = 0$.

Nhưng do $x_{sk} \neq 0$ nên $\beta = 0$, khi đó (13) trở thành

$$\sum_{\substack{i \in J_0 \\ i \neq s}} \gamma_i A^i = 0 \quad . \tag{14}$$

Hệ $\{A^i: i \in J_0, i \neq s\}$ độc lập tuyến tính (vì nó là hệ con của hệ độc lập tuyến tính đã cho) và do đó từ (14) ta có $\gamma_i = 0$ ($i \in J_0, i \neq s$). Vậy $\beta = \gamma_i = 0$ ($i \in J_0, i \neq s$). sự kiện này được suy ra từ (12), và từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Định lí 3. *Nếu ứng với phương án các biên* $\overline{\mathbf{x}}$ *tồn tại một chỉ số j sao cho* $\Delta_j > 0$, *và với mọi* j *mà* $\Delta_j > 0$ *vectơ* x^j *có ít nhất một thành phần dương thì với mỗi j đó, theo hướng* s^j *có thể xây dựng được một phương án cực biên mới tốt hơn* $\overline{\mathbf{x}}$ *(trong trường hợp* $\overline{\mathbf{x}}$ *không suy biến).*

Chứng minh. Giả sử k là một chỉ số mà $\Delta_k > 0$ và vectơ $x^k = (x_{ik})$, $i \in J_0$ có ít nhất một thành phần dương. Theo bổ đề (2), vectơ xiết $x(\theta) + \theta s^k$ là phương án khi và chỉ khi $x^0 - \theta x^k \geq 0$ hay

$$x_{i0} - \theta x_{ik} \geq 0 \quad \text{với mọi } \ i \in J_0 \tag{15}$$

Coi (15) là hệ bất phương trình bậc nhất với ẩn θ. Nếu với i nào đó mà $x_{ik} \leq 0$ thì do $\theta \geq 0$ nên bất phương trình tương ứng là hằng đúng. Do đó hệ (15) tương đương với hệ

$$x_{i0} - \theta x_{ik} \geq 0 \qquad (i \in J_0, x_{ik} > 0) \tag{16}$$

Bằng cách giải hệ (16) ta thấy rằng xát) là phương án khi và chỉ khi

$$0 \leq \theta \leq \min \left\{ \frac{x_{i0}}{x_{ik}} : i \in J_0, x_{ik} > 0 \right\}.$$

Giả sử giá trị nhỏ nhất trên đây dạt dược tại chỉ số $i = s \in J_0$ khi đó ta hãy chọn:

$$\theta = \theta_k = \min \left\{ \frac{x_{i0}}{x_{ik}} : i \in J_0, x_{ik} > 0 \right\} = \frac{x_{s0}}{x_{sk}}$$

Rõ ràng $\theta_k > 0$, $x_{s0} - \theta_k x_{sk} = 0$ và $x_{sk} > 0$.

Như vậy với cách chọn đó thì phương án mới $\mathbf{x}' = \mathbf{x}(\theta_k) = (\mathbf{x}'_{ik})$,

$i = 1, 2, \ldots, n$ được xác định (theo (10)) như sau :

$$x'_{ik} = \begin{cases} x_{i0} - \theta_k x_{ik} & \text{nếu } i = J_0 \setminus \{s\} \\ \theta_k & \text{nếu } i = k \\ 0 & \text{nếu } \notin (J_0 \setminus \{s\}) \cup \{k\} \end{cases} \tag{17}$$

Ngoài ra, theo (11) ta có $f(x') = f(\overline{\mathbf{x}}) - \theta_k\Delta_k$, và điều đó chứng tỏ $f(x') < f(\overline{\mathbf{x}})$, tức là x', tốt hơn $\overline{\mathbf{x}}$.

Xét hệ m vectơ gồm A^i ($i \in J_0 \setminus\{s\}$ và A^k, nó được thiết lập từ cơ sở $\{A^i : i \in J_0\}$ của $\overline{\mathbf{x}}$ bằng cách thay A^s bởi A^k và giữ nguyên các vectơ còn lại. Trên đây đã chỉ rõ thành phần $x_{sk} > 0$; theo bổ đề 3, rõ ràng hệ đang xét là độc lập tuyến tính. Do đó phương án x' được xác định bởi (17) là phương án cực biên. Định lí đã được chứng minh.

2) Về trường hợp bài toán suy biến.

Sau đây ta xét trường hợp bài toán (1), (2), (3) suy biến, nghĩa là tồn tại phương án cực biên có ít hơn m thành phần dương. Chú ý rằng, ngay cả khi $\overline{\mathbf{x}}$ là phương án cực biên không suy biến thì phương án cực biên x' vẫn có thể suy biến nếu tập

$$K = \{t \mid \theta_k = \min\{\frac{x_{i0}}{x_{ik}} : i \in J_0, x_{ik} > 0\} = \frac{x_{t0}}{x_{tk}}\}$$

Có quá một phần tử.

Thật vậy, giả sử $s, r \in K$ ($r \neq s$). Khi đó $x_{s0} - \theta_k x_{sk} = 0$ và $x_{r0} - \theta_k x_{rk} = 0$, nghĩa là x' có nhiều nhất là m - 1 thành phần dương, tức là x' là phương án cực biên suy biến.

Bây giờ ta giả sử rằng $\overline{\mathbf{x}}$ là phương án cực biên suy biến, tức là tồn tại $i \in J_0$ sao cho $x_{i0} = 0$. Khi đó theo (16), vectơ $x' = x(\theta) = \overline{\mathbf{x}} + \theta s^k$ là phương án khi và chỉ khi $\theta = 0$, nghĩa là $x' = x(0) = \overline{\mathbf{x}}$ và ta thấy $\overline{\mathbf{x}}$ ứng với hai cơ sở khác nhau. Nếu tình trạng trên xảy ra liên tiếp một số lần thì có nguy cơ là gặp lại một cơ sở đã dùng trước đó. Nếu không có biện pháp gì ngăn chặn thì từ đó cứ xoay vòng mãi theo một dãy hữu hạn các cơ sở của x mà vẫn cứ không rời khỏi được $\overline{\mathbf{x}}$, không cải thiện được gì về giá trị của hàm mục tiêu. Ta gọi đó là *hiện tượng xoay vòng*. R.G Bland đã chứng minh quy tắc tránh xoay vòng do mình đề xuất vào năm 1977, được gọi là *quy tắc Bland* có nội dung như sau:

Tiêu chuẩn để đưa A^k vào cơ sở: k là chỉ số nhỏ nhất trong các ước lượng dương, tức là $k = \min \{j : \Delta_j > 0\}$.

Tiêu chuẩn để loại A^s ra khỏi cơ sở : s là chỉ số nhỏ nhất trong K.

Từ đó suy ra rằng, nếu đưa A^k vào cơ sở theo quy tắc Bland và số phần tử của K là $|K| = 1$ thì không xảy ra hiện tượng xoay vòng.

Các biện pháp tránh xoay vòng như phương pháp nhiễu loạn, phương pháp từ vựng, kể cả quy tắc Bland, chỉ là sự đảm bảo về mặt toán học mà thôi, bởi vì trong thực tế hiện tượng xoay vòng là rất hiếm, dù rằng có không ít các bài toán suy biến. Bởi vậy, hầu như các chương trình tính toán trên máy tính điện tử, người ta không cài đặt các biện pháp tránh xoay vòng. Vì những lẽ trên người ta thường dùng phương pháp ngẫu nhiên để chọn các vectơ đưa ra và đưa vào cơ sở, kết hợp với sự cân nhắc kĩ càng trong từng trường hợp cụ thể.

3) Công thức đổi cơ sở.

Từ cơ sở lí luận của phương pháp đơn hình ta thấy rằng, xuất phát từ phương án cực biên $\overline{\mathbf{x}}$ đã biết, sau khi kiểm tra thấy chưa thể kết thúc việc tính toán được (chưa xuất hiện dấu hiệu tối ưu hay dấu hiệu hàm mục tiêu không bị chặn) thì ta phải tiến hành xây dựng phương án cực biên mới x' (có thể trùng với $\overline{\mathbf{x}}$ nhưng cơ sở thì khác nhau). Quá trình đó sẽ kết thúc sau một số hữu hạn bước, khi đã tìm được phương án tối ưu hoặc kết luận được rằng hàm mục tiêu không bị chặn.

Ta nói rằng đã thực hiện một *bước lặp* nếu như đối với mỗi phương án cực biên xuất hiện trong quá trình nói trên, sau khi kiểm tra xong ta có được một quyết định tiếp theo.

Trong mỗi bước lặp ta cần phải xác định giá trị của các tham số x_{ij}, Δ_j ; f (f là giá trị hàm mục tiêu), trong đó việc xác định x_{ij} là khó khăn nhất vì với mỗi i ta phải giải một hệ Cramer để tìm chúng. Do cơ sở của phương án cực biên ở mỗi bước lặp chỉ khác cơ sở ở bước lặp trước có một vectơ nên ta có thể tìm được các công thức truy toán cho phép tìm được giá trị của các tham số ở mỗi bước, kể từ bước thứ hai, từ giá trị của các tham số tương ứng ở bước trước.

Gọi giá trị của các tham số ở bước trước là x_{ij}, Δ_j, f và giá trị tương ứng ở bước tiếp theo là x'_{ij}, Δ'_j, f.

Giả sử cơ sở của phương án cực biên ở bước trước là $\{ A^i : i \in J_0\}$, ở bước tiếp theo là $\{ A^i : i \in J_0 \setminus \{s\}) \cup \{k\}\}$, dĩ nhiên là $k \neq 0$ và $k \notin J_0$.

Vectơ A^k đưa vào cơ sở (thay thế A^s, $s \in J_0$) có dạng

$$A^k = \sum_{i \in J_0} x_{ik} A^i, \quad \text{với} \quad x_{sk} > 0 \tag{18}$$

với mỗi j = 0, 1, 2 , ..., n vectơ A_j biểu thị tuyến tính qua cơ sở ở bước trước và bước tiếp theo như sau:

$$A^k = \sum_{i \in J_0} x_{ik} A^i \tag{19}$$

$$A^j = \sum_{i \in J_0 \setminus \{s\}} x'_{ij} A^i + x'_{kj} A^k \tag{20}$$

Từ (18) suy ra vectơ A^s có dạng:

$$A^s = \frac{1}{x_{sk}} (A^k - \sum_{i \in J_0 |\{s\}|} x_{ik} A^i) \tag{21}$$

Thay A^s vào (19) ta được

$$A^j = \sum_{i \in J_0 \setminus \{s\}} x_{ij} A^i + \frac{x_{sj}}{x_{sk}} (A^k - \sum_{i \in J_0 \setminus \{s\}} A^i) =$$

$$= \sum_{i \in J_0 \setminus \{s\}} (x_{ij} - \frac{x_{sj}}{x_{sk}} . x_{ik}) A^i + \frac{x_{sj}}{x_{sk}} A_k \tag{22}$$

Do A^j biểu thị tuyến tính một cách duy nhất qua cơ sở ở bước tiếp theo nên, so sánh (20) và (22), với j = 0, 1, 2..., n và $i \in J_0 \setminus \{s\}$ ta có:

$$x'_{ij} = x_{ij} . \frac{x_{sj}}{x_{sk}} = x_{ik} \tag{23}$$

Mặt khác, như ta đã biết (xem chứng minh định lý 3)

$$f' = f - \frac{x_{jo}}{x_{sk}} \Delta_k \tag{24}$$

và theo định nghĩa ta có:

$$\Delta_j' = \sum_{i \in J_o \setminus \{s\}} c_{ik} x_{ij}' + c_k x_{kj}' - c_k = \Delta_j - \frac{x_{sj}}{x_{sk}} \Delta_k . \qquad (26)$$

Tuy nhiên, nếu ký hiệu $f = x_{m+1,0}$ và $\Delta_j = x_{m+1,j}$ với j = 1, 2,..., n thì có thể thấy rằng cả bốn công thức (23), (24), (25), (26) đều có thể thống nhất lại thành hai công thức (23), (24).

4) Thuật toán đơn hình gốc.

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$\begin{aligned} & f(x) = {}^t cx \to \min \\ & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned} \qquad (27)$$

trong đó $b \geq 0$, và A là ma trận kiểu (m, n) với m < n đồng thời trong A có một cơ sở đơn vị.

Ta gọi bài toán có tính chất như vậy là *bài toán chuẩn.* Chẳng hạn hệ Ax = b có dạng

$$\begin{aligned} & x_1 + a_{1,m+1} x_{m+1} + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\ & x_2 + a_{2,m+1} x_{m+1} + \ldots + a_{2n} x_n = b_2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & x_m + a_{m,m+1} x_{m+1} + \ldots + a_{mn} x_n = b_m \end{aligned}$$

Vì $b \geq 0$ nên không cần tính toán gì cả ta thấy ngay một phương án cực biên ứng với cơ sở đơn vị, đó là $\overline{x} = (b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, 0, \ldots, 0)$.

Theo công thức $x^j = B^{-1}A^j$, với B = I là ma trận đơn vị cấp m ta có $x^j = A^j$, j = 0, 1, 2,..., n.

Để thuận tiện cho việc tính toán ta sắp xếp các số liệu vào một bảng sau đây mà ta sẽ gọi là *dáng đơn hình* ứng với $\overline{x}$:

c^0	Cơ sở	x^0	c_1 / x^1	$c_2 \ldots$ / $x^2 \ldots$	$c_s \ldots$ / $x^s \ldots$	c_m / x^m	$c_{m+1} \ldots$ / $x^{m+1} \ldots$	$c_j \ldots$ / $x^j \ldots$	$c_k \ldots$ / $x^k \ldots$	c_n / x^n
c_1	A^1	x_{10}	1	0 ...	0 ...	0	$x_{1,m+1} \ldots$	$x_{1j} \ldots$	$x_{1k} \ldots$	x_{1n}
c_2	A^2	x_{20}	0	1 ...	0 ...	0	$x_{2,m+1} \ldots$	$x_{2j} \ldots$	$x_{2k} \ldots$	x_{2n}
c_s	A^s	x_{s0}	0	0 ...	1 ...	0	$x_{s,m+1} \ldots$	$x_{sj} \ldots$	$x_{sk} \ldots$	x_{sn}
c_m	A^m	x_{m0}	0	0 ...	0 ...	1	$x_{m,m+1} \ldots$	$x_{mj} \ldots$	$x_{mk} \ldots$	x_{mn}
		f	0	0 ...	0 ...	0	$\Delta_{m+1} \ldots$	$\Delta_j \ldots$	$\Delta_k \ldots$	Δ_n

Trong bảng đơn hình đầu tiên này, cột đầu tiên ghi các thành phần của c^0, ứng với các vectơ trong cơ sở được ghi ở cột thứ hai; cột thứ ba ghi các thành phần tương ứng của x^0. Dòng trên cùng ghi các thành phần của vectơ c, dòng thứ hai ghi các vectơ x^j mà các thành phần của nó được ghi vào cột tương ứng.

Vì $x^j = A^j$, (j = 0, 1, ... , n) nên các số liệu ở bảng đầu tiên, kể từ cột x^0, chính là các thành phần của ma trận [b| A], tức là $x_{i0} = b_i$, $x_{ij} = a_{ij}$ (i = 1, 2 , ... , m ; j = 0, 1, ... , n) . Dòng cuối cùng ghi $f = f(\overline{\mathbf{x}})$ và các Δ_j (j = 1, 2 , ... , n) mà giá trị của chúng được tính toán ngay trên bảng đơn hình, cụ thể là:

* $f = c^0 x^0$: Tính tích vô hướng giữa các vectơ cột c^0 và x^0.

* $\Delta_j = {}^tc^0x^j - c_j$: Lấy tích vô hướng của cột c^0 và x^j rồi trừ đi c_j (c_j được ghi ở phía trên cùng của cột x^j).

Sau khi đã tính được các ước lượng Δ_j ta tiến hành kiểm tra tính tối ưu của phương án cực biên đang xét:

- Nếu xuất hiện dấu hiệu tối ưu ($\Delta_j \le 0$) với mọi j = 1, 2,..., n) thì phương án cực biên đang xét là phương án tối ưu với các thành phần cơ sở được ghi trên cột xo, các thành phần phi cơ sở bằng 0, và kết thúc việc tính toán.

- Nếu xuất hiện dấu hiệu hàm mục tiêu không bị chặn (tồn tại chỉ số j sao cho $\Delta_j > 0$ và $x^j \le 0$) thì dừng lại và cho kết luận.

- Nếu không xảy ra hai trường hợp trên thì ta tiến hành xây dựng phương án cực biên với cơ sở mới (nếu phương án cực biên đang xét là không suy biến), qua các bước sau:

* Xác định vectơ A^k đưa vào cơ sở mới theo tiêu chuẩn $\Delta_k > 0$, thường dùng tiêu chuẩn $\Delta_k = \max \{\Delta_j : \Delta_j > 0\}$.

* Xác định vectơ A^s bị loại khỏi cơ sở cũ (nếu đã quyết định đưa A vào cơ sở) : Lập tỉ số giữa các phần tử ở cột xo và các phần tử dương tương ứng (cùng một dòng) ở cột xu để xác định tỉ số nhỏ nhất, và từ đó xác định chỉ số s:

$$\frac{x_{so}}{x_{sk}} = \min\left\{\frac{x_{io}}{x_{ik}} : i \in J_o,\ x_{ik} > 0\right\}.$$

Phần tử x_{sk} được gọi là *phần tử trục,* dòng ứng với chỉ số s (ta cũng gọi là dòng s) được gọi là *dòng xoay,* cột x^k (ta cũng gọi là cột k) được gọi là *cột xoay.*

Tiếp theo ta lập bảng đơn hình ứng với phương án cực biên theo cơ sở mới mà các số liệu của bảng được xác định theo các công thức (23) và (24). Toàn bộ các phép biến đổi như vậy được gọi là *phép xoay* xung quanh phần tử trục x_{sk}. Như vậy, bảng đơn hình mới được suy ra từ bảng đơn hình trước bằng cách, trên dòng xoay, thay cs bởi chi thay AB bởi A^k, sau đó thực hiện các phép biến đổi kể từ cột x^0, theo (23) và (24), cụ thể là:

* Chia mỗi phần tử của dòng xoay cho phần tử trục x_{sk}, như vậy là số 1 xuất hiện tại vị trí trục.

* Để tính dòng i mới ($i \in J_0 \setminus \{s\}$), ta lấy dòng i cũ trừ đi tích của dòng xoay đã biến đổi với phần tử nằm ở giao giữa dòng đang tính và cột xoay. Làm như vậy ta được số 0 ở mọi vị trí của cột xoay, trừ vị trí trục; nghĩa là cột k bây giờ là vectơ đơn vị. Việc xác định f và Δ_j ở bảng đơn hình mới được thực hiện như ở bảng đơn hình trước.

Quá trình tính toán cứ tiếp tục như vậy, sau một số hữu hạn bước sẽ kết thúc khi xuất hiện dấu hiệu tối ưu hoặc dấu hiệu hàm mục tiêu không bị chặn.

Ví dụ 1. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$f(x) = x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_6 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 - x_6 = 2 \\ x_2 + x_4 + x_6 = 12 \\ 4x_3 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 = 9 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \end{cases}$$

Giải

Bài toán cần giải là bài toán chuẩn. Ta thấy ngay $\overline{\mathbf{x}} = (2, 12, 0, 0, 9, 0)$ là phương án cực biên ứng với cơ sở đơn vị gồm các vectơ A^1, A^2, A^5. Kết quả tính toán được thể hiện ở bảng dưới đây; trong đó ở bảng đơn hình thứ 3 (bước thứ 3) ta có $\Delta_j \leq 0$ với mọi j , đó là dấu hiệu tối ưu.

Vậy phương án tối ưu là $x^* = (0, 8, 0, 3, 0, 1)$ với $f(x^*) = -17$

c^0	Cơ sở	x^0	1	–1	2	–2	0	–3
			x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
1	A^1	2	1	0	1	(1)	0	–1
–1	A^2	12	0	1	0	1	0	1
0	A^5	9	0	0	4	2	1	3
		–10	0	0	–1	(2)	0	1
–2	A^4	2	1	0	1	1	0	–1
–1	A^2	10	–1	1	–1	0	0	2
0	A^5	5	–2	0	2	0	1	(5)
		–14	–2	0	– 3	0	0	(3)
– 2	A^4	3	3/5	0	7/5	1	1/5	0
– 1	A^2	8	– 1/5	1	– 9/5	0	– 2/5	0
– 3	A^6	1	– 2/5	0	2/5	0	1/5	1
		–17	– 4/5	0	– 21/5	0	– 3/5	0

Giải thích. Ở bảng đơn hình thứ nhất ta có:

$\max\{\Delta_j : \Delta_j > 0\} = \max\{\Delta_4 = 2,\ \Delta_6 = 1\} = \Delta_4 = 2$. Do đó A^4 được đưa vào cơ sở, cột x^4 là cột xoay (trên bảng $\Delta_4 = 2$ được đặt trong ngoặc);

$$\min\left\{\frac{x_{io}}{x_{i4}} : x_{i4} > 0, i = 1,2,5\right\} = \min\left\{\frac{x_{10}}{x_{14}} = \frac{2}{1}, \frac{x_{20}}{x_{24}} = \frac{12}{1}, \frac{x_{50}}{x_{54}} = \frac{9}{2}\right\} = \frac{x_{10}}{x_{14}}$$

tức là min đạt được ở chỉ số s = 1, do đó A^1 bị loại khỏi cơ sở, dòng ứng với nó là dòng xoay và phần tử trục là $x_{14} = 1$ (nó được đặt trong ngoặc).

* Ở bảng đơn hình thứ hai, trong cột c^0 số $c_4 = -2$ thay cho $c_1 = 1$, trong cột ghi cơ sở A^4 thay cho A^1, các số liệu được suy ra từ bảng đơn hình thứ nhất bằng cách áp dụng các công thức (23), (24). Ta có $\Delta_6 = 3$ là ước lượng dương duy nhất nên cột x^6 là cột xoay;

$$\min\left\{\frac{x_{i0}}{x_{i6}} : \Delta_{i6} > 0\right\} = \min\left\{\frac{x_{20}}{x_{26}} = \frac{10}{2}, \frac{x_{50}}{x_{56}} = \frac{5}{5}\right\} = \frac{x_{50}}{x_{56}},\ \text{tức là min}$$

đạt được ở chỉ số s = 5, do đó A^5 bị loại và dòng ứng với A^5 là dòng xoay, phần tử trục là $x_{56} = 5$ (trên bảng nó được đặt trong ngoặc).

Tương tự ta có bảng đơn hình thứ 3, tại đó xuất hiện dấu hiệu tôi ưu.

Ví dụ 2. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$f(x) = -x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 12 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \leq 5 \\ x_1 + 5x_2 - 5x_3 \leq 6 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Giải

Đưa bài toán về dạng chính tắc với các ẩn bù x_5 , x_6 , x_7 ta được

$$f(x) = -x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 12 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 5 \\ x_1 + 5x_2 - 5x_3 + x_7 = 6 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. \end{cases}$$

Đó là bài toán chuẩn. Ta có bảng sau:

c^0	Cơ sở	x^0	−1	3	− 3	1	0	0	0
			x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
1	A^4	12	(4)	3	− 3	1	−1	0	0
0	A^6	5	−1	1	−1	0	0	1	0
0	A^7	6	1	5	− 5	0	0	0	1
		12	(6)	0	0	0	−1	0	0
−1	A^1	3	1	3/4	− 3/4	1/4	−1/4	0	0
0	A^6	8	0	7/4	−7/4	1/4	−1/4	1	0
0	A^7	3	0	17/4	−7/4	−1/4	1/4	0	1
		−3	0	−15/4	15/4	−5/4	1/4	0	0

Ở bước 2, do $\Delta_3 = \frac{15}{4} > 0$ Và $x^3 = (-\frac{3}{4}, -\frac{7}{4}, -\frac{17}{4}) < 0$ nên ta có kết luận bài toán có hàm mục tiêu không bị chặn.

5) Thuật toán đơn hình hai pha.

Thuật toán đơn hình gốc (hay chỉ cần gọi là thuật toán đơn hình) dùng để giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc ở dạng bài toán chuẩn, tức là có giả thiết $b \geq 0$ và ma trận ràng buộc A có một cơ sở đơn vị. Tuy nhiên, trong thực tế hầu như không gặp bài toán chuẩn như vậy Sau đây ta sẽ trình bày một thuật toán khác, được gọi là *thuật toán đơn hình hai pha* hay *thuật toán hai pha* để giải quyết bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc tổng quát.

Giả sử cần giải bài toán (mà ta sẽ gọi nó là *bài toán chính)*

$$f(x) = {}^t cx \quad \min$$

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

trong đó A là ma trận kiểu (m, n) bất kì và $b \geq 0$.

Điều kiện $b \geq 0$ luôn có thể thực hiện được vì nếu $b_i < 0$ thì chỉ cần nhân hai vế của phương trình tương ứng với -1 .

Tương ứng với bài toán chính ta xét *bài toán phụ* sau đây:

$$F(x,w) = x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+m} \to \min$$

$$\begin{cases} Ax + w = b \\ x \geq 0 \, , \, w \geq 0 \end{cases}$$

trong đó $w = (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m})$; và x_{n+i} vơi $i = 1, 2, \ldots, m$ là các ẩn mới được đưa vào, ta sẽ gọi chúng là các *ẩn giả.*

Bài toán phụ còn có thể viết dưới dạng:

$$F(x,w) = x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+m} \to \min$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_j \geq 0, \, j = 1, 2, \ldots, m + n. \end{cases}$$

Để cho tiện, ta kí hiệu $A^{n+i} = I^i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ là các vectơ đơn vị và gọi chúng là các *vectơ giả.*

Gọi tập phương án của bài toán chính và bài toán phụ theo thứ tự là X và X’

Trước hết ta thấy rằng, $x \in X$ khi và chỉ khi $(x, 0) \in X'$ (ta hiểu (x, 0) là vectơ $(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) \in R^{n+m}$).

Ngoài ra ta có nhận xét: $(x, 0) \in X'$ là phương án cực biên của bài toán phụ khi và chỉ khi $x \in X$ là phương án cực biên của bài toán chính (chúng có cùng một hệ vectơ liên kết, hoặc đều là vectơ 0).

Bài toán phụ có tập phương án $X' \neq \varnothing$ vì $(0, b) \in X'$, và $F(x, w) \geq 0$ với mọi $(x, w) \in X'$, nghĩa là $F(x, w)$ không thể nhận giá trị nhỏ tuỳ ý trên X'. Do đó bài toán phụ có phương án tối ưu.

Vì bài toán phụ là bài toán chuẩn nên có thể tiến hành giải nó bằng thuật toán đơn hình (gốc), sau một số hữu hạn bước dấu hiêu tối ưu xuất hiện và ta thu được phương án cực biên tối ưu $(\bar{x}, \bar{w}) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2,..., \bar{x}_{n+m})$.

Có hai trường hợp xảy ra:

a) $\bar{w} \neq 0$, tức là tồn tại $i \in \{1, 2,..., m\}$ sao cho $\bar{x}_{n+i} > 0$ (có ít nhất một ẩn giả nhận giá trị dương):

Khi đó ta kết luận bài toán chính có tập phương án là rỗng. Thật vậy, nếu tồn tại $x \in X$ thì $(x, 0) \in X'$ và $F(x, 0) = 0$. Mặt khác, do $\bar{w} \neq 0$ nên $F(\bar{x}, \bar{w}) > 0$. Suy ra $(x, 0)$ là phương án tốt hơn $(\bar{x}, \bar{w})$, điều này trái với tính tối ưu của $(\bar{x}, \bar{w})$. Vậy $X = \varnothing$

b) $\bar{w} = 0$, tức là mọi ẩn giả đều nhận giá trị bằng 0:

Khi đó $F(\bar{x}, \bar{w}) = F(\bar{x}, 0) = 0$. Vì $(\bar{x}, 0)$ là phương án cực biên của bài toán phụ nên x *là phương án cực biên của bài toán chính.*

Ta xét hai tình huống sau:

Tình huống 1. Nếu mọi vectơ trong cơ sở của $(\bar{x}, 0)$ gồm toàn các vectơ cột của ma trận A thì ta xoá bỏ các cột trong bảng đơn hình cuối cùng kể từ cột x^{n+1} đến cột x^{n+m} (nghĩa là xoá bỏ các cột ứng với ẩn giả). Sau đó ta giải bài toán chính xuất phát từ phương án cực biên $\bar{x}$ bằng thuật toán đơn hình gốc; dĩ nhiên là phải thay đổi dòng trên cùng, trước là hệ số của hàm mục tiêu trong bài toán phụ, bây giờ là hệ số của hàm mục tiêu trong bài toán chính, đồng thời cột co cũng phải thay đổi theo cho phù hợp; tính lại dòng ghi các ước lượng (cho bài toán chính) để kiểm tra $\bar{x}$.

Tình huống 2. nếu trong cơ sở của $(\bar{x}, 0)$ vẫn còn p vectơ giả $(p \geq 1)$ thì ta xoá bỏ ngay các cột ứng với các ẩn giả còn lại; điều chỉnh các hệ số của hàm mục tiêu ghi ở dòng trên cùng và ở cột co cho phù hợp, với lưu ý rằng hệ số của các ẩn giả trong hàm mục tiêu ứng với p vectơ giả nói trên ta cho bằng 0; tính lại các ước lượng để kiểm tra $\bar{x}$. Sau đó ta tiếp tục dùng thuật toán đơn hình gốc để giải bài toán chính xuất phát từ phương án cực biên $\overline{\mathbf{x}}$, ngay từ bảng đơn hình cuối cùng, dẫu rằng trong đó có mặt p vectơ giả nói trên.

Như vậy, để giải bài toán chính ta phân ra hai giai đoạn (hay *hai pha).* Pha thứ nhất nhằm mục đích tìm được phương án cực biên (nếu có) của bài toán chính. Pha thứ hai nhằm giải bài toán chính xuất phát từ phương án cực biên (nếu có) đã tìm được ở pha thứ nhất. Chính vì vậy ta gọi cách giải đó là thuật toán hai pha.

***Chú ý* :**

* Nếu trong ma trận A ở bài toán chính đã có sẵn một vài vectơ cột là các vectơ đơn vị khác nhau thì ta chỉ cần đưa vào bài toán phụ một số ẩn giả vừa đủ để có đúng m vectơ đơn vị.

* Nếu ở một bước nào đó một vectơ giả bị loại khỏi cơ sở thì từ các bước sau ta xoá bỏ cột tương ứng.

Ví dụ 1. Bằng thuật toán hai pha giải bài toán sau:

$$f(x) = 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 + x_4 + 4x_5 \to \min.$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 9x_5 = 3. \\ \quad x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 6 \\ \quad x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5. \end{cases}$$

Giải

Trong ma trận ràng buộc A đã có Ai là vectơ đơn vị nên chỉ cần đưa vào hai ẩn giả x_6, x_7 ứng với hai phương trình cuối, ta có bài toán phụ

$$F(x,w) = x_6 + x_7 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 9x_5 = 3 \\ \quad x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 + x_6 = 6 \\ \quad x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_7 = 1 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. \end{cases}$$

trong đó w = (x_6, x^7).

Việc tính toán được thể hiện trong bảng dưới đây (xem phần giải thích)

c^o		Cơ sở	x^o	2	6	–5	1	4	1	1
f	F			x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
	0	A^1	3	1	–4	2	– 5	9	0	0
	1	A^6	6	0	1	–3	4	–5	1	0
	1	A^7	1	0	1	–1	(1)	–1	0	1
				0	2	– 4	(5)	–6	0	0
	0	A^1	8	1	1	–3	0	4	0	
	1	A^6	2	0	– 3	(1)	0	–1	1	
	0	A^4	1	0	1	–1	1	–1	0	
				0	– 3	(1)	0	– 1	0	
2	0	A^1	14	1	– 8	0	0	(1)		
– 5	0	A^3	2	0	– 3	1	0	–1		
1	0	A^4	3	0	– 2	0	1	–2		
		F		0	0	0	0	0		
		f			– 9	0	0	(1)		
4		A^5	14	1	– 8	0	0	1		
– 5		A^3	16	1	–11	1	0	0		
1		A^4	31	2	–18	0	1	0		
			7	–1	–1	0	0	0		

Giải thích.

- Lúc đầu, chỉ ghi vào dòng trên cùng các hệ số 1 của các ẩn giả trong hàm mục tiêu F(x, w); các hệ số còn lại bằng 0 ta không cần ghi, cũng là chủ định dành chỗ để ghi các hệ số của f(x) trong pha 2.

- Ở bước 3, dấu hiệu tối ưu đối với bài toán phụ đã xuất hiện, trong cơ sở không có vectơ giả. Lúc này, cùng với việc ghi các hệ số của hàm f(x) vào dòng trên cùng và các hệ số phù hợp vào cột co (ở nhánh bên trái) ta tính các ước lượng $\Delta_j(f)$ ứng với hàm f(x) rồi ghi vào dòng tiếp theo được kí hiệu là f (để phân biệt với $\Delta_j(F)$ là các ước lượng ứng với hàm F và ghi vào dòng có kí hiệu là F).

- Chú ý rằng, trong bước hai ta đã xác định A^3 vào cơ sở thay cho A^6, nghĩa là từ bước ba trở đi mọi ẩn cơ sở đều không phải là ẩn giả nữa. Như vậy, bắt đầu từ bước ba ta chỉ làm việc với bài toán chính, do đó không cần tính các $\Delta_j(F)$ nữa mà tính luôn $\Delta_j(f)$.

Cuối cùng ta thu được phương án tối ưu cần tìm là:

$x^* = (0, 0, 16, 31, 14)$ với $f(x^*) = 7$.

Ví dụ 2. Giải bài toán sau đây bằng thuật toán hai pha:

$$f(x) = 7x_1 + x_1 - 4x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} -6x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq -20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 \leq -8 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2,3. \end{cases}$$

Giải

Sau khi đưa vào các ẩn bù x_4, $x_5 \geq 0$ ứng với các ràng buộc cưỡng bức bất phương trình, đồng thời chú ý biến đổi sao cho vế phải $b \geq 0$, hệ ràng buộc cưỡng bức trở thành:

$$\begin{cases} 6x_1 - 4x_2 - 5x_3 + x_4 = 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 = 8. \end{cases}$$

Đưa vào 2 ẩn giả x_5, x_7 ta có bài toán phụ sau:

$$F(x,w) = x_6 + x_7 \to \min$$

$$\begin{cases} 6x_1 - 4x_2 - 5x_3 + x_4 & = 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + \qquad\qquad x_6 & = 8 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 - \quad x_5 + \quad x_7 & = 8 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. \end{cases}$$

việc tính toán được thể hiện trong bảng dưới đây:

c^0		Cơ sở	x^0	7	1	–4	0	0	1	1
				x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
	0	A^4	20	6	–4	– 5	1	0	0	0
	1	A^6	8	1	(2)	1	0	0	1	0
	1	A^7	8	–3	2	1	0	–1	0	1
				–2	(4)	2	0	–1	0	0
0	0	A^4	36	8	0	–3	1	0		0
1	1	A^2	4	1/2	1	(1/2)	0	0		0
0	0	A^7	0	–4	0	0	0	–1		1
		F		–4	0	0	0	–1		0
		f		–13/2	0	(9/2)	0	0		0
0		A^4	60	11	6	0	1	0		0
–4		A^3	8	1	2	1	0	0		0
0		A^7	0	– 4	0	0	0	–1		1
			–32	–11	–9	0	0	0		0

Giải thích: Ở bước ba, dấu hiệu tối ưu xuất hiện và phương án tối ưu của bài toán là $x^* = (0, 0, 8)$ với $f(x^*) = - 32$.

Chú ý rằng, ở bước 2 đã xuất hiện dấu hiệu tối ưu đối với bài toán phụ, nhưng trong cơ sở của phương án tối ưu ấy có một vectơ giả là A^7. Khi đó ta xoá ngay các cột ứng các vectơ giả còn lại, đó là cột x^6, nhưng cột này đã bị xoá ngay từ bước hai bởi vì A^6 bị loại khỏi cơ sở đầu tiên.

Ví dụ 3. Giải bài toán sau bằng thuật toán hai pha:

$f(x) = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 1 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 \geq 1 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Giải

Đưa vào hai ẩn bù x_4, x_5 và ẩn giả x_6 ta có bài toán phụ

Ta có bảng sau:

$$F(x,w) = x_6 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - x_5 + x_6 = 1 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \end{cases}$$

c^0	Cơ sở	x^0	1					
			x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
0	A^4	1	(2)	2	–1	1	0	0
1	A^6	1	1	–1	–3	0	–1	1
			(1)	–1	–3	0	–1	0
0	A^1	1/2	1	1	–1/2	1/2	0	0
1	A^6	1/2	0	–2	–5/2	–1/2	–1	1
			0	–2	–5/2	–1/2	–1	0

Ở bước hai, dấu hiệu tối ưu đã xuất hiện nhưng trong cơ sở tương ứng có vectơ giả A^6 với giá trị của ẩn giả là $x_6 = \frac{1}{2} > 0$ nên ta kết luận bài toán có tập phương án là rỗng.

2.3. Giải các bài toán quy hoạch tuyến tính bằng máy tính điện tử (Theo lập trình tính toán với Mathematica 4.0)

1) Giải bài toán quy hoạch tuyến tính có dạng

$$z(x) = {}^t cx \to \min$$

$$\begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 . \end{cases}$$

Ví dụ: Giải bài toán

$$z(x) = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \quad + x_4 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \qquad\quad \le 3 \\ \quad x_2 + 4x_3 + x_4 \le 3 \\ x_j \ge 0 \ \ , j = 1,2,3,4. \end{cases}$$

Trước hết ta đưa bài toán về dạng mặt bằng cách đổi dấu hàm mục tiêu để được

$$- z(x) = - 2x - 4x_2 - x_2 - x_4 \to \min.$$

Ta dùng các lệnh sau:

```
Clear [x1, x2, x3, x4, z, ineqs, vars]
 vars ={x1, x2, x3, x4} ;
z [x1_, x2_, x3_, x4_ ] = – 2x1 –  4x2 – x3 –x4  ;
ineqs =  {2x1+3x2 +x4 <= 4, 2x1 +x2 <= 3 , x2+ 4x3 + x4 <= 3};
ConstrainedMin[z[x1,x2,x3,x4],ineqs,vars]
```

Kết quả: $\{-\frac{23}{4}, \{x1 \to 0, x2 \to \frac{4}{3}, x3 \to \frac{5}{12}, x4 \to 0\}\}$

Vậy đáp số của bài toán là :

x^* =(0, 4/3, 5/12, 0) là phương án tối ưu với $z(x^*)$ = 23/4

2) Giải các bài toán quy hoạch tuyến tính có dạng

$$z(x) = {}^{t}cx \rightarrow \max$$
$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

Ví dụ. Giải bài toán đã cho trong ví dụ ở mục 1).

Ta dùng các lệnh sau:

```
Clear [zx, x, valsx, ineqsx]
zx = 2x [1] + 4x [2] + x [3] + x [4] ;
ineqsx = {2x [1] + 3x [2] + x [4]  <= 4 , 2x [1] + x[2] <= 3 ,
          x[2] + 4x [3] + x [4]  <= 3}  ;
ConstrainedMax [zx, ineqsx, {x[1] , x[2], x[3], x[4]}]
```

Kết quả: $\{\frac{23}{4}, \{x[1] \rightarrow 0, x[2] \rightarrow \frac{4}{3}, x[3] \rightarrow \frac{5}{12}, x[4] \rightarrow 0\}\}$

Vậy đáp số của bài toán là:

$x = (0, 4/3, 5/12, 0)$ là phương án tối ưu với $z(x^{*}) = 23/4$.

3) Giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tắc

$$z(x) = {}^{t}cx \rightarrow \min$$
$$Ax > b$$
$$x > 0$$

Ví dụ: Giải bài toán

$$z(x) = 84x_1 + x_3 \rightarrow \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 1 \\ 4x_1 \qquad - x_3 \geq -3 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3\ . \end{cases}$$

Ta dùng các lệnh sau:

```
Clear [matrixa , x, c , b ]
c = { 84 , 0 , 1 } ;
b = {  5 , 1 ,  –3  } ;
matrixa = {{ 2, 1, 1}, { 1, –1, 1 }, { 4, 0, –1 } } ;
xvec = LinearProgramming [c, matrixa, b]
c. xvec
```

```
Kết quả : { 0, 2, 3}
            3
```

Vậy đáp số của bài toán là:

$x^* = (0, 2, 3)$ là phương án tối ưu với $z(x^*) = 3$.

TÓM TẮT

Để giải bài toán quy hoạch tuyến tính bằng thuật toán đơn hình, trước hết phải đưa nó về dạng chính tắc. Sau khi biến đổi sao cho vế phải của các phương trình đều không âm, nếu cần, ta sẽ đưa vào các ẩn giả với số lượng vừa đủ để ma trận trong hệ ràng buộc cưỡng bức mới có một cơ sở đơn vị. Từ đây ta tiến hành thuật toán hai pha đối với bài toán chuẩn vừa thiết lập được.

Trong trường hợp đã biết một phương án cực biên của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc ta tiến hành như sau:

Thực hiện phép biến đổi sơ cấp trên các dòng của ma trận ràng buộc để thu được ma trận mới có các vectơ (cột) đơn vị khác nhau ứng với các ẩn cơ sở. Nếu phương án cực biên đã biết là không suy biến thì có đúng một cơ sở đơn vị. Nếu phương án cực biên đã biết là suy biến thì hoặc là biến đổi tiếp, hoặc là đưa thêm vào một số ẩn giả để có một cơ sở đơn vị. Từ đó tiến hành thuật toán đơn hình để giải bài toán.

BÀI TẬP

1. Một cơ sở sản xuất có thể sản xuất được hai loại hàng I và II từ hai loại nguyên liệu A và B.

Trữ lượng của các nguyên liệu A và B theo thứ tự là 6 và 8 đơn vị.

Để sản xuất một đơn vị hàng loại I cần 2 đơn vị nguyên liệu A và 3 đơn vị nguyên liệu B; sản xuất một đơn vị hàng loại II cần 1 đơn vị hàng loại A và 4 đơn vị nguyên liệu B.

Giá bán một đơn vị hàng loại I và loại II theo thứ tự là 7 và 5 đơn vị tiền tệ. Qua tiếp thị được biết, trong một ngày, nhu cầu tiêu thụ loại hàng I không quá 2 đơn vị, nhu cầu tiêu thụ loại hàng I hơn nhu cầu tiêu thụ loại hàng II không quá 1 đơn vị. Vấn đề đặt ra là cần sản xuất mỗi ngày bao nhiêu đơn vị hàng mỗi loại để doanh thu là lớn nhất.

Hãy lập mô hình toán học cho bài toán thực tế trên.

2. Dùng định nghĩa chứng tỏ rằng, $x^* = (0, 2, 3)$ là phương án tối ưu của bài toán sau:

$$f(x) = 84x_1 + x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 1 \\ 4x_1 \qquad - x_3 \geq -3 \\ \qquad\qquad x_1 \geq 0. \end{cases}$$

3. Dùng định nghĩa chứng minh rằng, đối với mỗi bài toán sau x là phương án tối ưu:

a) $x_2 + x_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ \qquad 3x_2 \qquad + 2x_4 = 3 \\ \qquad x_1 \geq 0; \end{cases}$$

và $\overline{x} = (0, -1, 0, 3)$.

b) $x_1 + x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 4 \\ -x_1 + x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 16 \\ x_1 \ge 0; \end{cases}$$

và $\overline{x} = (0, 1, 3, -3)$.

4. Đưa các bài toán sau về dạng chính tắc:

a) $x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 - x_2 \le 0 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

b) $x_1 - x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 0 \le x_1 \le 3 \\ x_2 \ge -5. \end{cases}$$

5. Giải các bài toán sau bằng phương pháp đồ thị:

a) $-x_1 + x_2 \to \min$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

b) $x_1 - 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \ge 12 \\ -x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 + 5x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0. \end{cases}$$

6. Với bài toán dạng chính tắc có hệ ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 \qquad = 0 \\ x_j \geq 0 \, , j = 1, 2, 3, \end{cases}$$

hãy xét xem trong các phương án sau, phương án nào là phương án cực biên (không suy biến hay suy biến):

$x^1 = (2, 2, 0)$, $x^2 = (0, 0, 4)$, $x^3 = (1, 1, 2)$.

7. Hãy tìm tất cả các phương án cực biên của bài toán quy hoạch tuyến tính có hệ ràng buộc:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 \qquad = \ \ 6 \\ x_1 - 2x_2 \qquad -x_4 = -2 \\ x_j \geq 0 \, , j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Đó là bài toán suy biến hay không suy biến.

8. Cho bài toán

$$x_1 - x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3 \\ tx_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0 \, , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

trong đó t là tham số.

Bằng phương pháp đồ thị hãy tìm tất cả các giá trị của t sao cho:

a) Tập phương án là rỗng.

b) Tập phương án khác rỗng nhưng hàm mục tiêu không bị chặn.

c) Bài toán có phương án tối ưu duy nhất.

d) Bài toán có vô số phương án tối ưu.

9. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = {}^t cx \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng nếu x^1 và x^2 là các phương án thì $\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$ với $0 \leq \lambda \leq 1$ Cũng là phương án.

b) Chứng minh rằng nếu x^1 và x^2 là các phương án tối ưu thì $\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$ với $0 \leq \lambda \leq 1$ cũng là phương án tối ưu.

10. Chứng minh rằng, đối với các bài toán sau hàm mục tiêu không bị chặn:

a) $f(x) = 3x_1 - x_1 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

b) $g(x) = 5x_1 - x_2 + 2x_3 - 5x_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 7 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 \leq 9 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 6 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

11. Cho bài toán

$$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 7x_3 - 3x_4 = 7 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_3 - x_4 + x_5 = 16 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4, 5. \end{cases}$$

Tìm phương án cực biên ứng với cơ sở $\{A^3, A^4, A^5\}$ và kiểm tra tính tối ưu của nó bằng cách tính các ước lượng (A là ma trận ràng buộc).

12. Giải các bài toán sau bằng thuật toán đơn hình (tên gọi chung cho thuật toán đơn hình gốc và thuật toán hai pha):

a) $x_1 + x_2 + x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 - x_4 - 2x_6 = 5 \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3 \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \end{cases}$$

b) $2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 \leq 4 \\ 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 3 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

c) $2x_1 - 8x_2 + x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 6x_1 + 8x_2 - 2x_3 \leq 1 \\ 2x_1 - 8x_2 + x_3 \leq 3 \\ -x_1 - 5x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

d) $x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 + 3x_6 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_6 = 2 \\ x_1 + x_3 + x_5 + 2x_6 = 2 \\ x_j \geq 0,\quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \end{cases}$$

e) $3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 7x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 \leq 15 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 \leq 19 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4, 5. \end{cases}$$

g) $x_1 + x_2 - x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 \geq 4 \\ x_j \geq 0\ ,\ \ j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

h) $x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + 8x_4 = 30 \\ x_j \geq 0\ ,\ \ j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

i) $2x_1 + x_2 - 4x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \leq -2 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 3 \\ x_3 \geq 0\ . \end{cases}$$

k) $x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 4 \\ x_j \geq 0\ , j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

VÀI NÉT LỊCH SỬ

Sự ra đời của Quy hoạch tuyến tính nói riêng và Quy hoạch toán học nói chung có thể coi là vào năm 1939. *Phương pháp đơn hình* nổi tiếng do giáo sư Dantzig (George Bernard Dantzig, ông sinh năm 1914) đề xuất từ năm 1947, đến nay vẫn được sử dụng rộng rãi nhất cho Quy hoạch tuyến tính. Cuối tháng 8 năm 1997, hơn hai nghìn nhà khoa học từ khắp các nước trên thế giới đã tham dự Hội nghị quốc tế "Quy hoạch toán học" tại Lausanne (Thụy Sĩ) đã làm lễ kỷ niệm 50 năm ngày phương pháp đơn hình được công bố, và ngày đó cũng chính thức được lấy làm "Ngày Quy hoạch tuyến tính" trên thế giới.

Gần đây, đã xuất hiện phương pháp ellipsoid của Khachian (ra đời năm 1979), phương pháp "điểm trong" của Karmarkar (ra đời năm 1984), đó là những thành tựu mới và rất quan trọng, được quan tâm cả về mặt lý thuyết lẫn khả năng giải quyết các bài toán quy hoạch tuyến tính cỡ lớn.

LỜI GIẢI -HƯỚNG DẪN -TRẢ LỜI

Chương I. ĐỊNH THỨC

2. a) σ có 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 nghịch thế, sgn(σ) = -1.

b) có μ nghịch thế, sgn(μ) = -1.

c) ρ có $1 + 2 + ... + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ nghịch thế, $\text{sgn}(\rho) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \sigma, \quad \mu^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\rho^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \rho.$$

Vì $1 = \text{sgn}(\sigma\sigma^{-1}) = \text{sgn}(\sigma)\text{sgn}(\sigma^{-1})$ nên $\text{sgn}(\sigma^{-1}) = \text{sgn}(\sigma) = -1$.

Tương tự, $\text{sgn}(\mu^{-1}) = \text{sgn}(\mu) = -1$; $\text{sgn}(\rho^{-1}) = \text{sgn}(\rho) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

$$\sigma\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mu\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

3. a) Các tích có mặt trong định thức: $a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}$, $a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}$.

b) Cả hai đều có dấu "+".

4. Đối với tích $a_{11}a_{22}a_{3j}a_{4k}a_{54}$, j = 3, k = 5 hoặc j = 5, k = 3.

Đối với tích $a_{12}a_{2j}a_{33}a_{4k}a_{55}$, j 1, k = 4 hoặc j = 4, k = 1 .

5. Chỉ có một tích : $a_{13}a_{22}a_{31}$ có dấu "-".

6. Tích $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$ có dấu cộng;

Tích $a_{1n}a_{2n-1}\dots a_{n1}$ có dấu là $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

7. *Hướng dẫn:* Nhân cột thứ nhất với 100, nhân cột thứ hai với 10, rồi cộng vào cột cuối.

8. *Hướng dẫn:* Tách định thức ở vế trái thành từng của nhiều định thức, bỏ đi những định thức bằng 0, rồi đổi chỗ các cột của những định thức còn lại.

9. *Hướng dẫn:* a) Nhân dòng thứ ba với -1 rồi cộng vào dòng thứ hai.

b) Cộng ba dòng: thứ nhất, thứ hai, thứ tư.

10. ĐS: a) -88 ; b) -3 ; c) -626 ; d) 75 ; e) -180 ; f) -180.

11. ĐS: a) 1 ; b) 876.

12. ĐS: a) -238 ; b) 576.

13. ĐS: a) -1344 ; b) -9 ; c) 108 ; di 24 ;

e) *Hướng dẫn:* Lấy dòng thứ nhất cộng vào tất cả các dòng còn lại;

f) *Hướng dẫn:* Lấy dòng thứ nhất cộng vào dòng thứ hai. Lấy dòng thứ hai vừa được cộng vào dòng thứ ba; lấy dòng thứ ba vừa được cộng vào dòng thứ tư; cứ tiếp tục như thế.

14. *Hướng dẫn:*

a) Làm như ví dụ 2, mục 5.5;

b) Tính các định thức con cấp 1, cấp 2, cấp 3, cấp 4 ở góc trên bên trái. Coi chúng là D_1, D_2, D_3, D_4, còn định thức đã cho là Dn. Nhận dạng các định thức D_1, D_2, D_3, D_4 dự đoán kết quả và chứng minh dự đoán ấy. ĐS : $x^{n-1} + 2x^{n-2} + 3x^{n-8} + \ldots + n$ hay $\sum_{k=1}^{n} kx^{n-k}$;

c) Nhân dòng thứ n với $-a_1$ rồi cộng vào dòng thứ n, nhân dòng thứ n - 2 với $- a_1$ rồi cộng vào dòng thứ n - 1, cứ như thế ... , nhân dòng thứ nhất với - ai rồi cộng vào dòng thứ hai. Khai triển định thức vừa được theo cột thứ nhất. Đưa nhân tử chung ở các cột của định thức vừa được có ra ngoài dấu định thức. áp dụng phương pháp trên vào định thức vừa được. *ĐS:* $\prod_{1\le j<i\le n} (a_i - a_j)$

15. *ĐS:* a) (-3, 0, 5) ; b) (1, -2, 1) ; c) (3, 0, 1, 1) ; d) (0, 2, -1, 2); e) (1, 2, 1, 0).

16. *Hướng dẫn:* Định thức D là định thức Vandermonde, còn các Di cũng là những định thức Vandermonde với aj được thay bởi b.

$$ĐS:\ x_j = \frac{\prod_{i \neq j}(a_i - b)}{\prod_{i \neq j}(a_i - a_j)},\ j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

2. *Trả lời:* a) Không ; b) Có ; c) Không ; d) Không; e) Không.

8. *Trả lời:* a) Có ; b) Có; c) Khôngl di Có; e) Không; 0 Có

9. *Trả lời:* Không.

10. *Trả lời:* Không vì nó không có phần tử 0.

11. *ĐS:* Phần tử phải tìm là $\left(\frac{ra_1}{4}, \frac{ra_2}{4}, r, \frac{ra_4}{4}\right)$

12. *Hướng dẫn:* Giả sử U ≠ V. Khi đó tồn tại một $\vec{\alpha} \in V \setminus U$. Suy ra $\vec{\alpha} \in W$ Hãy chứng minh rằng mọi $\vec{\beta} \in U$ đều thuộc W bằng cách xét xem $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ thuộc U hay thuộc W.

15. *Hướng dẫn:* Giả sử X là một không gian con của V chứa $U \cup W$.

Chứng minh rằng $U + W \subset X$.

16. *Hướng dẫn:* Viết

$$(5, -2, 1) = \vec{\beta} = r_1(2, 0, 3) + r_2(0, 2, -1) + r_3(1, 2, 3)$$
$$= (2r_1 + r_3, 2r_2 + 2r_3, 3r_1 - r_2 + 3r_3).$$

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2r_1 + r_3 = 5 \\ 2r_2 + 2r_3 = -2 \\ 3r_1 - r_2 + 3r_3 = 1 \end{cases}$

Đs: $\vec{\beta} = 4\vec{\alpha}_1 - 2\vec{\alpha}_2 + 3\vec{\alpha}_3$.

17. *ĐS:* $\vec{\beta} = -\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_3$.

18. *Hướng dẫn:* Tìm r_1, r_2, r_3 sao cho $r_1\vec{\alpha}_1 + r_2\vec{\alpha}_2 + r_3\vec{\alpha}_3 = \vec{0}$. Nếu có r_1, r_2, r_3 không đồng thời bằng 0 thì hệ phụ thuộc tuyến tính.

ĐS: a) Độc lập tuyến tính; b) Phụ thuộc tuyến tính ;

c) Phụ thuộc tuyến tính ; d) Độc lập tuyến tính.

19. *Trả lời:* a) Độc lập tuyến tính; b) Phụ thuộc tuyến tính.

20. *ĐS:* a = 5, b = - 12.

21 . c) *Trả lời* : Không vì $\vec{\beta}_4 = \vec{\beta}_2 - \vec{\beta}_1$

22. *Hướng dẫn:* Giả sử $\vec{\beta} \in R\vec{\alpha}_1 \cap R\,\vec{\alpha}_2$. Thế thì tồn tại r_1, r_2 thuộc R sao cho $r_1\vec{\alpha}_1 = \vec{\beta} = r_2\vec{\alpha}_2$ hay $r_1\vec{\alpha}_1 - r_2\vec{\alpha}_2 = \vec{0}$. Từ giả thiết suy ra kết luận của bài toán.

23. *Hướng dẫn:* Chứng minh rằng hệ vectơ mới nhận được cũng độc lập tuyến tính.

24. *Hướng dẫn:* Thực hiện như ví dụ 2, mục 4.1.

25. *Hướng dẫn:* Trước hết hãy xem hệ vectơ đã cho có độc lập tuyến tính không. Nếu có hãy chứng minh nó là hệ sinh.

Trả lời: a) Có; b) Có.

28. *Hướng dẫn:*

Giả sử $\vec{\beta} \in R_i\vec{\varepsilon} \cap \sum_{j\neq i} R\vec{\varepsilon}_j$. Thế thì tồn tại $r_1, r_2, \ldots, r_i, \ldots, r_n$ thuộc R sao

cho $\quad r_i\vec{\varepsilon}_i = \vec{\beta} = r_1\vec{\varepsilon}_1 + \ldots + r_{i-1}\vec{\varepsilon}_{i-1} + r_{i+1}\vec{\varepsilon}_{i+1} + \ldots + r_n\vec{\varepsilon}_n$

hay $\quad r_1\vec{\varepsilon}_1 + \ldots + r_{i-1}\vec{\varepsilon}_{i-1} - r_i\vec{\varepsilon}_i + r_{i+1}\vec{\varepsilon}_{i+1} + \ldots + r_n\vec{\varepsilon}_n = \vec{0}$

Từ giả thiết suy ra kết luận của bài toán.

29. *Hướng dẫn:* Xét xem hệ vectơ có độc lập tuyến tính không. Nếu không hãy xét xem trong hệ có hai vectơ nào độc lập tuyến tính không.

Trả lời: a) dimV = 2; b) dimV = 3 ; c) dimV = 3.

31. a) Ta có: 2 = dimU $\leq$ dim(U + V) $\leq$ dimV.

Nếu dim(U + W) < dimV = 3 thì dim(U + W) = dimU

Vì U $\subset$ U + W nên từ đó suy ra U = U + W.

Do đó U = W (trái giả thiết). Vậy dim(U + W) = 3.

Suy ra dim(U $\cap$ W) = dim(U) + dim(W) - dim(U + W) = 1.

b) Nếu dim(U + W) = 4 thì trái với giả thiết U $\neq$ W. Do đó dim(U + V) - 5 hoặc dim(U + V) = 6.

Trả lời: $\dim(U \cap W) = 3$ hoặc $\dim(U \cap W) = 2$.

32. *Hướng dẫn:* Xét xem hệ vectơ $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2\}$ có độc lập tuyến tính không

37.

b) *ĐS:* $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) *Hướng dẫn:* Có 2 cách giải:

Cách 1. Tìm ma trận chuyển từ cơ sở (ξ) sang cơ sở (ε) rồi áp dụng công thức đổi toạ độ.

Cách 2. Coi toạ độ của f(x) đối với cơ sở (ξ) là (y_1, y_2, y_3, y_4). Dùng công thức đổi toạ độ với ma trận chuyển T từ cơ sở (ε) sang cơ sở (ξ) đã biết trong câu a), ta được một hệ phương trình đối với ẩn y_1, y_2, y_3, y_4.

Đs: (6, 3, 2, 0).

38. *Đs:* a) $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) (7, 0, 5, -2);

c) Cũng là ma trận T trong câu a) .

d) (0, 1, 4, 2).

39. *ĐS:* hạng(A) = 3 *;* hạng(B) = 2 ; hạng(C) = 4 ; hạng(D) = 3.

40. *ĐS:* a) $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2\}$; bị $\{\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{\beta}_4\}$; c) $\{\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \vec{\gamma}_3\}$.

41. *Hướng dẫn:*

Đặt $T = (a_{fj})$ là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathcal{A}$ sang cơ sở $\mathcal{B}$. Theo định nghĩa của ma trận chuyển ta được các hệ phương trình đối với các a_{ij}. Giải các hệ này se tìm được các a_{ij}.

$$ĐS:\ T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & -2 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

c) *ĐS*: $(2, \frac{2}{5}, 0, \frac{6}{5})$.

d) *ĐS*: $(-3,\ 5, -1,\ 2)$.

1. *Trả lời:* a) ; b) ; d) ; f) ; g) ; h).

2. *Trả lời:* Đơn cấu: g), h); Toàn cấu: d) , f); Không có đẳng cấu.

3. *ĐS:* Với $\vec{\alpha} = (a_1, a_2, a_3)$, $f(\vec{\alpha}) = (a_1 + a_2, 2a_1 - 2a_3, -a_2 + 2a_3)$.

4. *Hướng dẫn:* Trước hết chứng minh rằng $\vec{\alpha}_1$, $\vec{\alpha}_2$, $\vec{\alpha}_3$ lập thành một cơ sở của R^3. Thực hiện như chứng minh định lí mục 1.2.

Để tính f((1, 0, 0)) ta cần tìm toạ độ của vectơ (1, 0, 0) đối với cơ sở nói trên.

Trả lời: f((1, 0, 0)) = (0, -2, 2).

5. *ĐS:* $\vec{\alpha} = (3, \frac{9}{2}, 0)$.

8. b) Giả sử A là một cơ sở của V và $\vec{\delta} = r_1\vec{\alpha}_1 + ... + r_m\vec{\alpha}_m$, $\vec{\gamma} = s_1\vec{\alpha}_1 + ... + s_m\vec{\alpha}_m$ sao cho $f(\vec{\delta}) = f(\vec{\gamma})$. Thế thì: $r_1\vec{\beta}_1 + ... + r_m\vec{\beta}_m = s_1\vec{\beta}_1 + ... + s_m\vec{\beta}_m$. Vì B là cơ sở của W nên $r_1 = s_1, ..., r_m = s_m$. Do đó $\vec{\delta} = \vec{\gamma}$. Suy ra f là một đơn cấu. Theo giả thiết f là toàn cấu. Vậy f là đẳng cấu.

9. *ĐS:* a) $\mathrm{Im}f = \{(a, 0, 0) \mid a \in \mathbf{R}\}$, $\mathrm{Ker}f = \{(0, a_2, a_3) \mid a_2, a_3 \in \mathbf{R}\}$;

$\mathrm{Im}g = \{(a, 0, b) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$, $\mathrm{Ker}g = \{(0, 0, a_3) \mid a_3 \in \mathbf{R}\}$;

$\mathrm{Im}k = \mathbf{R}^2$; $\mathrm{Ker}k = \{(0, a, -a) \mid a \in \mathbf{R}\}$;

$\mathrm{Im}p = \mathbf{R}^2$, $\mathrm{Ker}p = \{(0, 0, a) \mid a \in \mathbf{R}\}$;

$\mathrm{Im}q = \{(a, b, 0, c) \mid a, b, c \in \mathbf{R}\}$, $\mathrm{Ker}q = \{(0, 0, 0)\}$;

$\mathrm{Im}t = \mathbf{R}^3$, $\mathrm{Ker}t = \{(0, 0, 0)\}$.

b) $\dim\mathrm{Im}f = 1$, $\dim\mathrm{Ker}f = 2$;

$\dim\mathrm{Im}g = 2$, $\dim\mathrm{Ker}g = 1$;

$\dim\mathrm{Im}k = 2$, $\dim\mathrm{Ker}k = 1$;

$\dim\mathrm{Im}p = 2$, $\dim\mathrm{Ker}p = 1$;

$\dim\mathrm{Im}q = 3$, $\dim\mathrm{Ker}q = 0$;

$\dim\mathrm{Im}t = 3$, $\dim\mathrm{Ker}t = 0$.

10. *ĐS:* Imd = P_1 là tập gồm đa thức 0 và các đa thức bậc không quá 1 trên R, Kerd = R.

dimImd = 2, dimKerd = 1.

12. *Hướng dẫn:* Chứng minh rằng $f|_U$ là một đơn cấu và một toàn cấu.

13.

a) • $(f + g)(a_1, a_2, a_3) = (2a_1 - a_2, a_2, a_3)$. $\mathrm{Im}(f + g) = R^3$, $\mathrm{Ker}(f + g) = \{(0, 0, 0)\}$,

$\dim\mathrm{Im}(f + g) = 3$, $\dim\mathrm{Ker}(f + g) = 0$;

• $(f - g)(a_1, a_2, a_3) = (a_2, a_2, -a_3)$, $\mathrm{Im}(f - g) = \{(a, a, b) \mid a,b \in \mathbf{R}\}$, $\mathrm{Ker}(f - g) = \{(a, 0, 0) \mid a \in \mathbf{R}\}$

$\dim\mathrm{Im}(f - g) = 2$, $\dim\mathrm{Ker}(f - g) = 1$.

• $fg(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - a_2, 0, 0)$, $\mathrm{Im}fg = \{(a, 0, 0) \mid a \in \mathbf{R}\}$, $\mathrm{Ker}fg = \{(a, a, b) \mid a,b \in \mathbf{R}\}$,

$\dim\mathrm{Im}fg = 1$, $\dim\mathrm{Ker}fg = 2$.

• $gf(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - a_2, 0, 0)$, $\mathrm{Im}gf = \{(a, 0, 0) \mid a \in \mathbf{R}\}$,

$\mathrm{Ker}gf = \{(a, a, b) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$,

$\dim\mathrm{Im}gf = 1$, $\dim\mathrm{Ker}gf = 2$.

b) • $(f + g)(a_1, a_2, a_3, a_4) = (3a_1 + a_2, a_1 - a_2)$, $\mathrm{Im}(f + g) = \mathbf{R}^2$, $\mathrm{Ker}(f + g) = \{(0, 0, a_3, a_4) \mid a_3, a_4 \in \mathbf{R}\}$

• $(f - g)(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_2 - a_1, a_1 - a_2)$, $\mathrm{Im}(f - g) = \{(a, -a) \mid a \in \mathbf{R}\}$.

$\mathrm{Ker}(f - g) = \{(a, a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbf{R}\}$,

$\dim(f - g) = 1$, $\dim\mathrm{Ker}(f - g) = 3$.

• $fg(a_1, a_2) = (2(a_1 + a_2), 0)$, $\mathrm{Im}fg = \{(a, 0) \mid a \in \mathbf{R}\}$, $\mathrm{Ker}(fg) = \{(a, -a) \mid a \in \mathbf{R}\}$, $\dim\mathrm{Im}(fg) = 1$, $\dim\mathrm{Ker}fg = 1$.

• $gf(a_1, a_2) = (2(a_1 + a_2), 0)$, $\mathrm{Im}gf = \{(a, 0) \mid a \in \mathbf{R}\}$, $\mathrm{Ker}gf = \{(a, -a) \mid a \in \mathbf{R}\}$

$\dim\mathrm{Im}gf = 1$, $\dim\mathrm{Ker}gf = 1$.

14. a) $gf(a_1, a_2, a_3, a_4) = g(a_1 + a_2, a_3, a_4) = (a_1 + a_2, a_3 - a_4)$.

b) $\mathrm{Im}gf = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$, $\mathrm{Ker}gf = \{(a, -a, b, b) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$.

c) Có.

16. *Trả lời:* a) Không. Ví dụ: f: $R^2 \to R^2$ là đồng cấu đồng nhất và g: $R^2 \to R^2$ xác định bởi $g(a_1, a_2) = (-a_1,-a_2)$ đều là đơn cấu nhưng $(f + g)(a_1, a_2) = (0, 0)$ là đồng cấu 0.

Tương tự, f và g đều là những toàn cấu nhưng f + g không phải là một toàn cấu.

18. *Hướng dẫn* : a) Giả sử $\{\vec{\varepsilon}_1,\dots, \vec{\varepsilon}_m\}$ 1à một cơ sở của V. Chứng minh rằng hệ vectơ $\{f(\vec{\varepsilon}_1) ,\dots, f(\vec{\varepsilon}_m)\}$ độc lập tuyến tính trong W. Bổ sung và hệ này để được một cơ sở:

$\{f(\vec{\varepsilon}_1,\dots, f(\vec{\varepsilon}_m), \vec{\xi}_{m+1},\dots, \vec{\xi}_n\}$. Xác định ánh xạ g bởi $gf(\vec{\varepsilon}_j) = \vec{\varepsilon}_j$. với mọi $j \in \{1,..., m\}$, $g(\vec{\xi}_j) = 0$, Với mọi $j \in \{m + 1,..., n\}$.

b) Giả sử $\{\vec{\xi}_1, \dots , \vec{\xi}_m)$ là một cơ sở của W, với mỗi $\vec{\xi}_j$, với mọi $j \in \{1,..., m\}$, cố định một $\vec{\varepsilon}_j$ sao cho $f(\vec{\varepsilon}_j) = \vec{\xi}_j$. Xác định g bởi $g(\vec{\xi}_j) = \vec{\varepsilon}_j$ với mọi $j \in \{1,..., m\}$.

21. a) Ta có $\vec{\alpha} \in f^{-1}f(A) \Leftrightarrow f(\vec{\alpha}) \in f(A)$

$\Leftrightarrow$ tồn tại một $\vec{\alpha}' \in A$ sao cho $f(\vec{\alpha}) = f(\vec{\alpha}')$

$\Leftrightarrow f(\vec{\alpha} - \vec{\alpha}') = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha} - \vec{\alpha}' \in$ Kerf

$\Leftrightarrow$ tồn tại một $\vec{\delta} \in$ Kerf sao cho $\vec{\alpha} - \vec{\alpha}' = \vec{\delta}$ hay $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}' + \vec{\delta} \in A+$ Kerf.

b) $\vec{\beta} \in f(f^{-1}(B)) \Leftrightarrow$ tồn tại một $\vec{\alpha} \in f^{-1}(B)$ sao cho $\vec{\beta} = f(\vec{\alpha})$ và $f(\vec{\alpha}) \in$ B

$\Leftrightarrow B \cap$ Imf.

22. a) f và g là những ánh xạ tuyến tính.

Thật vậy, với $\vec{\alpha} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$,

$\beta = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbf{R}^4$ và r, s $\in \mathbf{R}$, ta có:

$$r\vec{\alpha} + s\vec{\beta} = (ra_1 + sb_1, ra_2 + sb_2, ra_3 + sb_3, ra_4 + sb_4),$$

$$\begin{aligned} f(r\vec{\alpha} + s\vec{\beta}) &= (ra_1 + sb_1, ra_2 + sb_2, -ra_3 - sb_3, ra_4 + sb_4) \\ &= (ra_1, ra_2, -ra_3, ra_4) + (sb_1, sb_2, -sb_3, sb_4) \\ &= r(a_1, a_2, -a_3, a_4) + s(b_1, b_2, -b_3, b_4) \\ &= rf(a_1, a_2, a_3, a_4) + sf(b_1, b_2, b_3, b_4) \\ &= rf(\vec{\alpha}) + sf(\vec{\beta}). \end{aligned}$$

Tương tự đối với g.

- f và g là những đẳng cấu. Có nhiều cách chứng minh. Xin giới thiệu hai cách.

Cách 1. Chứng minh chúng là những đơn cấu và những toàn cấu.

Chẳng hạn, chứng minh cho g:

+ Nếu $g(\vec{\alpha}) = \vec{0} = (0, 0, 0, 0)$ thì $g(a_1, a_2, a_3, a_4) = (2a_1, a_2, a_3, -a_4) = (0, 0, 0, 0)$. Do đó $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$. suy ra $\vec{\alpha} = 0$; nghĩa là g là một đơn cấu.

+ Giả sử $\vec{\beta} = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in R^4$ là một vectơ tuỳ ý.

Đặt $\vec{\alpha} = (\frac{b_1}{2}, b_2, b_3, -b_4)$, ta có $g(\vec{\alpha}) = (b_1, b_2, b_3, b_4) = \vec{\beta}$; nghĩa là g là một toàn cấu.

vậy g là một đẳng cấu.

Cách 2. Chứng minh rằng f và g biến một cơ sở thành một cơ sở. Lấy cơ sở chính tắc của R^4, ta có:

$g(1, 0, 0, 0) = (2, 0, 0, 0)$

$g(0, 1, 0, 0) = (0, 1, 0, 0)$

$g(0, 0, 1, 0) = (0, 0, 1, 0)$

$g(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, -1)$.

Hệ vectơ này độc lập tuyến tính vì nếu

$r_1(2, 0, 0, 0) + r_2(0, 1, 0, 0) + r_3(0, 0, 1, 0) + r_4(0, 0, 0, -1) = \vec{0}$ thì $(2r_1, r_2, r_3, -r_4) = (0, 0, 0, 0)$. suy ra $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 0$.

Vì $\dim R^4 = 4$ và hệ này có 4 vectơ nên theo hệ quả mục 5.1, Ch. II, đó là một cơ sở của R^4. Lại theo hệ quả mục 2.3, Ch. III, g là một đẳng cấu.

c) $h = f + g$ không phải là một đơn cấu vì

với $\vec{\alpha} = (0, 0, 0, 1) \neq \vec{0}$ ta có $(f + g)(\vec{\alpha}) = (0, 0, 0, 1) + (0, 0, 0, -1) = \vec{0}$.

Nó cũng không phải là một toàn cấu vì

$(f + g)(a_1, a_2, a_3, a_4) = (3a_1, 2a_2, 0, 0)$, Với mọi $\vec{\alpha} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ nên không có $\vec{\alpha}$ nào để

$(f + g)(\vec{\alpha}) = (0, 0, 0, 1)$.

c) $\vec{\kappa} = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in$ Kerh khi và chỉ khi

$(f + g)(a_1, a_2, a_3, a_4) = (3a_1, 2a_2, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$

khi và chỉ khi $3a_1 = 0 = 2a_2$ hay khi và chỉ khi $a_1 = 0 = a_2$

Do đó $\vec{\kappa} = (0, 0, a_3, a_4)$ và Kerh = $\{0, 0, a_3, a_4) \mid a_3, a_4 \in R\}$.

Vậy $(\varepsilon) = \{(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ là một cơ sở của Kerh.

Imh = $\{(3a_1, 2a_2, 0, 0) \mid a_1, a_2 \in R\}$.

Như vậy mỗi vectơ thuộc Imh có dạng $(3a_1, 2a_2, 0, 0) = a_1(3, 0, 0, 0) + a_2(0, 2, 0, 0)$. Do đó hệ hai vectơ $(\delta) = \{(3, 0, 0, 0) , (0, 2, 0, 0)\}$ là một hệ sinh của Imh. Bạn đọc tự kiểm tra rằng hệ này độc lập tuyến tính. Vậy đó là một cơ sở của Imh.

d) Ta có $h(0, 0, 0, 0) = (3, 0, 0, 0)$, $h(0, 1, 0, 0) = (0, 2, 0, 0)$. Do đó có thể chọn:

$\vec{\xi}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{\xi}_2 = (0, 1, 0, 0)$.

Theo giả thiết, U là không gian sinh bởi hai vectơ $\vec{\xi}_1$, $\vec{\xi}_2$.

Với $\vec{\alpha} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ tuỳ ý thuộc R^4, ta có:

$\vec{\alpha} = a_1(1, 0, 0, 0) + a_2(0, 1, 0, 0) + a_3(0, 0, 0, 1, 0) + a_4(0, 0, 0, 1)$.

Vì $a_1(1, 0, 0, o) + a_2(0, 1, 0, 0) \in U$, $a_3(0, 0, 0, 1, 0) + a_4(0, 0, 0, 1) \in$ Kerh, nên

$\vec{\alpha} \in U + \text{Kerh}$; nghĩa là $R^4 \subset U + \text{Kerh}$. Mặt khác, hiển nhiên $U + \text{Kerh} \subset R^4$. Do đó $R^4 = U + \text{Kerh}$.

Giả sử $\vec{\alpha} \in U \cap \text{Kerh}$. Vì $\vec{\alpha} \in U$ nên $\vec{\alpha} = a_1(1, 0, 0, 0) + a_2(0, 1, 0, 0)$.

Vì $\vec{\alpha} \in \text{Kerh}$ nên $\vec{\alpha} = a_3(0, 0, 1, 0) + a_4(0, 0, 0, 1)$. Như vậy:

$a_1(1, 0, 0, 0) + a_2(0, 1, 0, 0) = a_3(0, 0, 1, 0) + a_4(0, 0, 0, 1)$.

hay $(a_1, a_2, 0, 0) = (0, 0, a_3, a_4)$.

Từ đó suy ra $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$. Vì thế $\vec{\alpha} = \vec{0}$.

Vậy $U \cap \text{Kerh} = \{\vec{0}\}$.

e) $(-2, 0, 1, 0)$ - $gf(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1, x_2, -x_3, -x_4)$, suy ra $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-l, 0, -1, 0)$.

f) Giả sử $\vec{\gamma}_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ là ảnh ngược của $\vec{\alpha}_1 = (0, 2, -1, 0)$. Thế thì $(0, 2, -1, 0) = f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, -x_3, x_4)$.

Do đó $\vec{\gamma}_1 = (0, 2, 1, 0)$.

Tương tự, ta tìm được ảnh ngược của $\vec{\alpha}_2 = (1, 0, 1, 0)$ là $\vec{\gamma}_2 = (1, 0, -1, 0)$.

Bạn đọc tự kiểm tra rằng hệ hai vectơ $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2\}$ độc lập tuyến tính.

Vì f là một đẳng cấu nên f^{-1} cũng là một đẳng cấu. Do đó $\vec{\gamma}_1 = f^{-1}(\vec{\alpha}_1)$, $\vec{\gamma}_2 = f^{-1}(\vec{\alpha}_2)$ và $f^{-1}(W)$ sinh bởi $\{\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2\}$.

Theo bài tập 7, hệ hai vectơ này độc lập tuyến tính. Vậy đó là một cơ sở của $f^{-1}(W)$.

Tương tự, một cơ sở của g(W) gồm hai vectơ $g(\vec{\alpha}_1) = (0, 2, -1, 0)$, $g(\vec{\alpha}_2) = (1, 0, 1, 0)$.

Chương IV. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. *ĐS:* a) (1, 1, 1) ; b) $(-11c_3 + \frac{31}{10}, -17c_3 + \frac{17}{10}, c_3)$; c) vô nghiệm ; d) (1, 2, 1) ;

e) Vô nghiệm ; f) $(-1 - 2c_4, -\frac{2}{19} + 26c_4, \frac{14}{19} + 14c_4, c_4)$; g) Vô nghiệm ; h) Vô nghiệm ; i) $(\frac{93}{91}, \frac{159}{91}, -\frac{102}{91}, -\frac{9}{91})$.

3. *Trả lời:* a) Có ; b) Có ; c) Vô nghiệm ; d) Có.

4. *Hướng dẫn:* Xét định thức của A. Với những giá trị của a, b, $|A| \neq 0$ thì hệ có nghiệm. Ứng với mỗi giá trị của a, b mà $|A| = 0$, hãy xét hạng của hai ma trận A và B.

Trả lời : a) $a \neq 1$ và $a \neq -2$ hoặc $a = 1$;

b) $a \neq 1$ và $b \neq 0$.

5. *Trả lời:* $a \neq 1$ và $a \neq -2$ hoặc $a = 1$.

6. *Hướng dẫn:* Tính định thức của ma trận A được $|A| = (b - a)(c - a)(c - b)$.

Xét các trường hợp:

- $a \neq b, b \neq c, c \neq a$;
- $a = b, b \neq c$; (tương tự: $b = c, c \neq a$; $c = a, a \neq b$);
- $a = b = c$.

7. *ĐS:* a = 27.

8. *ĐS*: a) $(1, 2, -3)$; b) $\left(\frac{59-7c_3}{19}, \frac{-30+10c_3}{19}, c_3\right)$;

c) $\left(-5c_4, \frac{-7c_4+6}{3}, \frac{14c_4-12}{3}, c_4\right)$; d) $\left(\frac{7c_4+7}{11}, \frac{-5c_4-5}{11}, 0, c_4\right)$;

e) Vô nghiệm; f) $\left(\frac{-c_3+c_4+c_5+5}{5}, \frac{4c_3-4c_4-4c_5}{5}, c_3, c_4, c_5\right)$;

g) Vô nghiệm; h) Vô nghiệm; i) $\left(\frac{1-5c_4}{6}, \frac{1+7c_4}{6}, \frac{1-5c_4}{6}, c_4\right)$;

j) *Hướng dẫn:* Tính định thức của ma trận A được $|A| = (b - a)(c - a)(c - b)$.

$a \neq b, b \neq c, c \neq a$. Hệ có nghiệm duy nhất:

$$x = \frac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)},\ y = \frac{(d-a)(c-d)}{(b-a)(c-b)},\ z = \frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)};$$

- $a \neq b$, $b = c$, $a \neq d$, $b \neq d$. Hệ vô nghiệm.
- $a \neq b$, $b = c$, $a = d$. Nghiệm: (1, y, -y).
- $a \neq b$, $b = c = d$. Nghiệm: (0, y, 1 y).
- $a = b = c \neq d$. Vô nghiệm.
- $a = b = c = d$. Nghiệm: (1 - y - z, y, z).

9. *ĐS:* $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ và $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0$.

10. *ĐS:* a = -1, b = -1, c = 1.

11. *ĐS:* a = 1, b = c = 0, d = -1.

12. *ĐS:* a = 5, b = -2, c = -4.

13. *ĐS:* $\vec{\alpha} = 3\vec{\alpha}_1 - 5\vec{\alpha}_1$

14. *Hướng dẫn:* Gọi (y_1, y_2, y_3) là toạ độ của $\vec{\alpha}$ đối với cơ sở (ξ) dụng công thức đổi toạ độ ta có hệ phương trình đối với các ẩn y_j.

ĐS: $T = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Toạ độ phải tìm: $\left(-\frac{43}{77}, \frac{3}{77}, \frac{27}{77}\right)$.

15. *ĐS:* $T = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

16. *ĐS:* a) ($3c_4$, c_4, $-4c_4$, c_4); b) (-13c, 8c, 11c, 4c); c) (3c, c, 0, 0, 0); di (3c,-c, c, 2c, 0).

17. *ĐS:* a) $-11\vec{\alpha}_1 + 20\vec{\alpha}_3 + 19\vec{\alpha}_4 = \vec{0}$; b) $\vec{\beta}_1 - \vec{\beta}_2 + 2\vec{\beta}_3 = \vec{0}$.

18. *Hướng dẫn:* Trước hết tìm hạng của ma trận A của hệ phương trình.

Suy ra số chiều của không gian nghiệm. Kiểm tra xem hệ vectơ có độc lập tuyến tính không.

Trả lời: b) là hệ nghiệm cơ bản.

19. Gọi S là không gian nghiệm của hệ phương trình.

ĐS: a) Hệ nghiệm cơ bản: (1, 2, 0, 1), (2, 3, 1, 0); dimS = 2; b) Hệ nghiệm cơ bản: (-3, 1, -6, 1), dimS = l;

c) Hệ nghiệm cơ bản: (-3, 0, -1, 2), dimS = l;

d) Hệ nghiệm cơ bản: (-l, -1, 1, 0, 0, 1), (3, 1, 2, 0, 1, 0), (2, 1, -1, 1, 0, 0) dimS = 3;

e) Hệ nghiệm cơ bản: (1, 1, 0, 3, 0, 2), (-l, -1, 1, -4, 1, 0), dimS = 2.

20. *ĐS* :

a) Hệ nghiệm cơ bản: (1, -5, 0, 0, 3), (0, 1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0, 0).

- Nghiệm tổng quát của hệ đã cho: ($\frac{1}{3}$ + a, $\frac{1}{3}$ - 5a + b + c, c, b, 3a).
- Cho a = $\frac{2}{3}$, b = c = 0, được một nghiệm riêng: (1, -3, 0, 0, 2).

b) Hệ nghiệm cơ bản: (2, 5, 0, 0, 6), (1, -1, 0, 2, 0), (0, 1, 2, 0, 0).

- Nghiệm tổng quát của hệ đã cho:($\frac{2}{3}$ + 2a + b, $\frac{1}{6}$ + 5a - b + c, 2c, 2b, 6a).
- Cho a = $\frac{1}{6}$, b = c = 0, được một nghiệm riêng: (1, 1, 0, 0, 1).

21. Trường hợp hạng (A) = hạng(B) = 1. Hệ có vô số nghiệm.

Phương trình thứ hai và thứ ba là tổ hợp tuyến tính của phương trình thứ nhất.

Ba đường thẳng trùng nhau.

- Trường hợp hạng(A) = 1, hạng (B) = 2. Hệ vô nghiệm.

+ Nếu $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$ và $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$ thì d_1 trùng với d_2 và d_3 // d_1

+ Nếu $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$ và $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$ và $\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$ thì ba đường thẳng song song.

.....

- Trường hợp hạng(A) = 2 = hạng(B). Hệ có nghiệm duy nhất.

Nếu $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0$ thì ba đường thẳng đồng quy.

Hai đường thẳng cắt nhau, đường còn lại trùng với một trong hai đường cắt nhau.

+ Nếu $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ thì d_1 cắt d_2, d_3 trùng với d_1 hoặc d_2

- Trường hợp hạng(A) = 2, hạng(B) = 3. Hệ vô nghiệm.

Nếu $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0$ thì ba đường thẳng đôi một cắt nhau nhưng không đồng quy.

+ Nếu $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$ thì d_1 cắt d_2, d_3 song song với d_2.

Chương V. MA TRẬN

1. *ĐS*: a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$;

b) $f(\vec{\alpha}) = 12\vec{\xi}_1 + 10\vec{\xi}_2 + 4\vec{\xi}_3 - 9\vec{\xi}_4$.

2. *ĐS*: a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 7 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$;

b) $f(\vec{\alpha}) = (-3, 9)$.

3. *ĐS*: a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$;

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$.

4. *ĐS:* f(1, 0, 0) = (1, 0, 1), f(0, 1, 0) = (2, 1, 2), f(0, 0, 1) = (0, -2, 1).

f(3, -2, 0) = (-1,-2, -1).

5. *Giải* : $f(\vec{\alpha}) = -f(\vec{\varepsilon}_1) + 2f(\vec{\varepsilon}_2) + 3f(\vec{\varepsilon}_3)$

$$= -3\vec{\xi}_1 + 2(-\vec{\xi}_1 + 4\vec{\xi}_2) + 3(5\vec{\xi}_1 + \vec{\xi}_2)$$

$$= 10\vec{\xi}_1 + 11\vec{\xi}_2.$$

Vậy toạ độ của $f(\vec{\alpha})$ là (10, 11).

6. *ĐS*: a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $\varphi(\dot{\alpha}) = x^3 - 4x^2 - 3x + 2.$

7. *ĐS*: a) $f(\vec{\alpha}) = (2, 6, -3, 0)$;

b) Ta có $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_3 + x_4, -x_1 + 2x_2 + x_4, 2x_1 + x_3 + x_4, 2x_3 + x_4)$.

Kerf là không gian nghiệm của hệ thuần nhất:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Vậy Kerf có cơ sở là hệ nghiệm cơ bản của hệ thuần nhất. Nhưng hệ phương trình này là hệ Cramer nên Kerf = (0, 0, 0, 0).

11. *Trả lời:* Nếu A là ma trận kiểu (m.n) thì B tà ma trận kiểu (n, *m).*

15. *ĐS:* $(AB)C = A(BC) = \begin{pmatrix} 214 & 346 \\ 141 & 235 \end{pmatrix}$.

16. *Hướng dẫn:* Vì ma trận A kiểu (2,3) và ma trận I vuông nên nó có kiểu (2, 2). Do đó X có kiểu (3,2). Đặt $X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}$. Từ đẳng thức AX : I ta được một hệ phương trình đối với ẩn xi và một hệ đối với ẩn y_j.

Trả lời: Có nhiều lời giải. Đây là một lời giải:

$$X = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

17. *ĐS*: $f(A) = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

18. Giả sử $A = (a_{ij})_{(m,n)}$, $B = (b_{jk})_{(n,p)}$.

Thế thì ${}^tA = (a'_{ij})_{(n,m)}$, với $a'_{ij} = a_{ji}$, ${}^tB = (b'_{jk})_{(pn)}$ với $b'_{kj} = b_{jk}$. Khi đó thành phần c'_{ik} của ${}^tB\,{}^tA$ là $c'_{ik} = \sum_{j=1}^{n} b'_{ij}a'_{jk} = \sum_{j=1}^{n} b_{ji}a_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}b_{ji} =$ c'_{ki} trong đó c_{ki} là thành phần của ma trận AB.

Vậy ${}^tB\,{}^tA = {}^t(AB)$.

19. *ĐS:* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

20. $B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A\text{-}1A)B = B^{-1}IB = BB^{-1} = I$. Điều này chứng tỏ $B^{-1}A^{-1}$ là nghịch đảo của AB. Do đó $B^{-1}A^{-}1 = (AB)^{-1}$.

21. *ĐS*: $|AB| = |A||B| = 0.(-1) = 0$

22. *ĐS*: a) $\frac{1}{26}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\frac{1}{17}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$;

c) $\frac{1}{48}\begin{pmatrix} -10 & 12 & -10 \\ -17 & 6 & 7 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$; d) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 9 \\ -5 & -3 & 8 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$; f) $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -12 & -21 & 8 \\ 0 & 6 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & 4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; h) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 288 & 6 & -56 & -64 \\ -103 & -2 & 20 & 23 \\ 100 & 2 & -20 & -22 \\ -10 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

23. *ĐS*: $X = \begin{pmatrix} -3 & 10 & 23 \\ 0 & -10 & -10 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

24. *Hướng dẫn:* Giả sử $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Coi a, b, c, d như những ẩn, từ $A^2 = 0$ ta được một hệ phương trình.

ĐS: a) Có thể chọn ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

b) $(I + A)(I - A) = I^2 - A^2 - I$. Vậy I + A và I - A là hai ma trận nghịch đảo của nhau.

25. Giả sử A khả nghịch. Khi đó $BA = (A^{-1}A)BA = A^{-1}(AB)A$. Vậy BA đồng dạng với AB.

26. Ma trận chuyển từ cơ sở (ε) sang cơ sở (ε') là

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ma trận của f đối với cơ sở (ε') là $B = T^{-1}AT = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 14 & -12 & -11 \\ 6 & 0 & 3 \\ 28 & -24 & 2 \end{pmatrix}$.

27. Ma trận chuyển từ cơ sở (ε) sang cơ sở (ε') là

$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Do đó ma trận chuyển từ cơ sở (ε') sang cơ sở (ε) là

$T^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. $A = TBT^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -2 & 13 & 7 \\ 17 & -31 & -13 \end{pmatrix}$.

28. Ma trận chuyển từ cơ sở (ξ) sang cơ sở (δ) là $T = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Ma trận của f đối với cơ sở (δ) là $A' = \begin{pmatrix} 40 & 38 \\ -\frac{71}{2} & -34 \end{pmatrix}$.

Ma trận của f + g đối với cơ sở (δ) là $A' + B = \begin{pmatrix} 44 & 44 \\ -\frac{59}{2} & -25 \end{pmatrix}$.

29. a) *Hướng dẫn:* Giả sử đã chọn cơ sở $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2\}$, xác đình ánh xạ f. Xác định ảnh của mỗi vectơ.

Trả lời: a) $\vec{\alpha}$, $\vec{\gamma}$; b) $\vec{\gamma}$; c) $\vec{\beta}$.

30. *ĐS:* Đối với f + g, giá trị riêng ứng với $\vec{\alpha}$ là $k_1 + k_2$; đối với fg là k_1k_2.

31. *ĐS:* a) A: không có; B: $k_1 = -1$, $k_2 = 5$, vectơ riêng tương ứng là $\vec{\alpha} = (1, 1)$, $\vec{\beta} = (-2, 1)$;

C: $k_1 = 1$, $k_2 = 4$, vectơ riêng tương ứng là $\vec{\alpha} = (1, 2)$, $\vec{\beta} = (-1, 3)$;

D: $k = 1$, vectơ riêng tương ứng là $\vec{\alpha} = (0, 1)$.

b) A: $k_1 = -3$, $k_2 = 1$, $k_3 = 3$, vectơ riêng tương ứng là $\vec{\alpha} = (6, -7, 5)$, $\vec{\beta} = (2, 1, 1)$; $\vec{\gamma} = (0, 1, 1)$;

B: $k_1 = -1$, $k_2 : 3$, $k_3 = 4$, vectơ riêng tương ứng là $\vec{\alpha} = (2, 0, 1)$, $\vec{\beta} = (0, 1, 0)$; = (-3, -5, 1).

c) A: $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $k_3 = 2$, vectơ riêng tương ứng là $\vec{\alpha} = (-1, 0, 1, 0)$,

$\vec{\beta} = (1, 0, 0, 0)$; $\vec{\gamma} = (0,1, 0, 0)$;

B: $k_1 = -9$, $k_2 = 1$, $k_3 = 9$, vectơ riêng tương ứng là $\vec{\alpha} = (0, 2, 1, 2)$, $\vec{\beta} = (40, -1, -8, 9)$; $\vec{\gamma} = (0, -1, 0, 1)$.

32. *ĐS:* a) $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, vectơ riêng tương ứng là $\vec{\alpha} = (3, -1, 2)$, $\vec{\beta} = (4, -1, 2)$;

Hai không gian riêng tương ứng là W_1 sinh bởi $\vec{\alpha}$, W_2 sinh bởi $\vec{\beta}$.

b) $k = 2$, vectơ riêng tương ứng là $\vec{\alpha} = (0, 0, 1)$, $\vec{\beta} = (1, 2, 0)$. Không gian riêng tương ứng W_1 sinh bởi hai vectơ $\vec{\alpha}$ và $\vec{\beta}$.

33. *Hướng dẫn:* Coi A là ma trận của ánh xạ tuyến tính f, B tà ma trận của ánh xạ tuyến tính g. Tìm giá trị riêng của f và của g. Suy ra rằng A và B cùng đồng dạng với một ma trận chéo. Từ đó suy ra A và B đồng dạng.

34. *Hướng dẫn:* Tìm giá trị riêng. Nếu số giá trị riêng bằng cấp của ma trận thì không gian có hệ cơ sở gồm những vectơ riêng. Nếu số giá trị riêng nhỏ hơn cấp của ma trận nhưng có thể tìm được một cơ sở gồm những vectơ riêng thì ma trận chéo hoá được.

ĐS: a) Không; b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{9-\sqrt{89}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{9+\sqrt{89}}{2} \end{pmatrix}$.

35. *Hướng dẫn:* Tìm giá trị riêng và một cơ sở gồm những vectơ riêng.

ĐS: a) $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ma trận chéo cần tìm: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

b) $T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, ma trận chéo cần tìm: $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

36. *Hướng dẫn:* Tìm các giá trị riêng và một cơ sở gồm những vectơ riêng.

ĐS: a) Cơ sở gồm các vectơ riêng: (1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 1).

Ma trận chéo cần tìm là

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

b) Cơ sở gồm các vectơ riêng: (-1, -1, 1), (-3, 0, 2), (-1, 1, 0).

Ma trận chéo cần tìm là:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

37. a)

Ma trận của f là $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; ma trận của g là

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b)

Ma trận của gf là $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; ma trận của fg là

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) gf là một đẳng cấu vì $|BA| = -2 \neq 0$. fg không phải là một đẳng cấu vì $|AB| = 0$.

Ma trận của $(gf)^{-1}$ là

$$(BA)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) *Cách 1.* $\vec{\zeta} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in$ Ker(fg) khi và chỉ khi $(0, 0\ 0, 0) = \vec{0} =$

$$fg(\vec{\zeta}) = fg(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_1 + x_2, x_3, x_4)$$
$$= (x_1 + x_2, x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_4)$$

khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = 0 \\ x_3 & = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 & = 0 \\ x_4 & = 0 \end{cases}.$$

Cơ sở của Ker(fg) là cơ sở của không gian nghiệm của hệ phương trình trên. Nghiệm tổng quát của hệ này là (c, -c, 0, 0) = c(1, -1, 0, 0). Vậy cơ sở của Ker(fg) là {(1, -1, 0, 0)}.

Im(fg) sinh bởi hệ vectơ:

$$fg(\vec{\varepsilon}_1) = fg(1, 0, 0, 0) = f(1, 0, 0) = (1, 0, 1, 0)$$
$$fg(\vec{\varepsilon}_2) = fg(0, 1, 0, 0) = f(1, 0, 0) = (1, 0, 1, 0)$$
$$fg(\vec{\varepsilon}_3) = fg(0, 0, 1, 0) = f(0, 1, 0) = 0, 1, -1, 0)$$
$$fg(\vec{\varepsilon}_4) = fg(0, 0, 0, 1) = f(0, 0, 1) = (0, 0, 0, 1).$$

Vì

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ nhưng } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

nên hạng của hệ này bằng 3 và hệ vectơ $\{fg(\vec{\varepsilon}_2), fg(\vec{\varepsilon}_3), fg(\vec{\varepsilon}_4)\}$ độc lập tuyến tính.

Vậy hệ vectơ $\{fg(\vec{\varepsilon}_2), fg(\vec{\varepsilon}_3), fg(\vec{\varepsilon}_4)\}$ là một cơ sở của Im(fg) .

Cách 2. $\vec{\zeta} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in$ Ker(fg) khi và chỉ khi

$$AB\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{hay} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{hay} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

e) • Các giá trị riêng của gf:

$$\begin{vmatrix} 1-k & 1 & 0 \\ 1 & -1-k & 0 \\ 0 & 0 & 1-k \end{vmatrix} = (1-k)(k^2-2) = 0.$$

Suy ra $k_1 = 1$, $k_2 = -\sqrt{2}$, $k_3 = \sqrt{2}$

+ với $k_1 = 1$, giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases}.$$

Nghiệm tổng quát của hệ là $(0, 0, c_3)$; nghiệm cơ bản là (0, 0, 1).

Không gian riêng tương ứng sinh bởi vectơ (0, 0, 1).

+ Với $k_2 = -\sqrt{2}$ giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (1+\sqrt{2})x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + (\sqrt{2}-1)x_2 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + (1+\sqrt{2})x_3 = 0 \end{cases}.$$

Nghiệm tổng quát của hệ là $(c_1, -(1 + \sqrt{2})c_1, 0)$, hệ nghiệm cơ bản là $(1, -(1 + \sqrt{2}), 0)$

Không gian riêng tương ứng sinh bởi vectơ $(1, -(1 + \sqrt{2}), 0)$.

+ với $k_3 = \sqrt{2}$ giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (1-\sqrt{2})x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - (\sqrt{2}+1)x_2 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + (1-\sqrt{2})x_3 = 0 \end{cases}.$$

Nghiệm tổng quát của hệ là $(c_1, (\sqrt{2}-1), 0)$, hệ nghiệm cơ bản là $(1, \sqrt{2} - 1, 0)$.

Không gian riêng tương ứng sinh bởi vectơ $(1, \sqrt{2} - 1, 0)$.

- Các giá trị riêng của fg:

$$\begin{vmatrix} 1-k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -k & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1-k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-k \end{vmatrix} = k(1-k)(2-k^2) = 0 \text{ khi và chỉ khi}$$

$K_1 = 0$, $k_2 = 1$, $k_3 = -\sqrt{2}$, $k_4 = \sqrt{2}$.

+ với k = 0, giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = 0 \\ \quad\quad x_3 & = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 & = 0 \\ \quad\quad\quad x_4 & = 0 \end{cases}.$$

Nghiệm tổng quát của hệ này là (c_1, -c_1, 0, 0); hệ nghiệm cơ bản là (1, -1, 0, 0).

Không gian riêng tương ứng sinh bởi vectơ (1, -1, 0, 0).

+ Với k_2 = 1, giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_2 & = 0 \\ -x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 & = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 & = 0 \end{cases}.$$

Nghiệm tổng quát của hệ này là (0, 0, 0, c); hệ nghiệm cơ bản là (0, 0, 0, 1).

Không gian riêng tương ứng sinh bởi vectơ (0, 0, 0, 1).

+ Với $k_3 = -\sqrt{2}$, giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (1+\sqrt{2})x_1 + x_2 & = 0 \\ \sqrt{2}x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 + x_2 + (\sqrt{2}-1)x_3 & = 0 \\ (1+\sqrt{2})x_4 & = 0 \end{cases}.$$

Nghiệm tổng quát của hệ này là (c_1, $-(1+\sqrt{2})c_1$, $(2+\sqrt{2})c_1$, 0); hệ nghiệm cơ bản là (1, $-(1+\sqrt{2})$, $(2+\sqrt{2})$, 0)

Không gian riêng tương ứng sinh bởi vectơ (1, $-(1+\sqrt{2})$, $(2+\sqrt{2})$, 0).

+ Với $k_4 = \sqrt{2}$ giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}(1-\sqrt{2})x_1 + x_2 & = 0\\ -\sqrt{2}x_2 + x_3 & = 0\\ x_1 + x_2 - (\sqrt{2}+1)x_3 & = 0\\ (1-\sqrt{2})x_4 & = 0\end{cases}.$$

Nghiệm tổng quát của hệ này là (c_1, ($\sqrt{2}$ -1)c_1, (2-$\sqrt{2}$)c_1 , 0); hệ nghiệm cơ bản là (1, $\sqrt{2}$ -1 , 2-$\sqrt{2}$, 0).

Không gian riêng tương ứng sinh bởi vectơ (1, $\sqrt{2}$ -1 , 2-$\sqrt{2}$, 0).

f) Ma trận BA chéo hoá được vì nó có 3 giá trị riêng phân biệt.

Trong cơ sở gồm 3 vectơ {(0, 0, 1), (1, -1 - $\sqrt{2}$, 0), (1, -1+$\sqrt{2}$, 0)} ma trận của gf là ma trận chéo

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & -\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

Gọi T là ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở này ta có

$C = T^{-1}BAT$

Ma trận AB cũng chéo hoá được. Trong cơ sở gồm 4 vectơ {(1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (1, -1-$\sqrt{2}$, 2+$\sqrt{2}$, 0), (1, $\sqrt{2}$ -1, 2-$\sqrt{2}$, 0)} ma trận của fg là ma trận chéo

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

Chương VI. DẠNG SONG TUYẾN TÍNH VÀ DẠNG TOÀN PHƯƠNG

1. Trên R^3 ta xét cơ sở chính tắc e = {$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$} với $\vec{e}_1$ = (1, 0, 0), $\vec{e}_2$ = (0, 1, 0), $\vec{e}_3$ = (0, 0, 1) . Khi đó ma trận của dạng song tuyến tính φ trên R^3 đố với cơ sở e = $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ Chính là A = $(\varphi(\vec{e}_i, \vec{e}_j))$.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -5 \\ 8 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Theo định nghĩa.

3. Ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc e=$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ sang cơ sở (ξ) là

$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, khi đó ma trận của dạng song tuyến tính φ trên R^3 đối với cơ sở (ξ) là

$$B = T^t A T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -6 \\ 9 & 5 & 3 \\ 11 & -9 & 1 \end{pmatrix}$$

4. $$B = T^t A T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 27 \\ 1 & 2 & -3 \\ 8 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

5. $$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 0 \\ -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \text{ b) } B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 5 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -1/2 \\ -3 & -1/2 & 9 \end{pmatrix}$$

6. a) $\Gamma(\vec{\alpha}) = 3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

b) $\Gamma(\vec{\alpha}) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$.

7. $$\text{a) } (x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};$$

$$\text{b) } (x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};$$

8. a) $\Gamma(\vec{\alpha}) = 5y_1^2 + 5y_2^2 - 14y_1y_2$;

b) $\Gamma(\vec{\alpha}) = y_1^2 - 7y_2^2 + y_3^2$;

c) $\Gamma(\vec{\alpha}) = 2y_1^2 - 7y_2^2 - \dfrac{1}{2}y_3^2$;

d) $\Gamma(\vec{\alpha}) = y_1^2 + 4y_2^2 - 5y_3^2$;

9. a) $\Gamma(\vec{\alpha}) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + 2x_3)^2 - 4x_3^2$

đặt $y_1 = x_1 + x_2; y_2 = x_2 + 2x_3; y_3 = x_3$ ta được $\Gamma(\vec{\alpha}) = y_1^2 + y_2^2 - 4y_3^2$.

b) $\Gamma(\vec{\alpha}) = (x_1 - 2x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 - x_1^2$

đặt $y_1 = x_1 - 2x_2; y_2 = x_1 + x_3; y_3 = x_1$ ta được $\Gamma(\vec{\alpha}) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ có đa thức đặc trưng là

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 - 2 - 3(1-\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4$, suy ra có các giá trị riêng là $\lambda = -1, \lambda = 2$, ứng với $\lambda = -1$ có vectơ riêng là $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

ứng với $\lambda = 2$ có các vectơ riêng là $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ và $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, đặt

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, khi đó ta có ma trận:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Gamma(\vec{\alpha}) = -y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2$.

Chương VII. QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

1. Gọi x_1, x_2 theo thứ tự là số đơn vị loại hàng I, II cần sản xuất theo kế hoạch trong một ngày. Khi đó doanh thu trong một ngày sẽ là 7xl + $5x_2$. Do trữ lượng nguyên liệu có hạn và lượng hàng sản xuất không vượt quá nhu cầu thị trường nên ta có:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 6 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 8 \\ x_1 \le 2 \\ x_1 - x_2 \le 1 \end{cases}$$

Và tất nhiên $x_1, x_2 \ge 0$. Từ đó ta lập được mô hình toán học cho bài toán thực tế.

2. Tập phương án $X \neq \varnothing$ vì $x^* \in X$. Với phương án $x = (x_1, x_2, x_3)$ bất kì, bằng cách cộng vế với vế các bất phương trình trong hệ ràng buộc cưỡng bức ta có $7x_1 + x_2 \ge 3$.

V $x_1 \ge 0$ nên $f(x) = 84x_1 + x_3 \ge 7x_1 + x_3 \ge 3 = f(x^*)$ với mọi phương án x.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

5. a) (4, 1); b) Tập phương án là rỗng.

6. x^1 là phương án cực biên không suy biến, x^2 là phương án cực biên suy biến, x^3 không phải là phương án cực biên.

7. Có tất cả 4 phương án cực biên. Bài toán đó không suy biến vì mọi phương án cực biên đều không suy biến.

8. Chú ý rằng, ràng buộc thứ hai xác định nửa mặt phẳng chứa gốc toạ độ, và bờ của nó luôn đi qua điểm $(x_1, x_2) = (0, 2)$, có hệ số góc là (-t). Xét từng trường hợp khi cho (-t) tăng dần từ $-\infty$ đến $+\infty$ ($-\pi/2 < \varphi < \pi/2$, trong đó (φ) là góc hợp bởi giữa bờ của nửa mặt phẳng thứ hai và chiều dương của trục hoành).

Đáp số a) $t > 2/3$; b) $t < -1$; c) $-1 < t < 2/3$; d) $t = -1$.

10. a) *Cách 1.* Biểu diễn hình học tập phương án, vẽ một đường mức rồi chứng tỏ nó không có vị trí giới hạn.

Cách 2. Tìm điều kiện về t sao cho x = (t, t) là phương án. Khi đó f(x(t)) = 2t và cho qua giới hạn ta được điều phải chứng minh.

b) Xác định t sao cho x(t) = (0, t, 0, t) là phương án. Khi đó, tính f(x(t)) và cho qua giới hạn ta được điều phải chứng minh.

11. $\bar{x} = (0, 0, 10, 21, 7)$. $B = [A^3 A^4 A^5]$, $\Delta_3 = \Delta_4 = \Delta_5 = 0$, $c^0 = (5, -2, 0)$,

$Bx^1 = A^1 \Rightarrow x^1 = (1, 2, -1)$, $Bx^2 = A^2 \Rightarrow x^2 = (3, 7, -2)$, $\Delta_1 = {}^tc^0x^1 - c_1 = -2$,

$\Delta_2 = {}^tc^0x^2 - c_2 = -1$.

vì $\Delta_j \leq 0$ Với mọi i nên $\overline{\mathbf{x}}$ là phương án tối ưu.

12. a) (71/10, 0, 0, 13/10, 0, 2/5) là phương án tối ưu.

b) (1, 1, 1/2, 0) là phương án tối ưu.

c) Hàm mục tiêu không bị chặn dưới.

d) (0, 6, 2, 3, 0, 0) là phương án tối ưu.

e) (0, 0, 3, 4, 0) là phương án tối ưu.

g) Tập phương án là rỗng.

h) (1, 0, 6, 3) là phương án tối ưu.

i) Hàm mục tiêu không bị chặn trên.

k) Tập phương án là rỗng.

BẢNG THUẬT NGỮ

	Trang
A	
Ánh xạ	123
Ánh xạ tuyến tính	124
Ảnh của một ánh xạ tuyến tính	129
Ảnh của một vectơ	125
Ảnh ngược	129
Ẩn cơ sở	153
Ẩn phi cơ sở	153
B	
Bài toán chuẩn	37
Bài toán cực tiểu hoá	330
Bài toán dạng chính tắc	331
Bài toán dạng chuẩn tắc	331
Bài toán không suy biến và suy biến	338
Bài toán quý hoạch tuyến tính	325
Bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát	329
Bài toán quy hoạch toán học (tối ưu hoá)	325
Bảng đơn hình	355
Bước lặp	353
C	
Chuẩn của một vectơ	263
Chuyển trí	20
Công thức đổi toạ độ	96
Cột xoay	357

Cơ sở của không gian vectơ 85
Cơ sở chính tắc 86
Cơ sở của ma trận 337
Cơ sở của phương án cực biên 337
Cơ sở trực chuẩn 263

D
Dạng chéo của ma trận 213
Dạng chính tắc của dạng toàn phương 185
Dạng cực của dạng toàn phương 282
Dạng song tuyến tính 274
Dạng song tuyến tính đối xứng 274
Dạng toàn phương 283
Dạng toàn phương xác định 265
Dạng toàn phương xác định dương (âm) 265
Dấu của phép thế 22
Dòng xoay 341

Đ
Đa thức đặc trưng 233
Đại số các ma trận vuông Matn(K) 214
Đẳng cấu 136
Định thức 27
Định thức con 35
Định thức con bù 35
Đồng cấu 133
Đơn cấu 136

G

Giao của những không gian con 84

Giá trị riêng 229

Giá trị tối ưu 314

H

Hàm mục tiêu 313

Hàm mục tiêu không bị chặn 314

Hạng của hệ vectơ 104

Hạng của ma trận 104

Hạt nhân của một ánh xạ tuyến tính 139

Hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất 180

Hệ phương trình tuyến tính 60

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất 178

Hệ sinh của một không gian vectơ 84

Hệ vectơ độc lập tuyến tính 88

Hệ vectơ liên kết 324

Hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính 88

Hiện tượng xoay vòng 336

Hình chiếu của một vectơ lên một không gian con 284

K

Khai triển định thức theo một dòng 36

Khai triển định thức theo r dòng 42

Không gian con 81

Không gian con bù trực giao 283

Không gian con bất biến 230

Không gian vectơ ơclit 277

Không gian sinh bởi một hệ vectơ 84

Không gian vectơ 76

M

Ma trận 25
Ma trận các toạ độ 106
Ma trận chuyển (từ cơ sở này sang cơ sở khác) 100
Ma trận chuyển vị 126
Ma trận của một ánh xạ tuyến tính 198
Ma trận của dạng song tuyến tính 260
Ma trận đối xứng 264
Ma trận đặc trưng 233
Ma trận đồng dạng 227
Ma trận đơn vị 214
Ma trận nghịch đảo 261
Ma trận ràng buộc 316
Ma trận tam giác dưới 47
Ma trận tam giác trên 48
Ma trận trực giao 285
Ma trận vuông 27

N

Nghịch thế 22
Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính 160
Nghiệm của đa thức đặc trưng 233
Nghiệm riêng của hệ phương trình tuyến tính 167
Nghiệm tổng quát 167

P

Phần bù đại số 35
Phần tử trục 341
Phép biến đổi sơ cấp 114
Phép biến đổi đối xứng 287
Phép biến đổi trực giao 285
Phép cộng hai ánh xạ tuyến tính 146
Phép cộng hai ma trận 204
Phép nhân một ánh xạ tuyến tính với một số 147
Phép nhân một ma trận với một số 204
Phép thế 21
Phép thế chẵn, phép thế lẻ 22
Phép xoay 341
Phương án 313
Phương án cực biên 321
Phương án cực biên không suy biến và suy biến 322
Phương án đơn hình 321
Phương án tìm được theo một hướng 333
Phương án tối ưu 314

R

Ràng buộc cưỡng bức 313
Ràng buộc tự nhiên 313

S

Số chiều của không gian vectơ 96

T

Tích của hai ánh xạ tuyến tính 149
Tích của hai ma trận 205
Tích vô hướng 277
Toạ độ của một vectơ 99
Toàn cấu 136
Tổ hợp tuyến tính 87
Tổng của hai ánh xạ tuyến tính 146
Tổng của hai ma trận 202
Tổng của những không gian con 83

Ư

Ước lượng 330

V

Vectơ 78
Vectơ định chuẩn 278
Vectơ đối 78
Vectơ không 78
Vectơ riêng 229
Vectơ trực giao 278

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Đặng văn Uyên. *Quy hoạch tuyến tính.* NXBGD.1996.

2. Hoàng Tuỵ. *Lý thuyết quy hoạch.* Nhà xuất bản Khoa học Hà Nội. 1968.

3. Phí Mạnh Ban. *Quy hoạch tuyến tính.* NXBGD. 1998.

4. Ngô Thúc Lanh. *Đại số tuyến tính.* Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp.

5. Nguyễn Duy Thuận. *Toán Cao cấp A1.* Phần Đại số tuyến tính.

NXBGD. 2001.

6. Nguyễn Đức Nghĩa. *Tối ưu hoá* (Quy hoạch tuyến tính và rời rạc). NXBGD.1996.

7. Trần Văn Hạo. *Đại số cao cấp* . Tập I. Đại số tuyến tính.

NXBGD. 1977.

8. Jonathan S. Golan. *Foundation of Linear Algebra.* Kluwer Academic Pubhshers. 1996.

9. J.M.Arnaudiès- H.Fraysse. *Cours de Mathématiqué-J. Algèbre.*

DUNOD. Paris.1996.

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc ĐINH NGỌC BAO

Tổng biên tập Lê A

Biên tập nội dung:
NGUYÊN TIÊN TRUNG

Trình bày bìa:
PHẠM VIỆT QUANG

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH
In 600 cuốn, khổ 17 x 24 cm tại Công ty In và Văn hoá phẩm Hà Nội.
Giấy phép xuất bản số. 90 -II31/XB-QLXB, ký ngày 29/8/2003.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 11 năm 2003.