

BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN TRONG TAM GIÁC

Bài 1: Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = 2\text{ CM}$. Trên tia AC lấy điểm D sao cho C là trung điểm của AD và gọi N là trung điểm của BD. Chứng minh rằng: ba điểm A, M, N thẳng hàng.

Bài 2: Cho tam giác ABC, ba đường trung tuyến AD, BE, CF đồng quy tại điểm G. Trên BE, CF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $BM = \frac{1}{3} BE$, $CN = \frac{1}{3} CF$. Chứng minh rằng ba đường thẳng AD, BN, CM đồng quy.

Bài 3: Cho tam giác ABC với hai trung tuyến BN, CP và trọng tâm G. Chứng minh rằng: $BN + CP > \frac{3}{2} BC$.

Bài 4: Cho tam giác ABC với ba trung tuyến AM, BN, CP và trọng tâm G.

Chứng minh rằng:

- a) $AM < \frac{1}{2} (AB + AC)$
- b) $\frac{3}{4} (AB + BC + CA) < AM + BN + CP < AB + BC + CA$.

Bài 5: Cho tam giác ABC có $AB < AC$, hai trung tuyến BE, CF và trọng tâm G.

Chứng minh rằng:

- a) $BE < CF$
- b) Góc GBC lớn hơn góc GCB

Bài 6: Tam giác ABC có $AB < AC$, hai trung tuyến BE và CF cắt nhau tại G. Gọi D là trung điểm của BC. Chứng minh rằng:

- a) Ba điểm A, G, D thẳng hàng.
- b) $BE < CF$
- c) AD, BE, CF thỏa mãn bất đẳng thức tam giác.

Bài 7: Cho tam giác ABC, các trung tuyến AD, BE, CF cắt nhau tại G. Chứng minh rằng:

- a) $AD < \frac{1}{2} (AB + AC)$
- b) $BE + CF > \frac{3}{2} BC$
- c) $\frac{3}{4}$ chu vi tam giác ABC $< AD + BE + CF <$ chu vi tam giác ABC

Bài 8: Cho tam giác ABC, O là một điểm nằm trong tam giác. Vẽ BH và CK vuông góc đường thẳng AO. Cho biết các tam giác AOB, BOC, COA có diện tích bằng nhau, chứng minh rằng:

- a) $BH = CK$
- b) O là trọng tâm của tam giác ABC.

Bài 9: Cho tam giác ABC với trung tuyến AM. Chứng minh rằng:

- a) Nếu tam giác ABC vuông tại A thì $AM = \frac{1}{2} BC$.
- b) Ngược lại, nếu $AM = \frac{1}{2} BC$ thì tam giác ABC vuông tại A.

Bài 10: Cho tam giác ABC với trung tuyến AD. Qua D kẻ đường thẳng song song với AB, qua B kẻ đường thẳng song song với AD. Hai đường thẳng trên cắt nhau tại E. Gọi K là trung điểm của đoạn EC.

Chứng minh rằng: ba điểm A, D, K thẳng hàng.

Bài 11: Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH. Trên tia đối của tia HA lấy điểm D sao cho $HD = HA$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $CE = CB$.

- a) Chứng minh rằng C là trọng tâm của tam giác ADE.
- b) Tia AC cắt DE tại M. Chứng minh rằng $AE \parallel HM$.

Bài 12: Cho tam giác ABC. Trên cạnh AB lấy hai điểm D và E sao cho $AD = BE$. Trên cạnh AC lấy hai điểm F và H sao cho $AF = CH$. Chứng minh rằng các tam giác BFH và CDE có cùng một trọng tâm.

Bài 13: Chứng minh rằng:

- a) Một tam giác là tam giác cân khi và chỉ khi có hai trung tuyến bằng nhau
- b) Một tam giác là tam giác đều khi và chỉ khi có ba trung tuyến bằng nhau.

Bài 14: Cho tam giác ABC, trung tuyến BM, CN cắt nhau tại G. Cho biết $BM = CN$, chứng minh rằng AG vuông góc với BC.