博弈论专题

babydragon jlz

闲扯时间

- 生活中的博弈论的例子
- 选择$\frac{2}{3}$平均数问题
- 一个游戏《信任的进化》

组合游戏

(1) 有两个玩家;
(2) 游戏的操作状态是一个有限的集合;
(3) 游戏双方轮流操作;
(4) 双方的每次操作必须符合游戏规定;
(5) 当一方不能将游戏继续进行的时候，游戏结束，同时，对方为获胜方;
(6) 无论如何操作，游戏总能在有限次操作后结束;

今天讲的就是知道开始的局势之后，就能知道谁胜谁负了。
本讲的主人公是Alice和Bob

巴什博弈

- 问题陈述:
- 有两堆石子，每一个人最少可以取一个石子，最多取完一堆石子。

不能继续取石子的人游戏失败。Alice先手

策略：1. 若一开始两堆石子个数一样，那么Bob肯定会仿照Alice取石子，Bob胜

2. 当初始的时候两堆石子的个数不同的时候，Alice一开始会使两堆石子个数相同，Alice胜

- 问题陈述：
- 有一堆石子，每一个人最少可以取一个石子，最多取m个石子。

不能继续取石子的人游戏失败。Alice先手

策略：n%(m+1)为0的话， Bob胜；否则Alice一开始取$n-\left\lfloor\frac{n}{m+1}\right\rfloor*(m+1)$个石子，之后两人取石子的个数和始终为m+1, Alice胜

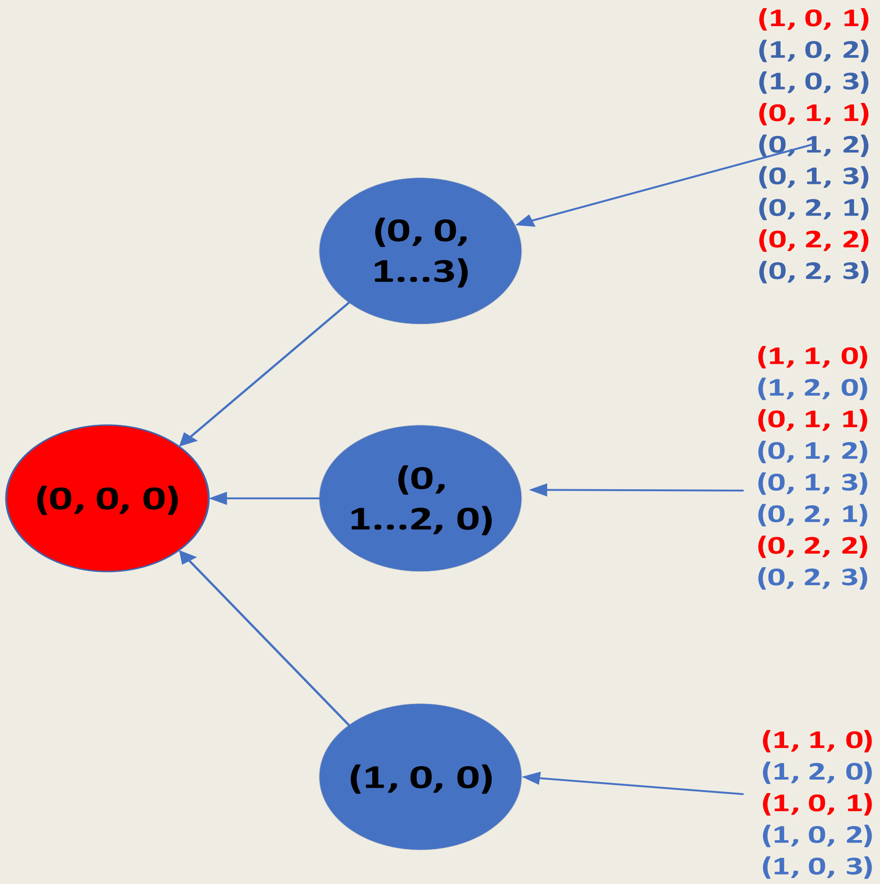
下面是重点，希望同学们提起精神 Nim博弈

- 问题陈述:
- 有n堆石子，每一个人最少可以取一个石子，最多可以将一堆石子取完。

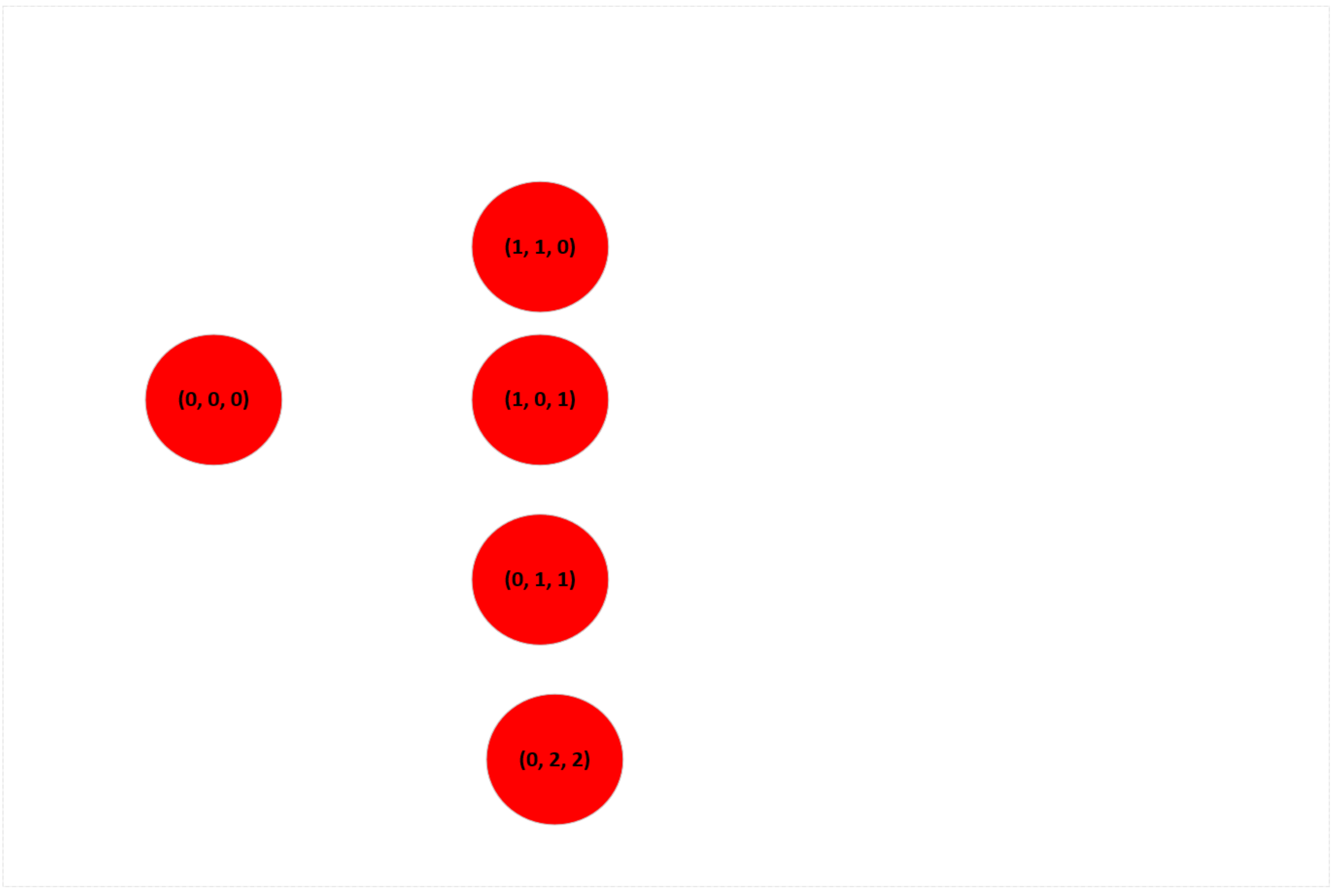
不能继续取石子的人游戏失败。Alice先手

简化问题：我们现在有三堆石子，用三元组(1, 2, 3)表示。

状态转移的演示


(0, 0, 0)
(0, 0, 1…3)
(0, 1…2, 0)
(1, 0, 0)
(1, 0, 1)
(1, 0, 2)
(1, 0, 3)
(0, 1, 1)
(0, 1, 2)
(0, 1, 3)
(0, 2, 1)
(0, 2, 2)
(0, 2, 3)
(1, 1, 0)
(1, 2, 0)
(0, 1, 1)
(0, 1, 2)
(0, 1, 3)
(0, 2, 1)
(0, 2, 2)
(0, 2, 3)
(1, 1, 0)
(1, 2, 0)
(1, 0, 1)
(1, 0, 2)
(1, 0, 3)

转换思路



Xor(亦或)的性质

- 1、交换律
- 2、结合律（即(a^b)^c == a^(b^c)
- 3、对于任何数x，都有x^x=0，x^0=x）（判断唯一的奇数个数的数）
- 4、自反性 A XOR B XOR B = A xor 0 = A (swap()函数的另外一种写法)
- 5、消去律a Xor c=b Xor c可以推出a=b

P-N的定义

(1) 所有终结点是必败点（P点）；

(2) 从任何必胜点（N点）操作，至少有一种方法可以进入必败点（P点）；

(3)无论如何操作， 从必败点（P点）都只能进入必胜点（N点）.

- 解释前面的图

用亦或表示P-N的状态

- 需要证明的结论：对于Nim游戏，局面是必败态当且仅当所有堆硬币的数量都异或起来结果为0

证明

- 最终局面只有一个，就是全0，异或仍然是0

- 对于某个局面(a1,a2,...,an)，若a1^a2^...^an不为0，一定存在某个合法的移动，将ai改变成ai'后满足a1^a2^...^ai'^...^an=0。不妨设a1^a2^...^an=k，则一定存在某个ai，它的二进制表示在k的最高位上是1（否则k的最高位那个1是怎么得到的）。这时ai^k<ai一定成立。则我们可以将ai改变成ai'=ai^k，此时a1^a2^...^ai'^.. .^an=a1^a2^...^an^k=0。

- 对于某个局面(a1,a2,...,an)，若a1^a2^...^an=0，一定不存在某个合法的移动，将ai改变成ai‘后满足a1^a2^...^ai’^...^an=0。因为异或运算满足消去率，由a1^a2^...^an=a1^a2^...^ai‘^...^an可以得到ai=ai’。所以将ai改变成ai‘不是一个合法的移动。

回到刚刚n堆的问题

- 有如下的结论:
- $a_1\ xor\ a_2\ xor \dots xor a_n\ \neq 0$ 必胜态
- $a_1\ xor\ a_2\ xor \dots xor a_n\ = 0$ 必败态

- 为什么？举个栗子(4, 5, 6)的演示。(有聚聚愿意和我玩游戏吗

多个组合游戏利器---SG函数

- 如果把Nim的规则略加改变:
- 有n堆石子，每次可以从第1堆石子里取1颗、2颗或3颗，可以从第2堆石子里取奇数颗，可以从第3堆及以后石子里取任意颗。

SG函数的定义

- 给定一个有向无环图，每个顶点的SG函数定义为**g(x)=mex{g(y)|y是x的后继}**。

- 任何一个ICG都可以通过把每个局面看成一个顶点，对每个局面和它的子局面连一条有向边来抽象成这个“有向图游戏”。下 面我们就在有向无环图的顶点上定义Sprague-Garundy函数。首先定义mex(minimal excludant)运算，这是施加于一个集合的运算，表示**最小的不属于这个集合的非负整数**。例如mex{0,1,2,4}=3、mex{2,3,5}=0、mex{}=0。

- 注意sg函数的初始值

SG函数的性质：

- 1). 对于所有终止状态的顶点，它们都没有后继，所以g(x)=0。
- 2). 对于所有的g(x)=0的顶点x，它的所有后继y都满足g(y)!=0。
- 3). 对于所有g(x)!=0的顶点x，它一定有一个后继y满足g(y)=0。

回到原来的问题

- 对于第一个子游戏，有g(x)=x%4。
- 第二个子游戏有g(x)=x%2。
- 第三个子游戏就是n-2堆石子的尼姆博弈，存在g(x)=x (x>=3)。
- 这样g(G)就可以求解出来了，得出必败态，判断输赢。

SG函数和多堆Nim的类比

- 多堆Nim博弈的状态变化只能向前，而用SG函数值可以向后变化，若构成环的话甚至可以构成平局

- N堆Nim博弈的状态就可以套用SG函数

几种常见的博弈模型

- 巴什博弈 (Bash Game)
- 威佐夫博弈 (Wythoff Game)(正确的打表姿势)
- 斐波那契博弈（染色法，打表法）
- 尼姆博弈 (Nim Game)（亦或的结论）
- 阶梯博弈（Nim博弈的变形）

- Nim博弈的第二种形式
- 树上博弈
- 。。。

- 思维

威佐夫博弈

- 有两堆若干个石子，两人轮流取石子，可以从一堆当中取走任意多个或者从两堆当中同时取走相同多个石子(至少取走一个石子)。最后取完的人获胜。

- 如何打表
- OEIS
- 结论:a[i] = $\left\lfloor \frac{\sqrt{5}+1}{2} * i \right\rfloor$, b[i] = a[i]+i为必败态

斐波那契博弈

- 题面:
- Alice先手，第一次不能取完所有的石子，设取a个。之后Bob只能取1~2a之间的石子数。问先手必胜还是必败
- 刷表
- 状态设计，演示打表

阶梯博弈

- 每个阶梯上放着自然数个点。
- 两个人进行阶梯博弈。
- 每一步则是将一个集体上的若干个点(>=1)移到前面去。
- 最后没有点可以移动的人输

可以转化为奇数堆的Nim博弈

书上例题

- 例一：如何打表
- OEIS

- 例二:
- 初始的状态

第二类Nim博弈

- 有若干堆石子，一个人可以至少去一个石子，或者取完一堆石子，但是最后取走石子的人为负，问先手必胜还是先手必败。
  这是Nim game的第二种形式

定义状态

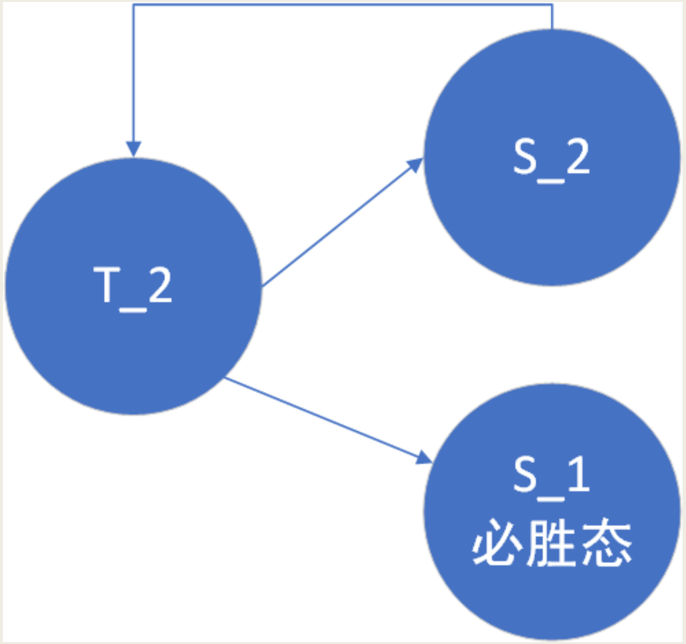
- 定义：若一堆中仅有1根火柴，则被称为孤单堆。若大于1根，则称为充裕堆。

- 1. T:石子的各堆的个数亦或和为0。(利他态)
- 2. S:各堆的石子的个数亦或和不为0.(利己态)

- 1.1: T_2 充裕堆的个数大于等于2.
- 1.2: T_0 充裕堆的个数为0.
- ps:这里不存在T_1:充裕堆的个数若为1，是因为，各堆的石子的个数亦或和为0不可能存在

- 2.1: S_0: 仅有奇数个孤单堆
- 2.2: S_1: 仅有一个充裕堆， 若干个孤单堆
- 2.3: S_2: 大于等于两个充裕堆，若干个孤单堆，总之亦或和不为0

性质



性质5图

- 1. S_2无法转移到T_0, 结论很显然
- 2. S_0为必败态，也是很显而易见的。
- 3. T_0为必胜态，相当于有偶数个1.
- 4. S_1为必胜态，因为先手可以调节充裕堆的个数：当有奇数个1时，将充裕堆中的石子全部取走，变成了S_1,先手胜；或者当有偶数个1时，充裕堆只剩下一个石子。
- 5. T_2为必败态：T_2只能转移到S_2 OR S_1, S_2只能转移到T_2
- 6. S_2为必胜态： S_2只能转移到T_2,T_2 是必败态

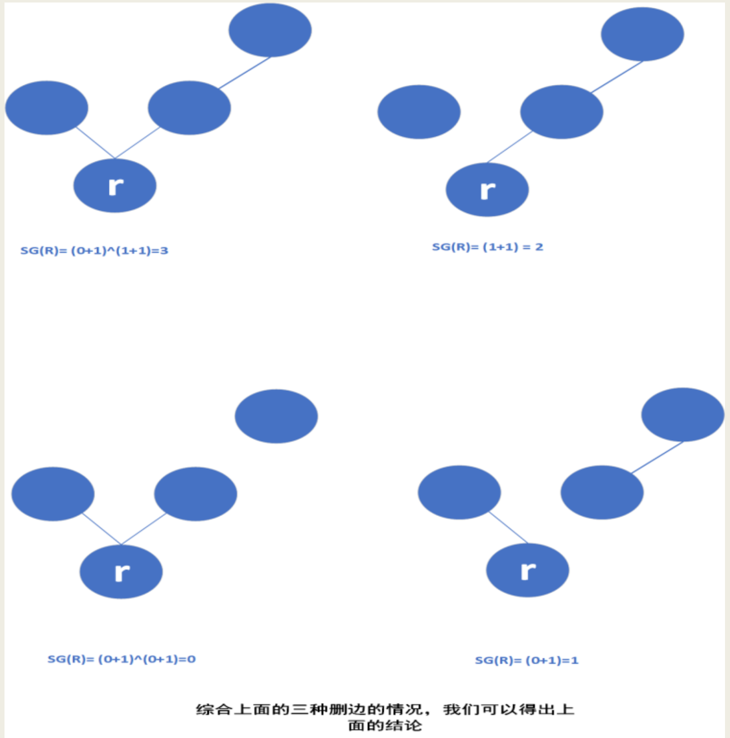
树上博弈

- 规则：给出一个有N个节点的树，有一个节点作为根节点
- 游戏者轮流从树中删去边，删去一条边后，不与根节点相连的部分将被移走。
- 谁无路可走谁就会输

结论

- 叶子节点的SG值为0，中间节点的SG值为它的所有的子节点的SG值+1的亦或和。

- 一个简单的例子



总结

- 什么最重要?
- 或许要一定的思维

拓展阅读

- 《组合游戏略述——浅谈SG游戏的若干拓展及变形》
- SG函数详解
- 博弈论进阶