求解非线性微分方程组的稳定解

20 世纪初期，在伦敦曾观察到这种现象，大约每两年爆发一次麻疹传染病，生物学家试图解释这种现象，他认为易受感染的人数因人口中增添新的成员而不断得到补充。因此他假设：

$$\frac{dS(t)}{dI(t)} = -\alpha S(t)I(t) + \mu$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \alpha S(t)I(t) - \beta I(t)$$

α, β, μ 都是正数

问题一：求方程组的平衡解

$$\begin{cases} -\alpha S(t)I(t) + \mu = 0 \\ \alpha S(t)I(t) - \beta I(t) = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} S(t) = \frac{\beta}{\alpha} \\ I(t) = \frac{\mu}{\beta} \end{cases}$$

问题二：证明 t 趋于无穷的时候零点是稳定的

因为方程组是非线性的，因此需要变形，套用相关的公式：

设$S(t) = x, I(t) = y$

$$\begin{cases} x' = f(x,y) = -\alpha xy + \mu \\ y' = g(x,y) = \alpha xy - \beta y \end{cases}$$

$$f_x' = -\alpha y, \qquad f_y' = -\alpha x$$

$$g_x' = \alpha y, \qquad g_y' = \alpha x + \beta$$

第一问解出来的平衡点为$\begin{cases} x_0 = \frac{\beta}{\alpha} \\ y_0 = \frac{\mu}{\beta} \end{cases}$，代入上面的式子

$$a_1 = f_x'(x_0, y_0) = \frac{-\alpha\mu}{\beta}, \qquad a_2 = f_y'(x_0, y_0) = -\beta$$

$$b_1 = g_x'(x_0, y_0) = \frac{\alpha\mu}{\beta}, \qquad b_2 = g_y'(x_0, y_0) = 0$$

$$\begin{cases} x' = a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0) + X(x,y) \\ y' = b_1(x - x_0) + b_2(y - y_0) + Y(x,y) \end{cases}$$

这里的原理有点迷，但是按照 ppt 照猫画虎，经过坐标变化，可以变成线性的方程组，线性方程组的系数矩阵为：

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\alpha\mu}{\beta} & -\beta \\ \frac{\alpha\mu}{\beta} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} \lambda + \frac{\alpha\mu}{\beta} & -\beta \\ \frac{\alpha\mu}{\beta} & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{\alpha\mu}{\beta}\lambda + \alpha\mu = 0$$

又 $p = \frac{\alpha\mu}{\beta} > 0, q = \alpha\mu > 0,$ *所以线性方程组零点为稳定的*

所以原来的方程组的零点是稳定的