1 Trị riêng - Vectơ riêng

Cho ma trận $A \in M_n(\mathbb{C})$.
Ta nói $\lambda \in \mathbb{C}$ là trị riêng của ma trận A nếu có vectơ $u \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ sao cho:

$$Au = \lambda u$$

Khi đó mọi vectơ u thỏa phương trình trên được gọi là vectơ riêng của ma trận A ứng với trị riêng λ
Với $\lambda \in \mathbb{C}$ là một trị riêng của A, đặt:

$$\begin{aligned} E(\lambda) &= \{u \in \mathbb{C}^n | Au = \lambda u\} \\ &= \{0\} \cup \{\text{Tập hợp các vecto riêng ứng với trị riêng } \lambda\} \\ &= \{u \in \mathbb{C}^n | (A - \lambda I_n)u = 0\} \end{aligned}$$

$E(\lambda)$ được gọi là không gian riêng của A ứng với trị riêng λ
Đa thức đặc trưng của A được định nghĩa bởi:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

Định lí:

$$\lambda \text{ là một trị riêng của } A \Longleftrightarrow P_A(\lambda) = 0$$

2 Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Tìm các trị riêng và một vecto riêng tương ứng của ma trận A
Đa thức đặc trưng:

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 1) \end{aligned}$$

Khi đó ta được: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3 + 2\sqrt{2}, \lambda_3 = 3 - 2\sqrt{2}$
Ta tìm một vecto riêng cho $\lambda_1 = 2$
Xét hệ phương trình $(A - \lambda_1 I_3)X = 0$
Ta có:

$$\begin{aligned} A - \lambda_1 I_3 &= A - 2I_3 \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Như vậy hệ $(A-\lambda_1 I_3)X = 0$ với $X = (x_1, x_2, x_3)^T$ có vô số nghiệm xác định bởi: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t \end{cases}$, với $t \in \mathbb{R}$
Vậy một vectơ riêng ứng với trị riêng $\lambda_1 = 2$ là:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Khi đó không gian riêng $E(\lambda_1)$ có một cơ sở là e_1
Các trị riêng còn lại làm tương tự

3 Các kết quả liên quan đến trị riêng trong PCA

Định lý: Cho A là ma trận đối xứng thực. Khi đó mọi trị riêng phức của A đều là số thực
Định lý: Mọi ma trận đối xứng xác định dương (t.ư nửa xác định dương) đều có các trị riêng thực dương (t.ư không âm)
Note 01: Ma trận đối xứng $A \in M_n(\mathbb{R})$ xác định dương nếu:

$$z^T A z > 0 \; \forall z \in \mathbb{R}^n$$

Note 02: Ma trận đối xứng $A \in M_n(\mathbb{R})$ nửa xác định dương nếu:

$$z^T A z \geq 0 \; \forall z \in \mathbb{R}^n$$

Định lý Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ là ma trận đối xứng thực. Khi đó với n trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, tồn tại vecto riêng $e_1, e_2, \cdots, e_n$ thỏa tính chất: $\begin{cases} e_i^T e_i = 1 \; \forall i \\ e_i^T e_j = 0 \; \forall i, j, i \neq j \end{cases}$
Note 03: Để tìm các vecto thỏa điều kiện trên, ta dùng thuật toán Gram - Schmidt

4 Vecto ngẫu nhiên (Kì vọng và ma trận hiệp phương sai)

Một vectơ ngẫu nhiên là vectơ mà mỗi phần tử của vectơ là một biến ngẫu nhiên
Kì vọng của vectơ ngẫu nhiên là vectơ mà ở đó mỗi phần tử là kì vọng của phần tử tương ứng trong vectơ ngẫu nhiên

$$\boldsymbol{\mu \equiv E(X) = E \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \cdots \\ E(X_n) \end{pmatrix}}$$

Ma trận ngẫu nhiên là ma trận mà mỗi phần tử là một biến ngẫu nhiên. Kì vọng của ma trận ngẫu nhiên là ma trận mà ở đó mỗi phần tử là kì vọng của phần tử tương ứng trong ma trận ngẫu nhiên
Ma trận hiệp phương sai được định nghĩa bởi:

$$\boldsymbol{\Sigma \equiv E(X-\mu)(X-\mu)^T} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{pmatrix}$$

trong đó $\sigma_{ij} = \boldsymbol{E(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)}$
Với mẫu ngẫu nhiên $x_1, x_2, \cdots, x_n$, ta định nghĩa vectơ trung bình:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

và ma trận hiệp phương sai mẫu:

$$S = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})^T$$

Note: Ma trận hiệp phương sai mẫu luôn là ma trận đối xứng nửa xác định dương