BÀI TẬP THỰC HÀNH TUẦN 9

MÔN: PHÂN TÍCH THUẬT TOÁN

Bài 1. Viết chương trình nhân 2 ma trận A và B có kích thước là $n \times n$ với 2 phương pháp như sau:

1. Nhân 2 ma trận như các em đã học trong đại số tuyến tính với độ phức tạp là $O(n^3)$.

2. Dùng kỹ thuật **Chia để trị** để nhân 2 ma trận trên với độ phức tạp là $O(n^{\log 7})$.

Trong đó

- **Input**: A, B được tạo ngẫu nhiên trong đoạn $[1, 1000]$.
- **Output**: $C = A \cdot B$
- Chứng minh độ phức tạp của 2 phương pháp do em cài đặt. Vẽ đồ thị so sánh 2 phương pháp với $n = 2^k, k = 10, 11, \ldots, 32$.

Bài 2 (Bonus). Có thể nhân 2 ma trận $n \times n$ với độ phức tạp là $O(n^2)$ không?Nếu có thì chứng minh và cài đặt thuật toán. Ngược lại, giải thích nguyên nhân vì sao không thể nhân 2 ma trận có độ phức tạp như vậy.

HƯỚNG DẪN

1. $A = (A_{ij}), B = (B_{ij})$ thì $C = A \cdot B = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \cdot B_{kj}$, trong đó $i, j = \overline{1, n}$.

2. Thuật toán nhân 2 ma trận của Strassen.

   Cho A, B là các ma trận $n \times n$, với $n = 2^q, q \in \mathbb{N}$. Ta đặt $C = A \cdot B = Strass(A, B)$.

   - Chia A, B thành các 4 ma trận con có kích thước $(2^q/2 = 2^{q-1}, 2^q/2 = 2^{q-1})$ như sau

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right], B = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right],$$

$$C = \left[\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array}\right]$$

   - Ta xác định 7 phép nhân Strass $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7)$ như sau

$$C = Strass(A, B) = Strass\left(\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A_{11}} & A_{12} \\ \hline A_{21} & \mathbf{A_{22}} \end{array}\right], \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B_{11}} & B_{12} \\ \hline B_{21} & \mathbf{B_{22}} \end{array}\right]\right)$$

$$P_1 = (A_{11} + A_{22}) \cdot (B_{11} + B_{22}) = Strass((A_{11} + A_{22}), (B_{11} + B_{22}))$$

$$C = Strass(A, B) = Strass\left(\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline \mathbf{A_{21}} & \mathbf{A_{22}} \end{array}\right], \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B_{11}} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]\right)$$

$$P_2 = (A_{21} + A_{22}) \cdot B_{11} = Strass((A_{21} + A_{22}), B_{11})$$

$$C = Strass(A, B) = Strass\left(\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A_{11}} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right], \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & \mathbf{B_{12}} \\ \hline B_{21} & \mathbf{B_{22}} \end{array}\right]\right)$$

$$P_3 = A_{11} \cdot (B_{12} - B_{22}) = Strass(A_{11}, (B_{12} - B_{22}))$$

$$C = Strass(A, B) = Strass\left(\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & \mathbf{A_{22}} \end{array}\right], \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B_{11}} & B_{12} \\ \hline \mathbf{B_{21}} & B_{22} \end{array}\right]\right)$$

$$P_4 = A_{22} \cdot (B_{21} - B_{11}) = Strass(A_{22}, (B_{21} - B_{11}))$$

$$C = Strass(A, B) = Strass\left(\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A_{11}} & \mathbf{A_{12}} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right], \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & \mathbf{B_{22}} \end{array}\right]\right)$$

$$P_5 = (A_{11} + A_{12}) \cdot B_{22} = Strass((A_{11} + A_{12}), B_{22})$$

$$C = Strass(A, B) = Strass\left(\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A_{11}} & A_{12} \\ \hline \mathbf{A_{21}} & A_{22} \end{array}\right], \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B_{11}} & \mathbf{B_{12}} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]\right)$$

$$P_6 = (A_{21} - A_{11}) \cdot (B_{11} + B_{12}) = Strass((A_{21} - A_{11}), (B_{11} + B_{12}))$$

$$C = Strass(A, B) = Strass\left(\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & \mathbf{A_{12}} \\ \hline A_{21} & \mathbf{A_{22}} \end{array}\right], \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline \mathbf{B_{21}} & \mathbf{B_{22}} \end{array}\right]\right)$$

$$P_7 = (A_{12} - A_{22}) \cdot (B_{21} + B_{22}) = Strass((A_{12} - A_{22}), (B_{21} + B_{22}))$$

Khi đó

$$C_{11} = P_1 + P_4 - P_5 + P_7$$

$$C_{12} = P_3 + P_5$$

$$C_{21} = P_2 + P_4$$

$$C_{22} = P_1 + P_3 - P_2 + P_6$$

Algorithm 1.3.1 (Strassen Matrix Multiplication) Suppose $n = 2^q$ and that $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ and $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. If $n_{\min} = 2^d$ with $d \le q$, then this algorithm computes $C = AB$ by applying Strassen procedure recursively.

function $C = \text{strass}(A, B, n, n_{\min})$
  if $n \le n_{\min}$
    $C = AB$ (conventionally computed)
  else
    $m = n/2;\ u = 1{:}m;\ v = m+1{:}n$
    $P_1 = \text{strass}(A(u,u) + A(v,v), B(u,u) + B(v,v), m, n_{\min})$
    $P_2 = \text{strass}(A(v,u) + A(v,v), B(u,u), m, n_{\min})$
    $P_3 = \text{strass}(A(u,u), B(u,v) - B(v,v), m, n_{\min})$
    $P_4 = \text{strass}(A(v,v), B(v,u) - B(u,u), m, n_{\min})$
    $P_5 = \text{strass}(A(u,u) + A(u,v), B(v,v), m, n_{\min})$
    $P_6 = \text{strass}(A(v,u) - A(u,u), B(u,u) + B(u,v), m, n_{\min})$
    $P_7 = \text{strass}(A(u,v) - A(v,v), B(v,u) + B(v,v), m, n_{\min})$
    $C(u,u) = P_1 + P_4 - P_5 + P_7$
    $C(u,v) = P_3 + P_5$
    $C(v,u) = P_2 + P_4$
    $C(v,v) = P_1 + P_3 - P_2 + P_6$
  end

Ví dụ: Nhân 2 ma trận sau

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 5 & 8 \\ 9 & 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 7 & 9 \\ 9 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 & 5 & 8 \\ 9 & 4 & 3 & 7 \end{array}\right], B = \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 7 & 9 \\ \hline 9 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 6 & 4 \end{array}\right]$$

$n = 4 = 2^2$ nên $m = 2^{q-1} = n/2 = 2, u = 1 : 2, v = 3 : 4,$

- Ta tính P_1:

$$C = Strass(A, B) = Strass\left(\left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 3 & 4 \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} & 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 & \mathbf{5} & \mathbf{8} \\ 9 & 4 & \mathbf{3} & \mathbf{7} \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{3} & \mathbf{5} & 4 & 3 \\ \mathbf{4} & \mathbf{6} & 7 & 9 \\ \hline 9 & 3 & \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ 2 & 5 & \mathbf{6} & \mathbf{4} \end{array}\right]\right)$$

$$P_1 = Strass\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}\right) = Strass\left(\begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 13 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}\right) \tag{1}$$

Áp dụng thuật toán cho (1) với $n = 2 \Rightarrow m = 1, u = 1, v = 1$ ta tính các $P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{15}, P_{16}, P_{17}$ như sau:

$$P_{11} = (6 + 13) \cdot (4 + 10) = 266$$

$$P_{12} = (8 + 13) \cdot 4 = 84$$

$$P_{13} = 6 \cdot (10 - 10) = 0$$

$$P_{14} = 13 \cdot (10 - 4) = 78$$

$$P_{15} = (6 + 10) \cdot 10 = 160$$

$$P_{16} = (8-6)\cdot(4+10) = 28$$

$$P_{17} = (10-13)\cdot(10+10) = -60$$

$$C'_{11} = P_{11} + P_{14} - P_{15} + P_{17} = 266 + 78 - 160 - 60 = 124$$

$$C'_{12} = P_{13} + P_{15} = 0 + 160 = 160$$

$$C'_{21} = P_{12} + P_{14} = 84 + 78 = 162$$

$$C'_{22} = P_{11} + P_{13} - P_{12} + P_{16} = 266 + 0 - 84 + 28 = 210$$

$$\Longrightarrow P_1 = \begin{bmatrix} 124 & 160 \\ 162 & 210 \end{bmatrix}$$

- Ta tính P_2:

$$C = Strass(A,B) = Strass\left(\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline \mathbf{9} & \mathbf{10} & \mathbf{5} & \mathbf{8} \\ \mathbf{9} & \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{7} \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{3} & \mathbf{5} & 4 & 3 \\ \mathbf{4} & \mathbf{6} & 7 & 9 \\ \hline 9 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 6 & 4 \end{array}\right]\right)$$

$$P_2 = Strass\left(\begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\right) = Strass\left(\begin{bmatrix} 14 & 18 \\ 12 & 11 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\right) \tag{2}$$

Áp dụng thuật toán cho (2) với $n = 2 \Rightarrow m = 1, u = 1, v = 1$ ta tính các

$P_{21}, P_{22}, P_{23}, P_{24}, P_{25}, P_{26}, P_{27}$ như sau:

$$P_{21} = (14 + 11) \cdot (3 + 6) = 225$$

$$P_{22} = (12 + 11) \cdot 3 = 69$$

$$P_{23} = 14 \cdot (5 - 6) = -14$$

$$P_{24} = 11 \cdot (4 - 3) = 11$$

$$P_{25} = (14 + 18) \cdot 6 = 192$$

$$P_{26} = (12 - 14) \cdot (3 + 5) = -16$$

$$P_{27} = (18 - 11) \cdot (4 + 6) = 70$$

$$C_{11}^{'} = P_{21} + P_{24} - P_{25} + P_{27} = 225 - 14 - 69 - 16 = 114$$

$$C_{12}^{'} = P_{23} + P_{25} = -14 + 192 = 178$$

$$C_{21}^{'} = P_{22} + P_{24} = 69 + 11 = 80$$

$$C_{22}^{'} = P_{21} + P_{23} - P_{22} + P_{26} = 225 - 14 - 69 - 16 = 126$$

$$\Longrightarrow P_2 = \begin{bmatrix} 114 & 178 \\ 80 & 126 \end{bmatrix}$$

- Ta tính P_3:

$$C = Strass(A, B) = Strass\left(\left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 3 & 4 \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} & 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 & 5 & 8 \\ 9 & 4 & 3 & 7 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ 4 & 6 & \mathbf{7} & \mathbf{9} \\ \hline 9 & 3 & \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ 2 & 5 & \mathbf{6} & \mathbf{4} \end{array}\right] \right)$$

$$P_3 = Strass\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}\right) = Strass\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\right) \tag{3}$$

Áp dụng thuật toán cho (3) với $n = 2 \Rightarrow m = 1, u = 1, v = 1$ ta tính các $P_{31}, P_{32}, P_{33}, P_{34}, P_{35}, P_{36}, P_{37}$ như sau:

$$P_{31} = (1 + 6) \cdot (3 + 5) = 56$$

$$P_{32} = (5 + 6) \cdot 3 = 33$$

$$P_{33} = 1 \cdot (-2 - 5) = -7$$

$$P_{34} = 6 \cdot (1 - 3) = -12$$

$$P_{35} = (1 + 2) \cdot 15 = 15$$

$$P_{36} = (5 - 1) \cdot (3 - 2) = 4$$

$$P_{37} = (2 - 6) \cdot (1 + 5) = -24$$

$$C'_{11} = P_{31} + P_{34} - P_{35} + P_{37} = 56 - 12 - 15 - 24 = 53$$

$$C'_{12} = P_{33} + P_{35} = -7 + 15 = 8$$

$$C'_{21} = P_{32} + P_{34} = 33 - 12 = 21$$

$$C'_{22} = P_{31} + P_{33} - P_{32} + P_{36} = 56 - 7 - 33 + 4 = 20$$

$$\Longrightarrow P_3 = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 21 & 20 \end{bmatrix}$$

- Ta tính P_4:

$$C = Strass(A, B) = Strass\left(\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 & \mathbf{5} & \mathbf{8} \\ 9 & 4 & \mathbf{3} & \mathbf{7} \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{3} & \mathbf{5} & 4 & 3 \\ \mathbf{4} & \mathbf{6} & 7 & 9 \\ \hline \mathbf{9} & \mathbf{3} & 1 & 5 \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & 6 & 4 \end{array}\right]\right)$$

$$P_4 = Strass\left(\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\right) = Strass\left(\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\right) \quad (4)$$

Áp dụng thuật toán cho (4) với $n = 2 \Rightarrow m = 1, u = 1, v = 1$ ta tính các $P_{41}, P_{42}, P_{43}, P_{44}, P_{45}, P_{46}, P_{47}$ như sau:

$$P_{41} = (5 + 7) \cdot (6 - 1) = 60$$

$$P_{42} = (3 + 7) \cdot 6 = 60$$

$$P_{43} = 5 \cdot (-2 + 1) = -5$$

$$P_{44} = 7 \cdot (-2 - 6) = -56$$

$$P_{45} = (5 + 8) \cdot (-1) = -13$$

$$P_{46} = (3 - 5) \cdot (6 - 2) = -8$$

$$P_{47} = (8 - 7) \cdot (-2 - 1) = -3$$

$$C'_{11} = P_{41} + P_{44} - P_{45} + P_{47} = 60 - 56 + 13 - 3 = 14$$

$$C'_{12} = P_{43} + P_{45} = -5 - 13 = -18$$

$$C'_{21} = P_{42} + P_{44} = 60 - 56 = 4$$

$$C'_{22} = P_{41} + P_{43} - P_{42} + P_{46} = 60 - 5 - 60 - 8 = -13$$

$$\Longrightarrow P_4 = \begin{bmatrix} 14 & -18 \\ 4 & -13 \end{bmatrix}$$

- Ta tính P_5:

$$C = Strass(A, B) = Strass\left(\left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \\ \hline 9 & 10 & 5 & 8 \\ 9 & 4 & 3 & 7 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 7 & 9 \\ \hline 9 & 3 & \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ 2 & 5 & \mathbf{6} & \mathbf{4} \end{array}\right]\right)$$

$$P_5 = Strass\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}\right) = Strass\left(\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 12 & 14 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}\right) \tag{5}$$

Áp dụng thuật toán cho (5) với $n = 2 \Rightarrow m = 1, u = 1, v = 1$ ta tính các $P_{51}, P_{52}, P_{53}, P_{54}, P_{55}, P_{56}, P_{57}$ như sau:

$$P_{51} = (4 + 14) \cdot (1 + 4) = 90$$

$$P_{52} = (12 + 14) \cdot 1 = 26$$

$$P_{53} = 4 \cdot (5 - 4) = 4$$

$$P_{54} = 14 \cdot (6 - 1) = 70$$

$$P_{55} = (4 + 6) \cdot 4 = 40$$

$$P_{56} = (12 - 4) \cdot (1 + 5) = 48$$

$$P_{57} = (6 - 14) \cdot (6 + 4) = -80$$

$$C'_{11} = P_{51} + P_{54} - P_{55} + P_{57} = 90 + 70 - 40 - 80 = 40$$

$$C'_{12} = P_{53} + P_{55} = 4 + 40 = 44$$

$$C'_{21} = P_{52} + P_{54} = 26 + 70 = 96$$

$$C'_{22} = P_{51} + P_{53} - P_{52} + P_{56} = 90 + 4 - 26 + 48 = 116$$

$$\Longrightarrow P_5 = \begin{bmatrix} 40 & 44 \\ 96 & 116 \end{bmatrix}$$

- Ta tính P_6:

$$C = Strass(A, B) = Strass\left(\left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 3 & 4 \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} & 7 & 8 \\ \hline \mathbf{9} & \mathbf{10} & 5 & 8 \\ \mathbf{9} & \mathbf{4} & 3 & 7 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{9} \\ \hline 9 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 6 & 4 \end{array}\right]\right)$$

$$P_6 = Strass\left(\begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}\right) = Strass\left(\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 11 & 15 \end{bmatrix}\right) \tag{6}$$

Áp dụng thuật toán cho (6) với $n = 2 \Rightarrow m = 1, u = 1, v = 1$ ta tính các $P_{61}, P_{62}, P_{63}, P_{64}, P_{65}, P_{66}, P_{67}$ như sau:

$$P_{61} = (8 - 2) \cdot (7 + 15) = 132$$

$$P_{62} = (4 - 2) \cdot 7 = 14$$

$P_{63} = 8 \cdot (8 - 15) = -56$

$P_{64} = (-2) \cdot (11 - 7) = -8$

$P_{65} = (8 + 8) \cdot 15 = 240$

$P_{66} = (4 - 8) \cdot (7 + 8) = -60$

$P_{67} = (8 + 2) \cdot (11 + 15) = 260$

$C'_{11} = P_{61} + P_{64} - P_{65} + P_{67} = 132 - 8 - 240 + 260 = 144$

$C'_{12} = P_{63} + P_{65} = -56 + 240 = 184$

$C'_{21} = P_{62} + P_{64} = 14 - 8 = 6$

$C'_{22} = P_{61} + P_{63} - P_{62} + P_{66} = 132 - 56 - 14 - 60 = 2$

$$\Longrightarrow P_6 = \begin{bmatrix} 144 & 184 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

- Ta tính P_7:

$$C = Strass(A, B) = Strass\left(\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ 5 & 6 & \mathbf{7} & \mathbf{8} \\ \hline 9 & 10 & \mathbf{5} & \mathbf{8} \\ 9 & 4 & \mathbf{3} & \mathbf{7} \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 7 & 9 \\ \hline \mathbf{9} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{4} \end{array}\right]\right)$$

$$P_7 = Strass\left(\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}\right) = Strass\left(\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}\right) \tag{7}$$

Áp dụng thuật toán cho (7) với $n = 2 \Rightarrow m = 1, u = 1, v = 1$ ta tính các

$P_{71}, P_{72}, P_{73}, P_{74}, P_{75}, P_{76}, P_{77}$ như sau:

$$P_{71} = (-2+1)\cdot(10+9) = -19$$

$$P_{72} = (4+1)\cdot 10 = 50$$

$$P_{73} = (-2)\cdot(8-9) = 2$$

$$P_{74} = 1\cdot(8-10) = -2$$

$$P_{75} = (-2-4)\cdot 9 = -54$$

$$P_{76} = (4+2)\cdot(10+8) = 108$$

$$P_{77} = (-4-1)\cdot(8+9) = -85$$

$$C'_{11} = P_{71} + P_{74} - P_{75} + P_{77} = -19 - 2 + 54 - 85 = -52$$

$$C'_{12} = P_{73} + P_{75} = 2 - 54 = -52$$

$$C'_{21} = P_{72} + P_{74} = 50 - 2 = 48$$

$$C'_{22} = P_{71} + P_{73} - P_{72} + P_{76} = -19 + 2 - 50 - 108 = 41$$

$$\Longrightarrow P_7 = \begin{bmatrix} -52 & -52 \\ 48 & 41 \end{bmatrix}$$

- Ta tính C_{11}:

$$C_{11} = P_1 + P_4 - P_5 + P_7 = \begin{bmatrix} 46 & 46 \\ 118 & 122 \end{bmatrix}$$

- Ta tính C_{12}:

$$C_{12} = P_3 + P_5 = \begin{bmatrix} 45 & 52 \\ 117 & 136 \end{bmatrix}$$

- Ta tính C_{21}:

$$C_{21} = P_2 + P_4 = \begin{bmatrix} 128 & 160 \\ 84 & 113 \end{bmatrix}$$

- Ta tính C_{22}:

$$C_{22} = P_1 + P_3 - P_2 + P_6 = \begin{bmatrix} 159 & 174 \\ 109 & 106 \end{bmatrix}$$

$$\implies C = A \cdot B = C = \left[\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 46 & 46 & 45 & 52 \\ 118 & 122 & 117 & 136 \\ 128 & 160 & 159 & 174 \\ 84 & 113 & 109 & 106 \end{bmatrix}.$$

Gợi ý làm bài thực hành:

- Khởi tạo các ma trận con

```
new_size = n // 2
a11 = [[0 for j in range(0, new_size)] for i in range(0, new_size)]
a12 = [[0 for j in range(0, new_size)] for i in range(0, new_size)]
a21 = [[0 for j in range(0, new_size)] for i in range(0, new_size)]
a22 = [[0 for j in range(0, new_size)] for i in range(0, new_size)]

b11 = [[0 for j in range(0, new_size)] for i in range(0, new_size)]
b12 = [[0 for j in range(0, new_size)] for i in range(0, new_size)]
b21 = [[0 for j in range(0, new_size)] for i in range(0, new_size)]
b22 = [[0 for j in range(0, new_size)] for i in range(0, new_size)]

aResult = [[0 for j in range(0, new_size)] for i in range(0, new_size)]
bResult = [[0 for j in range(0, new_size)] for i in range(0, new_size)]
```

- Chia ma trận thành 4 ma trận con

```
for i in range(0, new_size):
    for j in range(0, new_size):
        a11[i][j] = A[i][j]  # top left
        a12[i][j] = A[i][j + new_size]  # top right
        a21[i][j] = A[i + new_size][j]  # bottom left
        a22[i][j] = A[i + new_size][j + new_size]  # bottom right

        b11[i][j] = B[i][j]  # top left
        b12[i][j] = B[i][j + new_size]  # top right
        b21[i][j] = B[i + new_size][j]  # bottom left
        b22[i][j] = B[i + new_size][j + new_size]  # bottom right
```

- Tính P_1 tới P_7

```
aResult = add(a11, a22)
bResult = add(b11, b22)
p1 = strassenR(aResult, bResult)  # p1 = (a11+a22) * (b11+b22)

aResult = add(a21, a22)  # a21 + a22
p2 = strassenR(aResult, b11)  # p2 = (a21+a22) * (b11)

bResult = subtract(b12, b22)  # b12 - b22
p3 = strassenR(a11, bResult)  # p3 = (a11) * (b12 - b22)

bResult = subtract(b21, b11)  # b21 - b11
p4 = strassenR(a22, bResult)  # p4 = (a22) * (b21 - b11)

aResult = add(a11, a12)  # a11 + a12
p5 = strassenR(aResult, b22)  # p5 = (a11+a12) * (b22)

aResult = subtract(a21, a11)  # a21 - a11
bResult = add(b11, b12)  # b11 + b12
p6 = strassenR(aResult, bResult)  # p6 = (a21-a11) * (b11+b12)

aResult = subtract(a12, a22)  # a12 - a22
bResult = add(b21, b22)  # b21 + b22
p7 = strassenR(aResult, bResult)  # p7 = (a12-a22) * (b21+b22)

# calculating c21, c21, c11 e c22:
c12 = add(p3, p5)  # c12 = p3 + p5
c21 = add(p2, p4)  # c21 = p2 + p4

aResult = add(p1, p4)  # p1 + p4
bResult = add(aResult, p7)  # p1 + p4 + p7
c11 = subtract(bResult, p5)  # c11 = p1 + p4 - p5 + p7

aResult = add(p1, p3)  # p1 + p3
bResult = add(aResult, p6)  # p1 + p3 + p6
c22 = subtract(bResult, p2)  # c22 = p1 + p3 - p2 + p6
```

- Ma trận kết quả C

```
C = [[0 for j in range(0, n)] for i in range(0, n)]
for i in range(0, new_size):
    for j in range(0, new_size):
        C[i][j] = c11[i][j]
        C[i][j + new_size] = c12[i][j]
        C[i + new_size][j] = c21[i][j]
        C[i + new_size][j + new_size] = c22[i][j]
return C
```

LƯU Ý:

- Nộp bài: code + 1 file report trình bày lại toàn bộ quá trình làm bài thực hành (bắt buộc).
- Bài làm giống nhau trừ 50% trên tổng số điểm của tuần đó.