A USEFUL PRACTISE HANDOUT FOR TST, APMO, RMM 2024

A PROBLEMS SET OF FUNCTIONAL EQUATION

Adam Ardeishar

MOP 2024 TRAINING

1. Phương trình hàm

A . Đề bài

Bài toán 1. (USAMO 2002). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y)$$

với mọi số thực x, y.

Lời giải. Ký hiệu $P(x, y)$ chỉ phép thế vào (?) tương ứng. $P(x, 0)$ ta được $f(x^2) = xf(x)$. Thay $x \to -x$ ta được f là hàm lẻ. Viết Lại

$$f(x^2 - y^2) = f(x^2) - f(y^2), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Hay $f(x-y) = f(x) - f(y), \forall x, y \geq 0$. Thay $x \to x+y$ ta được $f(x) + f(y) = f(x+y), \forall x, y \geq 0$. Mặt khác lại có

$$-f(x) - f(y) = -f(x+y) \Leftrightarrow f(-x) + f(-y) = f(-x-y), \forall x, y \geq 0$$

Suy ra f cộng tính trên $\mathbb{R}$. Thế nên với mọi $k \in \mathbb{Q}$ ta có $f(kx) = kf(x)$. Đặt $a = f(1)$. Với $x \in \mathbb{R}$ và $y \in \mathbb{Q}$. Ta sẽ tính $f((x+y)^2)$ bằng hai cách. Ta có

$$f((x+y)^2) = (x+y)f(x+y) = (x+y)(f(x)+ay) = xf(x) + yf(x) + axy + ay^2$$

Lại có

$$f((x+y)^2) = f(x^2 + 2xy + y^2) = f(x^2) + f(2xy) + f(y^2) = xf(x) + 2yf(x) + ay^2$$

Cố định x và so sánh hệ số của y của hai cách, ta được $\boxed{f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}}$ và $a \in \mathbb{R}$. □

Bài toán 2. (IMO Shortlist 2017 A4). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy) \tag{1}$$

với mọi số thực x, y.

Lời giải. Ký hiệu $P(x, y)$ chỉ phép thế vào (?) tương ứng.

Từ (1) thay $P(0, 0) \Rightarrow f(f(0)^2) = 0$. Đặt $c = f(0)^2$ thì $f(c) = 0$.

Giả sử $c \neq 1$. Khi đó thay $P\left(\dfrac{c}{c-1}, c\right) \Rightarrow f(0) = 0$.

Từ (1) thay $P(x, 0) \Rightarrow f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thì thấy hàm này thỏa mãn. Giả sử tồn tại x_0 để $f(x_0) \neq 0$, khi đó đồng nghĩa với $c = 1$, hay $f(1) = 0$ và $f(0)^2 = 1$. Nói cách khác, nếu $f(c) = 0$ thì $c = 1$.

Trường hợp 1: $f(0) = -1$.

Nhận xét 1: $f(x+n) = f(x) + n, \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh. Ta chứng minh điều này đúng bằng quy nạp. Từ (1) thay $P(x,1)$ ta được $f(x+1) = f(x) + 1$. Giả sử với $n-1 \in \mathbb{Z}^+$ ta có $f(x+n-1) = f(x) + n - 1$, khi đó

$$f(x+n) = f(x+n-1+1) = f(x+1) + n - 1 = f(x) + n, \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy nên $f(x+n) = f(x) + n, \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ □

Nhận xét 2: Nếu $f(t) = -1$ thì $t = 0$.

Chứng minh. Giả sử $t \neq 0$ mà $f(t) = -1$. Từ (1) thay $P(t,1)$ ta được

$$f(0) + f(t+1) = f(t) \Leftrightarrow f(t+1) = 0 \Leftrightarrow t+1 = 1 \Leftrightarrow t = 0$$

Dẫn đến vô lý, vậy nên $t = 0$. □

Nhận xét 3: Nếu có $u, v \in \mathbb{R}$ mà $f(u) = f(v)$ thì $\begin{cases} f(2u) = f(2v) \\ f(-u) = f(-v) \\ f(u^2) = f(v^2) \end{cases}$

Chứng minh. Giả sử có $f(a) = f(b)$. Lần lượt thay $P(x,a)$ và $P(x,b)$ vào (1) ta được

$$f(x+a) - f(x+b) = f(xa) - f(xb) \tag{2}$$

Thay $x \to 2$ vào (2) thì được

$$f(a+2) - f(b+2) = f(2a) - f(2b) \Leftrightarrow f(2a) - f(2b) = f(a) + 2 - f(b) - 2 = 0$$

Tương tự vậy thay $x \to -1$ vào (2) với chú ý $f(x-1) = f(x) - 1, \forall x \in \mathbb{R}$ ta được $f(-a) = f(-b)$. Từ (1) thay lần lượt $P(a,a)$ và $P(b,b)$ ta được $f(a^2) = f(b^2)$. □

Nhận xét 4: f là hàm đơn ánh trên $\mathbb{R}$.

Chứng minh. Giả sử có $a, b \in \mathbb{R}$ mà $f(a) = f(b)$, đặt $d = a - b$. Ta sẽ chứng minh rằng $d = 0$.

Trong phép thế vào (1):

$P(a,-b) \Rightarrow f(f(a)f(-b)) + f(d) = f(-ab)$

$P(-a,b) \Rightarrow f(f(-a)f(b)) + f(-d) = f(-ab)$

Kết hợp lại ta được $f(d) = f(-d)$. Mặt khác, với chú ý $d + b = a$ và $a - d = b$

$P(d,b) \Rightarrow f(f(d)f(b)) + f(a) = f(db)$

$P(-d,a) \Rightarrow f(f(-d)f(a)) + f(b) = f(-da)$

Suy ra $f(db) = f(-da)$. Theo **nhận xét 3** thì ta được $f(da) = f(-db)$. Chú ý rằng $da - db = d^2$ và $-da + db = -d^2$, tiếp tục thay

$P(da,-db) \Rightarrow f(f(da)f(-db)) + f(d^2) = f(-d^2ab)$

$P(-da,db) \Rightarrow f(f(-da)f(db)) + f(-d^2) = f(-d^2ab)$

Kết hợp lại thì ta được $f(d^2) = f(-d^2)$. Lại có

$P(d,d) \Rightarrow f(f(d)^2) + f(2d) = f(d^2)$

$P(d,-d) \Rightarrow f(f(d)f(-d)) + f(0) + f(-d^2)$

Từ đây suy ra $f(2d) = f(0) = -1$. Mà theo **nhận xét 2** thì được $2d = 0 \Leftrightarrow d = 0 \Leftrightarrow a = b$. Suy ra f đơn ánh trên $\mathbb{R}$ $\square$

Khi này từ (1) thay $P(x, 1-x)$ ta được

$$f(f(x)f(1-x)) + f(1) = f(x(1-x)) \Leftrightarrow f(f(x)f(1-x)) = f(x(1-x)), \forall x \in \mathbb{R}$$

Vì f đơn ánh nên

$$f(x)f(1-x) = x(1-x), \forall x \in \mathbb{R} \tag{3}$$

Ta có

$$(3) \Leftrightarrow f(x)(f(-x)+1) = x - x^2 \Leftrightarrow f(x) + f(x)f(-x) = x - x^2, \forall x \in \mathbb{R} \tag{4}$$

Thay $x \to -x$ ta được

$$f(-x) + f(-x)f(x) = -x - x^2, \forall x \in \mathbb{R}$$

Suy ra $f(-x) = f(x) - 2x$. Thay biểu thức này vào (4) ta được

$$f(x) + f(x)(f(x) - 2x) = x - x^2 \Leftrightarrow f(x)^2 + (1-2x)f(x) + x^2 - x = 0$$

Xét theo nghiệm là $f(x)$ ta có $\Delta = (1-2x)^2 - 4(x^2 - x) = 4x^2 - 4x + 1 - 4x^2 + 4x = 1$. Giải phương trình này ta được $f(x) = x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$ hoặc $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thì hàm $f(x) = x$ không thỏa mãn.

Giả sử tồn tại $a \in \mathbb{R}$ mà $f(a) = a$.

Từ (1) thay $P(a, 0) \Rightarrow f(-a) + a = -1 \Leftrightarrow f(-a) = -1 - a$

Thay $P(-a, 0) \Rightarrow f(a+1) - a - 1 = -1 \Leftrightarrow a + 1 - a - 1 = -1$, vô lý. Vậy nên hàm thỏa mãn là $f(x) = x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Trường hợp 2: $f(0) = 1$. Để ý rằng khi thay hàm $f(x)$ bởi hàm $-f(x)$ vào (1) hàm này vẫn thỏa mãn, tức là $-f(x)$ cũng là nghiệm của (1), mà $-f(0) = -1$. Vậy nên giải tương tự với **trường hợp 1** thì ta được $f(x) = 1 - x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy tất cả hàm số thỏa mãn là

$$\boxed{f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}}, \boxed{f(x) = x - 1, \forall x \in \mathbb{R}}, \boxed{f(x) = 1 - x, \forall x \in \mathbb{R}}$$

$\square$

Bài toán 3. (IMO 2015). *Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x + f(x+y)) + f(xy) = x + f(x+y) + yf(x) \tag{1}$$

với mọi số thực x, y.

Lời giải. Ký hiệu $P(x, y)$ chỉ phép thế vào (1). Gọi $\mathbb{S} = \{t \mid f(t) = t\}$ là tập hợp điểm bất động.

$P(x,1) \Rightarrow f(x+f(x+1)) = x+f(x+1), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x+f(x+1) \in \mathbb{S}$

$P(0,0) \Rightarrow f(f(0)) = 0.$

$P(0,f(0)) \Rightarrow 2f(0) = f(0)^2$

Trường hợp 1: $f(0) = 2$.

Xét t là một điểm bất động bất kỳ của $\mathbb{S}$.

$P(t,0) \Rightarrow t+2 = 2t \Leftrightarrow t = 2$. Mặt khác $x+f(x+1) \in \mathbb{S}$ thế nên $x+f(x+1) = t = 2 \Leftrightarrow f(x) = 2-x, \forall x \in \mathbb{R}$

Trường hợp 2: $f(0) = 0$.

$P(0,x) \Rightarrow f(f(x)) = f(x) \Rightarrow f(x) \in \mathbb{S}$

$P(-x,x) \Rightarrow f(-x)+f(-x^2) = -x+xf(-x)(2).$

Cho $x = 1$ ta được $2f(-1) = -1+f(-1) \Rightarrow f(-1) = -1$

$P(x,-x) \Rightarrow f(x)+f(-x^2) = x-xf(x)(3).$

Cho $x = 1$ ta được $f(1) = 1$.

$P(x-1,1) \Rightarrow f(x-1+f(x)) = x-1+f(x) \Rightarrow x-1+f(x) \in \mathbb{S}$

$P(1,f(x)+x-1) \Rightarrow f(x+1+f(x)) = x+1+f(x) \Rightarrow x+1+f(x) \in \mathbb{S}.$

$P(x,-1) \Rightarrow f(x+f(x-1))+f(-x) = x+f(x-1)-f(x) \Leftrightarrow f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

Từ (2) và (3) suy ra $f(-x)-f(x) = -2x+x(f(-x)+f(x)) \Leftrightarrow -2f(x) = 2x \Leftrightarrow f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy các hàm số thỏa mãn là $\boxed{f(x) = 2-x, \forall x \in \mathbb{R}}$ và $\boxed{f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}}$ □

Bài toán 4. (Vietnam TST 2022). *Cho số thực α và xét hàm số $\varphi(x) = x^2e^{\alpha x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(\varphi(x)+f(y)) = y+\varphi(f(x))$$

với mọi số thực x, y.

Lời giải. Ký hiệu $P(x,y)$ chỉ phép thế vào (1).

$P(0,y) \Rightarrow f(f(y)) = y+\varphi(f(0)), \forall y \in \mathbb{R}$. Từ đây dễ dàng suy ra f song ánh. Khi đó $\exists c : f(c) = 0$.

$P(c,f(y)) \Rightarrow f(\varphi(c)+f(f(y))) = f(y)$. Vì f song ánh nên $\varphi(c)+f(f(y)) = y \Leftrightarrow \varphi(c)+y+\varphi(f(0)) = y \Leftrightarrow \varphi(c)+\varphi(0) = 0$.

Mà vì $\varphi : \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ nên $f(0) = c = 0$.

Từ (1) thay $P(x,0) \Rightarrow f(\varphi(x)) = \varphi(f(x)), \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $f(f(y)) = y$. Vì $\varphi(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và nhận mọi giá trị trong $[0,+\infty)$ nên $f(x) \geq 0, \forall x \geq 0$. $P(x,f(y))$ viết lại

$$f(\varphi(x)+y) = f(y)+f(\varphi(x)) \Leftrightarrow f(x+y) = f(x)+f(y), \forall x \geq 0, y \in \mathbb{R}$$

Với $x, y \in \mathbb{R}$ chọn $z > \max\{0,-y\}$ ta có

$$f(x+y)+f(z) = f(x+y+z) = f(x)+f(y+z) = f(x)+f(y)+f(z)$$

Suy ra f cộng tính trên $\mathbb{R}$. Ta phát biểu và chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề 1. *Xét hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bị chặn trên $[a, b]$ và thỏa mãn*

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Khi đó f tuyến tính trên $\mathbb{R}$.

Chứng minh. Giả sử tồn tại hàm $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ bị chặn trên đoạn $[a, b]$ và thỏa mãn điều kiện trên

Do f bị chặn trên đoạn $[a, b]$ nên $\exists M \in \mathbb{R}$ sao cho

$$f(x) < M, \forall x \in [a, b].$$

Ta sẽ chứng minh hàm số f cũng bị chặn trên đoạn $[0, b - a]$. Thật vậy, với mọi $x \in [0, b - a]$ thì $x + a \in [a, b]$. Ta có

$$f(x + a) = f(x) + f(a) \Rightarrow f(x) = f(x + a) - f(a) \Rightarrow -2M < f(x) < 2M.$$

Vậy $|f(x)| < 2M, \forall x \in [0, b - a]$, hay f cũng bị chặn trên đoạn $[0, b - a]$. Đặt $b - a = d > 0$, khi đó f bị chặn trên $[0, d]$. Đặt $c = \dfrac{f(d)}{d}, g(x) = f(x) - cx$. Khi đó với mọi $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ thì

$$g(x + y) = f(x + y) - c(x + y) = f(x) - cx + f(y) - cy = g(x) + g(y).$$

Hơn nữa $g(d) = f(d) - cd = 0$. Vậy $g(x + d) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$, hay g là hàm tuần hoàn, hơn nữa g cũng bị chặn trên $[0, d]$, kết hợp với tính tuần hoàn của g trên $\mathbb{R}$, suy ra g bị chặn trên $\mathbb{R}$. Giả sử tồn tại x_0 để $g(x_0) \neq 0$. Khi đó với $n \in \mathbb{N}$ thì $g(nx_0) = ng(x_0)$, suy ra

$$|g(nx_0)| = n|g(x_0)|, \forall n \in \mathbb{N}$$

Do $g(x_0) \neq 0$ nên từ (2) ta có $\lim\limits_{n \to +\infty} |g(nx_0)| = \lim\limits_{n \to +\infty} |ng(x_0)| = +\infty$, do đó $|g(nx_0)|$ không bị chặn, mẫu thuẫn. Vậy $g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó $\boxed{f(x) = cx, \forall x \in \mathbb{R}}$. Thử lại thì thỏa mãn. □

Áp dụng bổ đề trên ta được $f(x) = cx, \forall x \in \mathbb{R}$, thử lại tìm được $c = 1$. Vậy hàm số thỏa mãn là $\boxed{f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}}$ □

Bài toán 5. (Romania EGMO TST 2022). *Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(f(x) + y) = f\left(x^2 - y\right) + 4yf(x)$$

với mọi số thực x, y.

Lời giải. Ký hiệu $P(x, y)$ chỉ phép thế vào (1). $P\left(x, \dfrac{x^2 - f(x)}{2}\right)$ ta được

$$(x^2 - f(x))f(x) = 0$$

Khi đó có $f(0) = 0$. Dễ thấy rằng $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ là hai hàm thỏa mãn. Giả sử tồn tại $a, b \neq 0$ thỏa mãn $f(a) = 0$ và $f(b) = b^2$.

Lại có $P(0,y)$ suy ra f là hàm chẵn. Giả sử tồn tại $a,b>0$ thỏa mãn $f(a)=0$ và $f(b)=b^2$.

$P(b,-a) \Rightarrow f(b^2-a)=f(b^2+a)-4ab^2$

$P(a,y) \Rightarrow f(y)=f(a^2-y) \Rightarrow f(y)=f(a^2+y), \forall y \in \mathbb{R}$

$P(b,a^2) \Rightarrow f(b^2+a^2)=f(b^2-a^2)+4yb^2$

$\Leftrightarrow f(a^2+b^2)=f(a^2-b^2)+4a^2b^2 \Leftrightarrow f(b^2)=f(-b^2)+4a^2b^2 \Leftrightarrow 4a^2b^2=0$

Vô lý vì $a,b\neq 0$. Vậy các hàm số thỏa mãn là $\boxed{f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}}$, $\boxed{f(x)=x^2,\forall x\in\mathbb{R}}$. □

Bài toán 1. ***(IMO Shortlist 2004).*** *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x^2+y^2+2f(xy))=(f(x+y))^2$$

với mọi số thực x,y.

Lời giải. Ký hiệu $P(x,y)$ chỉ phép thế vào (?). Đặt $m=x^2+y^2, n=xy$, khi đó $m^2\geq 4n$, đặt $g(x)=2f(x)-2x$, viết lại

$$f(m^2+g(n))=f(m)^2, m^2\geq 4n \tag{1}$$

Gọi $c=f(0)=g(0)$, từ (1) thay $P(m,0)\Rightarrow f(m^2+c)=f(m)^2, \forall m\in\mathbb{R},(2)$

Nhận xét 1: $f(x)\geq 0, \forall x\geq c\geq 0(3)$

Chứng minh. Giả sử $c<0$.

Từ (2) thay $m\to\sqrt{-c}$ ta được $f(0)=f(\sqrt{-c})^2 \Leftrightarrow c=f(\sqrt{-c})^2\geq 0$, vô lý.

Suy ra $f(x+c)=f(\sqrt{x})^2\geq 0, \forall x\geq 0$. □

Nhận xét 2: f là hàm hằng khi $x>c$.

Chứng minh. Nếu g là hàm hằng thì dễ dàng thấy $f(x)=x, \forall x\in\mathbb{R}$ là một nghiệm. Giả sử g khác hằng. Xét $p_1>p_2\in\mathbb{R}$ bất kỳ sao cho $g(p_1)\neq g(p_2)$ và $u>v>\max\{4p_1,4p_2,c\}$ tùy ý sao cho $u^2-v^2=g(p_1)-g(p_2)=d$, với d là hằng số. Khi đó có

$$g(p_1)+v^2=g(p_2)+u^2$$

Khi này ta được

$$f(v)^2=f(v^2+g(p_1))=f(u^2+g(p_2))=f(u)^2$$

Vì $u,v>c$ nên $f(v),f(u)\geq 0$, thế nên $f(u)=f(v)$. Ta có

$$g(v)-g(u)=2(f(v)-f(u)-v+u)=2(u-v)=\frac{2d}{u+v}=t$$

với t tùy ý. Ta sẽ chứng minh rằng $g(u)-g(v)$ toàn ánh trên một đoạn nào đó. Thật vậy, bản chất của việc này là chứng minh hệ phương trình này theo u,v có nghiệm

$$\begin{cases} \dfrac{2d}{u+v}=t \\ u^2-v^2=2d \end{cases}$$

Giải hệ ta dễ dàng tìm được $\begin{cases} u = \dfrac{d}{t} + \dfrac{t}{2} \\ v = \dfrac{d}{t} - \dfrac{t}{2} \end{cases}$

Ngược lại, với cách chọn u, v như thế thì ta sẽ được $g(u) - g(v)$ nhận một giá trị $t > 0$ tùy ý. Chọn u, v thuộc đoạn $[M, 3M]$ với $M > \max\{4p_1, 4p_2, c\}$. Khi đó $g(u) - g(v)$ sẽ toàn ánh trên $[\delta, 2\delta]$ đủ nhỏ, tức là f là hàm hằng trên $[\delta, 2\delta]$.

Xét $p_1' = u$ và $p_2' = v$ và thực hiện tương tự thế, ta sẽ được nếu $a > b > L$ và $a^2 - b^2 \in [\delta, 2\delta]$ thế thì $f(a) = f(b)$, với $L = 12M$ đủ lớn. Khi đó ta sẽ được $L^2 + \delta \le a^2, b^2 \le L^2 + 2\delta$, suy ra f là hàm hằng trên $[\sqrt{L^2+\delta}, \sqrt{L^2+2\delta}]$. Tương tự vậy, f sẽ là hàm hằng trên đoạn $[\sqrt{L^2+2\delta}, \sqrt{L^2+3\delta}]$, $[\sqrt{L^2+3\delta}, \sqrt{L^2+4\delta}], \ldots$ Vậy nên hoàn tất chứng minh □

Xét x, y thỏa mãn $y > x \ge 2\sqrt{M}$ và $\delta < y^2 - x^2 < 2\delta$. Khi đó tồn tại u, v sao cho $x^2 + g(u) = y^2 + g(v)$. Ta được $f(x)^2 = f(y)^2$. Theo (3) thì $f(x) = k$ với $x \ge 2\sqrt{M}$. Thay vào đề bài thì ta tìm được $k^2 = k$

Từ đề bài cho $t = 0$ ta được $|f(z)| = |f(-z)| \le 1, z \le -2\sqrt{M}$. Ta có $g(u) = 2f(u) - 2u \ge -2 - 2u$ với $u \le -2\sqrt{M}$ cho $u \to -\infty$ thì có được g không bị chặn trên. Khi đó với mỗi z tồn tại z' sao cho $z + g(z') > 2\sqrt{r}$. Thế thì $f(z)^2 = f(z^2 + g(z')) = k = k^2$.

Rõ ràng $f(z) = \pm k$ với mỗi z. Với $k = 0$ thì $f(x) = 0$ là một nghiệm của phương trình. Với $k = 1$ ta có $c = 2f(0) = 2$, thế thì $f(x) = 1$ với mọi $x \ge 2$. Nếu $f(i) = -1$ với $i < 2$ nào đó thế thì $i - g(i) = 3i + 2 > 4i$. Giả sử $i - g(i) \ge 0$ thì đặt $j = i - g(i) > 4i$. Thế thì $f(j)^2 = f(j^2 + g(i)) = f(i) = -1$ vô lý.

Vì vậy nên $i - g(i) < 0$ và $i < \dfrac{-2}{3}$.

Vậy tất cả hàm số thỏa mãn là $\boxed{f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}}$, $\boxed{f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}}$ và

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} -1, & x \in \left(-\infty, -\dfrac{2}{3}\right) \\ 1, & x \notin \left(-\infty, -\dfrac{2}{3}\right) \end{cases}}$$

□

Bài toán 6. (IMO Shortlist 2015 A4). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn*

$$f(m - f(n)) = f(f(m)) - f(n) - 1 \tag{1}$$

với mọi số nguyên m, n.

Lời giải. Ký hiệu $P(m, n)$ chỉ phép thế vào (1). Với $f(m) = -1, \forall m \in \mathbb{Z}$ thì thỏa mãn, giả sử tồn tại m_0 để $f(m_0) \neq -1$.

$P(m, f(m)) \Rightarrow f(m - f(f(m))) = -1$. Suy ra tồn tại $a \in \mathbb{Z}$ để $f(a) = -1$.

$P(m, a) \Rightarrow f(m + 1) = f(f(m)), \forall m, n \in \mathbb{Z}(2)$

Viết lại có

$$f(m - f(n)) = f(m + 1) - f(n) - 1, \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

Đặt $k = f(n) + 1$. Thay $m \to m + f(n)$ ta được

$$f(m) = f(m+k) - k \Leftrightarrow f(m+k) = f(m) + k$$

Bằng quy nạp, ta chứng minh được $f(m+nk) = f(m) + nk, n \in \mathbb{Z}^+$

Thay $m \to m - nk$ ta được $f(m-nk) = f(m) - nk, \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Do đó

$$f(m+nk) = f(m) + nk, \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

Giả sử tồn tại $f(a) = f(b)$ và $a > b$. Ta có

$$f(a+1) = f(f(a)) = f(f(b)) = f(b+1)$$

Tương tự vậy ta cũng được $f(a+2) = f(b+2)$. Bằng quy nạp, ta chứng minh được $f(n+a) = f(n+b), \forall n \in \mathbb{N}$. Đặt $d = a - b$, cho $n \to n - b$ ta được

$$f(n) = f(n+d) = \cdots = f(n+tkd) = f(n) + tkd, \forall t \in \mathbb{Z}^+$$

Vô lý, suy ra $d = 0$ nên f đơn ánh. Từ (2) suy ra $f(m) = m + 1$.

Vậy các hàm số thỏa mãn là $\boxed{f(m) = -1, \forall m \in \mathbb{Z}}$, $\boxed{f(m) = m + 1, \forall m \in \mathbb{Z}}$. ☐

Bài toán 7. (IMO 2012). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn*

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$

với mọi số nguyên a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0$.

Lời giải. Đặt $c = -a - b$, ta viết lại

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(-a-b)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(-a-b)(f(a) + b(b)), \forall a, b \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

Ký hiệu $P(a, b)$ chỉ phép thế vào (1).

$P(0, 0)$ ta được $3f(0)^2 = 6f(0)^2 \Rightarrow f(0) = 0$.

$P(a, 0) \Rightarrow f(a)^2 + f(-a)^2 = 2f(-a)f(a) \Leftrightarrow f(a) = f(-a), \forall a \in \mathbb{Z}$

Suy ra f là hàm chẵn trên $\mathbb{Z}$.

Từ (1) viết lại

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(a+b)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(a+b)(f(a) + f(b)), \forall a, b \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

Từ (2) thay $P(a, a)$ ta được $f(2a)^2 = 4f(2a)f(a) \Leftrightarrow (f(2a) - 4f(a))f(2a) = 0, \forall a \in \mathbb{Z}$

Trường hợp 1: $f(2a) = 0, \forall a \in \mathbb{Z}$.

Từ (2) thay $P(2a, b)$ ta được

$$f(b)^2 + f(2a+b)^2 = f(2a+b)f(b) \Leftrightarrow f(b) = f(2a+b)$$

Suy ra với mọi b lẻ thì $f(b) = c$ với $c \in \mathbb{Z}$. Vậy hàm số thỏa mãn là

$$\boxed{f(a) = \begin{cases} 0, & a \text{ chẵn} \\ c, & a \text{ lẻ} \end{cases}}$$

Trường hợp 2: $f(2a) = 4f(a), \forall a \in \mathbb{Z}$. Từ (2) thay $P(2a, a)$ ta được

$$9f(a)^2 - 10f(a)f(3a) + f(3a)^2 = 0 \Leftrightarrow (f(3a) - f(a))(f(3a) - 9f(a)) = 0$$

Trường hợp 2.1: $f(a) = f(3a)$. Từ (2) thay $P(a, 3a)$ ta được $f(a) = 0, \forall a \in \mathbb{Z}$.

Trường hợp 2.2: $f(3a) = 9f(a)$. Ta sẽ chứng minh $f(na) = n^2 f(a)$ bằng quy nạp. Với $n = 2, 3$ thì hiển nhiên đúng. Giả sử $f(ka) = k^2 f(a)$ với mọi $k \leq n$.

Từ (2) thay $P(na, a)$ ta được

$$(n^2 - 1)^2 f(a)^2 - (2n^2 + 2)f(a)f((n+1)a) + f((n+1)a)^2 = 0$$

Tương đương với

$$[(n+1)f(a)^2 - f((n+1)a)][(n-1)^2 f(a) - f((n+1)a)] = 0$$

Nếu $(n-1)^2 f(a) = f((n+1)a) \Leftrightarrow f((n-1)a) = f((n+1)a)$ thì tương tự trường hợp 2.1 ta được $f(a) = 0, \forall a \in \mathbb{Z}$.

Với $(n+1)f(a)^2 = f((n+1)a)$ thì hoàn tất chứng minh quy nạp. Cho $a = 1 = d$, ta được $f(n) = dn^2, \forall n \in \mathbb{N}$. Vì f là hàm chẵn nên cũng có $f(-n) = dn^2$.

Vậy hàm số thỏa mãn là $\boxed{f(a) = da^2, \forall a \in \mathbb{Z}}$ và $d \in \mathbb{Z}$ và

$$\boxed{f(a) = \begin{cases} 0, & a \text{ chẵn} \\ c, & a \text{ lẻ} \end{cases}}$$

□

Bài toán* 8. *(Japan MO Final 2019). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \Rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn*

$$f\left(\frac{f(y)}{f(x)} + 1\right) = f\left(x + \frac{y}{x} + 1\right) - f(x)$$

với mọi số thực dương x, y.

Lời giải. Ký hiệu $P(x, y)$ chỉ phép thế vào (1).

Thay $P(x, x)$ ta được

$$f(2) = f(x+2) - f(x), \forall x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Ta sẽ chứng minh f đơn ánh. Giả sử tồn tại a, b để $f(a) = f(b)$ và $a > b$. $P(x, a), P(x, b)$ ta được

$$f\left(x + \frac{a}{x} + 1\right) = f\left(x + \frac{b}{x} + 1\right), \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Cho $x = \dfrac{a-b}{2}$, ta được

$$f\left(\frac{a-b}{2} + \frac{2a}{a-b} + 1\right) = f\left(\frac{a-b}{2} + \frac{2b}{a-b} + 1\right)$$

Tuy nhiên, từ (2) cho $x \to \dfrac{a-b}{2} + \dfrac{2b}{a-b} + 1$ ta được

$$f\left(\frac{a-b}{2} + \frac{2a}{a-b} + 1\right) - f\left(\frac{a-b}{2} + \frac{2b}{a-b} + 1\right) = f(2) > 0$$

Vô lý, vậy nên f phải đơn ánh.

Thay $P(2, 2x)$ ta được

$$f\left(\frac{f(2x)}{2} + 1\right) = f(x+3) - f(2), \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Mà từ (2) lại có $f(x+1) = f(x+3) - f(2), \forall x \in \mathbb{R}^+$. Suy ra ta được

$$f\left(\frac{f(2x)}{2} + 1\right) = f(x+1) \Rightarrow \frac{f(2x)}{2} + 1 = x + 1 \Rightarrow f(x) = cx, \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Thử lại thì thỏa mãn. Vậy hàm số thỏa mãn là $\boxed{f(x) = cx, \forall x \in \mathbb{R}^+}$ với $c > 0$. □

Bài toán* 9. *(VMO 2022). *Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \Rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn*

$$f\left(\frac{f(x)}{x} + y\right) = 1 + f(y) \tag{1}$$

với mọi số thực dương x, y.

Lời giải. Ký hiệu $P(x, y)$ chỉ phép thế vào (1).

Cách 1:

Gọi $\mathbb{T} = \left\{\dfrac{f(x)}{x} | x \in \mathbb{R}^+\right\}$. Giả sử T nhận nhiều hơn một giá trị. Gọi $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$ sao cho $t_1 > t_2$. Khi đó tồn tại $a_1, a_2 > 0$ sao cho $t_1 = \dfrac{f(a_1)}{a_1}, t_2 = \dfrac{f(a_2)}{a_2}$. Lần lượt $P(a_1, y)$, $P(a_2, y)$ và so sánh, ta được

$$f(y + t_1) = f(y + t_2), \forall y \in \mathbb{R}^+$$

Thay $y \to y - t_2$ và đặt $\delta = t_1 - t_2 > 0$, ta được $f(y) = f(y + \delta), \forall y > t_2$. Bằng quy nạp dễ dàng chứng minh được

$$f(y) = f(y + n\delta), \forall y > t_2, n \in \mathbb{Z}^+ \tag{2}$$

Mặt khác, $P(x, \frac{f(x)}{x} + y)$ ta được

$$f\left(2\frac{f(x)}{x} + y\right) = 2 + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

Cũng bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$f\left(n\frac{f(x)}{x} + y\right) = n + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^+ \tag{3}$$

Từ (3) thay $P(1, x - nf(1))$ thì được

$$f(x) = n + f(x - nf(1)) > n, \forall x > nf(1)$$

Khi này chọn $n_0 > \left\lfloor \frac{f(1)n}{\delta} \right\rfloor$, từ (3) cho $n = n_0$ ta được $f(x) = f(x + n_0\delta) > n, \forall x > t_2$. Khi này cho $n \to +\infty$ và cố định x (vì x không phụ thuộc vào n) thì $f(x) \to +\infty$ vô lý.

Suy ra $t_1 = t_2$ hay $\mathbb{T}$ chỉ nhận duy nhất một giá trị.

Vậy $f(x) = cx, \forall x \in \mathbb{R}^+$ và $c > 0$. Thử lại tìm được $c = 1$.

Vậy hàm duy nhất thỏa mãn là $\boxed{f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}^+}$.

Cách 2: Từ đề bài thay $P(x, \frac{f(x)}{x} + y)$ ta được

$$f\left(2\frac{f(x)}{x} + y\right) = 2 + f(y)$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được

$$f\left(n\frac{f(x)}{x} + y\right) = n + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

Giả sử tồn tại a, b sao cho $\frac{f(a)}{a} \neq \frac{f(b)}{b}$ và không mất tính tổng quát, giả sử $\frac{f(a)}{a} > \frac{f(b)}{b}$.
Lần lượt cho $P(a, y)$ và $P(b, y)$ ta được

$$f\left(\frac{f(a)}{a} + y\right) = f\left(\frac{f(b)}{b} + y\right), \tag{2}$$

Đặt $k = \frac{f(a)}{a} - \frac{f(b)}{b}$. Ta được $f(x) = f(x + k), x > \frac{f(b)}{b}$. Mặt khác, từ giả thuyết có

$$f\left(n\frac{f(x)}{x} + y\right) = n + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

hay $f(x) > n$ với $x > n\frac{f(a)}{a}$. Cố định x chọn $n = [f(x)] + 2 > f(x)$ và số nguyên dương m sao cho $x + mk > n\frac{f(a)}{a}$, như vậy $f(x + mk) > n > f(x) = f(x + mk)$ vô lý. Do đó $\boxed{f(x) = cx, \forall x \in \mathbb{R}^+}$.

Cách 3: Trước hết ta phát biểu và chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề 2. *Cho các hàm số $f, g, h : \mathbb{R}^+ \Rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn*

$$f(g(x) + y) = h(x) + f(y)$$

với mọi số thực dương x, y. Khi đó hàm $\dfrac{g(x)}{h(x)}$ là hàm hằng.

Chứng minh. Ký hiệu $P(x, y)$ chỉ khẳng định $f(g(x)+y) = h(x)+f(y), \forall x, y > 0$. Từ $P(x, y-g(x))$ ta suy ra

$$f(y - g(x)) = f(y) - h(x), \forall x > 0, y > g(x).$$

Với $x, y > 0$ và $p, q \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $pg(x) - qg(y) > 0$, từ các đẳng thức trên ta dễ dàng chứng minh được

$$f(z + pg(x) - qg(y)) = f(z) + ph(x) - qh(y)$$

với mọi $z > 0$. Nếu $ph(x) - qh(y) < 0$, khi đó ta thay (p, q) bởi (kp, kq) với k nguyên dương đủ lớn thì

$$f(z) + ph(x) - qh(y) < 0,$$

vô lý. Như vậy

$$pg(x) > qg(y) \Rightarrow ph(x) \geq qh(y) \quad \forall x, y > 0,$$

hay $\dfrac{g(x)}{g(y)} > \dfrac{q}{p} \Rightarrow \dfrac{h(x)}{h(y)} \geq \dfrac{q}{p} \quad \forall x, y > 0.$

Giả sử $\dfrac{g(x)}{g(y)} > \dfrac{h(x)}{h(y)}$, khi đó ta có thể chọn $p, q \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $\dfrac{g(x)}{g(y)} > \dfrac{q}{p} > \dfrac{h(x)}{h(y)}$ điều này mâu thuẫn với chứng minh trên. Vậy

$$\frac{h(x)}{h(y)} \geq \frac{g(x)}{g(y)} \Rightarrow \frac{h(x)}{g(x)} \geq \frac{h(y)}{g(y)} \quad \forall x, y > 0.$$

Thay đổi vai trò x, y trong đánh giá trên ta thu được $\dfrac{h(x)}{g(x)} = \dfrac{h(y)}{g(y)} = c \quad \forall x, y > 0.$ □

Trở lại bài toán. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn. Áp dụng bổ đề trên ta suy ra tồn tại số thực dương c sao cho

$$\frac{f(x)}{x} = c \Rightarrow f(x) = cx \quad \forall x > 0$$

Từ đây tìm được $c = 1$. Vậy hàm duy nhất thỏa mãn là $\boxed{f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}^+}$. □

Bài toán 10. ***(Balkan MO 2022).*** *Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \Rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn*

$$f\left(yf(x)^3 + x\right) = x^3 f(y) + f(x) \tag{1}$$

với mọi số thực dương x, y.

Lời giải. Ký hiệu $P(x, y)$ chỉ phép thế vào (1).

Nhận xét 1: f là hàm tăng ngặt trên $\mathbb{R}^+$.

Chứng minh. Từ (1) ta có

$$f(yf(x)^3) > f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}^+ \tag{2}$$

Từ (2), thay $P\left(x, \dfrac{y}{f(x)^3}\right)$ ta được $f(x+y) > f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}^+$. Suy ra f là hàm tăng ngặt, nên f cũng đơn ánh trên $\mathbb{R}^+$. $\square$

Nhận xét 2: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Chứng minh. Vì f tăng ngặt và $f(x) > 0$ nên phải tồn tại $L = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$, ta có $f(x) > L, \forall x \in \mathbb{R}^+$. Ta có

$$f(yL^3) < f(yf(x)^3 + x) = x^3 f(y) + f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

Cho $x \to 0^+$ thì được $f(yL^3) \le L, \forall y \in \mathbb{R}^+$. Thế nên $yL^3 = 0$ hay $L = 0$.

$\square$

Nhận xét 3: f là hàm liên tục trên $\mathbb{R}^+$.

Chứng minh. Ta có $f(yf(x)^3 + x) - f(x) = x^3 f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^+$. Đặt $h = yf(x)^3$, cho $x = x_0 > 0$ bất kỳ, $y \to 0^+$ thì $h \to 0^+$, ta được

$$\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0$$

Vậy nên f liên tục trên $\mathbb{R}^+$. $\square$

Nhận xét 4: f song ánh trên $\mathbb{R}^+$

Chứng minh. Thật vậy từ (1) cho $x \to +\infty$ thì ta được $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Mà f liên tục và không bị chặn trên nên f toàn ánh. Suy ra f song ánh trên $\mathbb{R}^+$. $\square$

Nhận xét 5: $f(1) = 1$.

Chứng minh. Giả sử $f(1) < 1$ thì $P\left(1, \dfrac{1}{1 - f(1)^3}\right)$ suy ra $f(1) = 0$, vô lý.

Giả sử $f(1) > 1$, thì vì f song ánh nên tồn tại $t < 1$ để $f(t) = 1$.

$P(t, y) \Rightarrow f(y + t) = t^3 f(y) + 1 > f(y) \Leftrightarrow 1 > (1 - t^3) f(y)$ vô lý vì f không bị chặn trên. Vì vậy $f(1) = 1$ $\square$

Nhận xét 6: $f(q) = q, \forall q \in \mathbb{Q}^+ (4)$

Chứng minh. Thay $P(1, y)$ ta được $f(y+1) = f(y) + 1, \forall y \in \mathbb{R}^+$. Bằng quy nạp ta chứng minh được $f(y + n) = f(y) + n, \forall y \in \mathbb{R}^+$ và $n \in \mathbb{Z}^+$. Cho $y \to 0^+$ ta được $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Với $m, n \in \mathbb{Z}^+$, thay $P\left(m, \dfrac{n}{m}\right)$ ta được

$$f(nm^2 + m) = m^3 + f\left(\frac{m}{n}\right) + f(m) \Leftrightarrow f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}, \forall m, n \in \mathbb{Z}^+$$

$\square$

Khi này, với mọi số thực $x > 0$, ta chọn dãy (u_n) thỏa mãn $u_n = \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Khi này ta có

$$\frac{nx - 1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} < \frac{nx + 1}{n}$$

Vì f liên tục trên $\mathbb{R}^+$ nên

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{nx-1}{n}<\lim_{n\to+\infty}u_n<\lim_{n\to+\infty}\frac{nx+1}{n}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}u_n=x$$

Từ (4) thay $x=u_n$ ta được

$$\lim_{n\to+\infty}f(u_n)=f(\lim_{n\to+\infty}u_n)=\lim_{n\to+\infty}u_n=x$$

Vậy hàm số duy nhất thỏa mãn là $\boxed{f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}^+}$. □

Bài toán 11. ***(Switzerland TST 2022).*** *Tìm tất cả hàm số $f:\mathbb{R}^+\Rightarrow\mathbb{R}^+$thỏa mãn*

$$x+f(yf(x)+1)=xf(x+y)+yf(yf(x))$$

với mọi số thực dương x,y.

Lời giải. Ký hiệu $P(x,y)$ chỉ phép thế vào (1).

Nhận xét 1: f không bị chặn trên.

Chứng minh. Từ $P\left(x,\dfrac{y}{f(x)}-1\right)$ suy ra

$$f(y)=xf\left(x+\frac{y-1}{f(x)}\right)+\frac{y-1}{f(x)}f(y-1)-x,\forall x\in\mathbb{R}^+,y>1 \tag{2}$$

Từ (2) ta cho $y\to+\infty$ thì vế phải $\to+\infty$ nên $\lim\limits_{y\to+\infty}f(y)=+\infty$. □

Nhận xét 2: f đơn ánh trên $\mathbb{R}^+$

Chứng minh. Giả sử có $f(a)=f(b)$ mà $a>b$. Đặt $d=a-b,q=\dfrac{b}{a},r=\dfrac{d}{a}$, ta có $d,q,r>0$ và $q<1$.

Thay lần lượt $P(a,x),P(b,x)\Rightarrow a-af(a+x)=b-bf(b+x)$.

Cho $x\to x-b$ và đặt $\delta=4b$ là một số đủ lớn, ta được

$$f(x+d)=qf(x)+r,\forall x>\delta \tag{$\clubsuit$}$$

Ta phát biểu và chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề 3. *Xét hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn*

$$f(x+d)=qf(x)+r,\forall x>M$$

với M là một số thực dương đủ lớn với $q<1$ và $d,r>0$. Khi đó $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{r}{1-q}$.

Chứng minh. Thay $x\to x+d$ thì được

$$f(x+2d)=qf(x+d)+r=q(qf(x)+r)+r=q^2f(x)+qr+r,\forall x>\delta$$

Ta sẽ chứng minh điều này đúng bằng quy nạp khi thay 2 bởi n. Giả sử có

$$f(x+nd)=q^n f(x)+r\sum_{i=0}^{n} q^i, \forall x>\delta \tag{3}$$

Từ (3) thay $x \to x+d$ ta được

$$f(x+(n+1)d)=q^n f(x+d)+r\sum_{i=0}^{n} q^i = q^n(qf(x)+r)+r\sum_{i=0}^{n} q^i = q^{n+1}f(x)+r\sum_{i=0}^{n+1} q^i$$

Vậy là giả thuyết quy nạp được chứng minh.

Từ (3) ta viết lại

$$f(x+nd)=q^n f(x)+r.\frac{1-q^n}{1-q}, \forall x>\delta \tag{4}$$

Từ (4) cho $n \to +\infty$ với chú ý $q<1$ ta có

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{n\to+\infty} f(x+nd)=\frac{r}{1-q}$$

Hoàn tất chứng minh. □

Áp dụng bổ đề trên cho (♣) thì ta được $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{r}{1-q}$.

Nhưng theo **nhận xét 2** thì f không bị chặn trên và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ nên dẫn tới vô lý.

Suy ra $q=1$ hay $d=0 \Rightarrow a=b$. Thế nên f đơn ánh trên $\mathbb{R}^+$. □

Từ (1) thay $P\left(x, \dfrac{y}{f(x)}\right)$ suy ra

$$x+f(y+1)=xf\left(x+\frac{y}{f(x)}\right)+\frac{y}{f(x)}f(y), \forall x,y\in\mathbb{R}^+$$

Cho $x=y=1$ ta được $f(2)=f(1+\dfrac{1}{f(1)})$. Vì f đơn ánh nên $f(1)=1$.

Từ (1) thay $P(1,x)\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{x}, \forall x\in\mathbb{R}^+$. Thử lại thì thỏa mãn. Vậy hàm duy nhất thỏa mãn là $\boxed{f(x)=\dfrac{1}{x}, \forall x\in\mathbb{R}^+}$. □

Bài toán* 12. *(Iran MO Round 3). *Find all function $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ such that*

$$f(f(x)+yf(y))=x+|y|^2$$

if $y=a+bi$ then $|y|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Lời giải. Let $P(x,y)$ be the assertion $f(f(x)+yf(y))=x+|y|^2$. $P(x,0) = f(f(x))=x$. With this $P(x,f(y)) = |y|=|f(y)|$ for all $y\in\mathbb{C}$ which leads us to $f(0)=0$.

Let $|y_1|=|y_2|$ be two complex numbers. Then using injectivity of f we get $P(x,y_1),P(x,y_2) =$

$y_1 f(y_1) = y_2 f(y_2)$. Let $y_1 = y$ and $y_2 = |y|$ we get that

$$f(y) = \frac{\bar{y}}{|y|} f(|y|) \quad (1).$$

So it suffices to find f on the real line $\mathbb{R}$. By applying $f()$ both sides of $P(x,y)$ we get $f(x + |y|^2) = f(x) + yf(y)$. By inserting $x = 0$ in this equation and rewriting the equation we get $f(x+|y|^2) = f(x) + f(|y|^2)$. Then for any two positive real numbers x, y we have

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

We know that $|f(x)| = |x|$ for any complex number x. Using triangle inequality, for positive reals a, b we have

$$a + b = |a+b| = |f(a+b)| = |f(a) + f(b)| \leq |f(a)| + |f(b)| = |a| + |b| = a + b.$$

The equality case of triangle inequality gives us that $f(x) = xf(1)$ for all positive real x. So $f(|x|) = |x| f(1)$ for any $x \in \mathbb{C}$. This with (1) gives us

$$\forall y \in \mathbb{C} : \ f(y) = f(1) \cdot \bar{y}.$$

And so $\boxed{f(y) = e^{i\theta}\overline{y} \quad \forall y \in \mathbb{C}}$, which indeed fits, whatever is $\theta \in [0, 2\pi)$. □

Bài toán* 13.** ***(Japan MO Final 2021). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z}^+ \Rightarrow \mathbb{Z}^+$ sao cho*

$$n \mid m \Leftrightarrow f(n) \mid f(m) - n \tag{1}$$

Lời giải. Ký hiệu $P(m,n)$ chỉ phép thế vào (1).

Nhận xét 1: $n \mid m \Leftrightarrow f(n) \mid f(m)$.

Chứng minh. Thay $P(n,n)$ ta được

$$f(n) \mid f(n) - n \Rightarrow f(n) \mid n, \forall n \in \mathbb{Z}^+ \tag{2}$$

Từ đây suy ra

$$n \mid m \Leftrightarrow f(n) \mid f(m) \tag{3}$$

□

Nhận xét 2: $f(p) = q, \forall p \in \mathbb{P}$.

Chứng minh. Từ (2) cho $n = 1$ ta được $f(1) \mid 1 \Rightarrow f(1) = 1$.

Xét số nguyên tố $p \in \mathbb{P}$ bất kỳ. Từ (2) cho $n = p$ ta được

$$f(p) \mid p, \forall p \in \mathbb{P}$$

Suy ra $f(p) = \{1, p\}, \forall p \in \mathbb{P}$. Ta sẽ chứng minh f đơn ánh. Giả sử có $f(a) = f(b)$ với $a \mid b$ và $a < b$. Từ (3) thay $P(b,a)$ thì suy ra $a = b$ vô lý. Vậy nên f đơn ánh. Mà ta đã có $f(1) = 1$ nên $f(p) = p, \forall p \in \mathbb{P}$. □

Nhận xét 3: $f(p^k) = p^k, \forall k \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P}$

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh điều này đúng bằng quy nạp. Với $k = 1$ thì hiển nhiên đúng.

Giả sử có $f(p^{k-1}) = p^{k-1}$, từ (2) cho $n = p^k \Rightarrow f(p^k) \mid p^k$.

Mặt khác từ (3) thay $P(p^k, p^{k-1}) \Rightarrow p^{k-1} \mid f(p^k)$. Từ đây suy ra $f(p^k) = p^k$. □

Nhận xét 4: $f(m) = m, \forall m \in \mathbb{Z}^+$. Theo định lý số học cơ bản, ta phân tích

$$m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_t^{k_t}$$

Với $p_1, p_2, \dots p_k \in \mathbb{P}$ và $k_1, k_2, \dots \in \mathbb{Z}^+$. Từ (3) lần lượt thay $P(m, p_1^{k_1}), P(m, p_2^{k_2}), \dots, P(m, p_t^{k_t})$. Mặt khác lại có

$$(f(p_1^{k_1}), f(p_2^{k_2}), \dots, f(p_t^{k_t})) = 1$$

Vì vậy nên

$$f(p_1^{k_1}), f(p_2^{k_2}), \dots, f(p_t^{k_t}) \mid f(m)$$

Từ (2) $n \to m$ thì được

$$f(m) \mid f(p_1^{k_1}), f(p_2^{k_2}), \dots, f(p_t^{k_t})$$

Vậy hàm số duy nhất thỏa mãn là $\boxed{f(m) = m, \forall m \in \mathbb{Z}^+}$. □

Bài toán 2. ***(Indonesia TST 2022).*** *Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f\left(x^2\right) - f\left(y^2\right) \le (f(x) + y)(x - f(y))$$

với mọi số thực x, y.

Bài toán* 14. *(Japan MO Final 2022). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z}^+ \Rightarrow \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn*

$$f^{f(n)}(m) + mn = f(m)f(n) \tag{1}$$

Lời giải. Ký hiệu $P(m, n)$ chỉ phép thế vào (1).

Ta thấy rằng không có giá trị nào của f bằng 1. Dễ dàng chứng minh được f là hàm đơn ánh. $P(n, m)$ và đối chiếu, ta được

$$f^{f(n)}(m) = f^{f(m)}(n), \forall m, n \in \mathbb{Z}^+$$

Giả sử $f(n) \ge f(m)$, vì f đơn ánh nên ta được

$$f^{f(n)-f(m)}(m) = n \tag{3}$$

Ta chứng minh rằng $f(1)$ là giá trị nhỏ nhất của hàm. Giả sử tồn tại $f(a) < f(1)$, từ (3) thay $P(1, a)$ ta được

$$f^{f(1)-f(a)}(a) = 1$$

vô lý, vậy nên giá trị của $f(1)$ là nhỏ nhất. Suy ra $f(2) > f(1)$. Từ (3) thay $P(1, 2)$ ta được

$$f^{f(2)-f(1)}(1) = 2$$

Vì $f(1) > 1$ nên $f(1) = 2$. Từ (1) thay $P(m, 1)$ ta được

$$f(f(m)) + m = f(m), \forall m \in \mathbb{Z}^+ \tag{4}$$

Ta sẽ quy nạp $f(m) = m + 1$. Giả sử có $f(m-1) = m$ với $m > 2$. Từ (4) thay $m \to m - 1$ ta được

$$f(f(m-1)) + m = 2f(m-1) \Leftrightarrow f(m) = m$$

Vậy hàm số duy nhất thỏa mãn là $\boxed{f(m) = m, \forall m \in \mathbb{Z}^+}$. □

Bài toán 15. (Japan MO Final 2024). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z}^+ \Rightarrow \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn*

$$\textit{lcm}(m, f(m + f(n))) = \textit{lcm}(f(m), f(m) + n), \forall m, n \in \mathbb{Z}^+ \tag{1}$$

Lời giải. Ký hiệu $P(m, n)$ là phép thế vào (1).

$P(m, mf(m))$ suy ra

$$[m, f(m + f(mf(m)))] = [f(m), f(m) + mf(m)] = f(m)(m + 1), \forall m, n \in \mathbb{Z}^+$$

Từ đó ta được $m \mid f(m)(m + 1) \Rightarrow m \mid f(m) \Rightarrow f(m) \geq m, (2)$

$P(1, 1) \Rightarrow f(1 + f(1)) = f(1)(f(1) + 1)$

$P(1, 1 + f(1))$ suy ra

$$f(1 + f(1)^2 + f(1)) = [f(1), 2f(1) + 1] = 2f(1)^2 + f(1)$$

Từ (2) suy ra $1 + f(1)^2 + f(1) \mid 2f(1)^2 + f(1) \Rightarrow f(1) = 1$

Từ (1) thay $P(1, n) \Rightarrow f(1 + f(n)) = n + 1 \geq 1 + f(n) \Rightarrow f(n) \leq n \Leftrightarrow$

Mà lại theo (2) thì ta được hàm thỏa mãn là $f(m) = m, \forall m \in \mathbb{Z}^+$. □

Bài toán 16. (KMF 2022). *Tìm tất cả các hàm số $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:*

$$f(x^2 - g(y)) = g(x)^2 - y, \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Lời giải. Let $P(x, y)$ denote the substitution into (1). Let $a = g(0)$.

Claim1: f is surjective and g is injective.

Chứng minh. From $P(x, 0)$, we have $g(x)^2 = f(x^2 - a)$. Rewriting,

$$f(x^2 - g(y)) = f(x^2 - a) - y, \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Suppose there exist a, b such that $g(a) = g(b)$. Using $P(x, a)$ and $P(x, b)$, we find $a = b$, proving g is injective.

Moreover, from (2) substituting $P(x, -y + f(x^2 - a))$, we conclude that f is surjective.

From (1) substituting $P(-x, y)$, we get $g(x)^2 = g(-x)^2$. Since g is injective, we have $g(x) = -g(-x)$ for all $x \neq 0$. □

Claim2: g is unbounded above.

Chứng minh. Assume there exists M such that $|g(x)| \leq M$. For any arbitrary y_1, y_2, there exist x_1, x_2 satisfying

$$x_1^2 - x_2^2 = g(y_1) - g(y_2) \Rightarrow g(x_1)^2 - g(x_2)^2 = y_1 - y_2$$

Choosing y_1, y_2 such that $y_1 - y_2 > 4M$ leads to a contradiction, hence g is unbounded above. □

Claim3: f and g are bijective.

Chứng minh. Suppose $f(a) = f(b)$. Choose $y_0 > \max\{-a, -b\}$. Choose x_1, x_2 such that $x_1^2 - g(y_0) = a$ and $x_2^2 - g(y_0) = b$. Since f is injective and g is odd and injective, we deduce

$$g(x_1)^2 - y_0 = g(x_2)^2 - y_0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Thus, f is injective, implying f is bijective.

From (1) substituting $P(0, y)$, we obtain $f(-g(y)) = g(0)^2 - y$. Hence, g is surjective, implying g is bijective. □

Thus, there exists c such that $g(c) = 0$. If $c \neq 0$, then $g(-c) = 0$, which is contradictory. Therefore, $g(0) = 0$.

Claim4: f is additive.

Chứng minh. From (1) substituting $P(0, 0)$, we get $f(0) = 0$. Substituting $P(x, 0)$ gives

$$f(x^2) = g(x)^2 \Rightarrow f(x^2 - g(y)) = f(x^2) - y \Rightarrow f(x - g(y)) = f(x) - y, \forall x \geq 0, y \in \mathbb{R} \quad (3)$$

From (1) substituting $P(0, -y)$, we have $f(g(y)) = y$. Using (3) substituting $P(x, f(y))$, we obtain

$$f(x - y) = f(x) - f(y) \Rightarrow f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

□

Since $f(x^2) = g(x)^2 \Rightarrow f(x) \geq 0$ for all $x \geq 0$, by **Lemma 1**, we conclude $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$. Testing again, we find $a = 1$ and $f(x) = x$.

Therefore, the pair of functions that satisfy these conditions is $\boxed{f(x) = x, g(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}}$.

□

Bài toán* 17. *(Balkan MO 2024). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ và đa thức $P(x)$ với hệ số thực không âm thỏa mãn $P(0) = 0$ và*

$$f(f(x) + P(y)) = f(x - y) + 2y$$

với mọi số thực dương $x > y > 0$.

Lời giải. Dự đoán $f(x) = P(x) = x$ là một nghiệm và ta sẽ chứng minh cặp nghiệm này là duy nhất.

Nhận xét 1: $f(x) \geq x, \forall x \in \mathbb{R}^+$.

Chứng minh. Giả sử tồn tại $x_0 > 0$ sao cho $f(x_0) < x_0$. Dễ thấy đa thức $P(y) + y$ toàn ánh, thế nên tồn tại y_0 để $P(y_0) + y_0 = f(x_0) - x_0$. Thay $P(x_0, y_0)$ ta được $2x_0y_0 = 0$, cả hai trường hợp đều vô lý, vậy nên $f(x) \geq x, \forall x \in \mathbb{R}^+$. □

Nhận xét 2: $\deg P(x) < 2$.

Chứng minh. Từ nhận xét 1, ta có

$$f(x-y) + 2y \geq f(x) + P(y) \tag{2}$$

Giả sử $\deg P(x) \geq 2$. Vì $P(y) - 2y$ toàn ánh và đơn điệu trên các khoảng xác định, khi đó tồn tại $N > 0$ đủ lớn sao cho $P(y) > 2y, \forall y > N$, thay $y > N$ vào (2) ta được

$$f(x-y) + 2y > f(x) + 2y \Leftrightarrow f(x-y) > f(x)$$

Suy ra f giảm ngặt trên $(N, +\infty)$. Mặt khác, từ (2) cho $P(x+y, y)$ ta được

$$f(x) - f(x+y) \geq P(y) - 2y$$

Cố định x và cho $y \to +\infty$ ta có LHS hội tụ về một giá trị xác định, còn $RHS \to +\infty$, vô lý, vậy nên $\deg P(x) < 2$ □

Trường hợp 1: $\deg P(x) = 0$ hay $P(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$, khi này viết lại

$$f(f(x)) = f(x-y) + 2y, \forall x > y > 0 \tag{1}$$

Để ý rằng $f(f(x)) \geq x+y$, cho $y \to x^-$ ta được $f(f(x)) \geq 2x, \forall x \in \mathbb{R}^+$. Từ đó có $f(x-y)+2y \geq 2x \Leftrightarrow f(x-y) \geq 2x-2y$. Lại cho $y \to 0^-$ ta được $f(x) \geq 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó ta được $f(f(x)) \geq 4x$ và

$$f(x-y) + 2y \geq 4x + 2y \Leftrightarrow f(x-y) \geq 4x, \forall x > y > 0$$

Cho $y \to x^-$ lần nữa ta được $4x \leq f(0), \forall x \in \mathbb{R}^+$ vô lý.

Trường hợp 2: $\deg P(x) = 1$ hay $P(x) = ax$ với $a > 0$, viết lại

$$f(f(x) + ay) = f(x-y) + 2y \tag{1}$$

Ta có đánh giá

$$f(x-y) + 2y \geq x + ay \Leftrightarrow f(x-y) \geq x + (a-2)y, x > y$$

Thay $P(y+1, y)$ ta được

$$f(1) \geq y + 1 + (a-2)y = (a-1)y + 1$$

Nếu $a > 1$ cho $y \to +\infty$ ta được điều mâu thuẫn. Vậy nên $a \leq 1$. Lại có

$$f(x-y) + 2y = f(f(x) + y - (1-a)y) \geq f(f(x) + y) + (1-a)(a-2)y \tag{2}$$

Từ (1) cho $P\left(x, \frac{y}{a}\right)$ ta được $f(f(x)+y) = f\left(x - \frac{y}{a}\right) + \frac{2y}{a}$. Thay vào (2) ta được

$$f(x-y) \geq f\left(x - \frac{y}{a}\right) + \left(\frac{2}{a} + (1-a)(a-2) - 2\right) y$$

Dễ dàng chứng minh được $\left(\frac{2}{a} + (1-a)(a-2) - 2\right) \geq 0$, cho ta được $f(x-y) \geq f(x - \frac{y}{a})$. Với $p > q > 0$ giải hệ phương trình

$$x - y = p \text{ và } x - \frac{y}{a} = q$$

Ta được $x = p\frac{a(p-q)}{1-a}$ và $y = \frac{a(p-q)}{1-a}$, nên suy ra f tăng. Nếu f hằng tại khoảng nào đó, thì tất cả những khai triển trên phải ở dấu '=', tức là cho ta được $f(x-y) = x + (a-2)y = x - y, x > y$ vô lý. Vậy nên f tăng ngặt. Khi đó từ (1) cho $y \to 0^+$ ta được $f(f(x)) = f(x)$ suy ra $\boxed{f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}^+}$ □

Bài toán 3. ***(Vietnam TST 2014).*** *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn:*

$$f(2m + f(m) + f(m)f(n)) = nf(m) + m$$

với mọi số nguyên m, n.

Bài toán 4. ***(Vietnam TST 2024).*** *Cho đa thức monic $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ khác hằng. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(f(P(x)) + y + 2023f(y)) = P(x) + 2024f(y),$$

với mọi số thực x, y.

Bài toán* 18. *(IMO Shortlist 2011 A3). *Tìm tất cả các cặp hàm số $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$g(f(x+y)) = f(x) + (2x+y)g(y) \quad (1)$$

với mọi số thực x, y.

Lời giải. Let $P(x,y)$ be the assertion $g(f(x+y)) = f(x) + (2x+y)g(y)$

Let $x \neq 0 : P(x,0) = g(f(x)) = f(x) + 2xg(0)$ $P(0,x) = g(f(x)) = f(0) + xg(x)$ Subtracting, we get $g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x} + 2g(0)$ $\forall x \neq 0$

$P(x,y) = g(f(x+y)) = f(x) + (2x+y)g(y)$ $P(x+y,0) = g(f(x+y)) = f(x+y) + (2x+2y)g(0)$ Subtracting, we get $f(x+y) = f(x) + (2x+y)g(y) - (2x+2y)g(0)$

Considering $y \neq 0$ and using previous result, this becomes $f(x+y) = f(x) + (2x+y)\frac{f(y)-f(0)}{y} + 2xg(0)$ Considering $x \neq 0$ and swapping x, y, this becomes $f(x+y) = f(y) + (2y+x)\frac{f(x)-f(0)}{x} + 2yg(0)$

Considering $x, y \neq 0$ and subtracting, we get $f(x) = x^2(\frac{f(y)-f(0)}{y^2} + \frac{g(0)}{y}) - g(0)x + f(0)$

Setting $y = 1$ in the above line, we get $f(x) = x^2(f(1) - f(0) + g(0)) - g(0)x + f(0)$ $\forall x \neq 0$

Plugging this in the equality $g(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x} + 2g(0)\ \forall x \neq 0$ we previously got, we get then : $g(x) = x(f(1) - f(0) + g(0)) + g(0)\ \forall x \neq 0$

Plugging this in original equation, we get two possibilities : $f(x) = g(x) = 0\ \forall x \neq 0$ $f(x) = x^2 + c$ and $g(x) = x\ \forall x \neq 0$

It's then easy to check that we need the same values for $x = 0$ and we get the two families of solutions : $f(x) = g(x) = 0\ \forall x$ $f(x) = x^2 + c$ and $g(x) = x\ \forall x$ □

Bài toán 5. ***(IMO Shortlist 2018 A1).*** *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ thỏa mãn*

$$f(x^2 f(y)^2) = f(x)^2 f(y)$$

với mọi số hữu tỉ dương x, y.

Bài toán 19. ***(IMO Shortlist 2019 A1).*** *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn*

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b)) \tag{1}$$

với mọi số nguyên a, b.

Lời giải. Ký hiệu $P(a, b)$ chỉ phép thế vào (1).

$P(0, a + bb) \Rightarrow f(0) + 2f(a + b) = f(f(a + b)), \forall a, b \in \mathbb{Z}$. Viết lại

$$f(2a) + 2f(b) = 2f(a + b) + f(0), \forall a, b \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

Từ (2) thay $P(1, b)$ ta được $2f(b) = 2f(b + 1) + f(0) - f(2)$.

Từ (2) ta để ý rằng $f(2a) - f(0)$ chẵn với mọi a vậy nên $f(2) - f(0)$ cũng chẵn. Đặt $c = \dfrac{f(0) - f(2)}{2}$ ta được

$$f(b + 1) = f(b) + c, \forall b \in \mathbb{Z}$$

Bằng quy nạp, ta chứng minh được $f(b + n) = f(b) + nc, \forall b, n \in \mathbb{Z}$, cho $b = 0$ ta được $f(n) = cn + k, \forall n \in \mathbb{Z}$, thử lại tìm được $(c, k) = (0, 0), (1, 0)$.

Vậy hàm số thỏa mãn là $\boxed{f(a) = 0, \forall a \in \mathbb{Z}}$, $\boxed{f(a) = a, \forall a \in \mathbb{Z}}$ □

Bài toán 6. ***(IMO Shortlist 2020 A6).*** *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn*

$$f^{a^2+b^2}(a + b) = af(a) + bf(b)$$

với mọi số nguyên a, b.

Bài toán 20. ***(IMO Shortlist 2020 A8).*** *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ thỏa mãn*

$$f(x + f(xy)) + y = f(x)f(y) + 1$$

với mọi số thực x, y.

Lời giải. Ký hiệu $P(x,y)$ chỉ phép thế vào (1).

Nhận xét 1: f là hàm tăng ngặt trên $\mathbb{R}^+$.

Chứng minh. Đầu tiên ta chứng minh f đơn ánh. Lần lượt thay $P(1,a), P(1,b)$ ta tìm được $a=b$. Giả sử tồn tại $a>b$ mà $f(a)<f(b)$. Đặt $x_2=\dfrac{ka}{a-b}$ và $x_1=\dfrac{kb}{a-b}$, với $k=f(b)-f(a)$, đặt $y_0=\dfrac{a-b}{k}$, thế thì

$$x_1+f(x_1y_0))=x_2+f(x_2y_0)\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2\Rightarrow a=b$$

Vô lý, vậy f là hàm tăng ngặt. □

Nhận xét 2: f không bị chặn trên.

Chứng minh. Từ đề bài ta có đánh giá

$$f(x)f(y)+1>y\Leftrightarrow f(y)>\frac{y-1}{f(x)},\forall x,y\in\mathbb{R}$$

Cố định x và cho $y\to+\infty$ ta được $\lim\limits_{y\to+\infty}f(y)=+\infty$ nên f không bị chặn trên. □

Nhận xét 3: $f(x)>1,\forall x\in\mathbb{R}^+$.

Chứng minh. Giả sử tồn tại a để $f(a)\leq 1$, cũng từ đánh giá trên, thay $P(a,y)$ ta được

$$f(y)>\frac{y-1}{f(a)}\geq y-1\Leftrightarrow f(y)>y-1$$

Thay y bởi a thì ta được $1>f(a)>a-1\Leftrightarrow a<2$. Vì f tăng ngặt nên với mọi $x<2$ thì $f(x)<1$. Từ đề bài cho $y=1$, ta được

$$f(x+f(x))=f(x)f(1)<f(x),\forall x\in\mathbb{R}$$

Điều này là vô lý vì f là hàm tăng, thế nên $f(x)>1$ với mọi $x>0$. □

Nhận xét 4: $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$.

Chứng minh. Ta mở rộng cho hàm f liên tục tại $x_0=0$, tức là tồn tại $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$. Thật vậy, với $x<y$, ta có

$$f(x+f(xy))+y>f(x)f(y)\Leftrightarrow f(x)<\frac{f(x+f(xy))+y}{f(y)}<\frac{f(x+f(xy))+y}{f(x)},x<y$$

$$\begin{aligned}f(x)^2&<f(x+f(xy))+y\\&<f(x+f(y^2))+y,x<y,(3)\end{aligned}$$

với $x<y$ tùy ý theo tiên đề Archimedes tồn tại $k>1$ sao cho $(k-1)y>(k-1)x>f(y^2)\Leftrightarrow y>x>\dfrac{f(y^2)}{k-1}$, Tức là $x+f(y^2)<kx$, sử dụng đánh giá này vào (3) ta được

$$f(x)^2<f(kx)+y,x<y$$

Cho $y \to 0$ thì x cũng tiến về 0, ta được

$$f(0)^2 \le f(0)$$

Nếu $f(0) < 0$ thì rõ ràng là vô lý, thế nên $f(0) \ge 0$, ta có $f(0) \le 1$. Mặt khác $f(0) > 1$ nên từ đó ta được $f(0) = 1$. □

Từ đề bài cho $x \to 0$ ta được $f(1) + y = f(y) + 1 \Rightarrow f(y) = y + c$ với $c \ge 1$. Thay lại vào đề bài ta tìm được $c = 1$, hàm số duy nhất thỏa mãn là $\boxed{f(x) = x + 1, \forall x \in \mathbb{R}^+}$. □

Bài toán 7. ***(VMO 2023).*** *Tìm tất cả các cặp hàm số $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0) = 2022$ và*

$$f(x + g(y)) = xf(y) + (2023 - y)f(x) + g(x)$$

với mọi số thực x, y.

Bài toán 8. ***(AOPS).*** *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x + 1) = f(x) + 1$ và*

$$f(x^{2024} + x^{2023} + \cdots + x + 1) = (f(x))^{2024} + (f(x))^{2023} + \cdots + f(x) + 1$$

B . Lời giải