CÓ MẤY KHI

Phạm Bảo - カズマアカリ。

Ngày 2 tháng 5 năm 2024

§1. Tổ hợp

Bài tập 1. Cho các tập hợp $A_0, A_1, \dots, A_{2023}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

1. $A_0 = \{3\}$
2. $A_n = \{x + 2 \mid x \in A_{n-1}\} \cup \{x(x+1)/2 \mid x \in A_{n-1}\}$ for each $n = 1, 2, \dots, 2023$.

Tính $|A_{2023}|$.

Bài tập 2. Cho một số nguyên dương n, nếu n là tích của hai số nguyên tố khác nhau và $n \equiv 2 \pmod 3$, thì n được gọi là "số đặc biệt". Ví dụ, $14, 26, 35, 38$ là các số đặc biệt duy nhất trong các số nguyên dương từ 1 đến 50. Chứng minh rằng đối với mọi tập hợp hữu hạn S chứa các số đặc biệt, tồn tại hai tập hợp A, B sao cho:

$$A \cap B = \emptyset, A \cup B = S \text{ và } ||A| - |B|| \leq 1$$

Đối với tất cả các số nguyên tố p, sự khác biệt giữa số lượng phần tử trong A chia hết cho p và số lượng phần tử trong B chia hết cho p không vượt quá 1.

Bài tập 3. Cho n là một số nguyên dương. Trong vương quốc Skibidi có 2^n công dân và một vị vua. Trong thuật ngữ tiền tệ, vương quốc sử dụng các tờ giấy bạc có mệnh giá là 2^n đồng và các đồng xu có mệnh giá là 2^a (với $a = 0, 1, \dots, n-1$). Mỗi công dân có vô số tờ giấy bạc. Gọi S là tổng số đồng xu trong vương quốc. Một ngày đẹp trời, vua quyết định triển khai một chính sách sẽ được thực hiện mỗi đêm:

1. Mỗi công dân phải quyết định một số tiền hữu hạn dựa trên số đồng xu mà anh ta hiện đang có, và anh ta phải chuyển số tiền đó cho một công dân khác hoặc cho vua.
2. Mỗi công dân phải chuyển chính xác 1 nhiều hơn số tiền mà anh ta nhận được từ các công dân khác.

Tìm giá trị nhỏ nhất của S sao cho vua có thể thu tiền mỗi đêm mà không bao giờ hết tiền.

Bài tập 4. Cho số nguyên dương $n \geq 3$. Có n người, mỗi ngày tổ chức một cuộc họp mà ít nhất 3 người tham dự. Mỗi người trong cuộc họp bắt tay với tất cả những người còn lại. Sau n cuộc họp, mỗi cặp người đã bắt tay đúng một lần. Chứng minh rằng mỗi cuộc họp đều có cùng số người tham dự.

Bài tập 5. Cho các số nguyên dương từ 1 đến 100 được viết trên một bảng đen, mỗi số đúng một lần. Một phép toán bao gồm việc chọn hai số a và b trên bảng đen và xóa chúng, sau đó viết số chia hết lớn nhất của $a^2 + b^2 + 2$ và $a^2b^2 + 3$. Sau một số lượng phép toán, chỉ còn lại một số nguyên dương trên bảng đen. Chứng minh rằng số này không thể là số chính phương.

Bài tập 6. Cho số nguyên dương n lẻ và xét một lưới vuông vô hạn. Chứng minh rằng không thể điền vào mỗi ô một trong các số $1, 2$ hoặc 3 sao cho đồng thời thỏa mãn các điều kiện sau:

1. Bất kỳ hai ô nào có một cạnh chung cũng không được điền cùng một số.
2. Đối với bất kỳ lưới con 1×3 hoặc 3×1, các số điền vào không chứa $1, 2, 3$ theo thứ tự khi đọc từ trên xuống dưới, từ dưới lên trên, từ trái sang phải hoặc từ phải sang trái.
3. Tổng các số trong bất kỳ lưới con $n \times n$ nào đều giống nhau.

Bài tập 7. Cho $n \geq 3$ là một số lẻ và xét một lưới ô vuông $n \times n$. Trò chơi bao gồm n^2 lượt, ở mỗi lượt, chúng ta sẽ thực hiện các thao tác sau theo tuần tự.

1. Chúng ta sẽ chọn một ô chứa một số nguyên chưa được viết và viết một số nguyên từ 1 đến n^2. Chúng ta chỉ có thể viết một số nguyên một lần duy nhất trong suốt trò chơi.
2. Đối với mỗi hàng, cột bao gồm ô đó, nếu tổng các số nguyên là bội số của n, thì chúng ta sẽ nhận được 1 điểm (nếu cả hai tổng đều là bội số của n, chúng ta sẽ nhận được 2 điểm).

Xác định giá trị lớn nhất có thể của điểm số như tổng số có thể đạt được vào cuối trò chơi.

Bài tập 8. Cho $n \geq 2$ nguyên dương. $3n$ điểm phân biệt được vẽ trên đường tròn, trong đó A và B thực hiện các thao tác sau: Đầu tiên, A chọn chính xác 2 điểm chưa được nối và nối chúng bằng một đoạn thẳng. Tiếp theo, B chọn chính xác 1 điểm chưa được đánh dấu và đánh dấu vào đó. Chứng minh rằng, sau n thao tác liên tiếp, bất kể B thực hiện thế nào, A đều có thể làm cho số đoạn thẳng không ít hơn $\dfrac{n-1}{6}$, nối một điểm được đánh dấu và một điểm không có đánh dấu.

Bài tập 9. Cho số nguyên dương $n \geq 2$. Hai người chơi A và B chơi một trò chơi trên lưới các ô vuông đơn vị $n \times 2021$. Đầu tiên, A tô mỗi ô màu đen hoặc trắng. B đặt một viên bi vào một trong các ô ở hàng trên cùng và chỉ định một trong các ô ở hàng dưới cùng làm *goal*. Sau đó, A thao tác $n - 1$ lần như sau:

1. Khi ô có bi được sơn màu trắng, A di chuyển bi sang ô bên dưới.
2. Nếu không, A hãy di chuyển viên bi đến ô tiếp theo ở bên trái hoặc bên phải, sau đó đến ô bên dưới.

Tìm giá trị nhỏ nhất của n sao cho A luôn có thể di chuyển một viên bi đến *goal*, bất kể lựa chọn của B.

Bài tập 10. Cho n là một số nguyên dương. Tìm tất cả các số nguyên k trong dãy $1, 2, \ldots, 2n^2$ thỏa mãn sao cho tồn tại một lưới hình vuông $2n \times 2n$ gồm các ô vuông đơn vị. Khi k ô vuông khác nhau được tô màu đen trong khi các ô còn lại được tô màu trắng, mà số lượng tối thiểu có thể của các hình vuông 2×2 chứa cả ô đen và ô trắng là $2n - 1$.

Bài tập 11. Có 2022 ô vuông được đánh số thứ tự trên một hàng ngang. Hai người A và B cùng nhau chơi một trò chơi. Đầu tiên, những ô vuông số lẻ được đánh dấu chữ A và những ô vuông số chẵn được đánh dấu chữ B. Sau đó, bắt đầu từ A, họ thay phiên thực hiện những thao tác sau:

1. Người chơi sẽ chọn hai ô vuông được đánh dấu bằng tên của họ, sao cho hai ô đó không kề nhau, và tất cả các ô vuông nằm ở giữa hai ô đó đều được đánh dấu bằng tên của đối thủ.
2. Hai người chơi luân phiên chơi liên tục như vậy đến khi có một người không thể thao tác tiếp được nữa

Tìm số nguyên dương m lớn nhất sao cho A luôn có thể đảm bảo rằng có ít nhất m ô vuông được đánh dấu chữ A.

Bài tập 12. Tìm số nguyên dương nhỏ nhất m thỏa mãn mệnh đề sau:

Có 999 lưới trên một vòng tròn. Điền một số thực vào mỗi lưới, sao cho đối với mỗi lưới A và mọi số nguyên dương $k \leq m$, ít nhất một trong hai mệnh đề sau đây là đúng:

1. Sự khác biệt giữa các số trong lưới A và lưới thứ k sau A theo chiều kim đồng hồ là k.
2. Sự khác biệt giữa các số trong lưới A và lưới thứ k sau A ngược chiều kim đồng hồ là k.

Sau đó, phải tồn tại một lưới S với số thực x trong đó trên vòng tròn, sao cho ít nhất một trong hai mệnh đề sau đây là đúng:

1. Đối với mọi số nguyên dương $k < 999$, số trong lưới thứ k sau S theo chiều kim đồng hồ là $x + k$.
2. Đối với mọi số nguyên dương $k < 999$, số trong lưới thứ k sau S ngược chiều kim đồng hồ là $x + k$.

Bài tập 13. Trên một bảng ô vuông 5×5, người ta đặt các Tetromino lên các hình vuông để trong mỗi hình vuông, có hai hoặc ít hơn viên được bao phủ (các viên này có thể xếp chồng lên nhau). Tìm số hình vuông lớn nhất được bao phủ bởi đúng một viên.

Bài tập 14. Trong mặt phẳng tọa độ, các điểm có tung độ và hoành độ nguyên thuộc 1 đến 2000 được gọi là điểm tốt. Hơn nữa, đối với bốn điểm $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$ có đường đa tuyến $ABCD$ được gọi là đường $\mathbb{Z}$ nếu như:

1. Tất cả đều A, B, C, D là những điểm tốt.
2. $x_1 < x_2$, $y_1 = y_2$
3. $x_2 > x_3$, $y_2 - x_2 = y_3 - x_3$
4. $x_3 < x_4$, $y_3 = y_4$

Tìm giá trị nguyên dương n nhỏ nhất sao cho có n đường $\mathbb{Z}$ là $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ thỏa mãn với bất kỳ điểm P tốt nào, tồn tại một số nguyên $i \in [n]$ sao cho P nằm trên Z_i.

Bài tập 15. Cho $\mathcal{S}$ là tập hợp các bộ số nguyên dương $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là nghiệm của phương trình

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n^n$$

Tính giá trị của biểu thức

$$T = \sum_{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S} x_1 x_2 \ldots x_n$$

§2. Phương trình hàm

Bài tập 1. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(yf(x) - x) = f(x)f(y) + 2x, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Bài tập 2. Cho tập hợp $S = \{1, 2, \ldots, 999\}$. Xét hàm số $f : S \to S$, sao cho với mọi $n \in S$,

$$f^{n+f(n)+1}(n) = f^{nf(n)}(n) = n.$$

Chứng minh rằng tồn tại $a \in S$, sao cho $f(a) = a$. Ở đây có $f^k(n) = \underbrace{f(f(\ldots f}_{k}(n)\ldots))$.

Bài tập 3. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f\left(\frac{f(y)}{f(x)} + 1\right) = f\left(x + \frac{y}{x} + 1\right) - f(x)$$

Bài tập 4. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn

$$m^2 + f(n)^2 + (m - f(n))^2 \geq f(m)^2 + n^2, \forall m, n \in \mathbb{Z}^+$$

Bài tập 5. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn hai điều kiện sau

$$n \mid m \text{ và } f(n) \mid f(m) - n$$

Bài tập 6. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn

$$f^{f(n)}(m) + mn = f(m)f(n)$$

Bài tập 7. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn

$$\operatorname{lcm}(m, f(m + f(n))) = \operatorname{lcm}(f(m), f(m) + n), \forall m, n \in \mathbb{Z}^+$$

Bài tập 8. Cho hàm số $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho miền giá trị của nó là một tập hữu hạn. Tìm tất cả các hàm $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$2f(x + g(y)) = f(2g(x) + y) + f(x + 3g(y)), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Bài tập 9. Tìm tất cả các hàm số $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x^2 - g(y)) = g(x)^2 - y, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

§3. Dãy số

Bài tập 1. Cho dãy số thực $a_1, \cdots, a_{2021}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = \frac{2a_{n+1}^2}{a_n + a_{n+1}} (1 \leq n \leq 2019)$$

Gọi m là giá trị nhỏ nhất của $a_1, \cdots, a_{2021}$ và M là giá trị lớn nhất của $a_1, \cdots, a_{2021}$. Đặt một đa thức bậc 2021

$$P(x) := (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_{2021})$$

$|P(x)|$ đạt giá trị lớn nhất trên $[m, M]$ khi $x = \alpha$. Chứng minh rằng $1 < \alpha < 2$.

Bài tập 2. Cho ba dãy số $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ thỏa mãn

$$a_1 = 2,\ b_1 = 4,\ c_1 = 5$$

$$\forall n,\ a_{n+1} = b_n + \frac{1}{c_n},\ b_{n+1} = c_n + \frac{1}{a_n},\ c_{n+1} = a_n + \frac{1}{b_n}$$

Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương, $\max(a_n, b_n, c_n) > \sqrt{2n+13}$.

Bài tập 3. Cho dãy số a_n thỏa mãn các điều kiện sau:

1. Đối với một số nguyên $i \geq 2022$, ta định nghĩa a_i là số nguyên dương nhỏ nhất x sao cho $x + \sum_{k=i-2021}^{i-1} a_k$ là một số chính phương.
2. Tồn tại vô số số nguyên dương n sao cho $a_n = 4 \times 2022 - 3$.

Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên dương N sao cho $\sum_{k=n}^{n+2021} a_k$ là không đổi cho mọi số nguyên $n \geq N$ và xác định giá trị của $\sum_{k=N}^{N+2021} a_k$.

Bài tập 4. Cho dãy số a_n thỏa mãn các điều kiện sau:

1. $a_i \leq a_i$ với mọi $i < j$
2. $\forall k \geq 3$, bất đẳng thức sau luôn thỏa mãn:

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3)\cdots(a_{k-1} + a_k)(a_k + a_1) \leq (2^k + 2022)a_1 a_2 \cdots a_k$$

Chứng minh rằng $\{a_n\}$ là dãy số hằng.

Bài tập 5. Cho dãy sô thực dương $\{a_n\}$ được xác định như sau:

$$a_0 = 1, a_1 = 3, a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 + 2}{a_n}$$

Chứng minh rằng với mọi n không âm, a_n là số nguyên.

Bài tập 6. Cho dãy sô thực dương $\{a_n\}, \{b_n\}$ được xác định như sau:

$$\begin{aligned} &a_{n+1}b_{n+1} = a_n^2 + b_n^2 \\ &a_{n+1} + b_{n+1} = a_n b_n \\ &a_n \geq b_n \end{aligned}$$

Chứng minh rằng tồn tại n sao cho $\frac{a_n}{b_n} > 2023^{2023}$.