Mục lục

1. Dãy số

A . Đề bài

Bài toán* 1. *(Đồng Nai TST 2023). *Cho dãy số* (a_n) *thỏa mãn* $a_1 = 1$ *và*

$$a_{n+1} = \sqrt{2n + a_n^2 + \frac{1}{a_n}}, n \geq 1$$

.

(a) Chứng minh rằng $a_n \leq n$*, với mọi số nguyên dương* n.

(b) Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

Lời giải. (a) Thật vậy, bằng quy nạp ta dễ dàng chứng minh được $a_n \geq 1, \forall n \geq 1$. Khi này, giả sử $a_n \leq n$, ta có

$$a_{n+1} = \sqrt{2n + a_n^2 + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt{2n + n^2 + 1} = \sqrt{(n+1)^2} = n + 1$$

hoàn tất chứng minh.

(b) Ta có $a_{n+1} \geq \sqrt{2n + 1 + \frac{1}{n}}$. Cho $n \to +\infty$ thì ta được $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. □

Bài toán* 2. *(Hà Tĩnh TST 2023). *Cho dãy số* (u_n) *xác định bởi* $u_1 = 1$ *và*

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n + 1}, n \geq 1$$

(a) Chứng minh rằng dãy số (u_n) *có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.*

(b) Chứng minh rằng $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i^2 < 2n, n \geq 1$.

Lời giải. (a) Ta cần chứng minh $\sqrt{2} \leq u_n \leq \frac{3}{2}, \forall n \geq 2$ bằng quy nạp. Với $n = 2$ thì rõ ràng luôn đúng, giả sử với $n \geq 2$ ta có $\sqrt{2} < u_n \leq \frac{3}{2}$, khi đó

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n + 1} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \leq \frac{3}{2}$$

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n + 1} \geq 1 + \frac{1}{\frac{3}{2} + 1} > \sqrt{2}$$

Khi này có đánh giá

$$|u_{n+1} - \sqrt{2}| = \left|\frac{u_n + 2}{u_n + 1} - \sqrt{2}\right| \leq \left|\frac{u_n + 2}{\sqrt{2} + 1} - \sqrt{2}\right| = \frac{\left|u_n - \sqrt{2}\right|}{\sqrt{2} + 1} = \cdots = \frac{1}{(\sqrt{2} + 1)^n}|u_1 - \sqrt{2}|$$

Khi này tồn tại N_0 đủ lớn để $\forall n > N_0$ thì $\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^n}|u_n - \sqrt{2}| < \varepsilon \Rightarrow |u_{n+1} - \sqrt{2}| < \varepsilon, \forall n > N_0$, suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$.

(b) Với chú ý $u_n > \sqrt{2}, \forall n \geq 1$, ta có

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 1 + \sum_{i=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{u_i+1}\right)^2 &= 1 + \sum_{i=2}^{n-1} 1 + \frac{2}{u_i+1} + \frac{1}{(u_i+1)^2} \\ &< 1 + (n-1)\left(\frac{2}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2}\right) \\ &= 1 + (n-1) = n\end{aligned}$$

Chứng minh hoàn tất. □

Bài toán 3. (Hà Nội TST 2022). *Cho dãy (x_n) được xác định bởi $x_1 = x_2 = 1$ và $x_{n+2} = x_{n+1}^2 - \frac{1}{3}x_n$ với $n \geq 1$. Chứng minh rằng (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.*

Lời giải. Ta có thể dự đoán rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. Ta sẽ chứng minh $|x_n| < \frac{1}{3}$ bằng quy nạp. Với $n = 4, 5$ thì rõ ràng thỏa mãn, giả sử với $|x_k| < \frac{1}{3}, \forall 5 < k < n$.

Khi đó ta có $|x_{n+2}| < |x_{n+1}^2| + \frac{1}{3}|x_n| < \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3}.\frac{1}{3} < \frac{1}{3}$. Vậy nên từ đây ta được

$$|x_{n+2}| < \frac{1}{3}|x_{n+1}| + \frac{1}{3}|x_n|$$

Theo bổ đề dãy số ta được $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. □

Bài toán 4. (PTNK 2023). *Cho dãy (u_n) thỏa mãn $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = u_n + \frac{\ln n}{u_n}, n \geq 1$.*

(a) Chứng minh rằng $u_{2023} > \sqrt{2023\ln 2023}$

(b) Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n \ln n}{n}$.

Lời giải. (a) Ta sẽ chứng minh $u_n > \sqrt{n\ln n}, \forall n > 4$ bằng quy nạp. Với $n = 5$ thì dễ dàng kiểm tra đúng, giả sử với $n - 1 > 4$ ta có $u_n > \sqrt{n\ln n}$. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $u_{n+1} \geq 2\sqrt{\ln(n)}$. Xét $f(x) = x + \frac{\ln(n)}{x}$ trên $[2\sqrt{\ln(n)}, +\infty)$ ta có

$$f'(x) = 1 - \frac{\ln(n)}{x^2} \geq 1 - \frac{\ln(n)}{4\ln(n)} => 0$$

Suy ra f là hàm tăng ngặt. Khi đó

$$u_{n+1} = f(u_n) > f(\sqrt{n\ln(n)}) = \sqrt{n\ln(n)} + \frac{\ln(n)}{\sqrt{n\ln(n)}}$$

Ta cần chứng minh $\sqrt{n\ln(n)} + \frac{\ln(n)}{\sqrt{n\ln(n)}} \geq \sqrt{(n+1)\ln(n+1)}$.

Xét $g(x) = \sqrt{x\ln(x)}$ trên $[n, n+1]$ có □

Bài toán* 5. *(Trại hè Hùng Vương 2023). *Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = 3$ và*

$$u_{n+1} = u_n^2 + u_n - 4, n \geq 1$$

Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(u_1+1)(u_2+3)\ldots(u_n+3)}{u_{n+1}+3}$.

Lời giải. Bằng quy nạp, ta dễ dàng chứng minh được $u_n > 2, \forall n \geq 1$. Ta có

$$u_{n+1} - 2 = (u_n - 2)(u_n + 3) \Leftrightarrow u_n + 3 = \frac{u_{n+1} - 2}{u_n - 2}$$

Cho nên từ đây viết lại $\prod\limits_{i=1}^{n}(u_i + 3) = \prod\limits_{i=1}^{n} \dfrac{u_{i+1} - 2}{u_i - 2} = \dfrac{u_{n+1} - 2}{3 - 2} = u_{n+1} - 2$. Mặt khác, bằng Weierstrass ta dễ dàng chứng minh được $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, nên từ đó tính được

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(u_1+1)(u_2+3)\ldots(u_n+3)}{u_{n+1}+3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n - 2}{u_n + 3} = 1$$

□

Bài toán* 6. *(Bình Phước TST 2023). *Cho đãy số (a_n) xác định bởi:*

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{2024}{2023} \\ a_{n+1} = a_n + 2\sqrt{a_n} + \dfrac{n^2}{a_n}, \forall n \geq 1. \end{cases}$$

(a) Chứng minh rằng dãy số (b_n) xác định bởi $b_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{a_i}$ có giới hạn hữu hạn.

(b) Xét dãy số (c_n) xác định bởi $c_n = \left[\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{i}{a_i}\right]$.Chứng minh rằng mỗi số nguyên dương đều xuất hiện trong dãy (c_n).

Lời giải.

(a) Ta chứng minh quy nạp $n^2 \leq a_n \leq (n+1)^2, \forall n \geq 1$. Với $n = 1$ thì dễ dàng kiểm tra, giả sử với $n > 1$ nào đó ta có $n^2 \leq a_n \leq (n+1)^2$, ta xét hàm số $f(x) = x + 2\sqrt{x} + \dfrac{n^2}{x}$ trên đoạn $[n, +\infty)$. Ta có $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{n^2}{x^2} \geq 1 + \dfrac{1}{x} - 1 \geq 0$, suy ra $f(x)$ là hàm tăng, vậy nên ta được

$$a_{n+1} = f(a_n) \leq f((n+1)^2) = (n+1)^2 + 2(n+1) + \frac{n^2}{(n+1)^2} \leq (n+2)^2$$

Hơn nữa

$$a_{n+1} = f(a_n) \geq f(n^2) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Hoàn tất quy nạp. Khi đó

$$b_n = \sum \frac{1}{a_i} \leq \sum \frac{1}{(i+1)^2} < 2$$

Vì (b_n) tăng và bị chặn nên (b_n) hội tụ

(b) Ta có một bổ đề sau

Bổ đề quan trọng

Cho một dãy số thực (a_n) thỏa mãn $0 < a_n \leq 1, \forall n \geq 1$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} a_n = +\infty$. Khi đó với mọi số nguyên dương M, luôn tồn tại $N > 0$ để với $n_0 > N$ nào đó thì

$$\left\lfloor \sum_{i=1}^{n_0} a_i \right\rfloor = M$$

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh bổ đề này bằng phản chứng. Đặt $b_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_n$. Giả sử không tồn tại N_0 để thỏa mãn bổ đề, khi đó sẽ có hai trường hợp xảy ra.

Trường hợp 1: Không tồn tại n_0 để $\lfloor b_{n_0} \rfloor = M$ mà lại tồn tại m_0 để $\lfloor b_{m_0} \rfloor > M$. Để $(\lfloor b_n \rfloor)$ không nhận giá trị của M mà lại nhận những giá trị nguyên lớn hơn nó thì phải tồn tại a_k để $a_k > 1$, điều này là vô lý.

Trường hợp 2: Không tồn tại n_0 để $\lfloor b_{n_0} \rfloor = M$ và cũng không tồn tại m_0 để $\lfloor b_{m_0} \rfloor > M$. Khi này rõ ràng là đến một lúc nào đó, sẽ tồn tại $m > 0$ và $N > 0$ để $b_{n_0} < m, \forall n_0 > N$, tức là (b_n) bị chặn trên. Mặt khác (b_n) cũng là dãy tăng, nên theo Weierstrass thì (b_n) có giới hạn hữu hạn, cũng vô lý.

Vậy là bổ đề đã được chứng minh. □

Mặt khác, ta có

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{a_i} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{(i+1)^2} = \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} > \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} - 2$$

Cho $n \to +\infty$ thì ta được $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$. Khi đó, áp dụng bổ đề trên, ta có được điều phải chứng minh.

□

Bài toán 7. (PTNK 2022). *Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}, n \geq 1$. Tính*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n}\left(\frac{u_1}{1} + \frac{u_2}{2} + \cdots + \frac{u_n}{n}\right)$$

Lời giải. Đặt $u_1 = 2\cos\frac{\pi}{3}$, có $u_2 = \sqrt{2 + 2\cos\frac{\pi}{3}} = 2\cos\frac{\pi}{3.2}$. Bằng quy nạp, ta chứng minh được $u_n = 2\cos\frac{\pi}{3.2^{n-1}}$. Theo định lý Stolz, ta có

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{u_1}{1} + \frac{u_2}{2} + \cdots + \frac{u_n}{n}}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{u_{n+1}}{n+1}}{\ln(n+1) - \ln(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\cos\frac{\pi}{3.2^{n-1}}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = 2$$

Vậy nên $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n}\left(\frac{u_1}{1} + \frac{u_2}{2} + \cdots + \frac{u_n}{n}\right) = 2.$ □

Bài toán* 8. *(Kon Tum TST 2023). *Cho các ý sau:*

1. *Cho dãy số (u_n) được xác định bởi*

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = u_{n-1} + 2n + 3, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng $u_n + 7$ là số chính phương với mọi $n \geq 1$.

2. *Cho dãy số (u_n) được xác định bởi*

$$\begin{cases} u_1 = 2023 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 8}{2(u_n - 1)}, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Chứng minh dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải. 1. Ta xét tổng như sau:

$$\begin{aligned} u_n &= u_{n-1} + 2n + 3 \\ &= u_{n-2} + 2n + 3 + 2(n-1) + 3 \\ &= \dots \\ &= \sum_{i=2}^{n} 2i + 3 + 2 \\ &= 3n - 3 + 2 + n(n+1) - 2 \\ &= n^2 + 4n - 3 \end{aligned}$$

Khi đó $u_n + 7 = (n+2)^2, \forall n \geq 1$ là số chính phương.

2. Ta có

$$u_{n+1} - 4 = \frac{u_n^2 + 8 - 8u_n + 8}{2(u_n - 1)} = \frac{(u_n - 4)^2}{2(u_n - 1)}$$

$$u_{n+1} + 2 = \frac{u_n^2 + 8 + 4u_n - 4}{2(u_n - 1)} = \frac{(u_n + 2)^2}{2(u_n - 1)}$$

Từ đây suy ra

$$\frac{u_{n+1} - 4}{u_{n+1} + 2} = \left(\frac{u_n - 4}{u_n + 2}\right)^2 = \left(\frac{u_{n-1} - 4}{u_{n-1} + 2}\right)^{2.2} = \dots = \left(\frac{u_1 - 4}{u_1 + 2}\right)^{2^n} = \left(\frac{2019}{2025}\right)^{2^n}$$

Đặt $k_n = \left(\dfrac{2019}{2025}\right)^{2^n}$. Tương dương với

$$1 - \frac{6}{u_{n+1} + 2} = k_n \Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{6}{1 - k_n} - 2$$

Cho $n \to +\infty$ thì $k_n \to 0$, từ đó ta được $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$. $\square$

Bài toán* 9. *(Sóc Trăng TST 2023). *Với số thực a, xét dãy số (u_n) xác định bởi*

$$u_1 = a \text{ và } u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2 - u_n^2}, n \geq 1$$

1. *Chứng minh rằng với mọi a hữu tỷ, các số hạng của (u_n) luôn xác định.*
2. *Với $a \in [0, 1]$, chứng minh rằng dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = n^2 u_n$ luôn có giới hạn hữu hạn và xác định giới hạn đó.*

Lời giải.

1. Vì a hữu tỉ nên $u_n \in \mathbb{Q}, \forall n \geq 1$. Khi đó $2 - u_n^2 \neq 0$ vì $u_n \neq \pm\sqrt{2}, \forall n \geq 1$. Vậy nên mọi số hạng của (u_n) luôn xác định.

2. Bằng quy nạp ta chứng minh được $0 \leq u_n \leq 1, \forall n \geq 1$. Lại có

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n}{2 - u_n^2} \leq \frac{1}{2-1} = 1$$

Suy ra (u_n) giảm và bị chặn dưới nên (u_n) hội tụ. Giải phương trình giới hạn tìm được $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Theo định lý Stolz-Cesaro ta có

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\sqrt{u_n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{u_{n+1}}} - \frac{1}{\sqrt{u_n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2-u_n^2}}{u_n} - \frac{1}{\sqrt{u_n}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2-x^2} - \sqrt{x}}{x} = +\infty$$

Vậy nên $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0$. □

Bài toán* 10. *(Thanh Hóa TST 2023). *Cho dãy số (u_n) được xác định bởi*

$$x_1 = \frac{1}{2} \text{ và } x_{n+1} = \frac{1}{4}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right), n \geq 1$$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $x_{n+1} \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \forall n \geq 1$. Ta chứng minh $x_n < 2, \forall n \geq 1$. Với $n = 1$ thì dễ dàng kiểm tra, giả sử có $x_n < 2$. Ta có

$$x_{n+1} \leq \frac{2}{4} + \frac{3.2}{4.\sqrt{3}} < 2$$

Suy ra $x_n \in (\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 2)$. Ta có

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x_n} - x_n\right) > \frac{3}{4}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) > 0$$

Suy ra (x_n) tăng và bị chặn trên nên có giới hạn.

Giải phương trình giới hạn tìm được $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$. □

Bài toán* 11. *(Tiền Giang TST 2023). *Cho dãy số (a_n) được xác định bởi*

$$0 < a_1 \neq 1 \text{ và } a_{n+1} = a_n + \frac{n}{a_n}, n \geq 1$$

(a) Chứng minh rằng $a_n > n, \forall n \geq 2$

(b) Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - n)$

Lời giải.

(a) Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $a_{n+1} \geq 2\sqrt{n}$. Xét $f(x) = x + \dfrac{n}{x}$ trên $[2\sqrt{n-1}, +\infty)$. Ta có $f'(x) = 1 - \dfrac{n}{x^2} \geq 1 - \dfrac{n}{4n-4} > 0$. Do đó f là hàm tăng ngặt.

Ta chứng minh $a_n > n, \forall n \geq 2$ bằng quy nạp. Với $n = 2$ thì $a_2 = a_1 + \dfrac{2}{a_1} > 2$. Giả sử với $n > 2$ thì $a_n > n$, khi đó

$$a_{n+1} = f(a_n) > f(n) = n + 1$$

Vậy $a_n > n, \forall n \geq 2$.

(b) Đặt $u_n = a_n - n$ khi đó viết lại

$$u_{n+1} = u_n - 1 + \frac{n}{u_n + n}, \forall n \geq 1$$

Khi đó có

$$u_{n+1} - u_n = -1 + \frac{n}{u_n + n} < -1 + 1 = 0$$

Mặt khác để ý rằng $u_n > 0, \forall n \geq 1$ suy ra u_n là dãy giảm và bị chặn dưới nên (u_n) hội tụ. Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lambda$, cho $n \to +\infty$ ta được

$$\lambda = \lambda - 1 + \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 1$$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - n) = 1$. □

Bài toán 1. *(TST Phú Yên 2023).* *Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) được xác định bởi*

$$\begin{cases} u_1 = 4, v_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 3v_n \\ v_{n+1} = 2u_nv_n \end{cases}$$

Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[2^n]{v_n}$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[2^n]{u_1u_2\ldots u_n}$.

Bài toán 2. *(TST Quảng Bình 2023).* *Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) được xác định bởi*

$$\begin{cases} u_1 = 2024 \\ (n+1)^2u_{n+1} = (n^2 + 2n)u_n + 2023, n \geq 1 \end{cases}$$

Tìm giới hạn của dãy số (u_n).

Bài toán 3. ***(Epsilon).*** *Cho dãy số $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ như sau: $x_1 = a > 2$ và*

$$x_{n+1} = x_n^2 - 2, \forall n = 1, 2, \dots$$

Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_1x_2} + \dfrac{1}{x_1x_2x_3} + \cdots + \dfrac{1}{x_1x_2\dots x_n} \right)$.

Bài toán 4. ***(Hà Tĩnh 2014).*** *Cho dãy số (u_n) thỏa mãn:*

$$\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 3 \\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{u_n^2}{u_{n-1}^2} - 2, n \geq 1. \end{cases}$$

Chứng minh $\dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \dots + \dfrac{1}{u_n} < \dfrac{5 - \sqrt{5}}{2}$ *với mọi $n \geq 1$.*

Bài toán 5. ***(Gặp gỡ toán học 2010).*** *Cho dãy số (x_n) được xác định bởi*

$$x_1 = 1, x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}, \forall n \geq 1$$

1. *Chứng minh rằng* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$
2. *Tìm* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{\sqrt{n}}$.

Bài toán 6. ***(Đồng Nai 2022).*** *Cho dãy số dương (u_n) được xác định bởi*

$$u_0 = 2, u_1 = 4 \text{ và } u_{n+2} = 2\sqrt{4u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2}} + u_n \text{ với } n \geq 1$$

(a) *Tìm công thức tổng quát của (u_n).*

(b) *Với mỗi số nguyên dương n. Đặt $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{1}{u_i}$. Chứng minh rằng (S_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.*

Bài toán 7. ***(Epsilon).*** *Cho dãy (u_n) được xác định bởi*

$$u_1 = 1, u_2 = 2, (n+1)u_{n+2} = n(u_{n+1} + u_n) + 2\left(u_{n+1} + \frac{u_n}{n}\right) + 3u_n, \text{ với } n \geq 1$$

Chứng minh rằng dãy $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geq 1}$ *có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.*

Bài toán 8. ***(Epsilon).*** *Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $x_1 = 1$ và*

$$x_{n+1} = \frac{x_1}{n+1} + \frac{x_2}{n+2} + \cdots + \frac{x_n}{2n}, n \geq 1$$

Chứng minh rằng (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài toán 12. (Thái Nguyên 2024). *Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = \dfrac{2}{3}$ và*

$$a_{n+1} = \frac{4}{3+4a_n-3a_n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1. *Chứng minh rằng dãy số (a_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn của dãy số đó.*
2. *Đặt $x_n = \prod_{k=1}^{n} a_k, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng dây số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn của dãy số đó.*

Lời giải.

1. Xét $f(x) = \dfrac{4}{3+4x-3x^2}$ trên $[\dfrac{12}{13}, +\infty)$ ta có

$f'(x) = \dfrac{4(6x-4)}{(3+4x-3x^2)^2} \Rightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \geq \dfrac{12}{13}$. Ta chứng minh quy nạp $a_n \leq 1, \forall n \geq 1$.

Với $n = 1$ thì hiển nhiên đúng. Giả sử với $n \geq 2$ thì có $a_n \leq 1$. Ta có

$$a_{n+1} = f(a_n) \leq f(1) = 1$$

Vậy $\dfrac{12}{13} \leq a_n \leq 1, \forall n \geq 1$. Khi đó $f'(x) \leq \dfrac{1}{2}, \forall x \in \left[\dfrac{12}{13}, 1\right]$

Xét $m > n$, ta có $|a_{m+1} - a_{n+1}| = |f(a_m) - f(a_n)|$. Theo định lý Lagrange, tồn tại $q \in (a_n, a_m)$ để $f(q)(a_m - a_n) = f(a_m) - f(a_n) \Rightarrow |f(a_m) - f(a_n)| \leq \dfrac{1}{2}|a_m - a_n|$. Từ đây suy ra

$$|a_{m+1} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|a_m - a_n| \leq ... \leq \frac{1}{2^n}|a_{m-n+1} - a_1|$$

Khi đó tồn tại $N > 0$ đủ lớn sao cho $\dfrac{1}{2^n}|a_{m-n+1} - a_1| < \varepsilon$ hay $|a_m - a_n| < \varepsilon$. Suy ra (a_n) là dãy Cauchy nên hội tụ. Xét phương trình giới hạn

$$\lambda = \frac{4}{3+4\lambda-3\lambda^2} \Leftrightarrow 3\lambda^3 - 4\lambda^2 - 3\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda - \frac{4}{3}) = 0$$

Vì $\dfrac{12}{13} \leq a_n \leq 1, \forall n \geq 1$ nên $\lambda = 1$, suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$.

2. Ta có

$$3a_{n+1} + 4a_na_{n+1} - 3a_n^2a_{n+1} = 4 \Leftrightarrow 3a_{n+1} + a_na_{n+1}(4-3a_n) = 4 \Leftrightarrow a_na_{n+1} = \frac{4-3a_{n+1}}{4-3a_n}$$

Từ đây suy ra

$$\prod_{i=1}^{n} a_ia_{i+1} = \frac{4-3a_{n+1}}{2} \Leftrightarrow \frac{x_n^2a_{n+1}}{2} = \frac{4-3a_{n+1}}{2} \Rightarrow x_n = \sqrt{\frac{4-3a_{n+1}}{a_{n+1}}}$$

Khi đó $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$. □

Bài toán 9. ***Đông Vinh 2022.*** *Cho dãy $\{u_n\}_{n\geq 1}$ được xác định bởi*

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, n \geq 1.$$

(a) Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}u_n$.

(b) Chứng minh rằng $\lim nu_n = 0$.

(c) Tìm số thực α để lim $n^\alpha u_n$ là một số hữu hạn khác 0.

Bài toán 10. ***TST ĐHSP 2023.*** *Cho $a, b \in \mathbb{R}$ và $a > 1$ thỏa mãn $x_1 = b$ và $x_{n+1} = a^{x_n} - 1$ với $n \geq 1$.*

Xét dãy số (y_n) có $y_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Tìm a để (y_n) có giới hạn hữu hạn.

Bài toán 11. ***(Epsilon).*** *Cho dãy (u_n) được xác định bởi*

$$x_1 = x_2 = 1 \text{ và } x_{n+1} = x_n + \frac{2\sqrt{x_{n-1}}}{n^3}, n \geq 1$$

Chứng minh rằng $x_n < \dfrac{25}{4}$.

Bài toán 12. ***(Khảo sát đội tuyển HCM 2020).*** *Cho các ý sau:*

(a) Cho dãy số $\{u_n\}$ được xác định bởi $u_n = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln n, n = 1, 2, \ldots$ Chứng minh rằng dãy $\{u_n\}$ hội tụ.

(b)Với mỗi số nguyên dương, gọi k_n là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k} \geq n$$

Tìm $\lim \dfrac{k_{n+1}}{k_n}$ và $\lim \dfrac{u_n}{n}$.

Bài toán 13. ***(Epsilon).*** *Cho dãy (u_n) được xác định bởi*

$$u_1 = 6 \text{ và } u_{n+1} = \frac{2n+3}{2n+1} - \frac{12}{(n+1)(2n+1)}, n \geq 1$$

Tính $\lim \dfrac{u_n}{n}$.

Bài toán 14. ***(Đồng Nai TST 2016).*** *Cho số thực a và dãy số (x_n), trong đó $x_1 = a, x_{n+1} = x_n + \dfrac{x_n^2}{n^2}$ với mỗi số nguyên dương $n \geq 1$.*

(a) Khảo sát sự hội tụ của (x_n) khi $a \in (0, 1)$.

(b) Với $a \geq 1$, tính $\lim_{n\to\infty} x_n$ (nếu tồn tại).

(c) Khi $a > 0$, chứng minh rằng $\dfrac{1}{x_n + n^2} \leq \dfrac{1}{\sqrt{a}n(n+1)} \forall n \in \mathbb{N}$.

Bài toán 15. ***(Trải nghiệm VMO 2024).*** *Cho dãy số thực dương (x_n) thỏa mãn $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1$. Giả sử rằng tồn tại số thực b sao cho $x_{2n} \leqslant bx_n$ với mọi số nguyên dương n. Xét dãy số $(s_n)_{n\geq 1}$ xác định bởi*

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

với mọi $n = 1, 2, \ldots$

(a) *Chứng minh rằng nếu* $b < \dfrac{1}{2}$ *thì dãy số* (s_n) *có giới hạn hữu hạn.*

(b) *Nếu* $b = \dfrac{1}{2}$ *thì khẳng định ở câu a) có còn đúng không?*

Bài toán 16. ***(Vĩnh Phúc 2024).*** *Cho các ý sau:*

a) Cho hai dãy số $(x_n), (y_n), n = 1, 2, \ldots$ *được xác định như sau:*

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_{n+2} = (n+1)(x_{n+1} + x_n), y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}, n = 1, 2, \ldots$$

Chứng minh rằng dãy số (y_n) *có giới hạn hữu hạn.*

b) Cho $a > 2$ *là một số thực cho trước và dãy số* $(u_n), n = 1, 2, \ldots$ *được xác định như sau:*

$$u_1 = a, u_{n+1} = 4 - \frac{4}{u_n}, n = 1, 2, \ldots$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) *xác định với mọi* $n \in \mathbb{N}^*$*, có giới hạn hữu hạn và tìm giới han đó.*

Bài toán* 13. *(VMO 2008). *Cho dãy số* (x_n) *được xác định bởi* $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ *và* $x_{n+2} = 2^{-x_n} + \dfrac{1}{2}$ $\forall n = 1, 2, 3 \ldots$. *Chứng minh rằng* (x_n) *có giới hạn hữu hạn khi* $n \to +\infty$*. Tìm giới hạn đó.*

Lời giải. Xét dãy con $x_4 = \dfrac{3}{4}$ và $x_{2(k+1)} = 2^{-x_{2k}} + \dfrac{1}{2}$. Bằng đánh giá thông thường ta được $\dfrac{1}{2} \leq x_n \leq \dfrac{3}{2}, \forall n \geq 2$

Xét $f(x) = \dfrac{1}{2^x} + \dfrac{1}{2}$ trên $[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2})$ có

$$f'(x) = -\ln 2.2^{-x} \leq -\ln 2.2^{-\frac{3}{2}} < -0.3 \text{ và } f'(x) \geq -\ln 2.2^{-\frac{1}{2}} > -0.4$$

Chung quy lại ta được $|f'(x)| < 1$. Theo quy tắc ánh xạ co thì (x_{2n}) hội tụ. Giải phương trình giới hạn $2^{-L} + \dfrac{1}{2} = L$ tìm được $L = 1$ và vì $f'(L) - 1 < 0$ nên phương trình chỉ có duy nhất nghiệm nên $\lim x_{2n} = 1$.

Làm tương tự với dãy (x_{2n+1}) thì ta cũng tìm được $\lim x_{2n+1} = 1$, suy ra $\lim x_n = 1$. □

Bài toán* 14. *(VMO 2009). *Cho dãy số* $\{x_n\}$ *được xác định bởi*

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} \\ x_n = \dfrac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}}{2} \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy $\{y_n\}$*, trong đó* $y_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{{x_i}^2}$*, có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.*

Lời giải. Trước tiên ta cần chứng minh $\lim x_n = +\infty$. Thật vậy, giả sử (x_n) có giới hạn hữu hạn thì giải phương trình giới hạn thì có được $\lim x_n = 0$.
Mặt khác, bằng quy nạp ta chứng minh được $x_n \geq \frac{1}{2}, \forall n \geq 1$ và có

$$x_n - x_{n-1} = \frac{4x_{n-1}}{2(\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}})} > 0$$

nên vô lý vì $\lim x_n = 0$. Do đó (x_n) phân kì mà lại có (x_n) tăng ngặt nên $\lim x_n = +\infty$.

Xét một khai triển như sau

$$2x_n - x_{n-1} = \sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} 4x_n^2 - 4x_n x_{n-1} + x_{n-1}^2 = x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}\frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n}$$

Khi đó $y_n = y_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{{x_i}^2} = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_n}$. Vậy nên $\lim y_n = 2$. □

Bài toán 15. ***(VMO 2010).*** *Cho dãy số $\{a_n\}$ được xác định bởi*

$a_1 = 5$ *và* $a_{n=} \sqrt[n]{a_{n-1}^{n-1} + 2^{n-1} + 2.3^{n-1}} \qquad \forall n \geq 2$

(a) Tìm công thức tổng quát của a_n

(b) Chứng minh rằng $\{a_n\}$ có giới hạn hữu hạn.

Lời giải. a) Ta có $a_{n-1}^{n-1} = a_{n-2}^{n-2} + 2^{n-2} + 2.3^{n-2}$, vậy nên ta được

$$a_n = \sqrt[n]{(2^{n-1} + 2.3^{n-1} + a_{n-1}^{n-1})} = \sqrt[n]{(2^{n-1} + 2.3^{n-1}) + (2^{n-2} + 2.3^{n-2}) + a_{n-2}} = ...$$

$$= \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{n-1} 2^i + 2.3^i + 5} = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$$

b) $\lim a_n = \lim 3\sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} = 3$ □

Bài toán 16. ***(VMO 2011).*** *Cho dãy số (x_n) được xác định bởi*

$$x_1 = 1, x_n = \frac{2n}{(n-1)^2}\sum_{i=1}^{n-1} x_i$$

Chứng minh rằng dãy (y_n) với $y_n = x_{n+1} - x_n$ có giới hạn hữu hạn khi $n \to \infty$.

Lời giải. Ta có

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i = \frac{(n-1)^2}{2n} x_n$$

Thay vào x_{n+1} ta được

$$x_{n+1} = x_n \frac{n+1}{n}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = ... = \prod_{i=1}^{n} \frac{i+1}{i}\left(1 + \frac{1}{i^2}\right) = (n+1)\prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{i^2}\right)$$

Tương đương

$$x_{n+1} - x_n = \prod_{i=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{i^2}\right)\left[1+\frac{n+1}{n^2}\right] \lim(x_{n+1}-x_n) = \prod_{i=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{i^2}\right)$$

Lại có

$$\lim \ln(x_{n+1}-x_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{i^2}\right) < \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Khi đó $\lim y_n < e^{\frac{\pi^2}{6}}$ cho nên (y_n) có giới hạn hữu hạn.

□

Bài toán 17. ***(VMO 2012).*** *Cho dãy số $\{x_n\}$ được xác định bởi:*

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_n = \dfrac{n+2}{3n}(x_{n-1}+2), n \geq 2. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$. và tìm giới hạn đó.

Lời giải. - **Cách 1: Sử dụng định lý Weierstrass.** Dự đoán $\lim x_n = 1$. Ta chứng minh (x_n) giảm $\forall n \geq 2$. Ta cần

$$x_n - x_{n-1} < 0 \frac{n+2}{3n}(x_{n-1}+2) < x_{n-1} \frac{2n-2}{3n}x_{n-1} > \frac{2n+4}{3n}x_{n-1} > \frac{n+2}{n-1} = 1 + \frac{3}{n-1}$$

Ta có $x_2 > 1+3 = 4$ đúng. Giả sử $x_{n-1} > 1 + \dfrac{3}{n-1}$. Ta có

$$x_n > \frac{n+2}{3n}.\frac{3n}{n-1} = 1 + \frac{3}{n-1} > 1 + \frac{3}{n}$$

Từ đó có (x_n) giảm và bị chặn dưới. Theo Weierstrass thì (x_n) hội tụ, giải phương trình giới hạn tìm được $\lim x_n = 1$

- **Cách 2: Bổ đề dãy số**. Ta có khai triển như sau:

$$|x_n - 1| \leq \frac{n+2}{3n}|x_{n-1}-1| + \frac{2}{3n} \leq \frac{1}{3}|x_{n-1}-1| + y_n, \text{với } \lim y_n = 0$$

Theo bổ đề dãy số thì ta có được $\lim x_n = 1$ □

Bài toán 18. ***(VMO 2013).*** *Cho dãy số $\{a_n\}$ được xác định bởi:*

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 3 - \dfrac{a_n+2}{2^{a_n}} \quad \textit{for } n \geq 1. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\{a_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$. và tìm giới hạn đó.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh rằng $a_n > 1, \forall n \geq 1$. Xét $f(x) = 3 - \dfrac{x+2}{2^x}$ trên $[1, +\infty)$.
Ta có $f'(x) = \dfrac{\ln 4 + \ln 2.x - 1}{2^x} > 0, \forall x \in [1, +\infty)$, nên $f(x) > f(1)$ suy ra $a_n > 1, \forall n \geq 1$.
Ta lại có $a_2 > a_1$ mà $f'(x) > 0$ nên vì vậy (a_n) là dãy tăng. Theo Weierstrass thì a_n hội tụ và $L = \lim a_n$ thỏa mãn $L = f(L)$. Ta sẽ chứng minh rằng giới hạn này là duy nhất.
Xét $g(x) = f(x) - x$ có

$$g'(x) = \frac{\ln 4 + \ln 2.x - 1}{2^x} - 1 = \frac{x \ln 2 + \ln 4 - 1 - 2^x}{2^x}$$

Dễ dàng chứng minh được $g(x)' < 0, \forall n \geq 1$. Nên thành ra $g(x)$ giảm ngặt, cho nên $g(x)$ chỉ có 1 nghiệm duy nhất. Mà lại có $g(2) = 0$ nên suy ra $\lim a_n = 2$ □

Bài toán* 19. *(VMO 2014). *Cho $(x_n), (y_n)$ là hai dãy số dương được xác định bởi $x_1 = 1, y_1 = \sqrt{3}$ và*

$$\begin{cases} x_{n+1}y_{n+1} - x_n = 0 \\ x_{n+1}^2 + y_n = 2 \end{cases}$$

với mọi $n = 1, 2, 3, \ldots$. Chứng minh rằng cả hai dãy đều hội tụ và tìm giới hạn của chúng.

Lời giải. Đặt $x_1 = 2\sin\dfrac{\pi}{6}$ và $y_1 = 2\cos\dfrac{\pi}{6}$. Ta có

$$x_2^2 = 2 - 2\cos\frac{\pi}{6} = 4\cos^2\frac{\pi}{12} x_2 = 2\cos\frac{\pi}{12}$$

$$2\cos\frac{\pi}{12} y_2 = 2\sin\frac{\pi}{6} y_2 = 2\cos\frac{\pi}{12}$$

Với $x_n = 2\sin\dfrac{\pi}{6.2^{n-1}}$ và $y_n = 2\cos\dfrac{\pi}{6.2n-1}$ thì bằng quy nạp dễ dàng chứng minh được $x_{n+1} = 2\sin\dfrac{\pi}{6.2^n}$ và $y_{n+1} = 2\cos\dfrac{\pi}{6.2^n}$ bằng quy nạp.
Suy ra $\lim x_n = 0$ và $\lim y_n = 2$. □

Bài toán* 20. *(VMO 2015). *Cho số thực a không âm và dãy (u_n) được xác định bởi*

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{n^2}{4n^2 + a}\sqrt{u_n^2 + 3} \end{cases}$$

Với $a \in [0, 1]$, chứng minh rằng (u_n) hội tụ và tìm giới hạn đó.

Lời giải. Dự đoán $\lim u_n = 1$ và dễ dàng quy nạp được $0 < u_n < 3, \forall n \geq N$. Ta có khai triển như sau:

$$|x_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}|u_n - 1| + \frac{n^2}{4n^2 + a}\frac{|(u_n - 1)(u_n + 1)|}{\sqrt{u_n^2 + 3} + 2} + |\frac{a}{2(4n^2 + a)}|$$

$$< \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}}\right)|u_n - 1| + y_n \text{ với } \lim y_n = 0$$

Theo bổ đề dãy số thì $\lim u_n = 1$ □

Bài toán* 21. *(VMO 2016). *Cho các dãy số như sau:*

a) Cho dãy số (a_n) *thỏa mãn* $a_n = \ln(2n^2+1) - \ln(n^2+n+1)\ \forall n \geq 1$. *Chứng minh rằng tập* $\{n \in \mathbb{N} | \{a_n\} < \frac{1}{2}\}$ *là một tập hữu hạn các phần tử;*

b) Cho dãy số (b_n) *thỏa mãn* $b_n = \ln(2n^2+1) + \ln(n^2+n+1)\ \forall n \geq 1$. *Chứng minh rằng tập* $\{n \in \mathbb{N} | \{b_n\} < \frac{1}{2016}\}$ *là tập vô hạn các phần tử.*

Lời giải. a) Ta xét $f(n) = \ln(2n^2+1) - \ln(n^2+n+1)$ trên $[1, +\infty)$ có

$$f'(n) = \frac{4n}{2n^2+1} - \frac{2n+1}{n^2+n+1} = \frac{2n^2+2n-1}{(2n^2+1)(n^2+n+1)} > 0, \forall n \geq 1$$

Vì vậy nên có (a_n) là dãy tăng. Suy ra

$$a_1 \leq a_n \leq \lim a_n 0 \leq a_n \leq \ln 2$$

Điều này dẫn tới $\{a_n\} = a_n, \forall n \geq 1$. Ta có $\{a_n\} < \frac{1}{2}\ \frac{2n^2+1}{n^2+n+1} \leq \sqrt{e}$ Giải bất phương trình này thì ta chỉ tìm được hữu hạn số n thỏa mãn $\{a_n\} < \frac{1}{2}$.

b) Ta dễ dàng chứng minh được những điều sau:

1. $\lim b_n = +\infty$
2. $\lim b_{n+1} - b_n = 0$
3. $\exists N_1 : b_{n+1} - b_n < \varepsilon, \forall n > N_1$
4. $\lfloor b_{n+1} \rfloor = \lfloor b_n \rfloor$ hoặc $\lfloor b_n \rfloor + 1$

Để tồn tại vô hạn b_n có phần lẻ bé hơn $\frac{1}{2016}$ thì phải có vô hạn số $\lfloor b_{n+1} \rfloor = \lfloor b_n \rfloor + 1$ vì nếu như vậy thì ta có nhận định sau:

$$b_{n+1} - b_n < \varepsilon \lfloor b_{n+1} \rfloor + \{b_{n+1}\} - \lfloor b_n \rfloor - \{b_n\} < \varepsilon \{b_{n+1}\} - \ < \varepsilon - 1 + \{b_n\} < \varepsilon$$

Lúc đó ta chọn $\varepsilon \leq \frac{1}{2016}$ là sẽ có vô hạn phần tử b_n có $\{b_n\} < \frac{1}{2016}$, với $n > N_1$.

Vậy nên giả sử ngược lại, có hữu hạn $n > N_1$ sao cho $\lfloor b_{n+1} \rfloor = \lfloor b_n \rfloor + 1$. Suy ra tồn tại $N_2 > N_1$ để $\lfloor b_{n+1} \rfloor = \lfloor b_n \rfloor, \forall n > N_2$. Lại có (b_n) là dãy tăng nên dẫn tới $b_n < \lfloor b_{N_2} \rfloor + 1, \forall n \geq N_2$ vô lý vì $\lim b_n = +\infty$.

Khi này ta chỉ xét riêng đến các phần tử dạng $\lfloor b_{n+1} \rfloor = \lfloor b_n \rfloor + 1$ thì khi đó rõ ràng nhận định trên là đúng với vô số b_n, hoàn tất chứng minh.

□

Bài toán* 22. *(VMO 2017). *Cho* $a \in \mathbb{R}$ *và dãy số* (u_n) *được định nghĩa bởi*

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{2n+3}{n+1} u_n + \dfrac{1}{4}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Tìm tất cả các a sao cho dãy số (u_n) tồn tại và là một dãy hội tụ.

Lời giải. Cách 1: Sử dụng bổ đề. Trước tiên ta có $u_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{2}a + \frac{1}{4}a} \geq -\frac{1}{10}$. Với $a = -\frac{1}{10}$ thì dãy cũng hội tụ. Dễ dàng quy nạp được $u_n > 3$. Ta có khai triển như sau:

$$|u_{n+1} - 3| \leq \frac{\frac{2n+3}{n+1}|u_n - 3| + \frac{6n+9}{n+1} - 6}{\sqrt{\frac{2n+3}{n+1}u_n + \frac{1}{4}} + \frac{5}{2}} < \frac{2n+3}{5n+5}|u_n - 3| + \frac{3}{5n+5} < \frac{2}{5}|u_n - 3| + y_n$$

Trong đó $\lim y_n = \lim \frac{3}{5n+5} = 0$. Áp dụng bổ đề dãy số cho ta được $\lim u_n = 3$

Cách 2: Sử dụng giải tích thuần. Ta xét $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$ trên $[1, +\infty)$ có

$$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0, \forall x \geq 1$$

Điều này dẫn tới $f(x)$ là hàm giảm và $f(n+1) < f(n), \forall n \geq 1$. Nếu tồn tại n_0 sao cho $u_{n_0} \geq u_{n_0+1}$ thì từ tính đơn điệu của f ta có thể thấy được u_n giảm với mọi $n \geq n_0$. Mặt khác ta đã có $u_n > 3$ nên theo Weierstrass thì (u_n) hội tụ. Giải phương trình giới hạn $L = f(L)$ thì tìm được $L = 3$ suy ra $\lim u_n = 3$.

Giả sử ngược lại rằng (u_n) tăng ngặt với mọi $n \geq 1$. Khi đó có

$$u_{n+1} > u_n \frac{2n+3}{n+1} u_n > u_n^2 - u_n u_n < \frac{3n+4}{n+1} < 3 + \frac{1}{n+1} < 3 + \frac{1}{2}$$

Vô lý vì $u_n >$ từ đó trường hợp này không thể xảy ra. Cho nên kết luận $\lim u_n = 3$. □

Bài toán* 23. *(VMO 2018). *Dãy số (x_n) được định nghĩa như sau:*

$$x_1 = 2, \, x_{n+1} = \sqrt{x_n + 8} - \sqrt{x_n + 3}$$

với mọi $n \geq 1$.

a. Chứng minh rằng (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

b. Với mỗi $n \geq 1$, chứng minh rằng

$$n \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq n + 1.$$

Lời giải. Ta chỉ cần chứng minh $1 \leq x_n \leq 1 + \frac{1}{n(n+1)}$ là sẽ giải quyết được cả hai vấn đề. Với $n = 1$ thì hiển nhiên đúng, giả sử mệnh đề đúng với n, ta có

$$x_{n+1} > \sqrt{8+1} - \sqrt{\frac{1}{n(n+1)} + 4} \geq 3 - 2 = 1$$

Và ta cần chứng minh

$$x_{n+1} < \sqrt{\frac{1}{n(n+1)} + 9} - 2 \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} + 1$$

Tương đương $h(x) = \sqrt{\frac{1}{n(n+1)} + 9} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} - 3 \leq 0.$

Mà lại có $h(x)$ là hàm tăng trên $[1, \infty)$. Suy ra $h(n) \leq \lim\limits_{n \to +\infty} h(n) \leq 0$. Điều này dẫn tới mệnh đề quy nạp là đúng.

Với câu a) thì ta đã có $1 \leq x_n \leq 1 + \frac{1}{n(n+1)}$, nên nếu cho $n \to +\infty$ thì $\lim x_n = 1$. Còn câu b) thì ta có

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq 1 + 1 + ... + 1 = n$$

Mặt khác

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{1}{i(i+1)} = n + (1 - \frac{1}{n+1}) \leq n + 1$$

Kết hợp hai điều trên lại thì ta đã hoàn tất chứng minh.

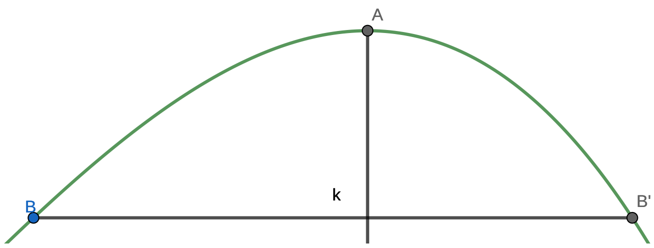
□

Bài toán 24. (VMO 2019). *Cho $f : \mathbb{R} \to (0; +\infty)$ là một hàm số liên tục sao cho $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.*
a) Chứng minh rằng $f(x)$ có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$.
b) Chứng minh rằng tồn tại hai dãy số $(x_n), (y_n)$ với $x_n < y_n, \forall n = 1, 2, 3, ...$ sao cho chúng có cùng giới hạn khi n tiến tới vô cùng và $f(x_n) = f(y_n)$ với mọi n.

Lời giải. a) Bản chất của câu này là định lý Rolle mở rộng trên tập $(-\infty, +\infty)$.
Giả sử $f(0) > 0$, vì $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ nên tồn tại a đủ nhỏ và b đủ lớn sao cho $f(x) < f(0), \forall x \leq a$ và $f(x) < f(0), \forall x \geq b$.
Xét $f(x)$ trên đoạn $[a, b]$, theo nguyên lý cực hạn thì tồn tại c sao cho $f(c) = max\{f(x)\} = M$ trên $[a, b]$.

Dễ thấy rằng với mọi $x \in (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$, $f(x) < f(0) \leq M$, nên $f(x) \leq M, \forall x \in \mathbb{R}$

b)



Ý tưởng của câu này là sẽ xét các đoạn xoay quanh điểm cực trị của $f(x)$ thì với $B < A$ thì luôn tồn tại $B' > A$ sao cho $f(B) = f(B')$.

Ta xét đoạn $[a, b]$ có $a < M < b$ và $c \in (a, M)$ bất kì. Nếu như $[a, b]$ có nhiều hơn một cực trị thì ta chỉ cần co thành đoạn $a' = a + \varepsilon_1 =$ và $b' = b - \varepsilon_2$, với $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < M$ đủ lớn sao cho $f'(x) = 0$ có duy nhất nghiệm trên $[a', b']$. Khi này ta xét đến đoạn $[a', b']$.

Không mất tính tổng quát, giả sử đoạn có 1 cực trị M là $[a, b]$, và sẵn theo câu a) thì giả sử $M = max\{f(x)\}$ trên $[a, b]$

Đặt $g(x) = f(x) - f(c)$ thì có $g(a) < 0$ và $g(b) > 0$ thì $g(a).g(b) < 0$, rõ ràng là $g(x)$ có nghiệm trên (a, b), tức là $\exists c' \in (a, b) \backslash c$ sao cho $f(c) = f(c')$.

Giả sử rằng $c' < M$ thì khi này ta có $f'(c) = f'(c')$, theo định lý Rolle tồn tại d sao cho $f'(d) = 0$, mà $d < M$ vô lý, nên vì vậy $c' \in (M, b)$.

Tương tự như vậy mà vì f liên tục nên có vô hạn $c \in (a, M)$ đồng thời cũng sinh ra vô hạn $c' \in (M, b)$

Nếu với mỗi c và c' như vậy ta đặt $x_n = c$ và $y_n = c'$ thì sẽ có $f(x_n) = f(y_n)$ với mọi $n \geq 1$. Và ta sẽ xây dựng công thức tổng quát cho x_n và y_n.

Phân hoạch $[a, M]$ thành n đoạn thì mỗi đoạn có độ dài là $\dfrac{M-a}{n}$, và ta có dãy $x_1 = a, x_n = x_{n-1} + \dfrac{M-a}{2^n}$. Khi đó đường thẳng $y = f(x_n)$ nằm ngang trên đồ thị và cắt phần $f(x)$ đoạn $(M, b]$ tại một điểm duy nhất là y_n.

Nếu $f(a) < f(b)$ thì ta cho a tiến thêm một khoảng nữa là a' sao cho $f(a') > f(b)$. Và giả sử $f(a) > f(b)$.

Khi này nếu cho $n \to +\infty$ thì $\lim x_n = M$ thì đường thẳng y cũng tịnh tiến lên trên về $(M, f(M))$, chứng tỏ rằng (y_n) cũng tăng và bị chặn. Khi y tiếp xúc $f(x)$ duy nhất tại điểm $(M, f(M))$ trên $[a, b]$ thì cũng là khi $\lim x_n = \lim y_n = M$, và ta hoàn tất chứng minh. □

Bài toán* 25. *(VMO 2020). *Cho dãy số (x_n) xác định bởi: $x_1 = 1$ và $x_{n+1} = x_n + 3\sqrt{x_n} + \dfrac{n}{\sqrt{x_n}}$,∀n$\geq 1$*
a) Chứng minh rằng lim$\dfrac{n}{x_n} = 0$
b) Tính lim$\dfrac{n^2}{x_n}$

Lời giải. a) Vì x_n là dãy dương nên ta có $\dfrac{n}{x_n} > 0$. Dễ dàng chứng minh $x_n > n^2$ bằng quy nạp. Thì ta có $\dfrac{n}{x_n} < \dfrac{1}{n}$. Cho $n \to +\infty$ thì theo nguyên lý kẹp, $\lim \dfrac{n}{x_n} = 0$

b) Vì $x_n > n^2$ nên $\lim x_n = +\infty$. Áp dụng định lý Stolz ta có

$$\lim \frac{n}{\sqrt{x_n}} = \lim \frac{1}{\sqrt{x_{n+1}} - \sqrt{x_n}} = \lim \frac{\sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n}}{x_{n+1} - x_n} = \lim \frac{\sqrt{x_n + 3\sqrt{x_n} + \dfrac{n}{\sqrt{x_n}}} + \sqrt{x_n}}{3\sqrt{x_n} + \dfrac{n}{\sqrt{x_n}}}$$

$$= \lim \frac{\sqrt{\sqrt{x_n} + \dfrac{3}{\sqrt{x_n}} + \dfrac{n}{x_n\sqrt{x_n}}} + 1}{3 + \dfrac{n}{x_n}} = \frac{1+1}{3} = \frac{2}{3}$$

Vì vậy $\lim \dfrac{n^2}{x_n} = \dfrac{4}{9}$ □

Bài toán* 26. *(VMO 2021). *Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 \in (0; \dfrac{1}{2})$ và $x_{n+1} = 3x_n^2 - 2nx_n^3, n \geq 1$.*
a) Chứng minh rằng (x_n) hội tụ về 0.

b) Với mỗi $n \geq 1$, đặt $y_n = x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n$. Chứng minh rằng (y_n) có giới hạn hữu hạn.

Lời giải. a) Theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$|x_{n+1}| = |\frac{x_n}{2n}.(2nx_n)\left(3 - 2nx_n\right)| \leq \frac{x_n}{2n}\left(\frac{3 - 2nx_n + 2nx_n}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{16}|x_n|, \forall n \geq 2$$

Suy ra $|x_{n+1}| \leq \left(\dfrac{9}{16}\right)^n x_1$. Chọn n đủ lớn thì có $\lim x_n = 0$

b) Theo tiêu chuẩn d'Alembert ta xét biểu thức

$$D = \lim \frac{(n+1)x_{n+1}}{nx_n} \leq \lim \frac{9}{16}\frac{n+1}{n} = \frac{9}{16}$$

Vì $D < 1$ nên y_n có giới hạn hữu hạn. □

Bài toán 27. (VMO 2022). *Cho a là một số thực không âm và dãy số (u_n) được định nghĩa như sau:*

$$u_1 = 6, u_{n+1} = \frac{2n+a}{n} + \sqrt{\frac{n+a}{n}u_n + 4}, \forall n \geq 1$$

Với $a \geq 0$, chứng minh rằng tồn tại giới hạn hữu hạn của (u_n).

Lời giải. Dự đoán $\lim u_n = 5$. Bằng quy nạp ta chứng minh được $u_n \geq 5, \forall n \geq 1$. Ta có khai triển như sau:

$$|u_n - 5| \leq |\frac{2n+a}{n} - 2| + |\sqrt{\frac{n+a}{n}u_n + 4} - 3| \leq \frac{a}{n} + \frac{\dfrac{n+a}{n}|u_n - 5| + \dfrac{5a}{n}}{\sqrt{\dfrac{n+a}{n}u_n + 4} + 3}$$

$$\leq \frac{n+a}{6n}|u_n - 5| + \frac{5a}{6n}$$

Vì a là cố định nên ta chỉ cần xét từ $n \geq \lfloor a \rfloor$ là được. Ta có

$$|u_n - 5| \leq \frac{1}{3}|u_n - 5| + y_n, \text{ với } \lim y_n = \lim \frac{5a}{6n} = 0$$

Áp dụng bổ đề dãy số ta được $\lim x_n = 5$. □

Bài toán 28. (VMO 2023). *Xét dãy số (a_n) thỏa mãn $a_1 = \dfrac{1}{2}, a_{n+1} = \sqrt[3]{3a_{n+1} - a_n}$ và $0 \leq a_n \leq 1, \forall n \geq 1$.*

a. Chứng minh rằng dãy số (a_n) được xác định duy nhất và có giới hạn hữu hạn.

b. Đặt $b_n = (1 + 2.a_1)(1 + 2^2 a_2)...(1 + 2^n a_n), \forall n \geq 1$.

Chứng minh rằng dãy số (b_n) có giới hạn hữu hạn.

Lời giải. a) Đặt $a_n = 2\sin\alpha_n$. Ta có $\sin\alpha_n = 3\dfrac{a_{n+1}}{2} - \dfrac{4a_{n+1}^3}{2^3}a_{n+1} = 2\sin\dfrac{\alpha_n}{3}$

Thực hiện truy toán như vậy nếu đặt $a_1 = 2\sin\alpha$ thì ta có $a_n = 2\sin\dfrac{\alpha}{3^{n-1}}$

Do đó (a_n) xác định duy nhất và $\lim a_n = 0$

b) Ta có $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = 1 + 2^n a_n > 1$ nên (b_n) tăng. Mặt khác, vì $0 < \dfrac{\alpha}{3^{n-1}} < \dfrac{\pi}{2}, \forall n \geq 1$.

Xét $f(x) = \sin x - x$ trên $(0, \dfrac{\pi}{2})$ có $f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$ nên $f(x)$ giảm và $f(x) \leq 0$.

Do đó ta có đánh giá

$$a_n = 2\sin\frac{\alpha}{3^{n-1}} \leq \frac{2\alpha}{3^{n-1}}$$

Khi này viết lại với chú ý $\ln(x+1) \leq x, \forall x \geq 1$

$$b_n \leq \prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{2^{i+1}\alpha}{3^{i-1}}\right) \ln b_n \leq \sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{2^{i+1}\alpha}{3^{i-1}}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} 6\alpha\frac{2^i}{3^i} = 12\alpha\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \leq 12\alpha$$

Suy ra được $b_n \leq e^{12\alpha}$. Nên theo Weierstrass thì (b_n) hội tụ, hoàn tất chứng minh. □

Bài toán* 29. *(VMO 2024). *Với mỗi số thực x, kí hiệu $\lfloor x \rfloor$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.*

Dãy số $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ được định nghĩa bởi $a_n = \dfrac{1}{4^{\lfloor -\log_4 n \rfloor}}, \forall n \geq 1$. Đặt $b_n = \dfrac{1}{n^2}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k - \dfrac{1}{a_1 + a_2}\right)$.

a) Tìm đa thức $P(x)$ với hệ số thực sao cho $b_n = P\left(\dfrac{a_n}{n}\right), \forall n \geq 1$.

b) Chứng minh rằng tồn tại một dãy số tăng nghiêm ngặt $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ của các số nguyên dương sao cho

$$\lim_{k\to\infty} b_{n_k} = \frac{2024}{2025}.$$

Lời giải. a) Mỗi lần n tăng gấp 4 lần thì a_n cũng tăng gấp 4 lần, nếu không thì các số hạng kề a_n không đổi. Vậy nên với mỗi n, $\exists t : 4^t \leq n \leq 4^{t+1}$ và $a_n = 4^t$.

Ta để ý rằng $a_1 = 1, a_2, a_3, a_4 = 4, a_5, a_6, ..., a_{16} = 16$ và ta có lập luận rằng cứ mỗi $a_{4^{k-1}+1}, a_{4^{k-1}+2}, ..., a_{4^k}$ thì giá trị vẫn giữ nguyên, và cứ một cụm như thế thì sẽ có tổng là $T_k = (4^k - (4^{k-1}+1)+1)4^k = 12.16^{k-1}$.

Ta đặt $n = 4^m + r$ trong đó m là số lớn nhất sao cho $4^m \leq n$ và $m, r \in \mathbb{Z}^+$. Tất nhiên là ta được $r = n - a_n$. Khi đó có

$$S = \sum_{i=1}^{4^m+r} a_i = \sum_{i=1}^{4^m} a_i + \sum_{i=4^m+1}^{4^m+r} a_n = 1 + \sum_{i=0}^{m} T_i + a_n.r = 1 + \sum_{i=0}^{m} 12.16^i + a_n(n - a_n)$$

$$= 1 + 4\frac{16^m - 1}{5} + na_n - a_n^2 = 1 + \frac{4a_n^2 - 4}{5} + na_n - a_n^2 = -\frac{1}{5}a_n^2 + na_n + \frac{1}{5}$$

Khi này thay S vào b_n ta được

$$b_n = \frac{1}{n^2}\left(S - \frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{5}.\frac{a_n^2}{n^2} + \frac{a_n}{n} = P\left(\frac{a_n}{n}\right)$$

Khi này ta có được $P(x) = -\dfrac{1}{5}x^2 + x$, hoàn tất câu a).

b) Để giải quyết được câu b) thì ta hãy tìm hiểu một khái niệm khác trong *tiền giải tích (Precalculus)* là *Tập hợp trù mật.*

- **Định nghĩa 9:** Một tập con A trong X được gọi *trù mật (hoặc dày đặc)* trong X nếu mọi điểm trong X hoặc là thuộc X hoặc gần tùy ý với một phần tử của A.

Ta có một định lý khá quan trọng như sau:

Định lý trù mật

Với $a < b$ là hai số thực bất kì thì luôn tồn tại số hữu tỉ q sao cho $a < q < b$.

Chứng minh: Đặt $c = b - a > 0$. Khi đó tồn tại số nguyên dương n sao cho $0 < \dfrac{1}{n} < c$. Điều này không phải hiển nhiên, ta có tiên đề sau

Tiên đề Archimedes

Cho x, y là hai số thực dương, khi đó tồn tại số nguyên dương m sao cho $mx > y$

Cách chứng minh tiền đề này phải dùng đến *lý thuyết topo* rất phức tạp nên ta hãy tạm thời thừa nhận nó mà không chứng minh lại.

Chọn $x = c$ và $y = 1$ thì khẳng định trên đúng. Giờ ta xét các số hữu tỉ dạng $\dfrac{m}{n}$ với $m \in \mathbb{Z}$ và n nguyên dương cố định. Cũng theo tiên đề Archimedes, luôn tồn tại số hữu tỉ $\dfrac{m_1}{n} < a$ và số hữu tỉ $\dfrac{m_2}{n} > b$

Như vậy ta xét các số hữu tỉ $\dfrac{m_1}{n}, \dfrac{m_1+1}{n}, \ldots \dfrac{m_2-1}{n}, \dfrac{m_2}{n}$. Đặt p là số nguyên lớn nhất sao cho $\dfrac{p}{n} \leq a$. Khi đó có $a < \dfrac{p+1}{n} < b$, hoàn tất chứng minh.

Mở rộng sang ngôn ngữ dãy số thì điều này cho ta một hệ quả vô cùng quan trọng như sau:

Hệ quả 1

Nếu $a < b$ là hai số thực dương thì tồn tại vô hạn số hữu tỉ thuộc (a, b). Hay nói cách khác luôn tồn tại dãy (s_n) hữu tỉ với $a < s_n < b, \forall n \geq 1$ và $\lim s_n = L$ với L tùy ý thuộc (a, b).

Và ta còn có thể có một hệ quả thứ hai nữa là

Hệ quả 2

Nếu (a_n) là dãy thực có các phần tử thuộc tập T trù mật trên khoảng nào đó thì tồn tại một dãy s_n nguyên dương tăng ngặt sao cho $\lim a_{s_n} = L$ với L thuộc T tùy ý.

Quay trở lại bài toán, ta có $P(1) = \dfrac{4}{5} < \dfrac{2024}{2025} < P(2) = \dfrac{6}{5}$, cho nên vì tính liên tục của P nên tồn tại $\alpha \in (1, 2)$ sao cho $P(\alpha) = \dfrac{2024}{2025}$. Như vậy bài toán sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được tập hợp

$$T = \left\{ \frac{4^{i+1}}{4^i + r} | i, r \in \mathbb{N}, 0 < q \leq 3.4^i \right\}$$

trù mật trên $(1,2)$. Với $a < b \in (1,2)$ bất kì thì luôn tồn tại số i, r sao cho

$$a < \frac{4^{i+1}}{4^i + r} < b \frac{a}{4^{i+1}} < \frac{1}{4^i + r} < \frac{b}{4^{i+1}} 4^i(\frac{4}{b} - 1) < r < 4^i(\frac{4}{a} - 1) 4^i(\frac{4}{a} - \frac{4}{b}) > 1$$

nếu chọn i đủ lớn, dẫn tới sự tồn tại của r, vậy nên T trù mật trên $(1,2)$.

Viết $n = 4^m + r$ thì ta được $\frac{a_n}{n} = \frac{4^{m+1}}{4^m + r} \in T$. Theo hệ quả trù mật thì vì đã có $\left(\frac{a_n}{n}\right)$ là dãy hữu tỉ nên phải tồn tại dãy (n_k) nguyên dương tăng ngặt để $\lim_{k \to +\infty} \frac{a_{n_k}}{n_k} = P(\alpha) = \frac{2024}{2025}$, hoàn tất chứng minh. □

Bài toán 30. (OLP 30/4 2024). *Cho dãy số (x_n) được xác định bởi*

$$x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + x_n^2} - x_n}{1 + \sqrt{1 + x_n^2} + x_n}$$

Chứng minh rằng (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải. Cách 1: Sử dụng bổ đề dãy số. Viết lại ta có $x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 + 1} - x_n$. Dự đoán $\lim x_n = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Lại có $x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{x_n^2 + 1} + x_n} > 0$ nên cũng có $x_{n+1} \leq 1$

$$(x_{n+1} - \frac{1}{\sqrt{3}}) = \sqrt{x_n^2 + 1} - \frac{2}{\sqrt{3}} - (x_n - \frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{(x_n + \frac{1}{\sqrt{3}})(x_n - \frac{1}{\sqrt{3}})}{\sqrt{x_n^2 + 1} + \frac{2}{\sqrt{3}}} \leq (\sqrt{3} - 1)(x_n - \frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$|x_{n+1} - \frac{1}{\sqrt{3}}| \leq (2 - \sqrt{3})|x_n - \frac{1}{\sqrt{3}}|$$

Áp dụng bổ đề dãy số thì (x_n) có giới hạn hữu hạn và $\lim x_n = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Cách 2: Sử dụng lượng giác. Đặt $x_n = \tan x$. Ta có

$$x_{n+1} = \sqrt{\tan^2 x + 1} - tanx = \frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{\sin \frac{\pi}{2} - \sin x}{cosx} = \frac{2\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})}{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}$$

$$= \frac{\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})}{\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})} = \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$$

Khi đó ta sẽ quy nạp được $x_n = \tan\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$. Vậy nên $\lim x_n = \frac{1}{\sqrt{3}}$ □

Bài toán 31. (Đồng Tháp TST 2024). *Cho dãy số thực (x_n) có $x_1 = 2$ và*

$$x_{n+1} = \frac{n^2 - 1}{x_n} + 2, \forall n \geq 1$$

a) Chứng minh rằng $\lim x_n = +\infty$

b) Xét dãy (y_n) được xác định bởi

$$y_n = \frac{x_1}{1.2^1} + \frac{x_2}{2.2^2} + \cdots + \frac{x_n}{n.2^n}$$

Chứng minh rằng (y_n) có giới hạn hữu hạn và $\lim y_n < 2$.

Lời giải. a) Ta sẽ chứng minh quy nạp rằng $n \leq x_n \leq n+1, \forall n \geq 1$. Với x_1 thì hiển nhiên đúng, giả sử mệnh đề đúng với x_n, ta có

$$x_{n+1} \geq \frac{n^2-1}{n+1} + 2 = n+1$$

$$x_{n+1} \leq \frac{n^2-1}{n} + 2 = n - \frac{1}{n} + 2 \leq n+2$$

Vậy nên mệnh đề quy nạp là đúng. Lại có $x_n \geq n$ nên $\lim x_n = +\infty$.

b) Dễ thấy rằng y_n là dãy tăng. Trước tiên ta xét chứng minh bxất đẳng thức sau đúng $2^{n-1} > n, \forall n \geq 3$. Xét $f(x) = 2^{x-1} - x$ trên $[3, +\infty)$ có $f'(x) = \ln 2.2^{x-1} - 1 > 0, \forall n \geq 3$. Vậy nên $f(x)$ tăng và $f(x) > f(3) = 1 > 0$ nên vì vậy $2^n > 2n, \forall n \geq 3$.

Áp dụng đánh giá này đồng thời với $2^{n-1} \geq n, \forall n < 3$, ta có

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{i.2^i} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{i.2^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} + \frac{1}{i.2^i} < 1 - \frac{1}{2^n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i^2}$$

Ta có đẳng thức tổng nghịch đảo bình phương là $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$, tương đương $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < \frac{\pi^2}{6}, \forall n \geq 1$ nên ta được

$$y_n \leq 1 + \frac{\pi^2}{12}$$

Suy ra (y_n) bị chặn trên. Theo Weierstrass thì (y_n) hội tụ và ta có được $\lim y_n \leq 1 + \dfrac{\pi^2}{12} < 2$ $\square$

B . Lời giải