ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG VIỆT - HÀN
Vietnam - Korea University of Information and Communication Technology

Chương 1:

HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ - GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC - ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

Chương 1: Hàm số một biến số – Giới hạn và liên tục – – Đạo Hàm và vi phân

1.1 Tập hợp - Ánh xạ

1.2 Khái niệm hàm số một biến số

1.3 Giới hạn của hàm số

1.4 Vô cùng bé và vô cùng lớn

1.5 Hàm số liên tục

1.6 Đạo hàm – vi phân

1.7 Các định lý về hàm khả vi

1.6. ĐẠO HÀM – VI PHÂN

1.6.1. Đạo hàm

a. Định nghĩa

- Cho hàm số f(x) xác định trong lân cận điểm x_o. Đạo hàm của hàm số f(x) tại điểm x_o là

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

Nếu đặt:

$\Delta x = x - x_0$: gọi là số gia của biến số tại x_0

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ gọi là số gia của hàm số tại x_0

thì

$$\boxed{f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

• Đạo hàm trái của hàm số f(x) tại điểm x_o là

$$f'(x_o-0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x}$$

• Đạo hàm trái của hàm số f(x) tại điểm x_o là

$$f'(x_o+0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x}$$

• $\exists f'(x_0)\Leftrightarrow f'(x_o-0)=f'(x_o+0)$

• f(x) có đạo hàm tại điểm x = x_o thì liên tục tại x_o. Ngược lại không đúng.

Ví dụ

Hàm số f(x) = $|x|$ liên tục tại x = 0 nhưng không có đạo hàm tại x = 0.

Thật vậy

f(x)=x

f(x)=-x

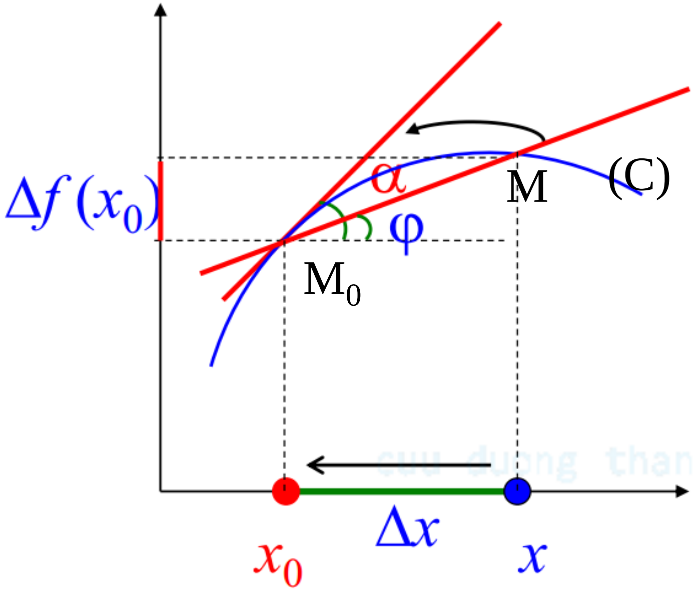
$$f'(0-0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

$$f'(0+0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

$$\Rightarrow\ f'(0-0)\neq f'(0+0)$$

nên hàm số f(x) = $|x|$ không có đạo hàm tại x = 0.

b. Ý nghĩa hình học của đạo hàm



$$\tan\varphi = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\downarrow \quad x \to x_0$$

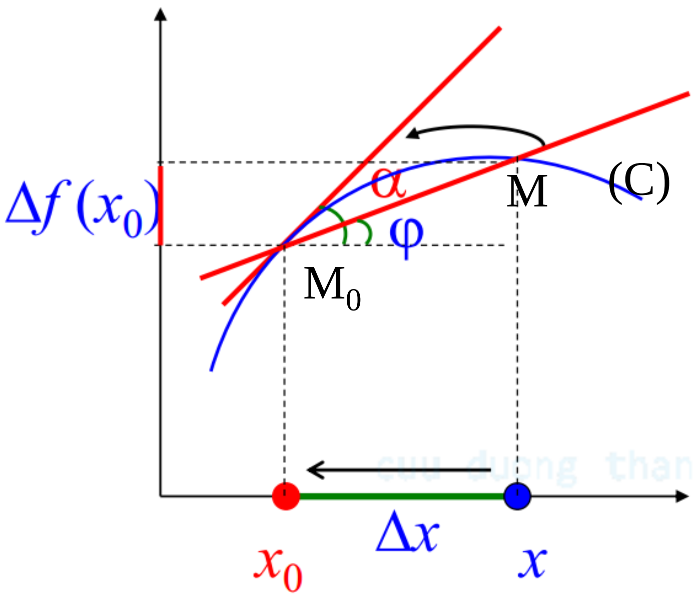
$$\tan\alpha = f'(x_0)$$

$f'(x_0)$ là hệ số góc tiếp tuyến của đường cong (C): y = f(x) tại tiếp điểm $M_0(x_0, f(x_0))$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M_0:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

b. Ý nghĩa hình học của đạo hàm



$$\tan\varphi = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

$$x \to x_0$$

$$\tan\alpha = f'(x_0)$$

$f'(x_0)$ là hệ số góc tiếp tuyến của đường cong (C): y = f(x) tại tiếp điểm $M_0(x_0, f(x_0))$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M_0:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

c. Các phép tính đạo hàm

1. $(u+v)' = u' + v'$ $\qquad$ $(uv)' = u'v + uv'$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}, \quad v \neq 0$$

2. Cho hàm hợp y = y[u(x)]: $\quad y'(x) = y'(u).u'(x)$

3. Nếu hàm số y = f(x) có hàm số ngược x = φ(y) thì hàm hàm ngược x = φ(y) có đạo hàm

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Chú ý: Các hàm số có dạng $y = [u(x)]^{v(x)}$, với $u(x) > 0$:

Phương pháp:

* Lấy ln hai vế ta được: $\ln y = \ln[u(x)]^{v(x)} = v(x).\ln u(x)$

* Lấy đạo hàm hai vế theo biến x ta được:

$$(\ln y)' = [v(x).\ln u(x)]'$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = v'(x).\ln u(x) + v(x).\frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$\Rightarrow y' = y\left[v'(x).\ln u(x) + v(x).\frac{u'(x)}{u(x)}\right]$$

Đạo hàm các hàm sơ cấp

$C' = 0$, với C là hằng số; $(x)' = 1$

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

$(a^x)' = a^x \ln a$, $(e^x)' = e^x$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\cot x)' = -(1 + \cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \qquad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$$

Đạo hàm các hàm hợp

$(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$, $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$(a^u)' = u' a^u \ln a$, $(e^u)' = u' e^u$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$, $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\sin u)' = u' \cos u$, $(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = u'(1 + \tan^2 u) = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$, $(\cot u)' = -u'(1 + \cot^2 u) = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$

$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$, $(\arctan u)' = \dfrac{u'}{1 + u^2}$

Ví dụ: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a. $$f(x)=\begin{cases}1-x & \text{khi } x<1\\ (1-x)(2-x) & \text{khi } 1\le x\le 2\\ x-2 & \text{khi } x>1\end{cases}$$

b. $f(x)=\sin\left(\ln x\right)$. Tính $f'(1)$

c. $f(x)=e^{\text{arctanx}}$. Tính $f'(0)$

d. $y=x^{\cos 2x}$

d. Đạo hàm cấp cao

+ Nếu hàm số y = f(x) có đạo hàm thì y' = f'(x) gọi là đạo hàm cấp 1 của f(x).

+ Nếu f'(x) có đạo hàm thì đạo hàm đó gọi là đạo hàm cấp 2: y''=f''(x) = [f'(x)]'

Tương tự:

+ Đạo hàm cấp 3: $y''' = f'''(x) = [f''(x)]'$

+ Đạo hàm cấp 4: $y^{(4)} = f^{(4)}(x) = [f'''(x)]'$

+ Đạo hàm cấp n: $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$

Ví dụ

Tính $y^{(n)}$ của :

a. $y = e^x$

b. $y = \sin x$

c. $y = \cos x$

d. $y = \ln(1 + x)$

Đs:

a. $y^{(n)} = \left(e^x\right)^{(n)} = e^x$

b. $y^{(n)} = (\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$

c. $y^{(n)} = (\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$

d. $y^{(n)} = [\ln(1+x)]^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$

b. y = sinx

$$y' = (\sin x)' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$y'' = \left(\sin(x + \frac{\pi}{2})\right)' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 2\frac{\pi}{2})$$

$$y''' = \sin(x + 3\frac{\pi}{2})$$

.....

$$\boxed{y^{(n)} = (\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})}$$

c. y = cosx

$$y' = (\cos x)' = \sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2})$$

$$y'' = \left(\cos(x + \frac{\pi}{2})\right)' = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \cos(x + 2\frac{\pi}{2})$$

$$y''' = \cos(x + 3\frac{\pi}{2})$$

.....

$$\boxed{y^{(n)} = (\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2})}$$

d. y = ln(1 + x)

$$y' = \left(\ln(1+x)\right)' = \frac{1}{1+x} = \left(1+x\right)^{-1}$$

$$y'' = \left(\left(1+x\right)^{-1}\right)' = -1\left(1+x\right)^{-2}$$

$$y''' = (-1)(-2)\left(1+x\right)^{-3}$$

$$y^{(4)} = (-1)(-2)(-3)\left(1+x\right)^{-4}$$

$$\ldots\ldots$$

$$y^{(n)} = [\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)(-2)\ldots\left(-(n-1)\right)(1+x)^{-n} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^{n}}$$

e. Công thức Lép-nit

Cho u(x), v(x) có đạo hàm đến cấp n. Khi đó:

- $(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$
- $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$

Ví dụ

Cho y = f(x) = x^2sinx, tìm $y^{(10)}$.

Ví dụ

Cho $y = x^2\sin x$, tìm $y^{(10)}$.

1.6.2. VI PHÂN

a. Định nghĩa:

Cho hàm số y = f(x) có đạo hàm tại x, có

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x).\Delta x + o(\Delta x)$$

Tích số $f'(x).\Delta x$ gọi là vi phân của hàm số y = f(x) tại x, kí hiệu: dy hay df(x), tức là:

$$dy = f'(x).\Delta x \quad (1)$$

Chú ý: Nếu y = x thì $dy = dx = 1.\ \Delta x$

Nên công thức (1) được viết lại là:

$$\boxed{dy = f'(x).dx}$$

Hàm số có vi phân tại x, ta nói f(x) ***khả vi tại x.***

Chú ý:

Đối với hàm một biến số, khái niệm ***hàm số có đạo hàm*** tại x và khái niệm ***hàm số khả vi*** tại x là tương đương nhau.

b. Ứng dụng để tính gần đúng

$$\boxed{f(x_o + \Delta x) \approx f(x_o) + f'(x_o).\ \Delta x}$$

Ví dụ

Tính gần đúng giá trị $(0,998)^{20}$

c. Vi phân cấp cao

+ Nếu hàm số y = f(x) khả vi trong (a, b) thì:

$dy = f'(x)dx$ gọi là ***vi phân cấp 1*** của f(x)

+ Vi phân cấp 2: $d^2y = f''(x)(dx)^2$

+ Vi phân cấp 3: $d^3y = f'''(x)(dx)^3$

+ Vi phân cấp n: $d^ny = f^{(n)}(x)(dx)^n$

Ví dụ

Tìm vi phân của hàm số:

a. $y = \arctan x^2$

b. $y = e^{\cos x}$

Bài tập

1. Tìm đạo hàm cấp cao của hàm số

a. $y = x\ln x$, tính $y^{(5)}$

b. $y = x^2 e^x$, tính $y^{(5)}$

c. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$, tính $y^{(n)}$

d. $y = \dfrac{1-2x}{e^x}$, tính $y^{(n)}$

e. $y = x\ln(1-2x)$, tính $y^{(n)}$

2. Tìm

a. $\dfrac{d}{d(x^3)}(x^3 - 2x^6 - x^9)$

b. $\dfrac{d}{d(x^2)}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$

c. $\dfrac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$