Thực hành 01
Vẽ các đối tượng 2D

Vũ Lê Thế Anh (1612838)

Mục lục

1 Parabola **2**
- 1.1 Cấu tạo . . . 2
- 1.2 Phân vùng và quyết định biến chạy . . . 2
- 1.3 Thuật toán DDA . . . 2
- 1.4 Thuật toán Bresenham . . . 3
- 1.5 Thuật toán Midpoint . . . 4

2 Ellipse **6**
- 2.1 Cấu tạo . . . 6
- 2.2 Phân vùng và quyết định biến chạy . . . 6
- 2.3 Thuật toán DDA . . . 6
- 2.4 Thuật toán Bresenham . . . 7
- 2.5 Thuật toán Midpoint . . . 8

3 Hyperbola **10**
- 3.1 Cấu tạo . . . 10
- 3.2 Phân vùng và quyết định biến chạy . . . 10
- 3.3 Thuật toán DDA . . . 10
- 3.4 Thuật toán Bresenham . . . 11
- 3.5 Thuật toán Midpoint . . . 12

1 Parabola

1.1 Cấu tạo

Ta xét phương trình cơ bản nhất có dạng $\boxed{(C): ky = ax^2}$ có đỉnh (vertex) nằm ngay tại vị trí gốc tọa độ $O(0,0)$. Trong đó, k và a là hai số nguyên dương.

Để xác định một parabola, ngoài đỉnh của nó, ta cần thêm một điểm nữa. Chọn một điểm (x_1, x_2) bất kì. Lúc này, hai tham số được xác định là:

$$ky_1 = ax_1^2 \Leftrightarrow \frac{a}{k} = \frac{y_1}{x_1^2} \Leftrightarrow \boxed{a = y_1, k = x_1^2}$$

Có thể làm nhỏ tham số bằng cách chia cho $d = \gcd(y_1, x_1^2)$.

Với những parabola có đỉnh bất kì, ta thực hiện phép tịnh tiến (C). Cụ thể, nếu điểm tương ứng trên parabola cơ bản là (x, y) thì điểm ta vẽ là $(x_v + x, y_v + y)$ với (x_v, y_v) là tọa độ đỉnh.

Do tính đối xứng của parabola, ta chỉ cần vẽ nhánh ở góc phần tư thứ nhất sau đó vẽ các điểm đối xứng. Cụ thể, khi vẽ (x, y) ta sẽ vẽ tất cả 4 điểm là $\boxed{(x, y), (-x, y)}$.

1.2 Phân vùng và quyết định biến chạy

Ta vẽ parabola qua 2 giai đoạn, trong đó một giai đoạn ta cho biến x chạy và giai đoạn kia cho biến y chạy.

Như thường lệ, ta so sánh Δx và Δy để quyết định biến chạy. Xét vi phân dx và dy của parabola, có:

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{a}{k}x \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx} \leq 1 \Leftrightarrow \boxed{2ax \leq k}\right) \Rightarrow x_p = \frac{k}{2a}, y_p = \frac{k^2}{4a}$$

Vậy việc phân vùng này diễn ra tại điểm $P(x_p, y_p)$. Với $x \in [0, 2ak^{-1}]$, ta cho biến x chạy, phần còn lại cho biến y chạy.

1.3 Thuật toán DDA

Lưu ý: thuật toán DDA không vẽ được các trường hợp $a = 0$ (tức $y = 0$) và $k = 0$ (tức $x = 0$).

Trường hợp 1: vẽ theo biến x chạy

Khởi tạo $y := 0$.

Xét các giá trị từ x_0 (hoành độ đỉnh) đến x_1 (hoành độ một điểm trên parabola) ta có:

$$ky' = a(x_i + 1)^2 = ky + 2ax_i + a \Rightarrow y' = y + \frac{2ax_i + a}{k}$$

Từ đó, mỗi lần cập nhật ta vẽ $\boxed{(x_i, round(y))}$ và gán $\boxed{y := y + 2ak^{-1}x_i}$.

Trường hợp 2: vẽ theo biến y chạy

Khởi tạo $x := 0$.

Xét các giá trị từ y_0 đến y_1 ta có:

$$ax'^2 = k(y_i + 1) = ax^2 + k \Rightarrow x'^2 = x^2 + \frac{k}{a}$$

Từ đó, mỗi lần cập nhật ta vẽ $\boxed{(round\sqrt{x}, y_i)}$ và gán $\boxed{x := x + ak^{-1}}$.

1.4 Thuật toán Bresenham

Giả sử ta đã vẽ được điểm (x_i, y_i), tiếp theo, ta muốn vẽ điểm (x_{i+1}, y_{i+1}).

Trường hợp 1: vẽ theo biến x chạy

Xét điểm y thực tế thỏa $ky = ax_{i+1}^2$, hai điểm trên và dưới nó có tung độ là y_i và $y_i + 1$ (hoành độ tất nhiên là $x_{i+1} = x_i + 1$). Ta cần quyết định xem sẽ vẽ ở y_i hay $y_i + 1$.

Gọi $d_1 = (y_i + 1) - y$, $d_2 = y - y_i$ có $d_1 - d_2 = 2y_i - 2y + 1$.

Xét $p_i = k(d_1 - d_2) = k(2y_i + 1) - 2ky = k(2y_i + 1) - 2ax_{i+1}^2$.

Ta tiếp tục xét:

$$\begin{aligned}
p_{i+1} - p_i &= k(2y_{i+1} + 1) - 2ax_{i+2}^2 - k(2y_i + 1) + 2ax_{i+1}^2 \\
&= 2k(y_{i+1} - y_i) - 2a(x_{i+2}^2 - x_{i+1}^2) \\
&= 2k(y_{i+1} - y_i) - 2a(x_{i+2} - x_{i+1})(x_{i+2} + x_{i+1}) \\
&= 2k(y_{i+1} - y_i) - 2a(x_i + 2 - x_i - 1)(x_i + 2 + x_i + 1) \\
&= 2k(y_{i+1} - y_i) - 2a(2x_i + 3) \\
&= 2k(y_{i+1} - y_i) - 4ax_i - 6a.
\end{aligned}$$

Như vậy, ta có hai trường hợp:

$\boxed{p_i \geq 0}$ tức $d_1 \geq d_2$ do đó $\boxed{y_{i+1} = y_i \text{ nên } p_{i+1} = p_i - 4ax_i - 6a}$.

$\boxed{p_i < 0}$ tức $d_1 < d_2$ do đó $\boxed{y_{i+1} = y_i + 1 \text{ nên } p_{i+1} = p_i - 4ax_i - 6a + 2k}$.

Vậy ta có công thức truy hồi cho p_i. Ta tìm giá trị bắt đầu p_0 ứng với điểm $(x_0, y_0) = (0, 0)$:

$$p_0 = k(2y_0 + 1) - 2a(x_0 + 1)^2 \Rightarrow \boxed{p_0 = k - 2a}.$$

Trường hợp 2: vẽ theo biến y chạy

Xét điểm x thực tế thỏa $ky_{i+1} = ax^2$, hai điểm trái và phải nó có hoành độ là x_i và $x_i + 1$ (tung độ tất nhiên là $y_{i+1} = y_i + 1$). Ta cần quyết định xem sẽ vẽ ở x_i hay $x_i + 1$.

Gọi $d_1 = (x_i + 1)^2 - x^2, d_2 = x^2 - x_i^2$ có $d_1 - d_2 = x_i^2 + (x_i + 1)^2 - 2x^2$.

Xét $p_i = a(d_1 - d_2) = ax_i^2 + a(x_i+1)^2 - 2ax^2 = 2ax_i^2 + 2ax_i + a - 2ky_{i+1}$.

Ta tiếp tục xét:

$$\begin{aligned}
p_{i+1} - p_i &= 2ax_{i+1}^2 + 2ax_{i+1} + a - 2ky_{i+2} - 2ax_i^2 - 2ax_i - a + 2ky_{i+1} \\
&= 2a(x_{i+1}^2 - x_i^2) + 2a(x_{i+1} - x_i) - 2k(y_{i+2} - y_{i+1}) \\
&= 2a(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} + x_i + 1) - 2k
\end{aligned}$$

Như vậy, ta có hai trường hợp:

- $\boxed{p_i \geq 0}$ tức $d_1 \geq d_2$ do đó $x_{i+1} = x_i$ nên $\boxed{p_{i+1} = p_i - 2k}$.
- $\boxed{p_i < 0}$ tức $d_1 < d_2$ do đó $x_{i+1} = x_i + 1$ nên $\boxed{p_{i+1} = p_i + 4a(x_i+1) - 2k}$.

Vậy ta có công thức truy hồi cho p_i. Ta tìm giá trị bắt đầu p_0 ứng với điểm $(x_0, y_0) = (0, 0)$:

$$p_0 = 2ax_0^2 + 2ax_0 + a - 2k(y_0 + 1) \Rightarrow \boxed{p_0 = a - 2k}.$$

1.5 Thuật toán Midpoint

Giả sử ta đã vẽ được điểm (x_i, y_i), tiếp theo, ta muốn vẽ điểm (x_{i+1}, y_{i+1}).

Định nghĩa $f(x, y) = ax^2 - ky$, nhận thấy $f(x, y) \geq 0$ khi và chỉ khi (x, y) nằm trên (C) và $f(x, y) < 0$ khi và chỉ khi (x, y) nằm dưới (C).

<u>Trường hợp 1</u>: vẽ theo biến x chạy

Xét điểm y thực tế thỏa $ky = ax_{i+1}^2$, hai điểm trên và dưới nó có tung độ là y_i và y_{i+1} (hoành độ tất nhiên là $x_{i+1} = x_i + 1$). Ta cần quyết định xem sẽ vẽ ở y_i hay y_{i+1}.

Xét điểm M nằm chính giữa hai điểm cần quyết định, có tung độ là $y_M = y_i + \frac{1}{2}$.

Xét $p_i = f(x_i + 1, y_i + \frac{1}{2}) = -k(y_i + \frac{1}{2}) + a(x_i + 1)^2 = -ky_i + ax_i^2 + 2ax_i + a - \frac{k}{2}$.

Ta tiếp tục xét:

$$\begin{aligned}
p_{i+1} - p_i &= -k(y_{i+1} - y_i) + a(x_{i+1}^2 - x_i^2) + 2a(x_{i+1} - x_i) \\
&= -k(y_{i+1} - y_i) + 2ax_i + 3a
\end{aligned}$$

Như vậy, ta có hai trường hợp:

- $\boxed{p_i < 0}$ tức M nằm trên (C) do đó $y_{i+1} = y_i$ nên $\boxed{p_{i+1} = p_i + 2ax_i + 3a}$.
- $\boxed{p_i \geq 0}$ tức M nằm dưới (C) do đó $y_{i+1} = y_i + 1$ nên $\boxed{p_{i+1} = p_i + 2ax_i + 3a - k}$.

Vậy ta có công thức truy hồi cho p_i. Ta tìm giá trị bắt đầu p_0 ứng với điểm $(x_0, y_0) = (0, 0)$:

$$p_0 = -ky_0 + ax_0^2 + 2ax_0 + a - \frac{k}{2} \Rightarrow \boxed{p_0 = a - \frac{k}{2}}.$$

<u>Trường hợp 2</u>: vẽ theo biến y chạy

Xét điểm x thực tế thỏa $ky_{i+1} = ax^2$, hai điểm trái và phải nó có hoành độ là x_i và x_{i+1} (tung độ tất nhiên là $y_{i+1} = y_i + 1$). Ta cần quyết định xem sẽ vẽ ở x_i hay x_{i+1}.

Xét điểm M nằm chính giữa hai điểm cần quyết định, có hoành độ là $x_M = x_i + \frac{1}{2}$.

Xét $p_i = f(x_i + \frac{1}{2}, y_i + 1) = -k(y_i + 1) + a(x_i + \frac{1}{2})^2 = -ky_i + ax_i^2 + ax_i + \frac{a}{4} - k$.

Ta tiếp tục xét:

$$\begin{aligned} p_{i+1} - p_i &= -k(y_{i+1} - y_i) + a(x_{i+1}^2 - x_i^2) + a(x_{i+1} - x_i) \\ &= -k + a(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} + x_i + 1) \end{aligned}$$

Như vậy, ta có hai trường hợp:

- $\boxed{p_i < 0}$ tức M nằm bên trái (C) do đó $x_{i+1} = x_i + 1$ nên $\boxed{p_{i+1} = p_i - k + 2a(x_i + 1)}$.
- $\boxed{p_i \geq 0}$ tức M bên phải (C) do đó $x_{i+1} = x_i$ nên $\boxed{p_{i+1} = p_i - k}$.

Vậy ta có công thức truy hồi cho p_i. Ta tìm giá trị bắt đầu p_0 ứng với điểm $(x_0, y_0) = (0, 0)$:

$$p_0 = -ky_0 + ax_0^2 + 2ax_0 + \frac{a}{4} - k \Rightarrow \boxed{p_0 = \frac{a}{4} - k}.$$

2 Ellipse

2.1 Cấu tạo

Ta xét phương trình cơ bản nhất có dạng $\boxed{(C) : ax^2 + by^2 = c}$ có tâm nằm ngay tại vị trí gốc tọa độ $O(0,0)$. Trong đó, a, b và c đều là số nguyên dương.

Để xác định một ellipse, ngoài tâm của nó, ta cần thêm hai điểm nữa. Ở đây, chọn 2 điểm đó là hai đỉnh trên Ox và Oy là $(x_1, 0)$ và $(0, y_1)$. Lúc này, các tham số sẽ được tính như sau:

$$ax_1^2 = c, by_1^2 = c \Rightarrow \boxed{a = y_1^2, b = x_1^2, c = x_1^2 y_1^2}$$

Với những ellipse có tâm bất kì, ta thực hiện phép tịnh tiến (C). Cụ thể, nếu điểm tương ứng trên parabola cơ bản là (x, y) thì điểm ta vẽ là $(x_c + x, y_c + y)$ với (x_c, y_c) là tọa độ tâm.

Do tính đối xứng của ellipse, ta chỉ cần vẽ nhánh ở góc phần tư thứ nhất sau đó vẽ các điểm đối xứng. Cụ thể, khi vẽ (x, y) ta sẽ vẽ tất cả 4 điểm là $\boxed{(x, y), (-x, y), (x, -y) \text{ và } (-x, -y)}$.

2.2 Phân vùng và quyết định biến chạy

Xét phương trình hình ellipse:

$$ax^2 + by^2 = c$$

Lấy đạo hàm hai theo x của hai vế (xem x là biến, y là hàm theo biến x):

$$\frac{d}{dx}\left(ax^2 + by^2\right) = \frac{d}{dx}c \Rightarrow 2ax + 2by\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{a}{b}\right)\frac{x}{y}$$

Để ý là $dy/dx < 0$ trong miền đang xét $[0, +\infty) \times (0, +\infty)$, tức là khi x tăng thì y giảm.

Để biến chạy là x thì $|dy/dx| \leq 1 \Leftrightarrow |dy| \leq |dx|$ tức là x tăng nhanh hơn y giảm. Vậy điều kiện là $\boxed{ax \leq by \Leftrightarrow ax - by \leq 0}$.

Ngoài ra, nhận thấy $ax \leq by \leq b\sqrt{\frac{c}{b}} = \sqrt{bc}$ (do $y \leq b$) nên $x \leq a^{-1}\sqrt{bc}$. Vậy ta luôn có biến x chạy trước rồi mới đến biến y chạy.

2.3 Thuật toán DDA

Lưu ý: thuật toán DDA không vẽ được các trường hợp $c = 0$ (tức $x = 0$ hoặc $y = 0$).

<u>Trường hợp 1</u>: vẽ theo biến x chạy

Khởi tạo $y := a$.

Xét các giá trị từ x_0 (hoành độ đỉnh) đến x_1 (hoành độ một điểm trên ellipse) ta có:

$$by'^2 = c - a(x_i + 1)^2 = by^2 - 2ax_i - a \Rightarrow y'^2 = y^2 - \frac{2ax_i + a}{b}$$

Từ đó, mỗi lần cập nhật ta vẽ $\boxed{(x_i, round\sqrt{y})}$ và gán $\boxed{y := y - ab^{-1}(2x_i + 1)}$.

Trường hợp 2: vẽ theo biến y chạy

Khởi tạo $x := 0$.

Xét các giá trị từ y_0 đến y_1 ta có:

$$ax'^2 = c - b(y_i - 1)^2 = ay^2 + 2by_i - b \Rightarrow x'^2 = x^2 + \frac{2by_i - b}{a}$$

Từ đó, mỗi lần cập nhật ta vẽ $\boxed{(round\sqrt{x}, y_i)}$ và gán $\boxed{x := x + a^{-1}b(2y_i - 1)}$.

2.4 Thuật toán Bresenham

Giả sử ta đã vẽ được điểm (x_i, y_i), tiếp theo, ta muốn vẽ điểm (x_{i+1}, y_{i+1}).

Trường hợp 1: vẽ theo biến x chạy

Xét điểm y thực tế thỏa $ax_{i+1}^2 + by^2 = c$, hai điểm trên và dưới nó có tung độ là y_i và $y_i - 1$ (hoành độ tất nhiên là $x_{i+1} = x_i + 1$). Ta cần quyết định xem sẽ vẽ ở y_i hay $y_i - 1$.

Gọi $d_1 = y_i^2 - y^2$, $d_2 = y^2 - (y_i - 1)^2$ có $d_1 - d_2 = 2y_i^2 - 2y_i + 1 - 2y^2$.

Xét $p_i = b(d_1 - d_2) = 2by_i^2 - 2by_i + b - 2(c - ax_{i+1}^2)$.

Ta tiếp tục xét:

$$\begin{aligned} p_{i+1} - p_i &= 2b(y_{i+1}^2 - y_i^2) - 2b(y_{i+1} - y_i) + 2a(x_{i+2}^2 - x_{i+1}^2) \\ &= 2b(y_{i+1} - y_i)(y_{i+1} + y_i - 1) + 2a(2x_i + 3) \end{aligned}$$

Như vậy, ta có hai trường hợp:

$\boxed{p_i \geq 0}$ tức $d_1 \geq d_2$ do đó $y_{i+1} = y_i - 1$ nên $\boxed{p_{i+1} = p_i - 4by_i + 4ax_i + 6a + 4b}$.

$\boxed{p_i < 0}$ tức $d_1 < d_2$ do đó $y_{i+1} = y_i$ nên $\boxed{p_{i+1} = p_i + 4ax_i + 6a}$.

Vậy ta có công thức truy hồi cho p_i. Ta tìm giá trị bắt đầu p_0 ứng với điểm $(x_0, y_0) = (0, y_0)$:

$$\boxed{p_0 = y_0^2 + (y_0 - 1)^2 - 2(c - a)}$$

Trường hợp 2: vẽ theo biến y chạy

Xét điểm x thực tế thỏa $ax^2 + b(y_i - 1)^2 = c$, hai điểm trái và phải nó có hoành độ là x_i và $x_i + 1$ (tung độ tất nhiên là $y_{i+1} = y_i - 1$). Ta cần quyết định xem sẽ vẽ ở x_i hay $x_i + 1$.

Gọi $d_1 = (x_i + 1)^2 - x^2, d_2 = x^2 - x_i^2$ có $d_1 - d_2 = x_i^2 + (x_i + 1)^2 - 2x^2$.

Xét $p_i = a(d_1 - d_2) = ax_i^2 + a(x_i + 1)^2 - 2ax^2 = 2ax_i^2 + 2ax_i + a - 2(c - by_{i+1}^2)$.

Ta tiếp tục xét:

$$\begin{aligned} p_{i+1} - p_i &= 2a(x_{i+1}^2 - x_i^2) + 2a(x_{i+1} - x_i) + 2b(y_{i+2}^2 - y_{i+1}^2) \\ &= 2a(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} + x_i + 1) - 2b(2y_i - 3) \end{aligned}$$

Như vậy, ta có hai trường hợp:

$\boxed{p_i \geq 0}$ tức $d_1 \geq d_2$ do đó $\boxed{x_{i+1} = x_i \text{ nên } p_{i+1} = p_i - 4by_i + 6b}$.

$\boxed{p_i < 0}$ tức $d_1 < d_2$ do đó $\boxed{x_{i+1} = x_i + 1 \text{ nên } p_{i+1} = p_i + 4a(x_i + 1) - 4by_i + 6b}$.

Vậy ta có công thức truy hồi cho p_i. Ta tìm giá trị bắt đầu p_0 ứng với điểm $(x_0, y_0) = (0, y_0)$:

$$\boxed{p_0 = 2b(y_0 - 1)^2 - 2c}$$

2.5 Thuật toán Midpoint

Giả sử ta đã vẽ được điểm (x_i, y_i), tiếp theo, ta muốn vẽ điểm (x_{i+1}, y_{i+1}).

Định nghĩa $f(x, y) = ax^2 + by^2 - c$, nhận thấy $f(x, y) \geq 0$ khi và chỉ khi (x, y) nằm ngoài (C) và $f(x, y) < 0$ khi và chỉ khi (x, y) nằm trong (C).

<u>Trường hợp 1</u>: vẽ theo biến x chạy

Xét điểm y thực tế thỏa $ax_{i+1}^2 + by^2 = c$, hai điểm trên và dưới nó có tung độ là y_i và $y_i - 1$ (hoành độ tất nhiên là $x_{i+1} = x_i + 1$). Ta cần quyết định xem sẽ vẽ ở y_i hay $y_i - 1$.

Xét điểm M nằm chính giữa hai điểm cần quyết định, có tung độ là $y_M = y_i - \frac{1}{2}$.

Xét $p_i = f(x_i + 1, y_i - \frac{1}{2}) = a(x_i + 1)^2 + b(y_i - \frac{1}{2})^2 - c = ax_i^2 + 2ax_i + a + by_i^2 - by_i + \frac{b}{4} - c$.

Ta tiếp tục xét:

$$\begin{aligned} p_{i+1} - p_i &= a(x_{i+1}^2 - x_i^2) + 2a(x_{i+1} - x_i) + b(y_{i+1}^2 - y_i^2) - b(y_{i+1} - y_i) \\ &= a(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} + x_i + 2) + b(y_{i+1} - y_i)(y_{i+1} + y_i - 1) \\ &= a(2x_i + 3) + b(y_{i+1} - y_i)(y_{i+1} + y_i - 1) \end{aligned}$$

Như vậy, ta có hai trường hợp:

$\boxed{p_i \geq 0}$ tức M nằm trên (C) do đó $y_{i+1} = y_i - 1$ nên $\boxed{p_{i+1} = p_i + a(2x_i + 3) - 2b(y_i - 1)}$.

$\boxed{p_i < 0}$ tức M nằm dưới (C) do đó $\boxed{y_{i+1} = y_i \text{ nên } p_{i+1} = p_i + a(2x_i + 3)}$.

Vậy ta có công thức truy hồi cho p_i. Ta tìm giá trị bắt đầu p_0 ứng với điểm $(x_0, y_0) = (0, y_0)$:

$$\boxed{p_0 = a + b\left(y_0 - \frac{1}{2}\right)^2 - c \approx a + b(y_0 - 1)^2 - c}$$

<u>Trường hợp 2</u>: vẽ theo biến y chạy

Xét điểm x thực tế thỏa $ax^2 + by_{i+1}^2 = c$, hai điểm trái và phải nó có hoành độ là x_i và $x_i + 1$

(tung độ tất nhiên là $y_{i+1} = y_i - 1$). Ta cần quyết định xem sẽ vẽ ở x_i hay $x_i + 1$.

Xét điểm M nằm chính giữa hai điểm cần quyết định, có hoành độ là $x_M = x_i + \frac{1}{2}$.

Xét $p_i = f(x_i + \frac{1}{2}, y_i - 1) = a(x_i + \frac{1}{2})^2 + b(y_i - 1)^2 - c = ax_i^2 + ax_i + \frac{a}{4} + by_i^2 - 2by_i + b - c$.

Ta tiếp tục xét:

$$\begin{aligned} p_{i+1} - p_i &= a(x_{i+1} - x_i)^2 + a(x_{i+1} - x_i) + b(y_{i+1} - y_i)^2 - 2b(y_{i+1} - y_i) \\ &= a(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} + x_i + 1) + b(y_{i+1} - y_i)(y_{i+1} + y_i - 2) \\ &= a(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} + x_i + 1) - b(2y_i - 3) \end{aligned}$$

Như vậy, ta có hai trường hợp:

- $\boxed{p_i < 0}$ tức M bên trái (C) do đó $x_{i+1} = x_i + 1$ nên $\boxed{p_{i+1} = p_i + 2a(x_i + 1) - b(2y_i - 3)}$.
- $\boxed{p_i \geq 0}$ tức M bên phải (C) do đó $\boxed{x_{i+1} = x_i \text{ nên } p_{i+1} = p_i - b(2y_i - 3)}$.

Vậy ta có công thức truy hồi cho p_i. Ta tìm giá trị bắt đầu p_0 ứng với điểm (x_0, y_0) thỏa $ax_0 = by_0$:

$$\boxed{p_0 = a\left(x_0 + \frac{1}{2}\right)^2 + b(y_0 - 1)^2 - c \approx ax_0(x_0 + 1) + b(y_0 - 1)^2 - c}$$

Có thể nối tiếp p hiện tại của quá trình trước mà không cần tính lại.

3 Hyperbola

3.1 Cấu tạo

Ta xét phương trình cơ bản nhất có dạng $\boxed{(C) : ax^2 - by^2 = c}$ có tâm nằm ngay tại vị trí gốc tọa độ $O(0,0)$. Trong đó, a, b và c đều là số nguyên dương.

Để xác định một hyperbola, ngoài tâm của nó, ta cần thêm hai điểm nữa. Ở đây, ta cố định tiêu cự, và chọn 1 điểm bất kì (x_1, y_1). Lúc này, các tham số sẽ được tính như sau:

$$ak^2 - b0^2 = c, ax_1^2 - by_1^2 = c \Rightarrow \boxed{a = y_1^2, b = x_1^2 - k^2, c = k^2 y_1^2}$$

Với k là tiêu cự cố định sẵn.

Với những hyperbola có tâm bất kì, ta thực hiện phép tịnh tiến (C). Cụ thể, nếu điểm tương ứng trên hyperbola cơ bản là (x, y) thì điểm ta vẽ là $(x_c + x, y_c + y)$ với (x_c, y_c) là tọa độ tâm.

Do tính đối xứng của hyperbola, ta chỉ cần vẽ nhánh ở góc phần tư thứ nhất sau đó vẽ các điểm đối xứng. Cụ thể, khi vẽ (x, y) ta sẽ vẽ 4 điểm là $\boxed{(x, y), (-x, y), (x, -y) \text{ và } (-x, -y)}$.

3.2 Phân vùng và quyết định biến chạy

Xét phương trình hyperbole:

$$ax^2 - by^2 = c$$

Lấy đạo hàm theo x của hai vế (xem x là biến, y là hàm theo biến x):

$$\frac{d}{dx}\left(ax^2 - by^2\right) = \frac{d}{dx}c \Rightarrow 2ax - 2by\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{a}{b}\right)\frac{x}{y}$$

Để ý là $dy/dx > 0$ trong miền đang xét $[0, +\infty) \times (0, +\infty)$, tức là khi x tăng thì y tăng.

Để biến chạy là x thì $|dy/dx| \leq 1 \Leftrightarrow |dy| \leq |dx|$ tức là x tăng nhanh hơn y. Vậy điều kiện là $\boxed{ax \leq by \Leftrightarrow ax - by \leq 0}$.

Ngoài ra, nhận thấy $b^2x \leq a^2y \leq a^2b$ (do $y \leq b$) nên $x \leq a^2/b$. Vậy ta luôn có biến x chạy trước rồi mới đến biến y chạy.

3.3 Thuật toán DDA

Lưu ý: thuật toán DDA không vẽ được các trường hợp $c = 0$ (tức $x = 0$ hoặc $y = 0$).

Trường hợp 1: vẽ theo biến x chạy

Khởi tạo $y := a$.

Xét các giá trị từ x_0 (hoành độ đỉnh) đến x_1 (hoành độ một điểm trên ellipse) ta có:

$$by'^2 = c - a(x_i+1)^2 = by^2 - 2ax_i - a \Rightarrow y'^2 = y^2 - \frac{2ax_i + a}{b}$$

Từ đó, mỗi lần cập nhật ta vẽ $\boxed{(x_i, round\sqrt{y})}$ và gán $\boxed{y := y - ab^{-1}(2x_i+1)}$.

Trường hợp 2: vẽ theo biến y chạy

Khởi tạo $x := 0$.

Xét các giá trị từ y_0 đến y_1 ta có:

$$ax'^2 = c - b(y_i-1)^2 = ay^2 + 2by_i - b \Rightarrow x'^2 = x^2 + \frac{2by_i - b}{a}$$

Từ đó, mỗi lần cập nhật ta vẽ $\boxed{(round\sqrt{x}, y_i)}$ và gán $\boxed{x := x + a^{-1}b(2y_i-1)}$.

3.4 Thuật toán Bresenham

Giả sử ta đã vẽ được điểm (x_i, y_i), tiếp theo, ta muốn vẽ điểm (x_{i+1}, y_{i+1}).

Trường hợp 1: vẽ theo biến x chạy

Xét điểm y thực tế thỏa $ax_{i+1}^2 + by^2 = c$, hai điểm trên và dưới nó có tung độ là y_i và $y_i - 1$ (hoành độ tất nhiên là $x_{i+1} = x_i + 1$). Ta cần quyết định xem sẽ vẽ ở y_i hay $y_i - 1$.

Gọi $d_1 = y_i^2 - y^2$, $d_2 = y^2 - (y_i-1)^2$ có $d_1 - d_2 = 2y_i^2 - 2y_i + 1 - 2y^2$.

Xét $p_i = b(d_1 - d_2) = 2by_i^2 - 2by_i + b - 2(c - ax_{i+1}^2)$.

Ta tiếp tục xét:

$$\begin{aligned} p_{i+1} - p_i &= 2b(y_{i+1}^2 - y_i^2) - 2b(y_{i+1} - y_i) + 2a(x_{i+2}^2 - x_{i+1}^2) \\ &= 2b(y_{i+1} - y_i)(y_{i+1} + y_i - 1) + 2a(2x_i + 3) \end{aligned}$$

Như vậy, ta có hai trường hợp:

$\boxed{p_i \geq 0}$ tức $d_1 \geq d_2$ do đó $y_{i+1} = y_i - 1$ nên $\boxed{p_{i+1} = p_i - 4by_i + 4ax_i + 6a + 4b}$.

$\boxed{p_i < 0}$ tức $d_1 < d_2$ do đó $y_{i+1} = y_i$ nên $\boxed{p_{i+1} = p_i + 4ax_i + 6a}$.

Vậy ta có công thức truy hồi cho p_i. Ta tìm giá trị bắt đầu p_0 ứng với điểm $(x_0, y_0) = (0, y_0)$:

$$\boxed{p_0 = y_0^2 + (y_0-1)^2 - 2(c-a)}$$

Trường hợp 2: vẽ theo biến y chạy

Xét điểm x thực tế thỏa $ax^2 + b(y_i-1)^2 = c$, hai điểm trái và phải nó có hoành độ là x_i và $x_i + 1$ (tung độ tất nhiên là $y_{i+1} = y_i - 1$). Ta cần quyết định xem sẽ vẽ ở x_i hay $x_i + 1$.

Gọi $d_1 = (x_i+1)^2 - x^2, d_2 = x^2 - x_i^2$ có $d_1 - d_2 = x_i^2 + (x_i+1)^2 - 2x^2$.

Xét $p_i = a(d_1 - d_2) = ax_i^2 + a(x_i+1)^2 - 2ax^2 = 2ax_i^2 + 2ax_i + a - 2(c - by_{i+1}^2)$.

Ta tiếp tục xét:

$$\begin{aligned} p_{i+1} - p_i &= 2a(x_{i+1}^2 - x_i^2) + 2a(x_{i+1} - x_i) + 2b(y_{i+2}^2 - y_{i+1}^2) \\ &= 2a(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} + x_i + 1) - 2b(2y_i - 3) \end{aligned}$$

Như vậy, ta có hai trường hợp:

$\boxed{p_i \geq 0}$ tức $d_1 \geq d_2$ do đó $\boxed{x_{i+1} = x_i \text{ nên } p_{i+1} = p_i - 4by_i + 6b}$.

$\boxed{p_i < 0}$ tức $d_1 < d_2$ do đó $\boxed{x_{i+1} = x_i + 1 \text{ nên } p_{i+1} = p_i + 4a(x_i+1) - 4by_i + 6b}$.

Vậy ta có công thức truy hồi cho p_i. Ta tìm giá trị bắt đầu p_0 ứng với điểm $(x_0, y_0) = (0, y_0)$:

$$\boxed{p_0 = 2b(y_0 - 1)^2 - 2c}$$

3.5 Thuật toán Midpoint

Giả sử ta đã vẽ được điểm (x_i, y_i), tiếp theo, ta muốn vẽ điểm (x_{i+1}, y_{i+1}).

Định nghĩa $f(x,y) = ax^2 + by^2 - c$, nhận thấy $f(x,y) \geq 0$ khi và chỉ khi (x,y) nằm ngoài (C) và $f(x,y) < 0$ khi và chỉ khi (x,y) nằm trong (C).

Trường hợp 1: vẽ theo biến x chạy

Xét điểm y thực tế thỏa $ax_{i+1}^2 + by^2 = c$, hai điểm trên và dưới nó có tung độ là y_i và $y_i - 1$ (hoành độ tất nhiên là $x_{i+1} = x_i + 1$). Ta cần quyết định xem sẽ vẽ ở y_i hay $y_i - 1$.

Xét điểm M nằm chính giữa hai điểm cần quyết định, có tung độ là $y_M = y_i - \frac{1}{2}$.

Xét $p_i = f(x_i + 1, y_i - \frac{1}{2}) = a(x_i+1)^2 + b(y_i - \frac{1}{2})^2 - c = ax_i^2 + 2ax_i + a + by_i^2 - by_i + \frac{b}{4} - c$.

Ta tiếp tục xét:

$$\begin{aligned} p_{i+1} - p_i &= a(x_{i+1}^2 - x_i^2) + 2a(x_{i+1} - x_i) + b(y_{i+1}^2 - y_i^2) - b(y_{i+1} - y_i) \\ &= a(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} + x_i + 2) + b(y_{i+1} - y_i)(y_{i+1} + y_i - 1) \\ &= a(2x_i + 3) + b(y_{i+1} - y_i)(y_{i+1} + y_i - 1) \end{aligned}$$

Như vậy, ta có hai trường hợp:

$\boxed{p_i \geq 0}$ tức M nằm trên (C) do đó $y_{i+1} = y_i - 1$ nên $\boxed{p_{i+1} = p_i + a(2x_i + 3) - 2b(y_i - 1)}$.

$\boxed{p_i < 0}$ tức M nằm dưới (C) do đó $\boxed{y_{i+1} = y_i \text{ nên } p_{i+1} = p_i + a(2x_i + 3)}$.

Vậy ta có công thức truy hồi cho p_i. Ta tìm giá trị bắt đầu p_0 ứng với điểm $(x_0, y_0) = (0, y_0)$:

$$\boxed{p_0 = a + b\left(y_0 - \frac{1}{2}\right)^2 - c \approx a + b(y_0 - 1)^2 - c}$$

Trường hợp 2: vẽ theo biến y chạy

Xét điểm x thực tế thỏa $ax^2 + by_{i+1}^2 = c$, hai điểm trái và phải nó có hoành độ là x_i và $x_i + 1$ (tung độ tất nhiên là $y_{i+1} = y_i - 1$). Ta cần quyết định xem sẽ vẽ ở x_i hay $x_i + 1$.

Xét điểm M nằm chính giữa hai điểm cần quyết định, có hoành độ là $x_M = x_i + \frac{1}{2}$.

Xét $p_i = f(x_i + \frac{1}{2}, y_i - 1) = a(x_i + \frac{1}{2})^2 + b(y_i - 1)^2 - c = ax_i^2 + ax_i + \frac{a}{4} + by_i^2 - 2by_i + b - c$.

Ta tiếp tục xét:

$$\begin{aligned}
p_{i+1} - p_i &= a(x_{i+1} - x_i)^2 + a(x_{i+1} - x_i) + b(y_{i+1} - y_i)^2 - 2b(y_{i+1} - y_i) \\
&= a(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} + x_i + 1) + b(y_{i+1} - y_i)(y_{i+1} + y_i - 2) \\
&= a(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} + x_i + 1) - b(2y_i - 3)
\end{aligned}$$

Như vậy, ta có hai trường hợp:

- $\boxed{p_i < 0}$ tức M bên trái (C) do đó $x_{i+1} = x_i + 1$ nên $\boxed{p_{i+1} = p_i + 2a(x_i + 1) - b(2y_i - 3)}$.
- $\boxed{p_i \geq 0}$ tức M bên phải (C) do đó $\boxed{x_{i+1} = x_i \text{ nên } p_{i+1} = p_i - b(2y_i - 3)}$.

Vậy ta có công thức truy hồi cho p_i. Ta tìm giá trị bắt đầu p_0 ứng với điểm (x_0, y_0) thỏa $ax_0 = by_0$:

$$\boxed{p_0 = a\left(x_0 + \frac{1}{2}\right)^2 + b(y_0 - 1)^2 - c \approx ax_0(x_0 + 1) + b(y_0 - 1)^2 - c}$$

Có thể nối tiếp p hiện tại của quá trình trước mà không cần tính lại.