



HA NOI UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
SCHOOL OF INFORMATION AND COMMUNICATION TECHNOLOGY

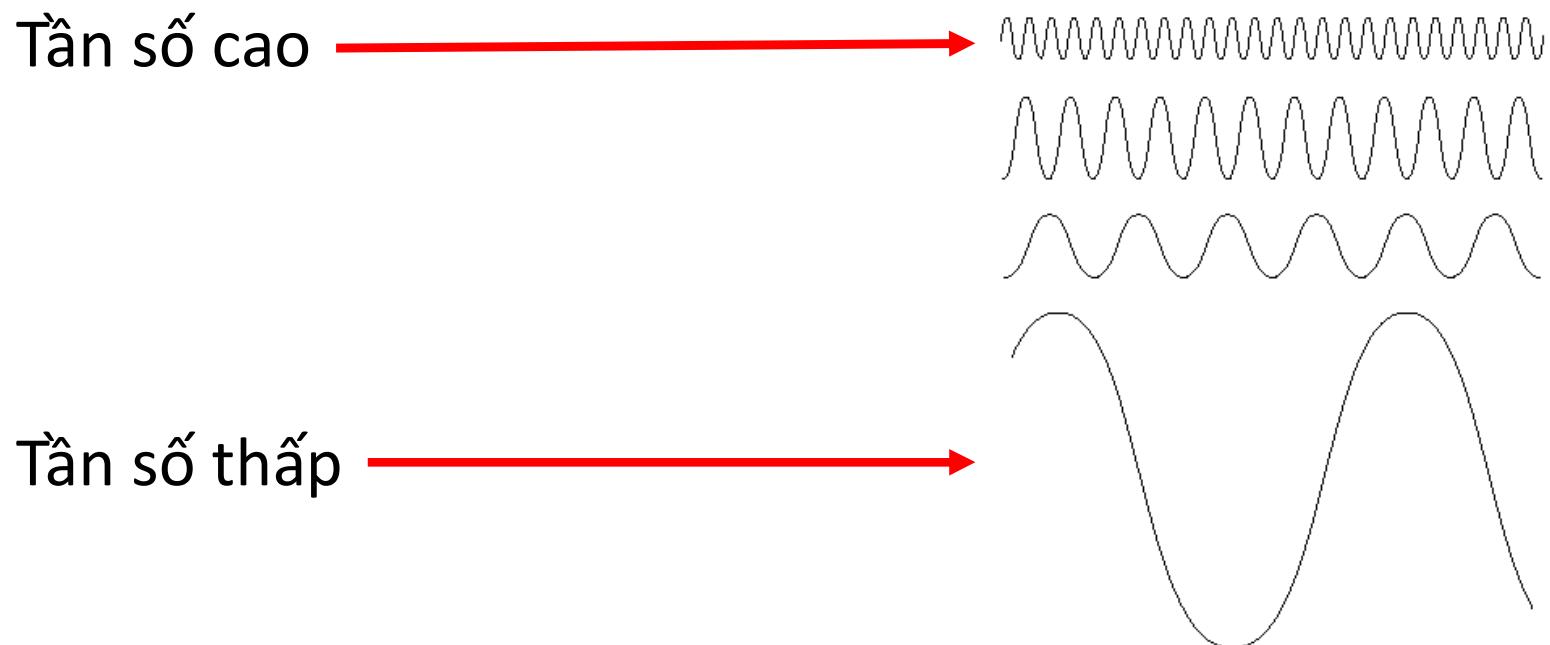
Thị giác máy tính

Bài 3. Xử lý ảnh trong miền tần số

Nội dung

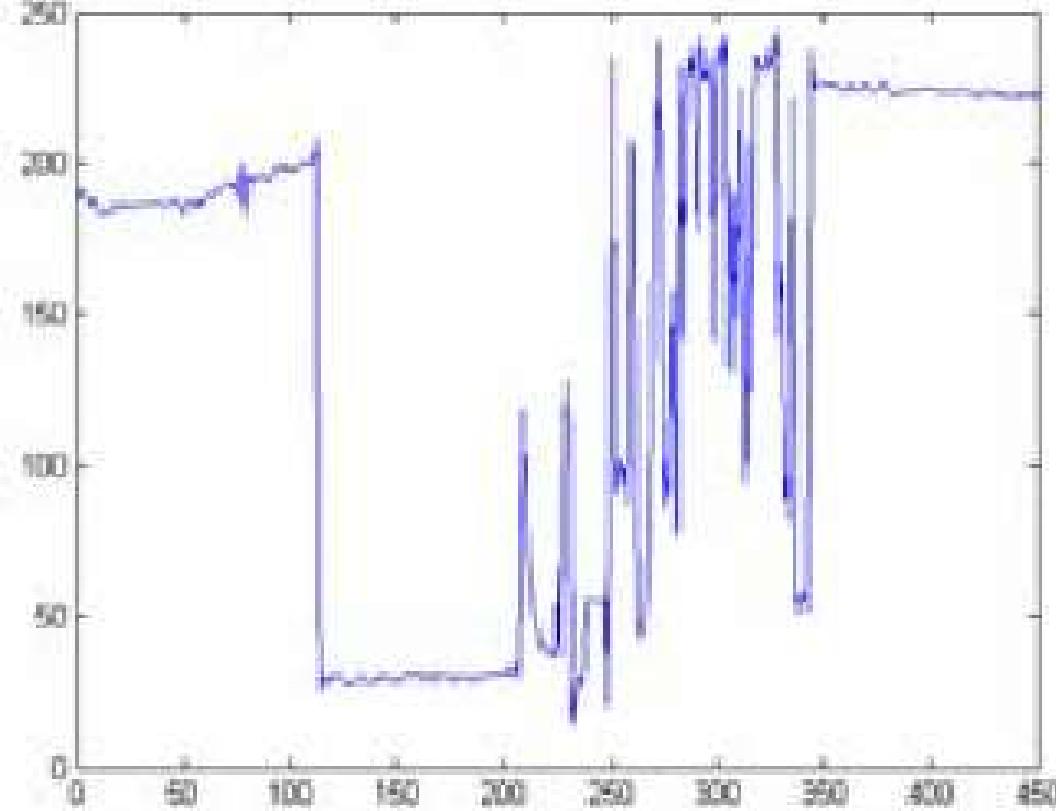
- Tần số trong ảnh
- Biến đổi sang miền tần số
- Xử lý trong miền tần số (frequent filters)

Tần số của tín hiệu



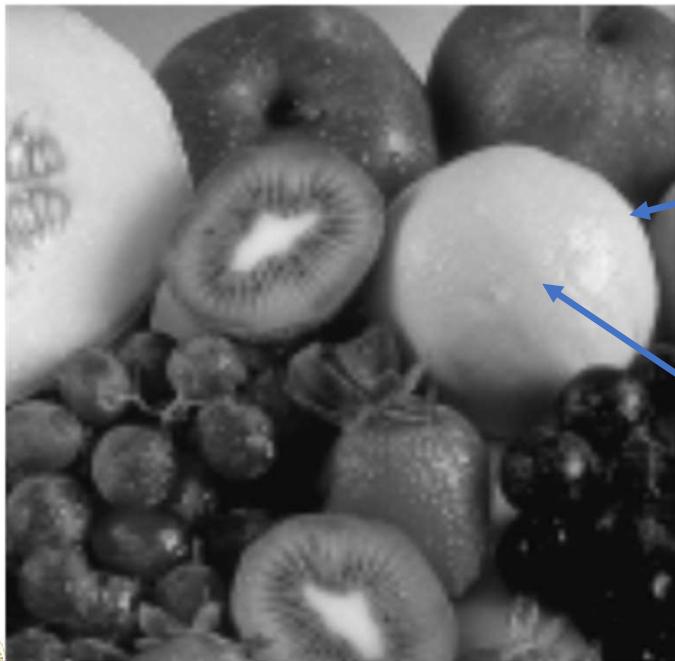
Tần số trong ảnh

Intensity profile



Tần số trong ảnh

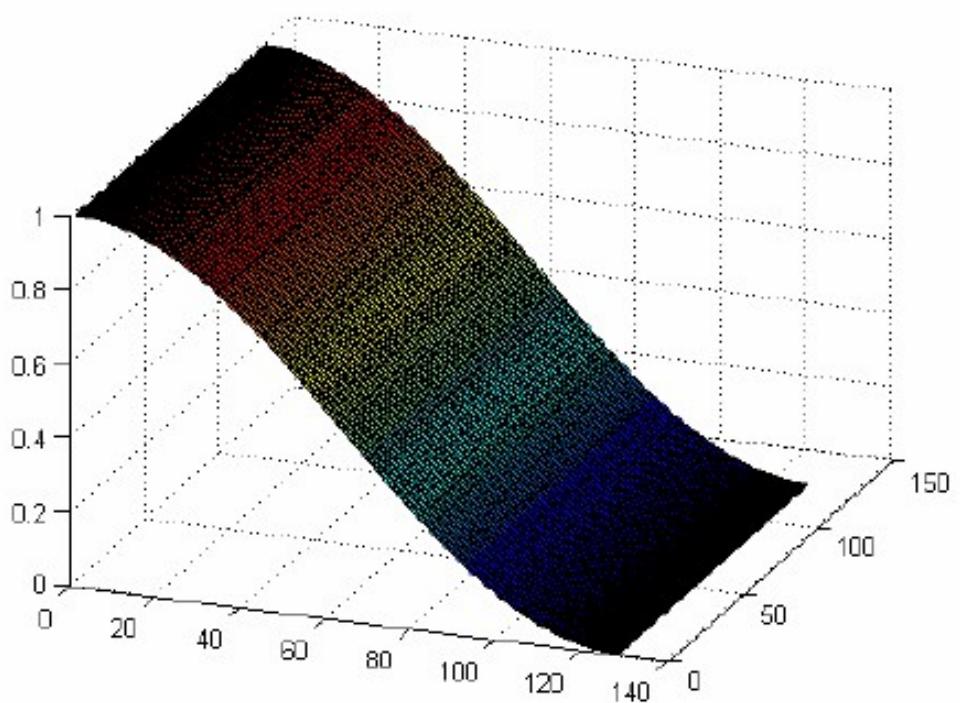
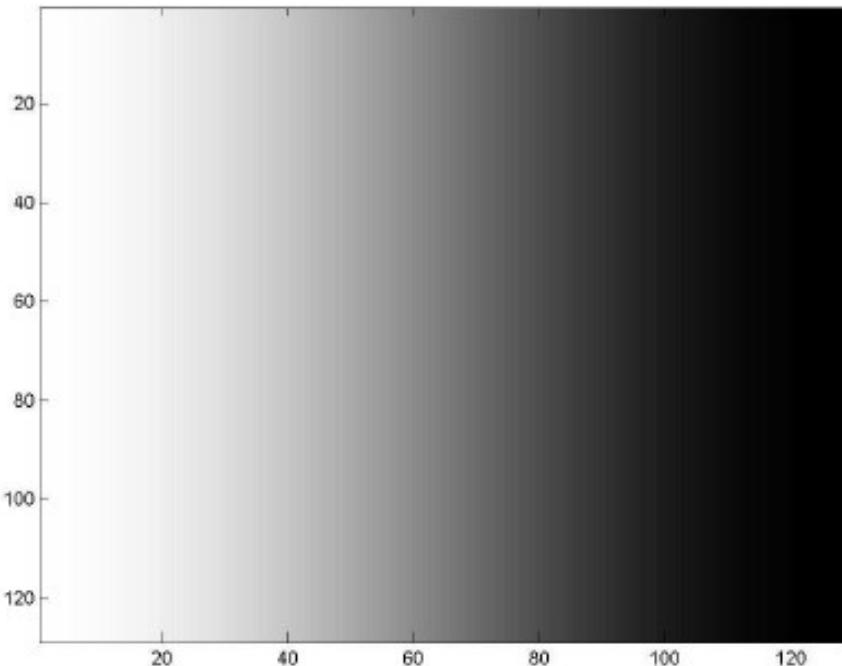
- Tần số = sự thay đổi cường độ sáng
- Thay đổi chậm (homogeneous /blur regions): tần số thấp
- Thay đổi nhanh/đột ngột (edge, contour, noise): tần số cao



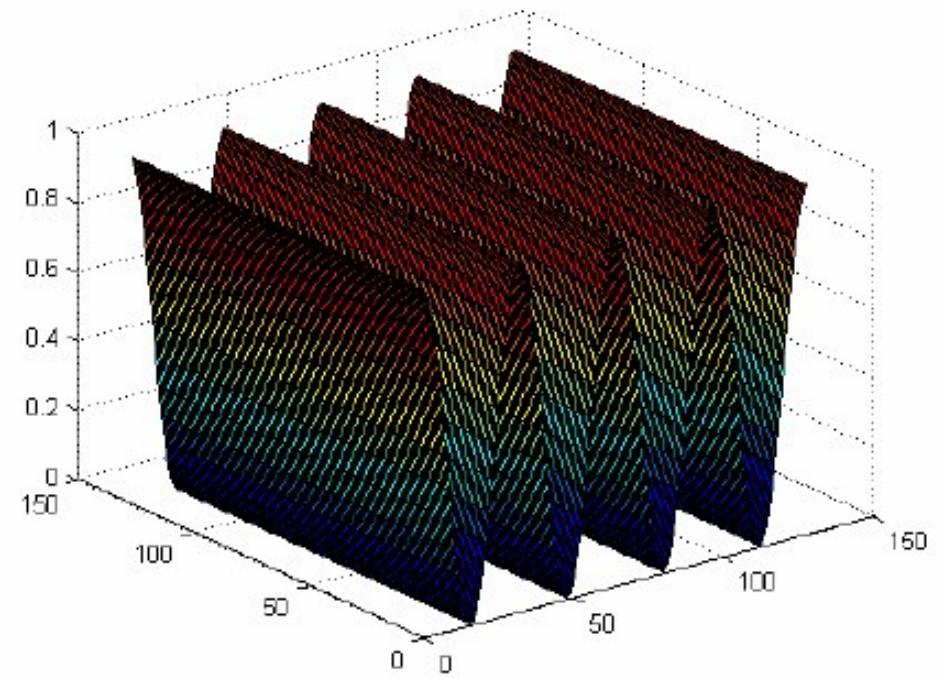
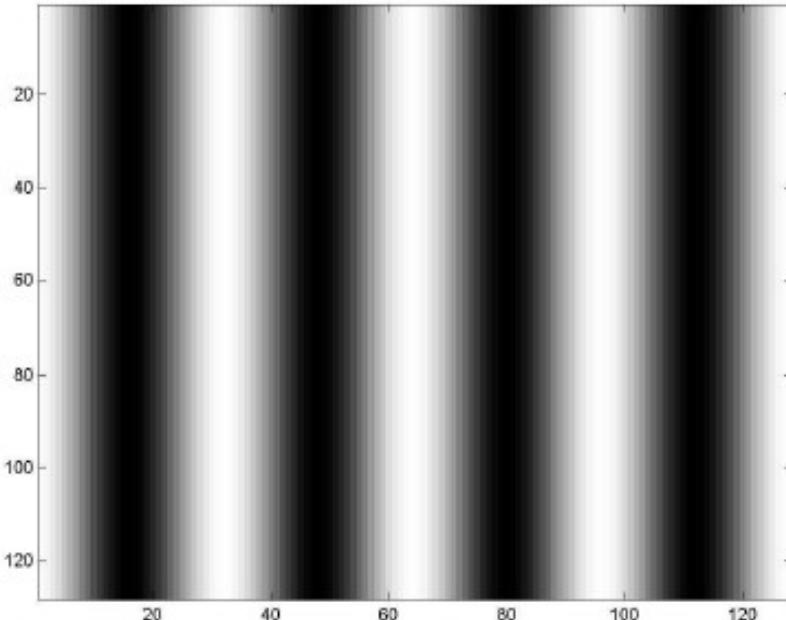
High frequency
Low frequency

Phần lớn năng lượng của ảnh tập trung ở miền tần số thấp

Tần số thấp



Tần số cao



Phân tích phổ của ảnh

- Ảnh là 1 tín hiệu
 - Có thể phân tích tần số của tín hiệu
- Phân tích như thế nào?
 - Tạo « ảnh » mới thể hiện tất cả các tần số của ảnh
 - Biểu đồ tần số 2D
 - Công cụ sử dụng: **Fourier Transform**
- Phân biệt : **miền tần số, miền không gian** (ảnh = ma trận điểm ảnh)

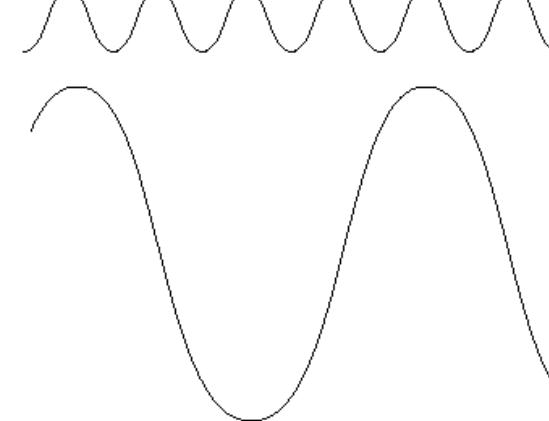
Tần số của tín hiệu

High frequency signal →

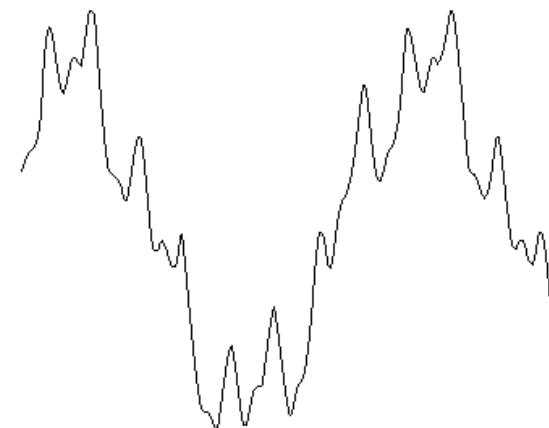
...



Low frequency signal →



*Sum of all the
above signals*



Biến đổi Fourier

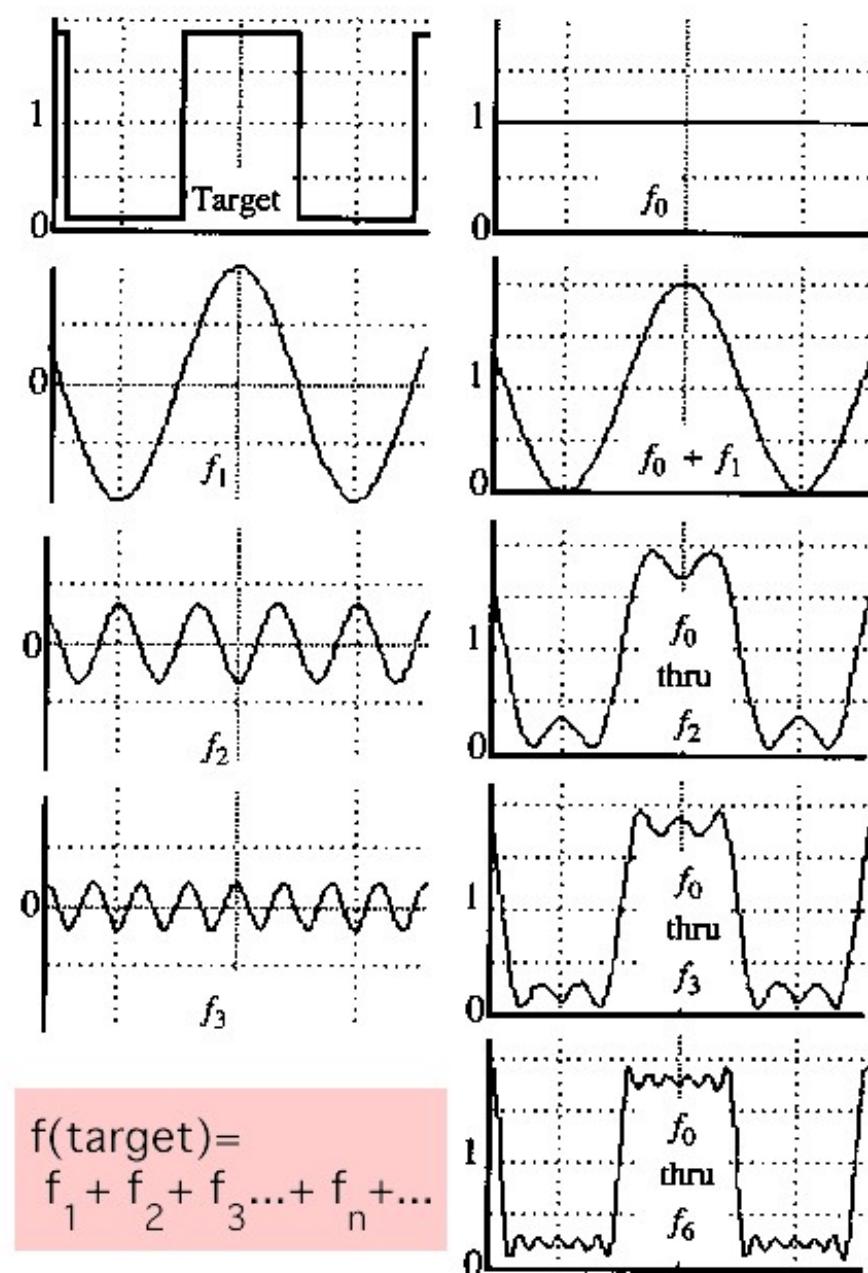
Ý tưởng gốc (1807) - Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830):

Bất cứ hàm đơn biến nào cũng có thể được viết lại dưới dạng tổng có trọng số của hàm sin và cos của các tần số khác nhau.

Hàm sin và cos:

$$A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

Thêm đủ số lượng các hàm này sẽ tạo thành bất cứ tín hiệu $g(t)$ bạn muốn!

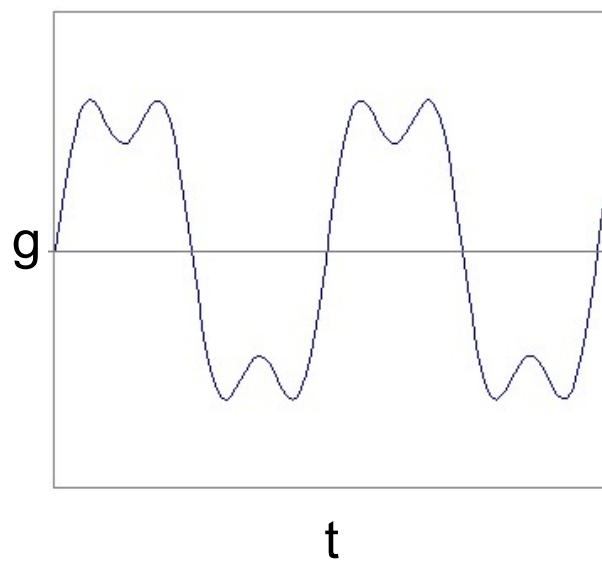


Hays

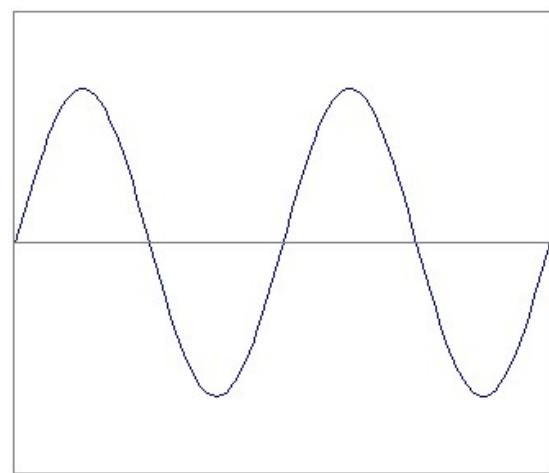
Ví dụ

$$t = [0, 2], f = 1$$

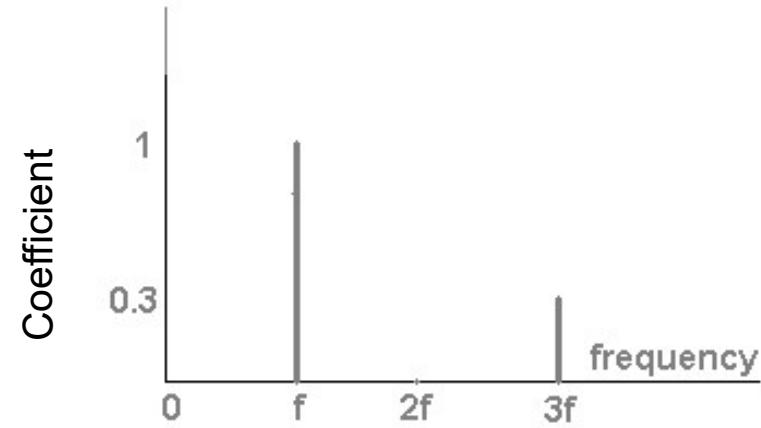
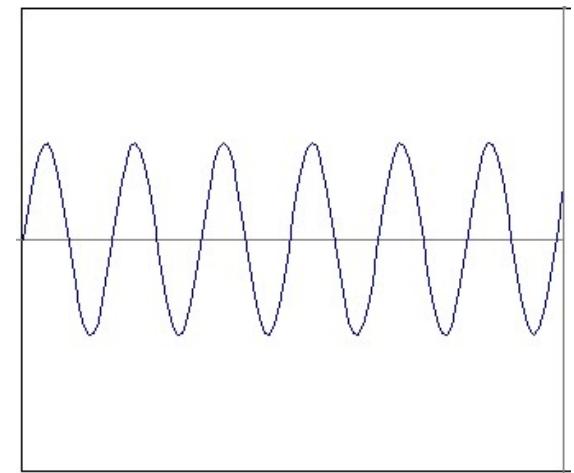
$$g(t) = \sin(2\pi f t) + (1/3)\sin(2\pi(3f)t)$$



=

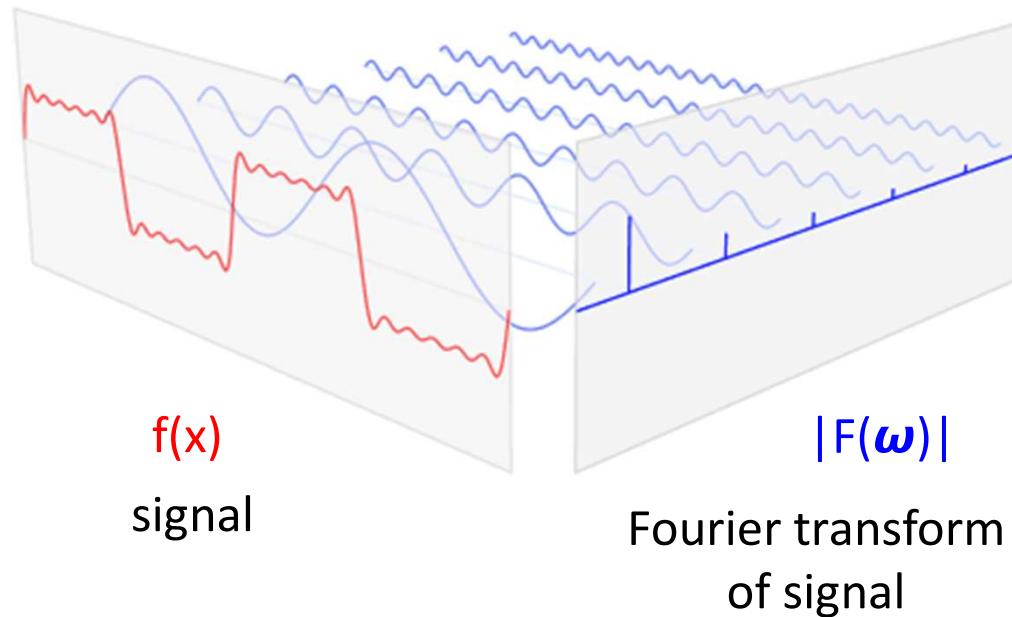


+



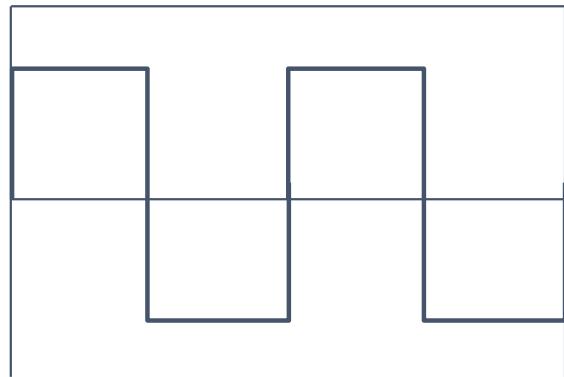
Biến đổi Fourier

- Phép biến đổi toán học cho phép
 - Phân rã hàm theo biến thời gian hoặc không gian thành hàm theo biến tần số trong miền không gian hoặc tần số trong miền thời gian

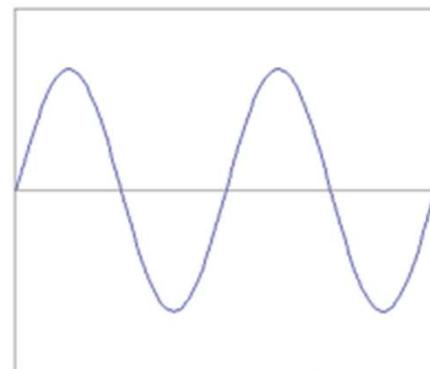


- Ảnh: hàm trong miền không gian → hàm theo tần số trong miền không gian

Chuỗi Fourier



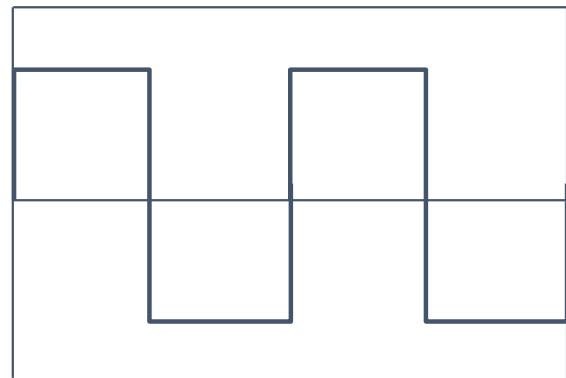
≈



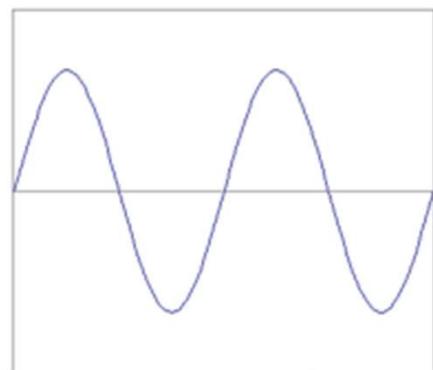
We want to get this
function

Slide by Alexei A. Efros

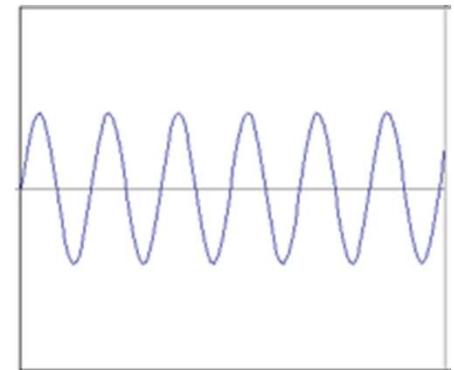
Chuỗi Fourier



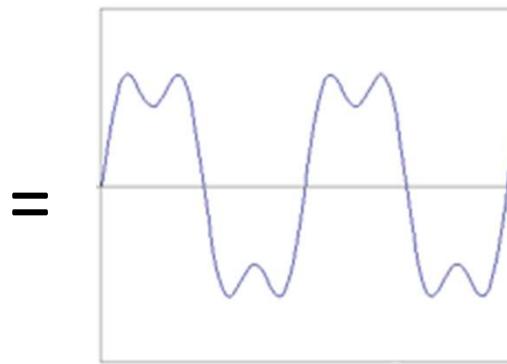
\approx



+

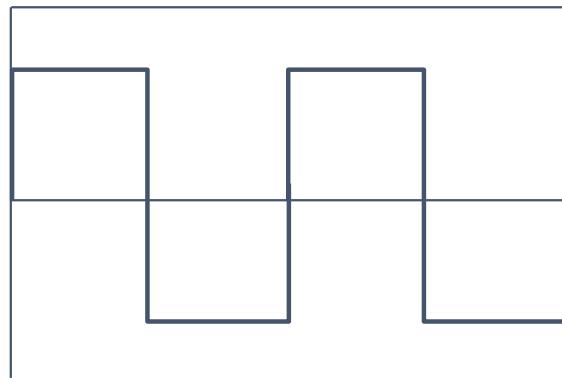


We want to get this
function

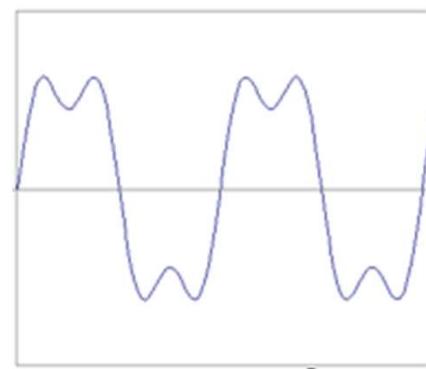


=

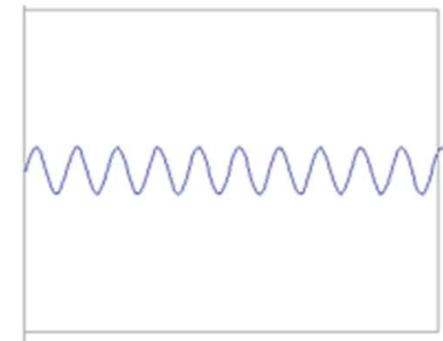
Chuỗi Fourier



\approx



+



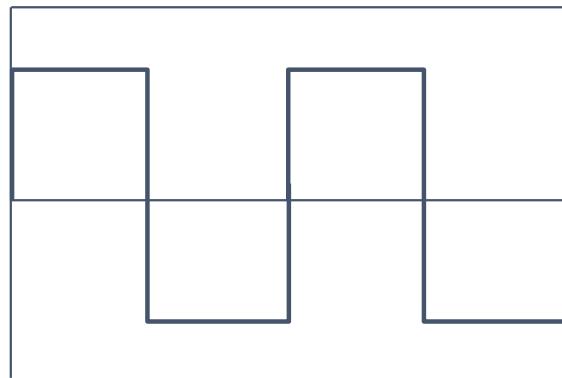
We want to get this
function

=



Slide by Alexei A. Efros

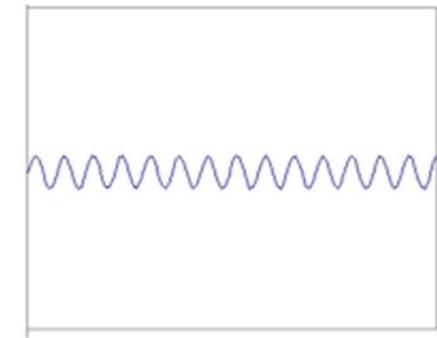
Chuỗi Fourier



\approx



+



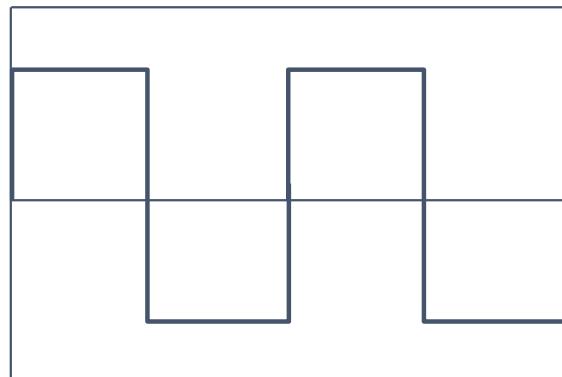
We want to get this
function

=

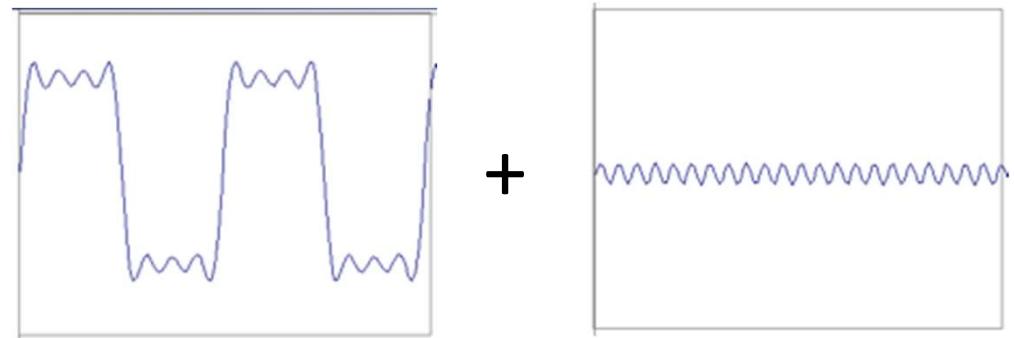


Slide by Alexei A. Efros

Chuỗi Fourier



\approx

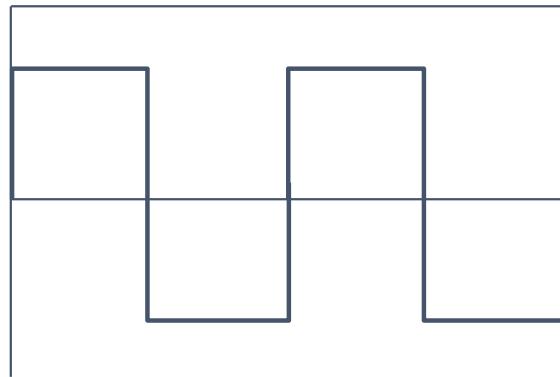


Chúng ta muốn hàm này

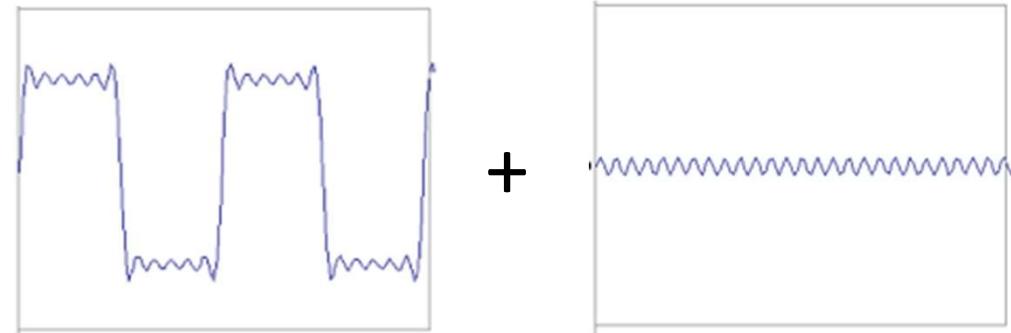


Slide by Alexei A. Efros

Chuỗi Fourier



\approx



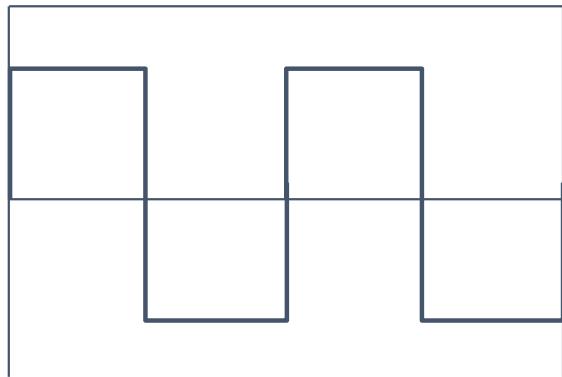
Chúng ta muốn hàm này

$=$



Slide by Alexei A. Efros

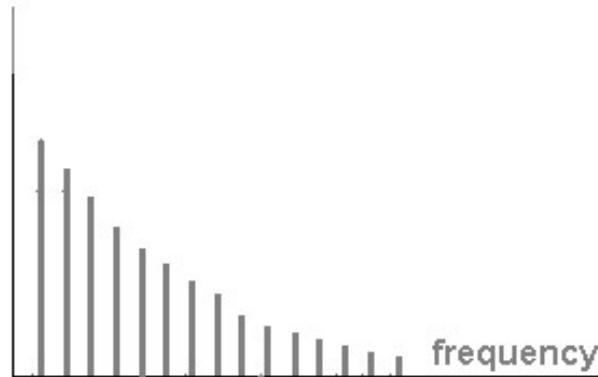
Chuỗi Fourier



$$= A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(2\pi kt)$$

Chúng ta muốn hàm này

Chúng ta đạt được khi cộng tổng lại



Slide by Alexei A. Efros

Công thức toán học

Fourier Transform :
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx$$

Inverse Fourier Transform :
$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega x} d\omega$$

- Hàm sin và cos đâu?

$$e^{i\omega x} = \cos(\omega x) + i \sin(\omega x)$$

- Kết quả là một hàm phức

$$F(\omega) = R(\omega) + iI(\omega)$$

- Biên độ A (Amplitude) được tính bằng :

- Pha cũng được mã hóa:

$$A = \pm \sqrt{R(\omega)^2 + I(\omega)^2}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{I(\omega)}{R(\omega)}$$

Slide by Steve Seitz

Độ lớn và pha (magnitude & phase)

- Biến đổi Fourier cho biết độ lớn (**magnitude**) và pha (**phase**) của tín hiệu ở từng thành phần tần số
 - Magnitude: **thể hiện mức độ tín hiệu** ở tần số cụ thể đó
 - Phase: **mã hóa thông tin không gian** (gián tiếp)
 - Để thuận tiện trong biểu diễn toán học, số phức được dùng để thể hiện cho các thành phần này

Amplitude
(magnitude):

$$A = \pm \sqrt{R(\omega)^2 + I(\omega)^2}$$

Phase:

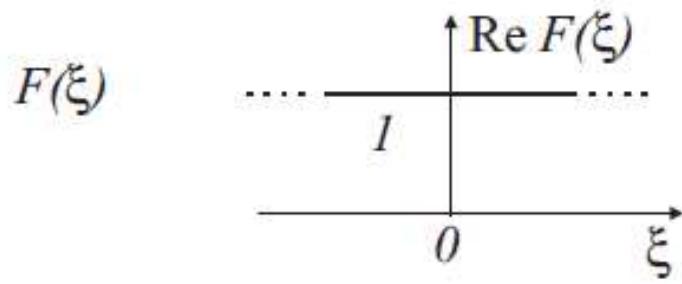
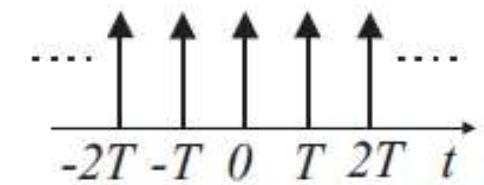
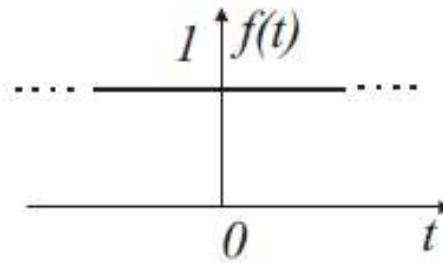
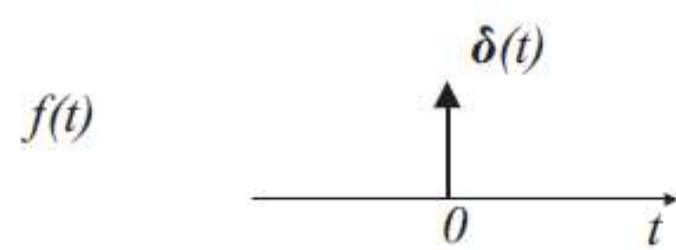
$$\phi = \tan^{-1} \frac{I(\omega)}{R(\omega)}$$

Biến đổi Fourier rời rạc

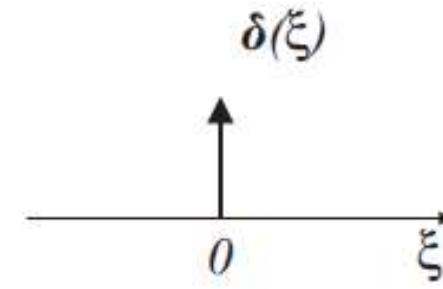
$$H_{f_j} = \frac{1}{N} \sum_k h_{t_k} e^{2\pi i f_j t_k}$$
$$h_{t_j} = \frac{1}{N} \sum_k H_{f_k} e^{-2\pi i f_k t_j}$$

where the t_k are the time corresponding to my signal in the time domain h_{t_k} , f_k are the corresponding frequency to my signal in the frequency domain, and N is the number of points of the signal data.

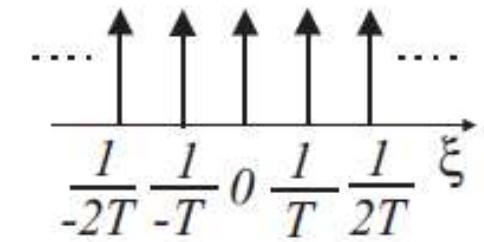
Biến đổi Fourier của 1 số hàm



Dirac

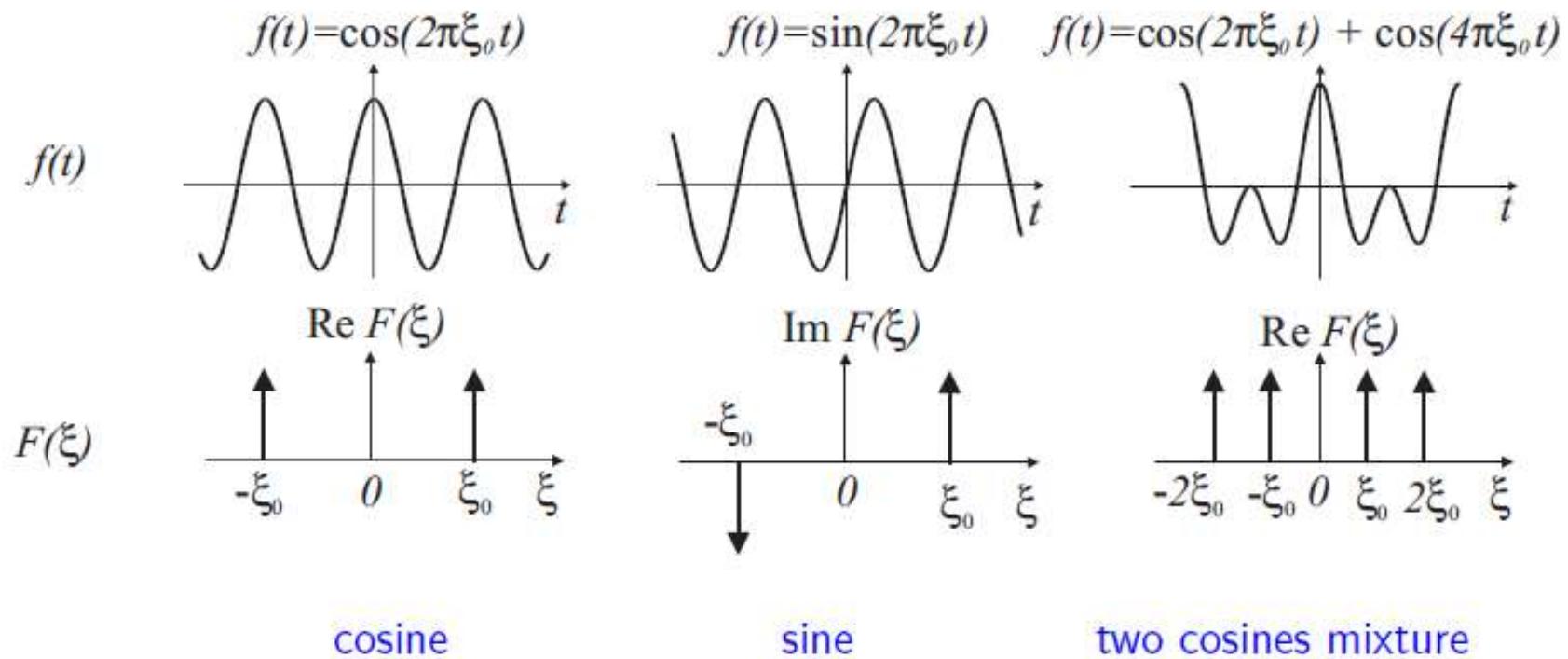


constant

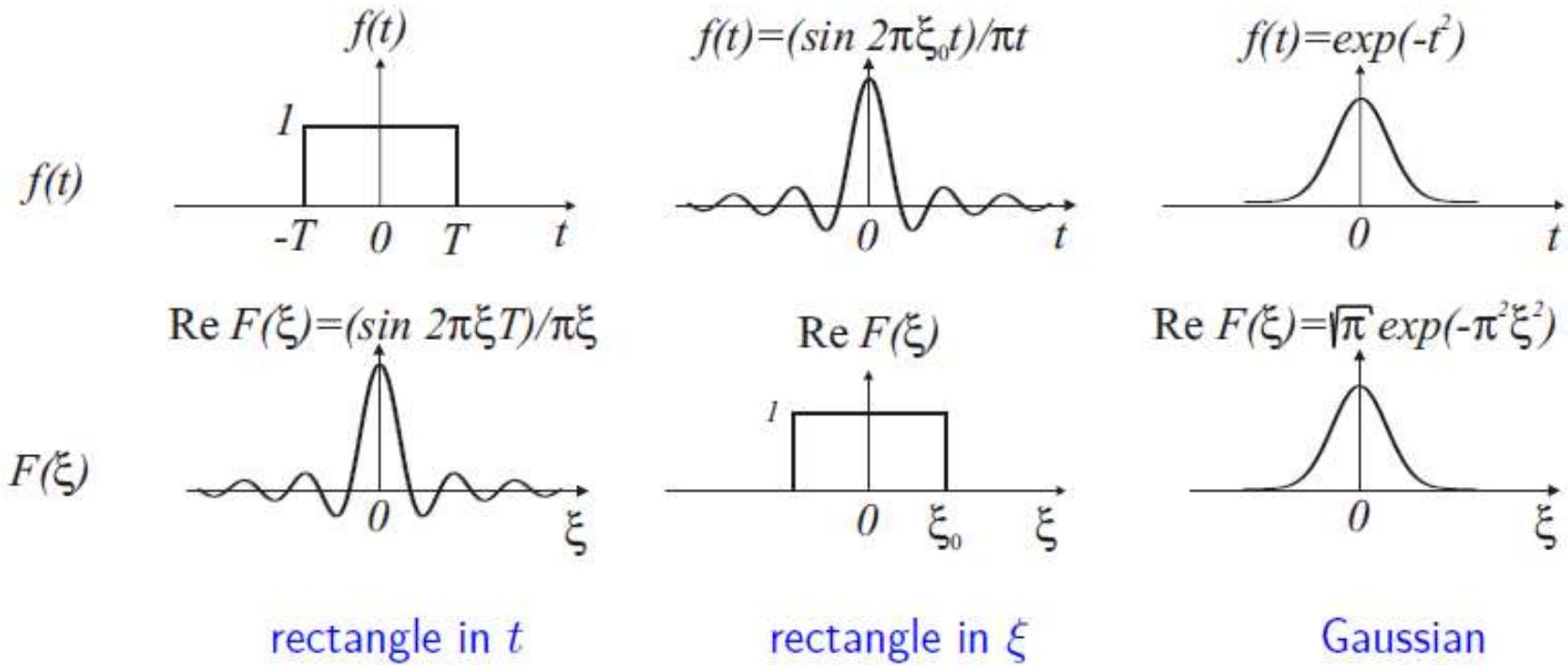


∞ sequence of Diracs

Biến đổi Fourier của 1 số hàm

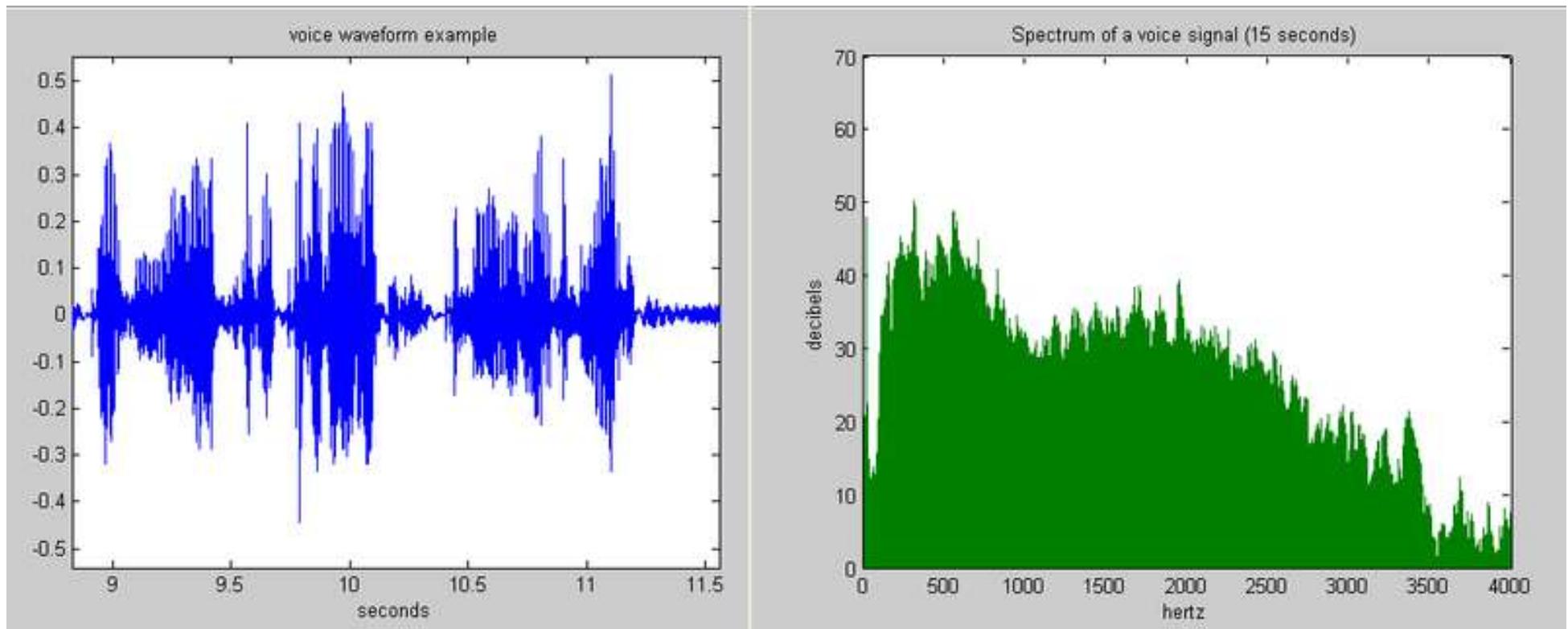


Biến đổi Fourier của 1 số hàm



Âm thanh

- Phổ của tín hiệu âm thanh cho ta biết cường độ của âm thanh ở từng tần số



2D FFT

- FFT liên tục:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i(xu+yv)} dx dy$$

- FFT ngược:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{2\pi i(xu+yv)} du dv$$

2D FFT – ròi rạc

Direct transform

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \exp \left[-2\pi i \left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right) \right],$$

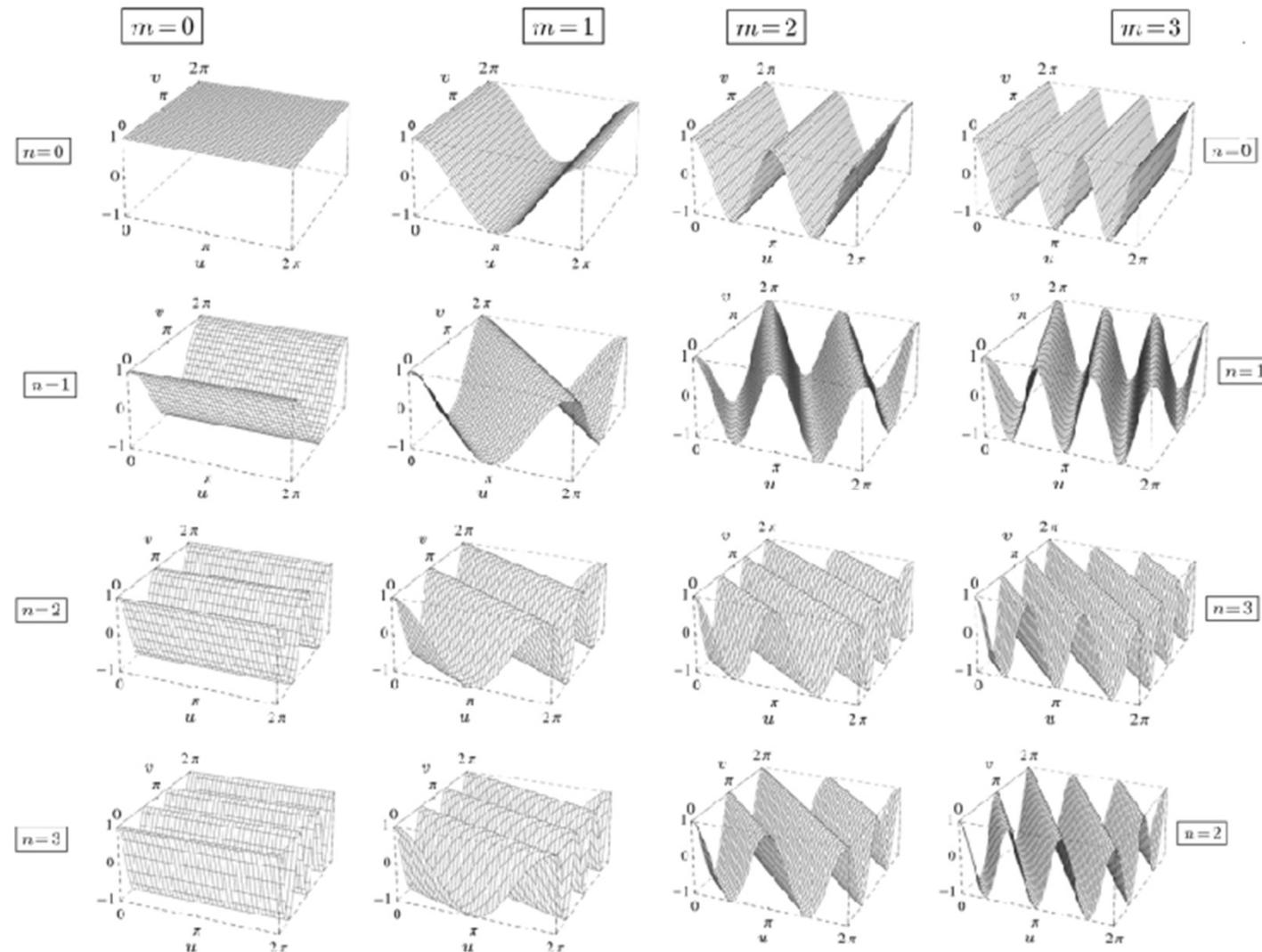
$$u = 0, 1, \dots, M - 1, \quad v = 0, 1, \dots, N - 1,$$

Inverse transform

$$f(m, n) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp \left[2\pi i \left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right) \right],$$

$$m = 0, 1, \dots, M - 1, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Hàm cosin 2D



Tính phân tách của 2D DFT

- “Thành phần lọc” của biến đổi Fourier có thể biểu diễn dưới dạng

$$\exp \left[2\pi i \left(\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N} \right) \right] = \exp \left[2\pi i \frac{xu}{M} \right] \exp \left[2\pi i \frac{yv}{N} \right]$$

2D DFT 1D DFT (hàng) 1D DFT (cột)

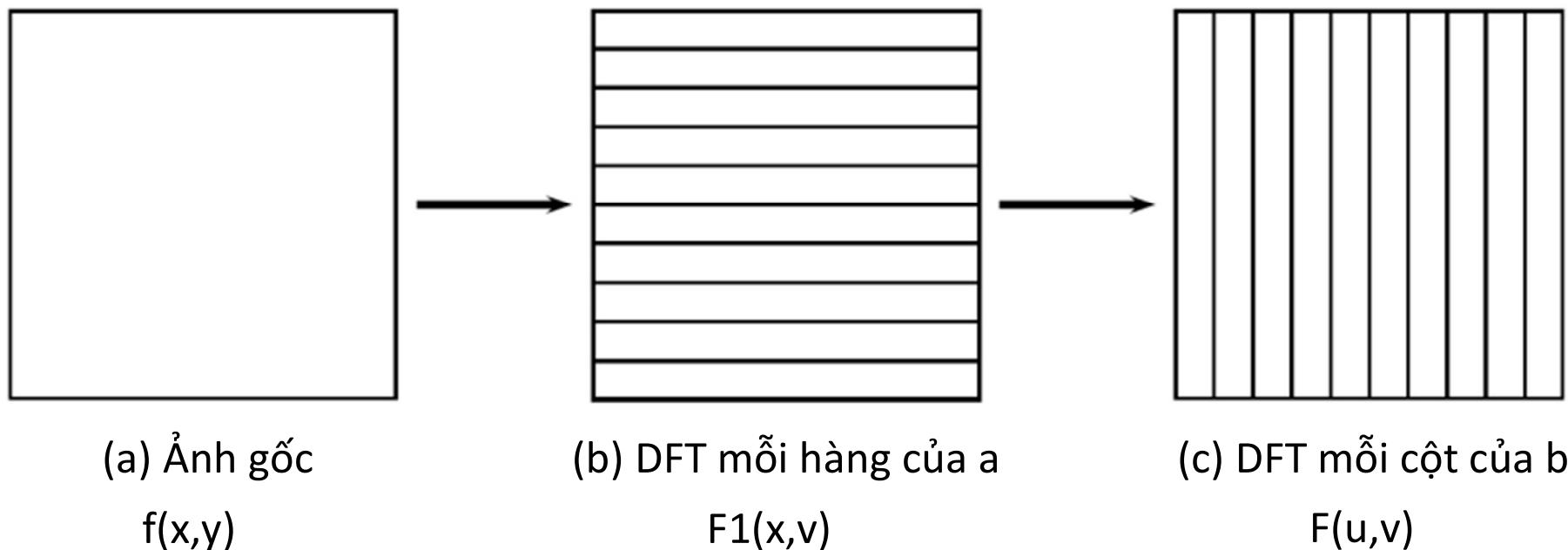
- Công thức biến đổi Fourier cho ảnh có thể tách thành phép biến đổi Fourier 1 chiều (1D)

$$F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x) \exp \left[-2\pi i \frac{xu}{M} \right],$$

$$f(x) = \frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} F(u) \exp \left[2\pi i \frac{xu}{M} \right]$$

Tính phân tách của 2D DFT

- Nhờ đặc tính phân tách, có thể tính 1D DFT theo hàng và tính DFT theo cột



Đặc trưng của 2D DFT

- Tính tuyến tính: DFT là tổng (hoặc nhân) của từng DFT riêng lẻ
- Tính lặp lại theo chu kỳ
 - Chu kỳ bao nhiêu?
 - $F(u,v) = F(u+a*M, v+b*N)$ với a,b nguyên

$$\begin{aligned}F(u + a * M, v + b * N) &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) * \exp\left[-2\pi i\left(\frac{xu}{M} + a + \frac{yv}{N} + b\right)\right] \\&= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) * \exp\left[-2\pi i\left(\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N}\right)\right] * \exp[-2\pi i(ax + by)]\end{aligned}$$

$$\exp[-2\pi i(ax + by)] = \cos[2\pi(ax + by)] + \sin[2\pi(ax + by)] = 1$$

Thành phần 1 chiều của ảnh miền tần số

- Với công thức

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp \left[-2\pi i \left(\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N} \right) \right]$$

- Khi đó $F(0,0)$ của biến đổi DFT được gọi là thành phần 1 chiều
- Khi $u=v=0$ thì

$$F(0,0) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp(0) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$$

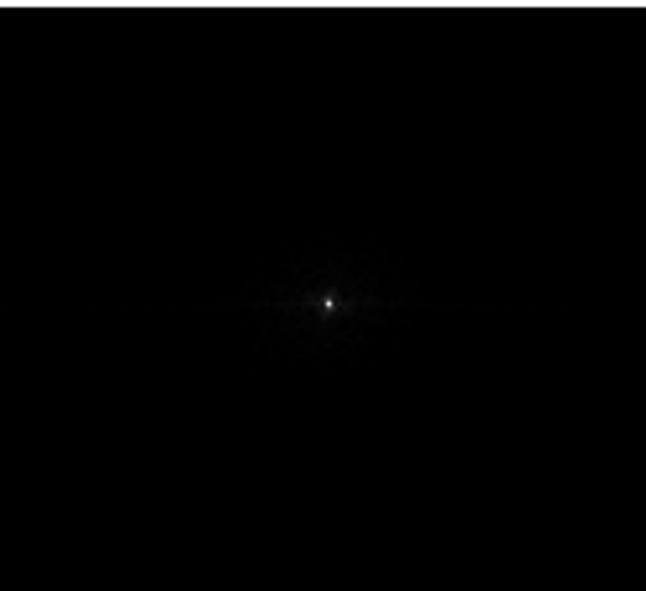
- $F(0,0)$ là tổng tất cả các giá trị của ma trận ảnh gốc

Biến đổi Fourier trên ảnh

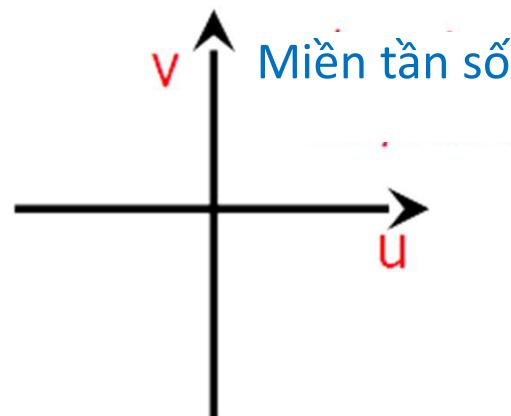
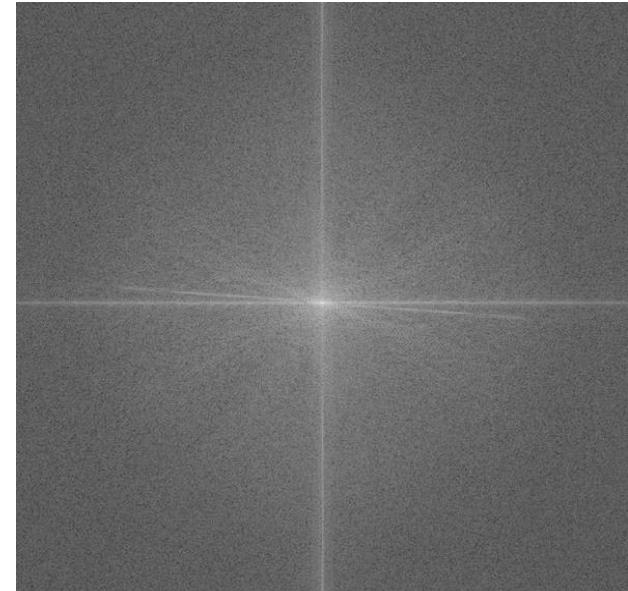
Ảnh gốc



Biên độ $|F(u,v)|$

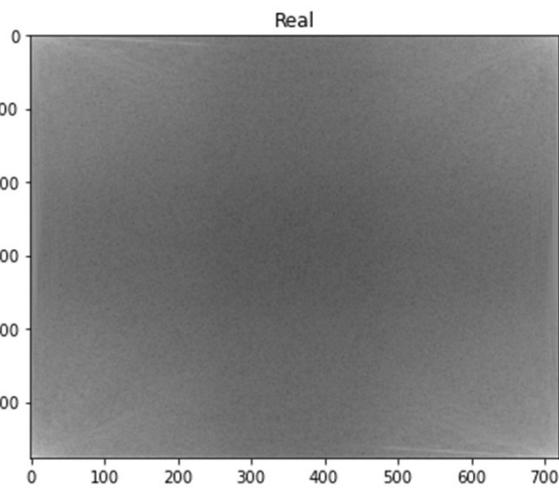
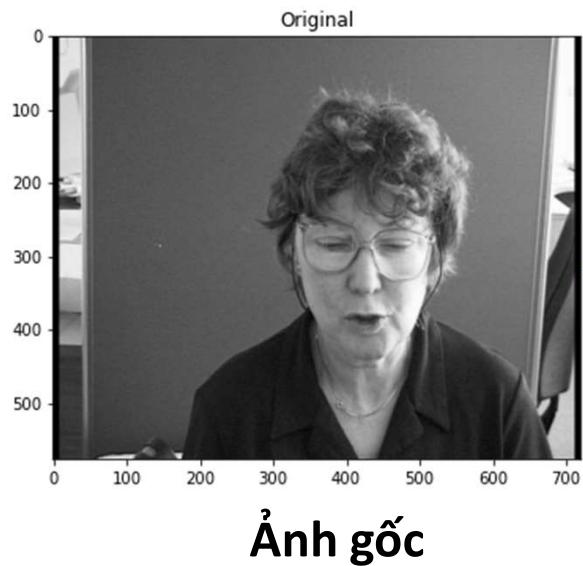


Tăng cường biên độ
 $c^*\log(1+|F(u,v)|)$

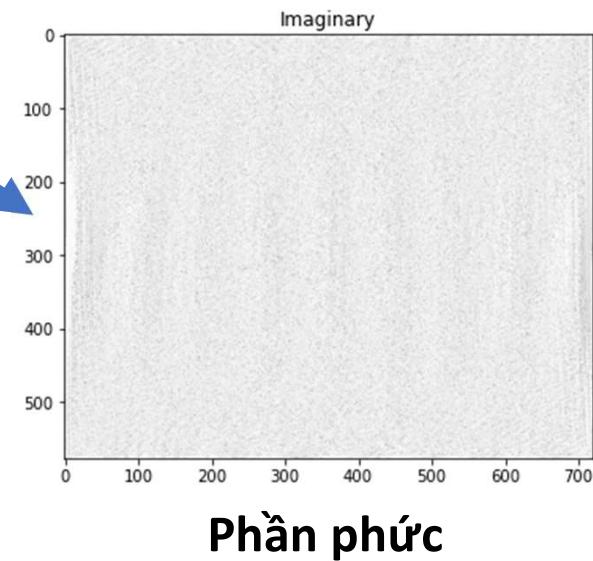


Biến đổi Fourier trên ảnh

$$F(u,v) = R(u,v) + i*I(u,v)$$



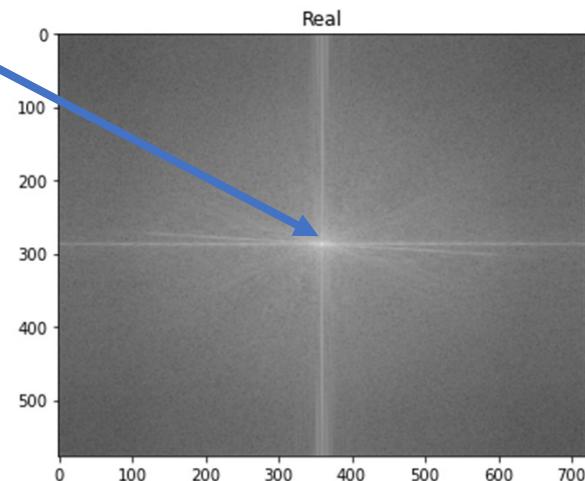
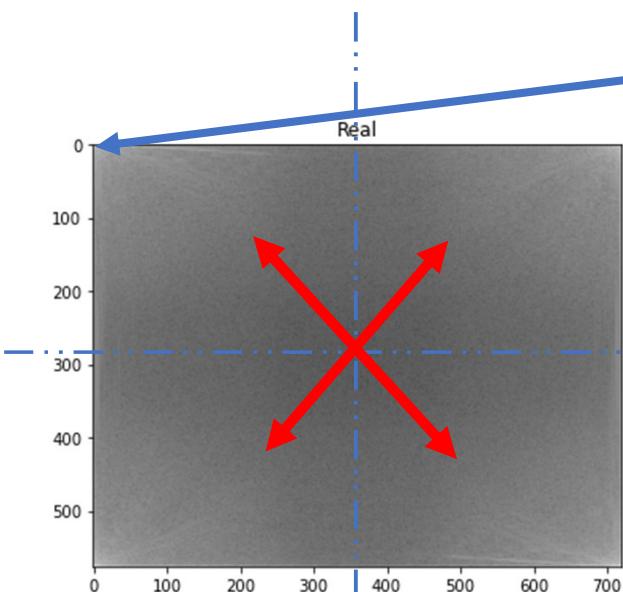
Phần thực



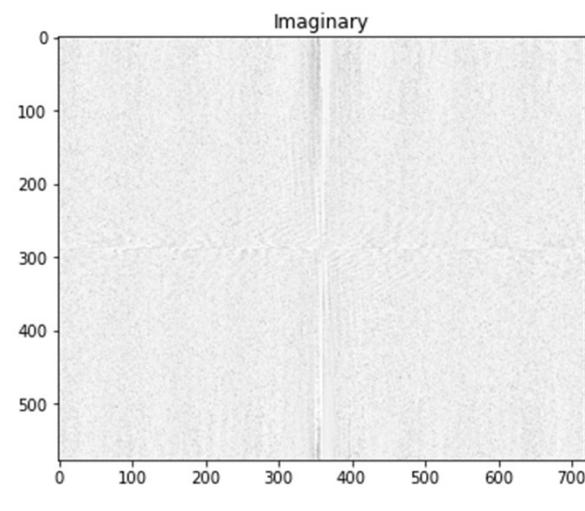
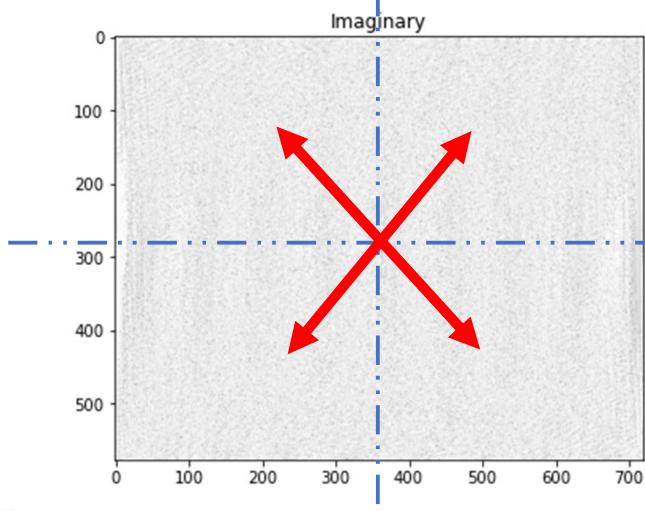
Phần phức

Biến đổi Fourier trên ảnh

Điểm $(0,0)$

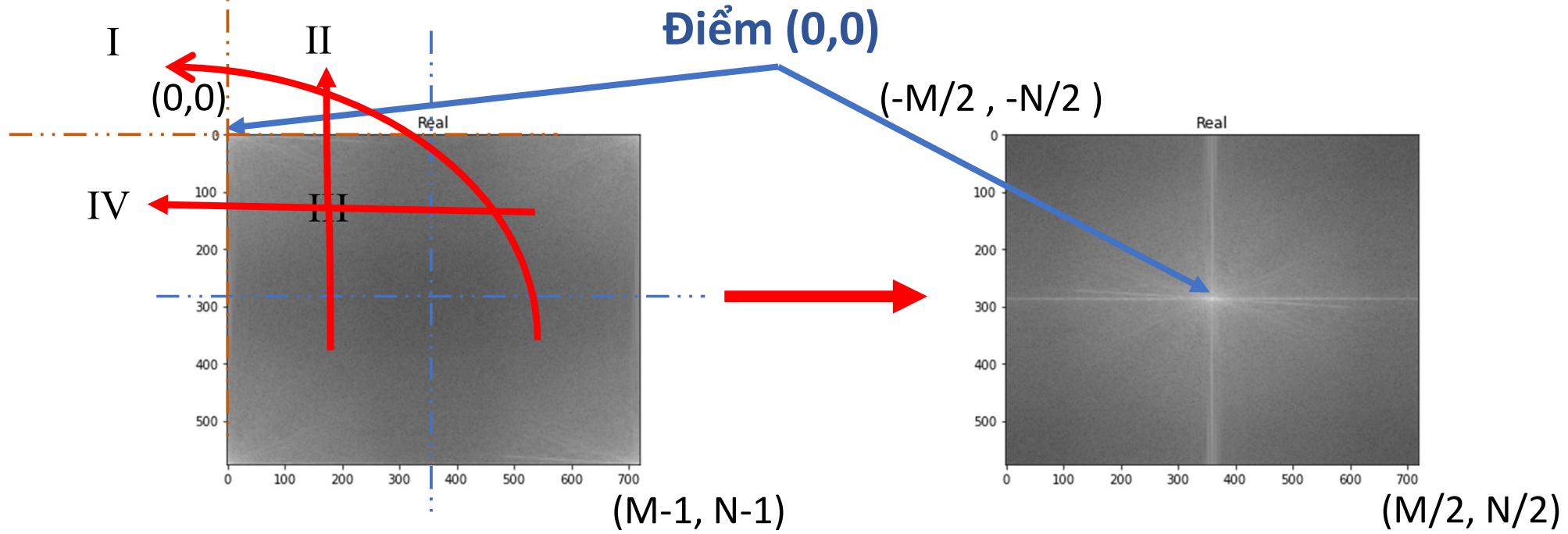


Tại sao làm được?



Chuyển điểm $(0,0)$ về tâm ảnh để hiển thị

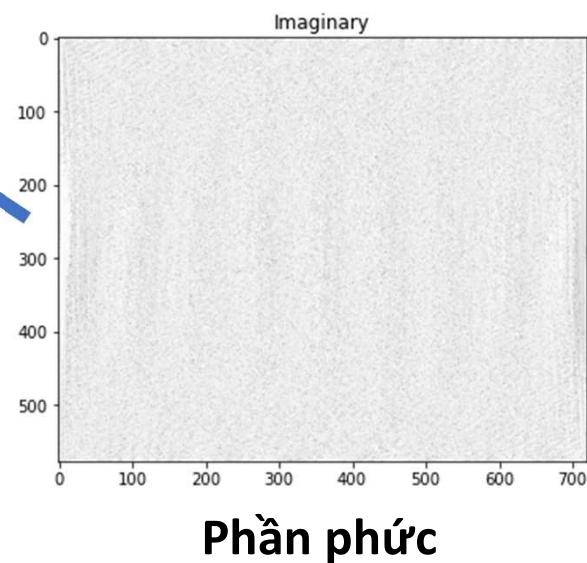
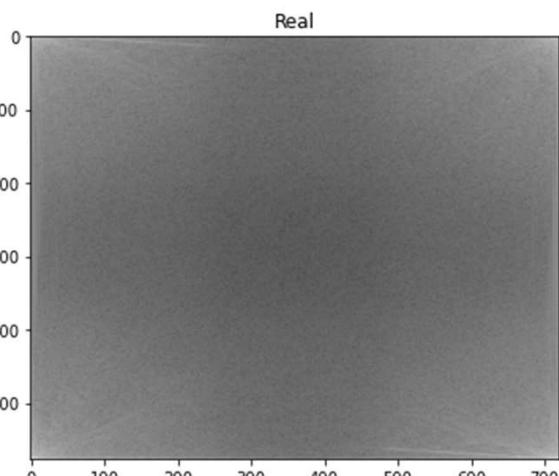
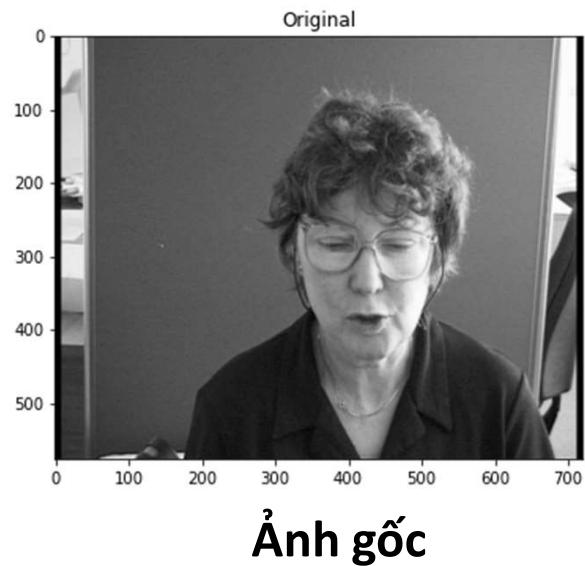
Biến đổi Fourier trên ảnh



Do tính chất chu kỳ (M,N) của phép biến đổi

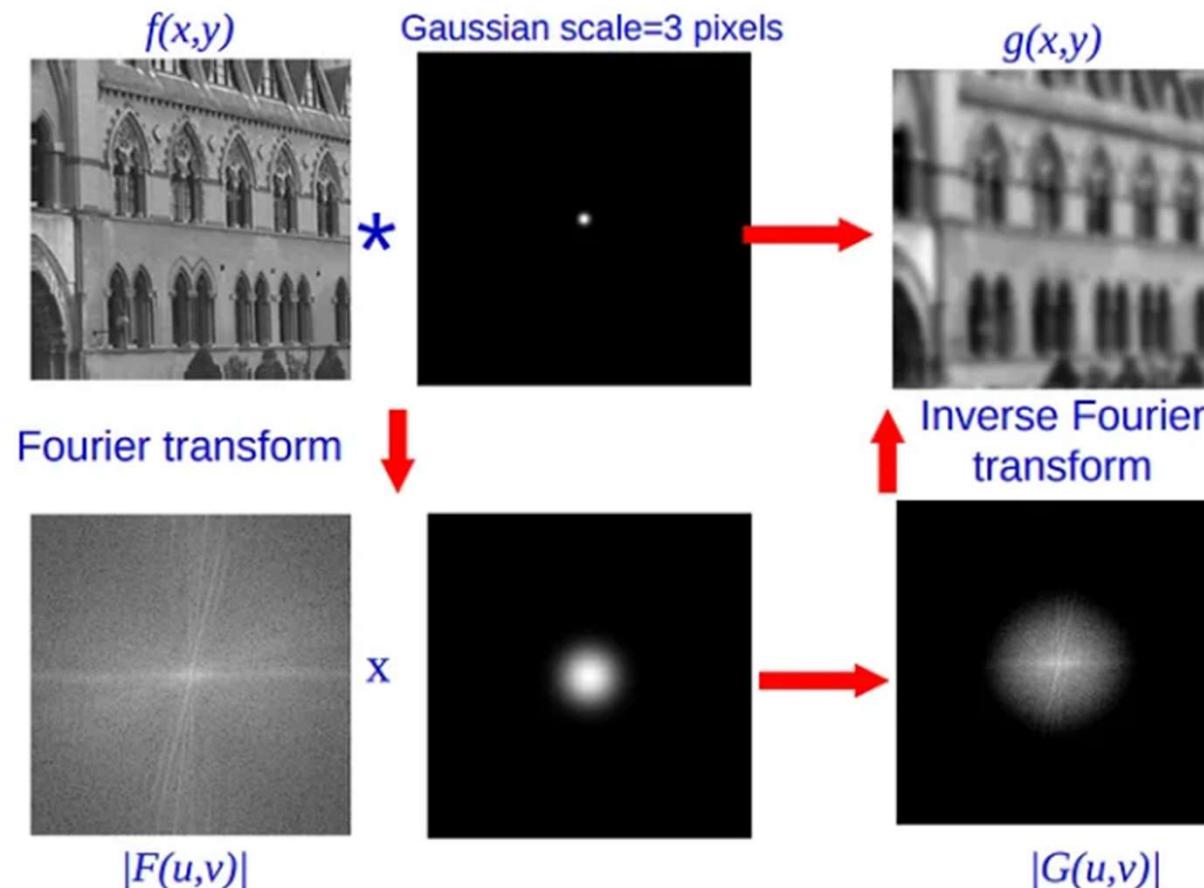
Khôi phục ảnh thì miền tần số

$$F(u,v) = R(u,v) + i*I(u,v)$$



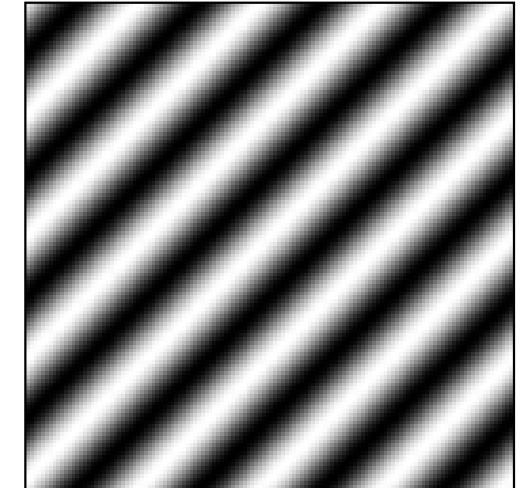
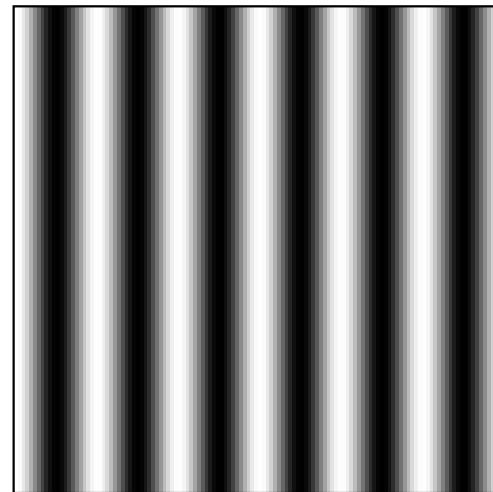
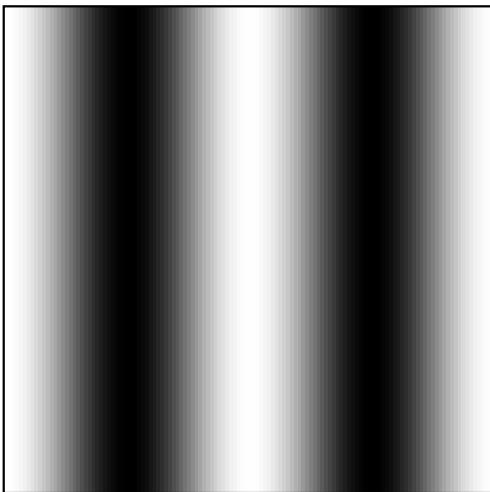
Nhân chập sử dụng 2D DFT

- DFT cho phép “nhân chập” bằng cách khác
- Phép “nhân chập” trở thành phép nhân

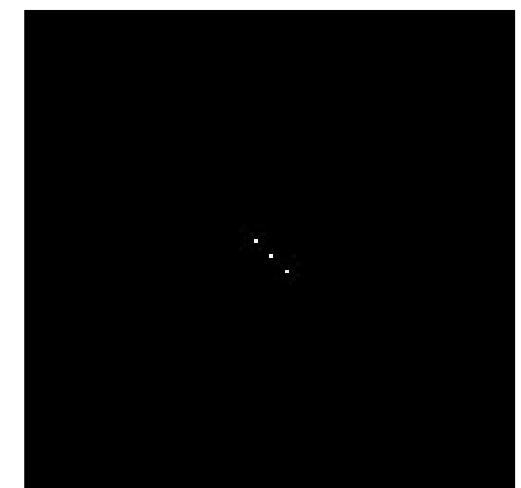
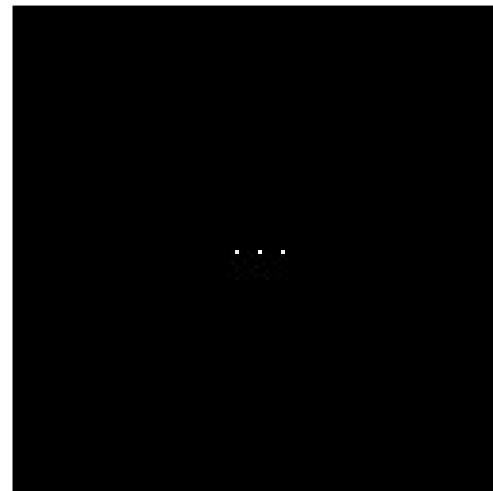
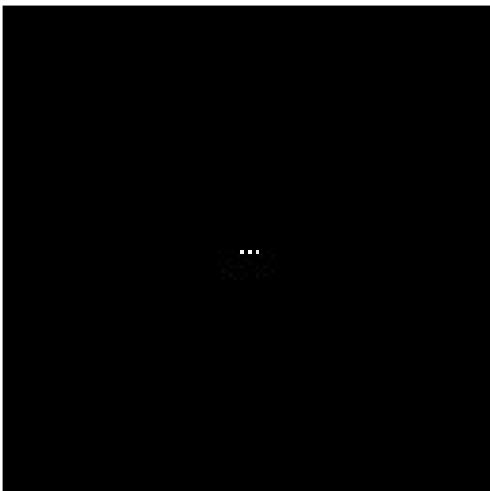


Ảnh và phô

Ảnh đa mức xám (miền không gian)

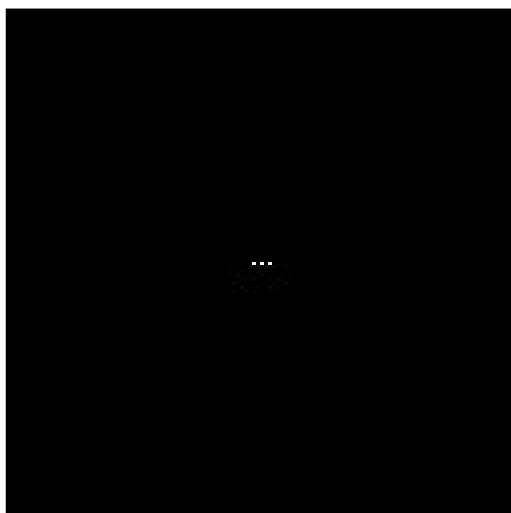
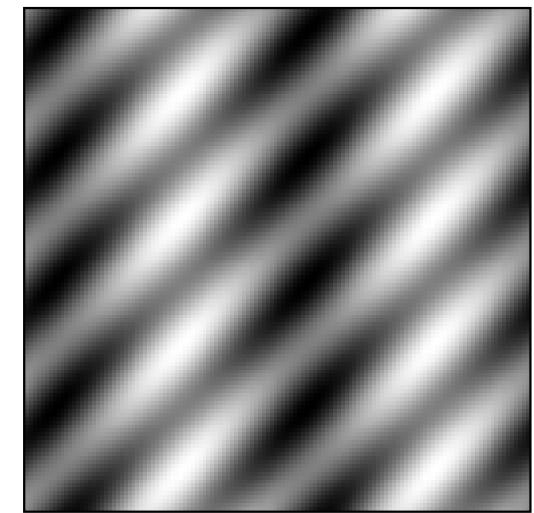
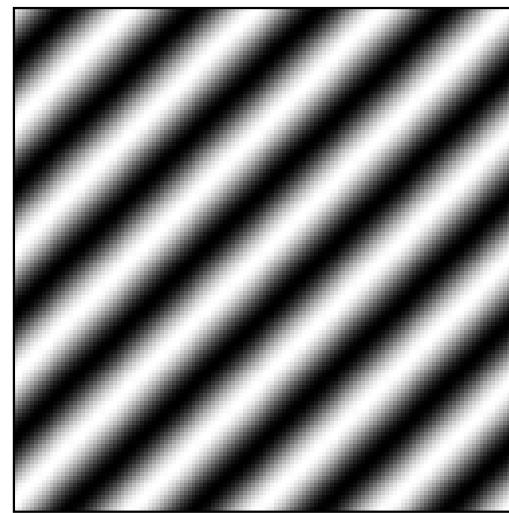
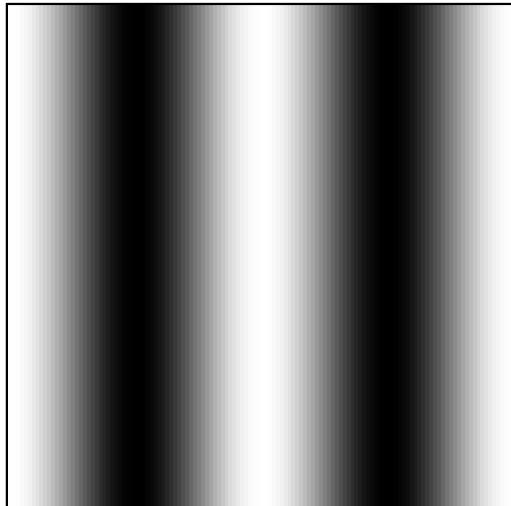


Ảnh Fourier (ảnh phô – ảnh biên độ)



Tổng hợp tín hiệu

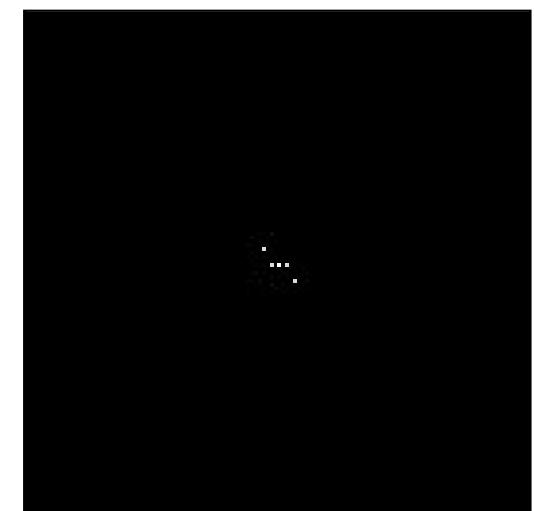
Ảnh đa mức xám (miền không gian)



+



=



Ảnh Fourier (ảnh phổ – ảnh biên độ)

Phổ Fourier của ảnh thể hiện gì?

Ảnh tự nhiên

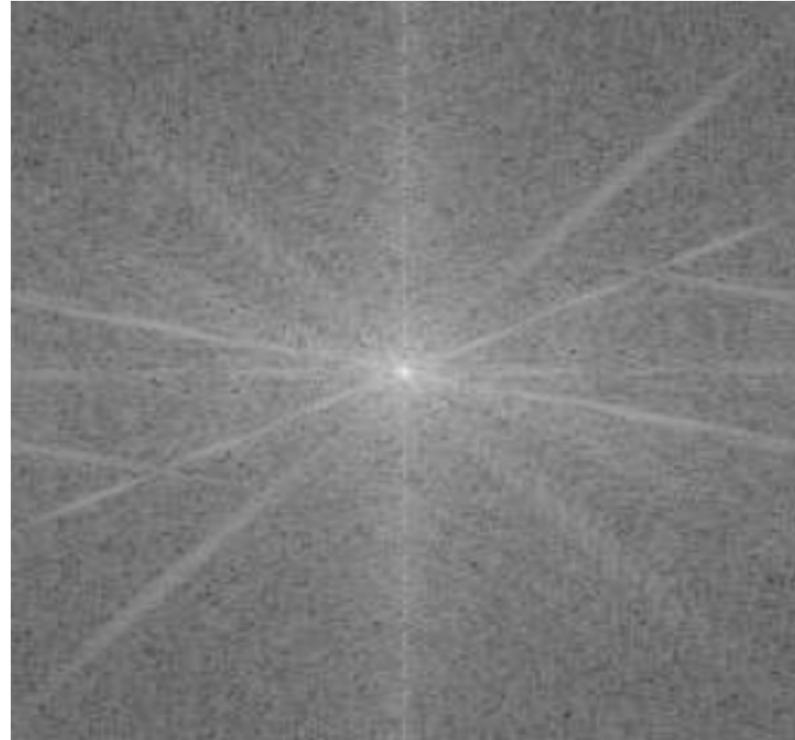


$f(x,y)$

Giá trị tại điểm ảnh x,y nghĩa là gì?

Ở ảnh phân giải Fourier, giá trị càng sáng hay càng tối có nghĩa là gì?

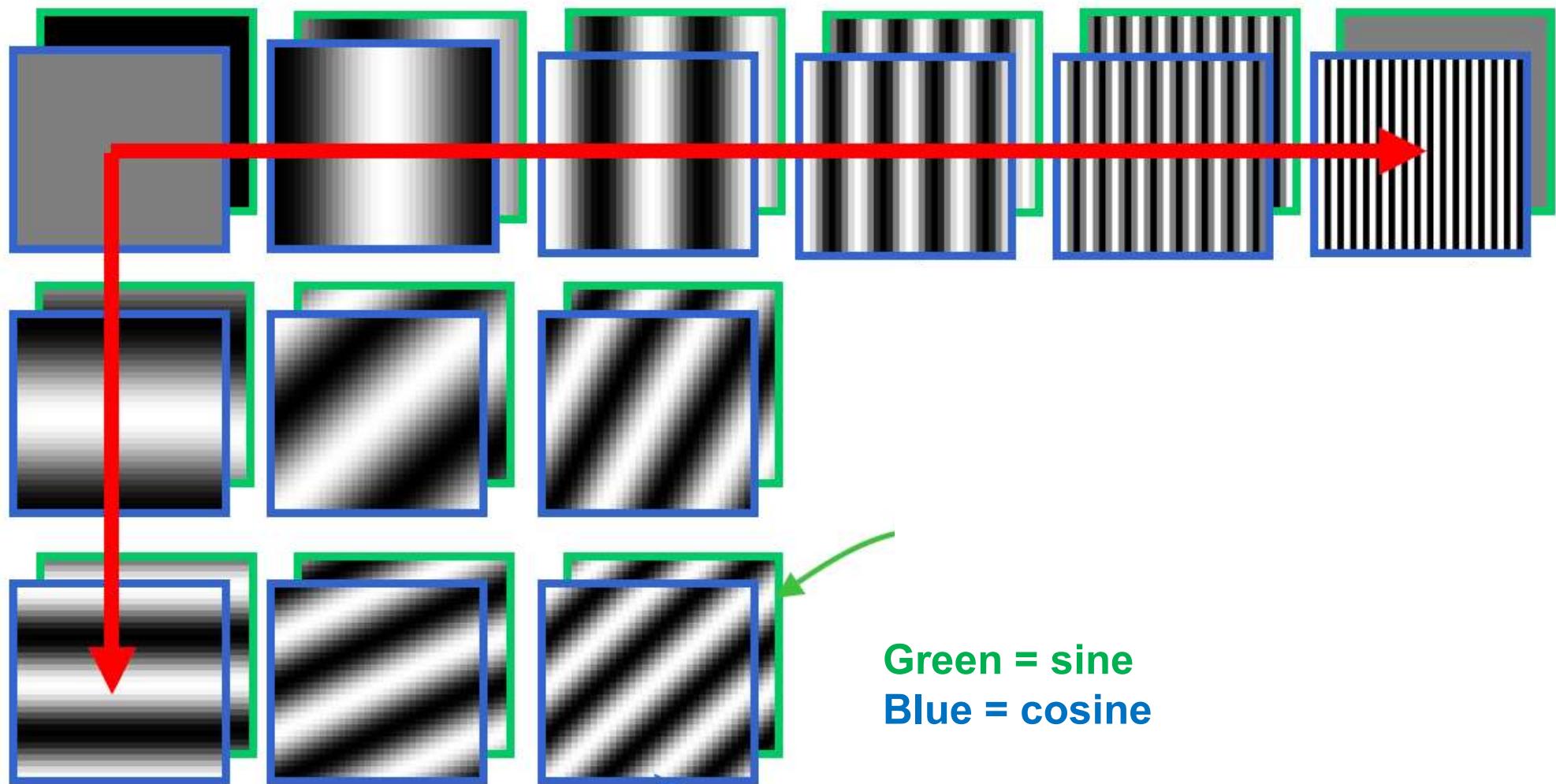
Phân tích Fourier
Hệ số tần số (biên độ)



$|F(\omega)|$

Các hàm (tín hiệu) cơ sở

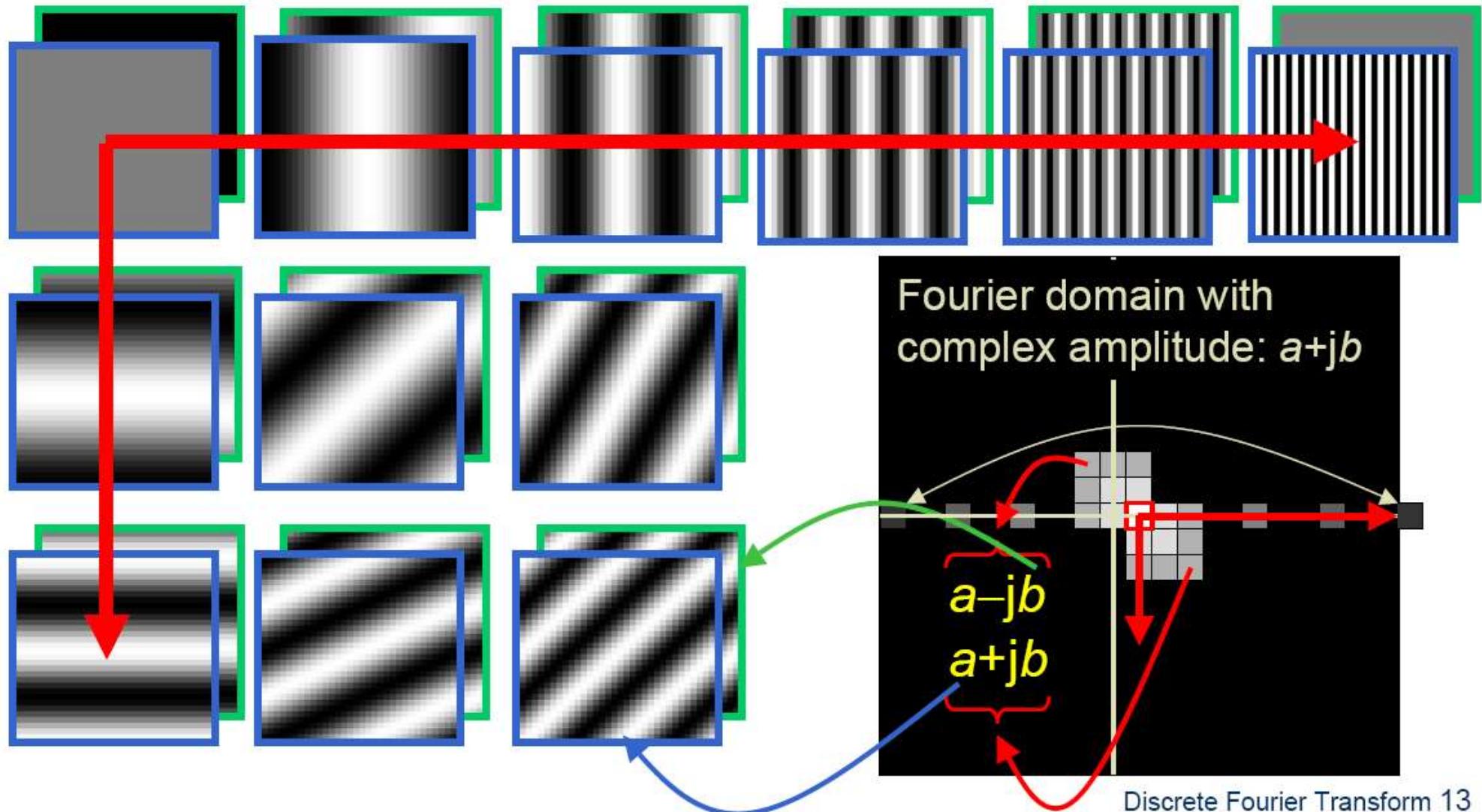
Cho biết sự biến đổi 'nhanh với chậm' trên ảnh



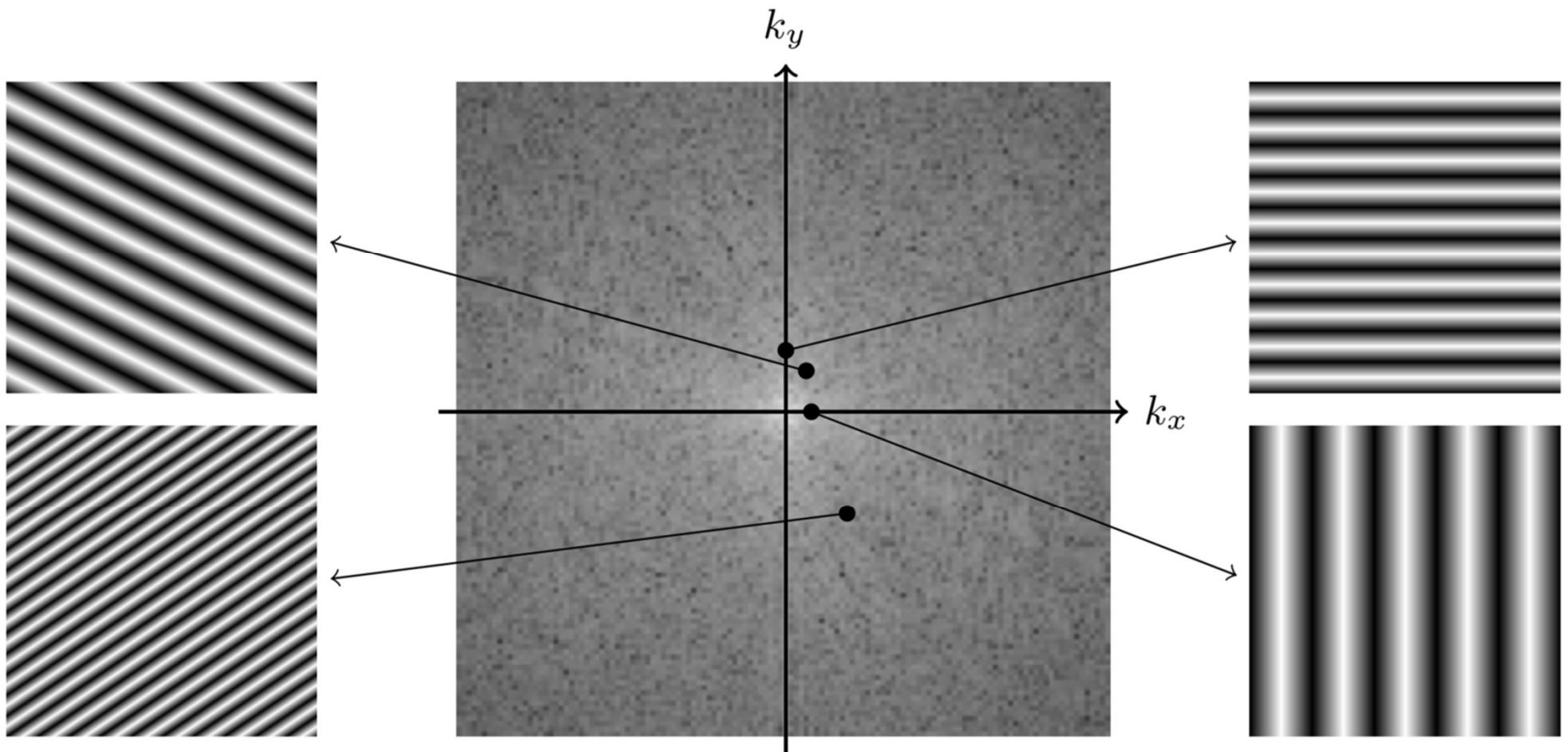
Sự thay đổi cơ sở này là Fourier Transform

Hays

Các hàm (tín hiệu) cơ sở



Các thành phần tần số trong ảnh



Slide by Steve Seitz

Tái tạo tín hiệu từ các thành phần cơ sở



Full image



First 1 basis fn



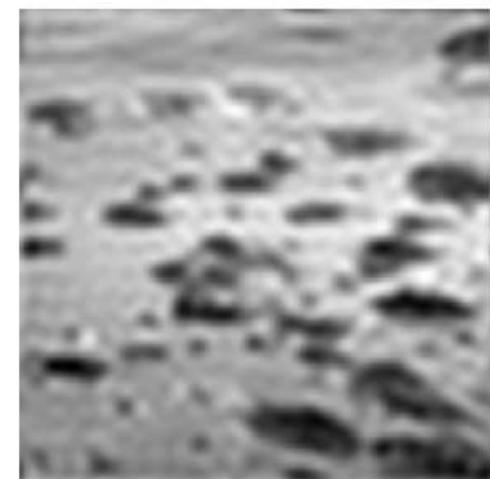
First 4 basis fns



First 9 basis fns

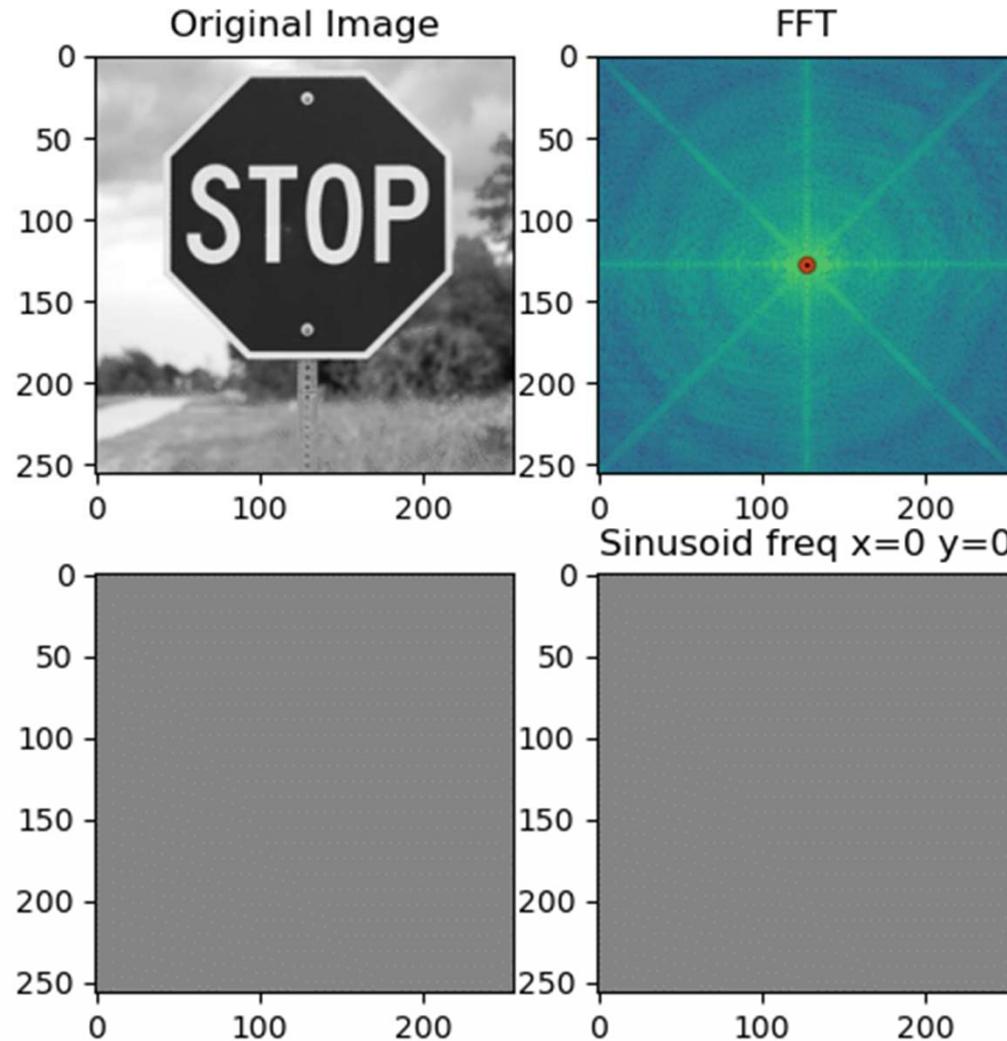


First 16 basis fns



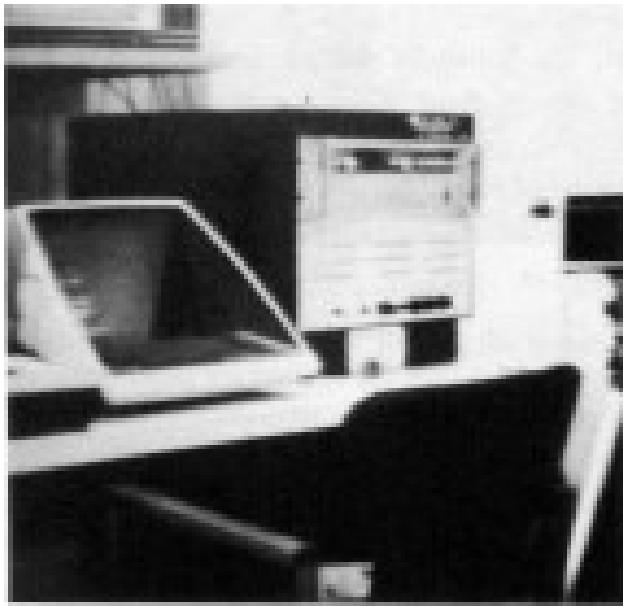
First 400 basis fns

Ví dụ về tổng hợp tần số và ảnh

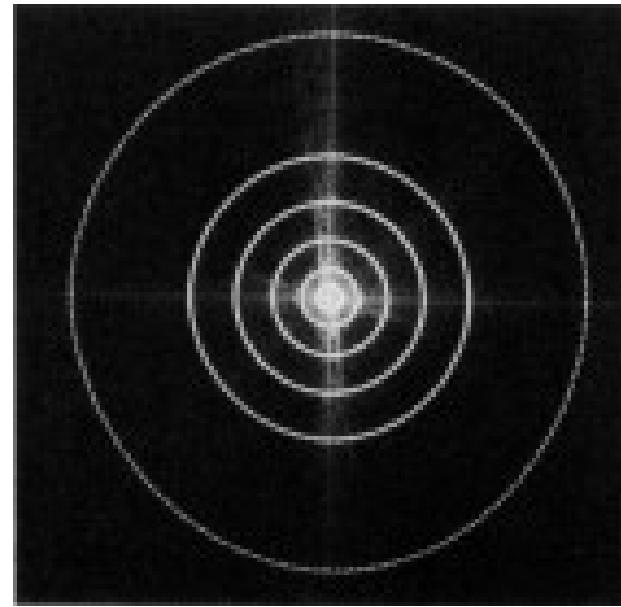


Biến đổi Fourier 2D

Ảnh



Phổ Fourier

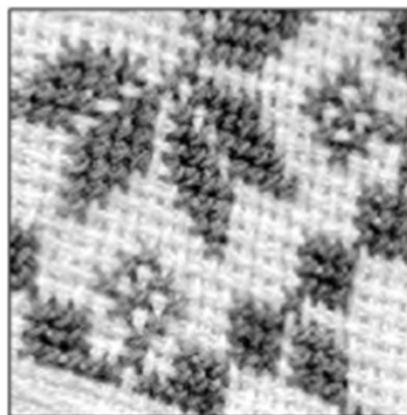


Năng lượng của ảnh trong từng vòng tròn (từ nhỏ đến lớn) :
90, 95, 98, 99, 99.5, 99.9

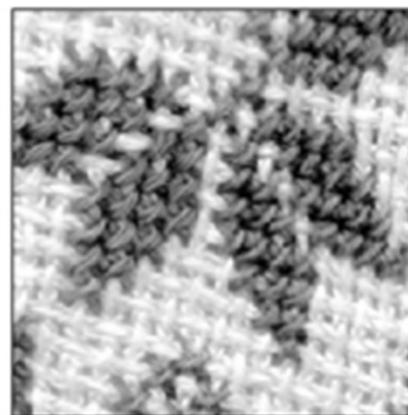
Hầu hết năng lượng tập trung ở thành phần tần số thấp

Ảnh miền tần số ví dụ

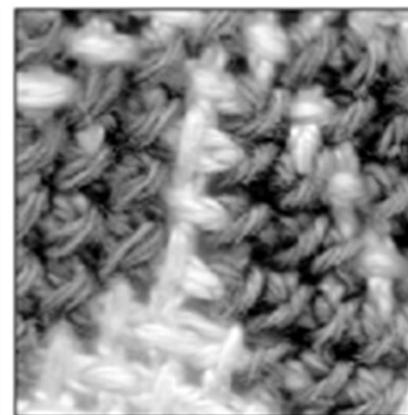
- Các ảnh các pattern lặp lại hiển thị rõ trên miền tần số



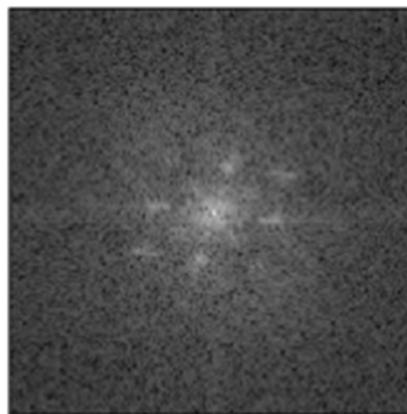
(a)



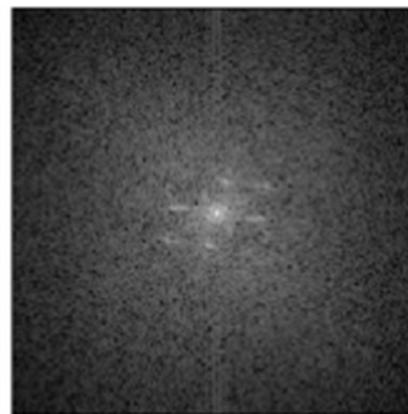
(b)



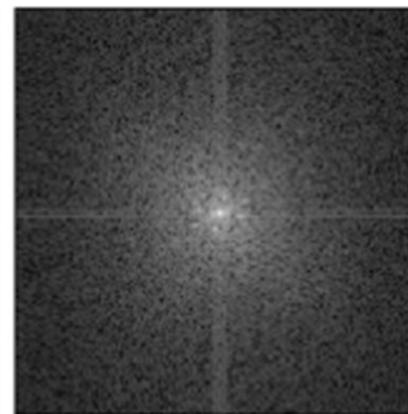
(c)



(d)



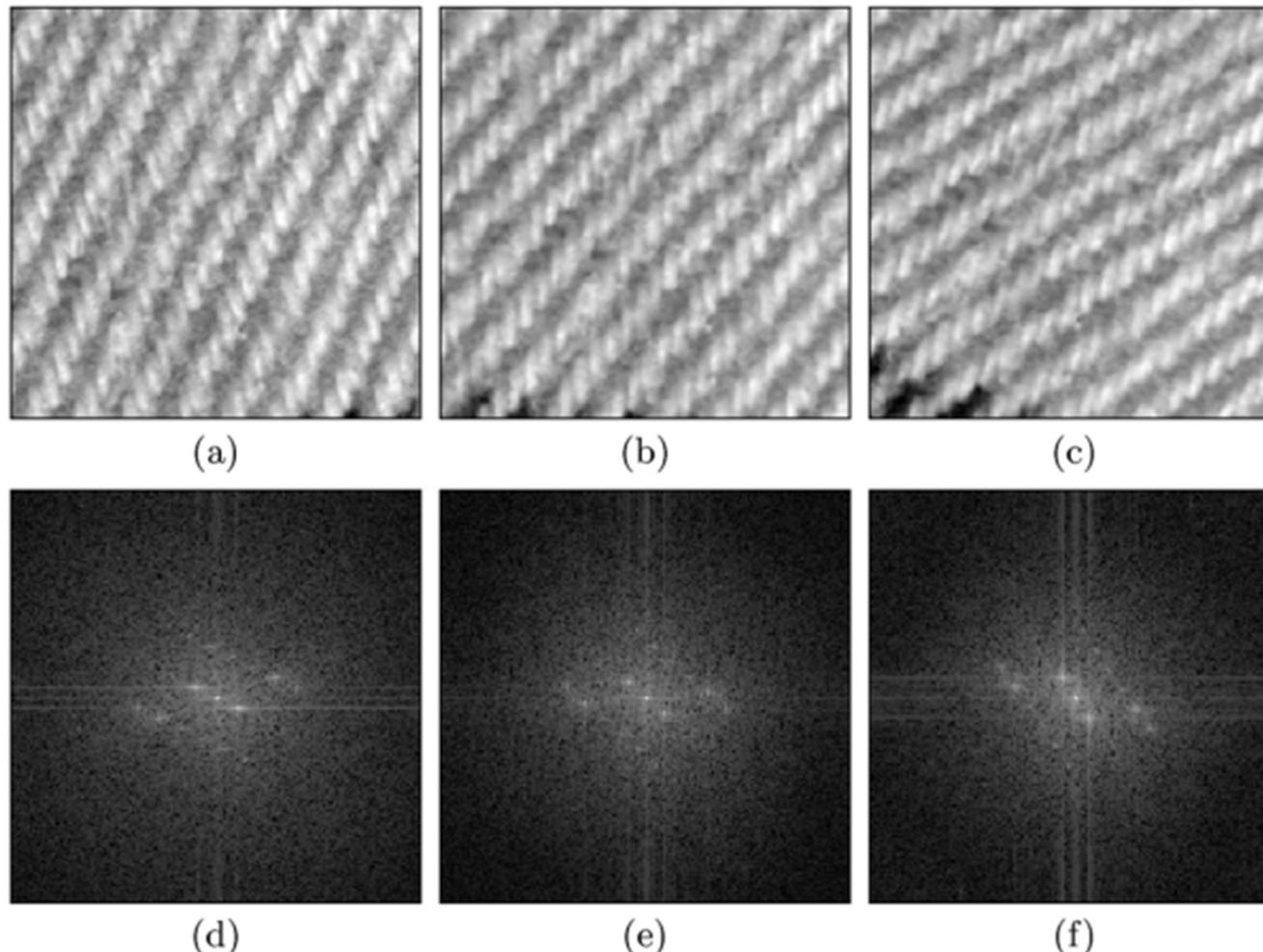
(e)



(f)

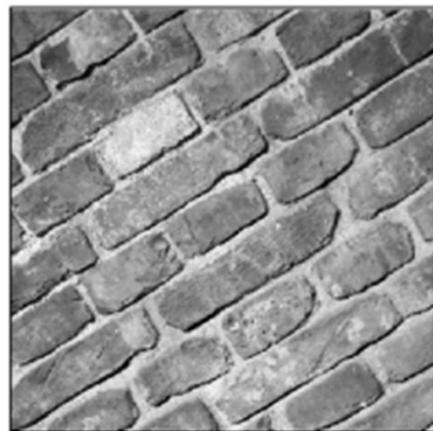
Ảnh miền tần số ví dụ

- Xoay ảnh cũng khiến phổ tín hiệu xoay tương ứng



Ảnh miền tần số ví dụ

- Các cấu trúc đồng hướng hiển thị rõ trên miền tần số



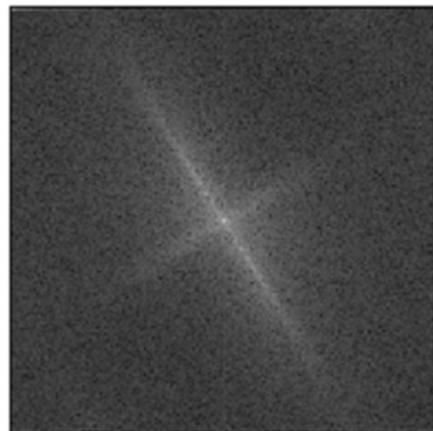
(a)



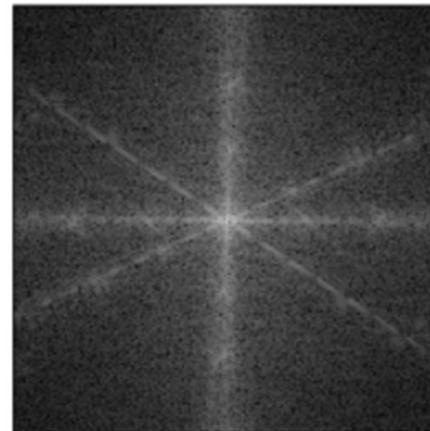
(b)



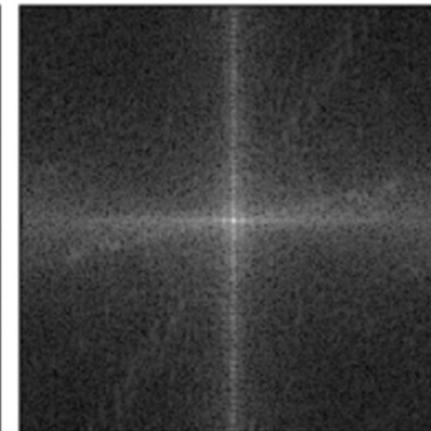
(c)



(d)



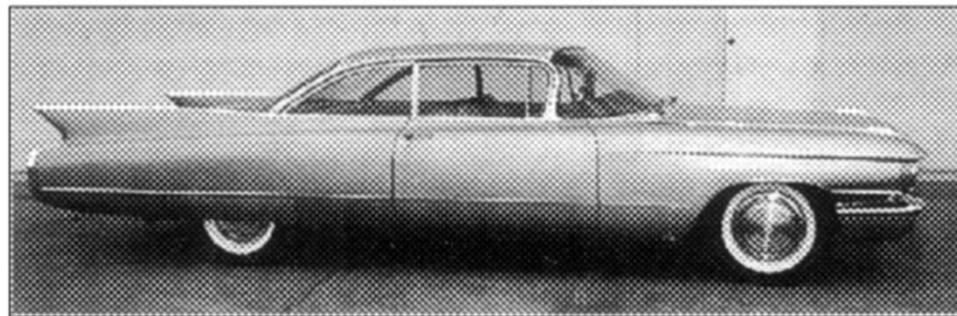
(e)



(f)

Ảnh miền tần số ví dụ

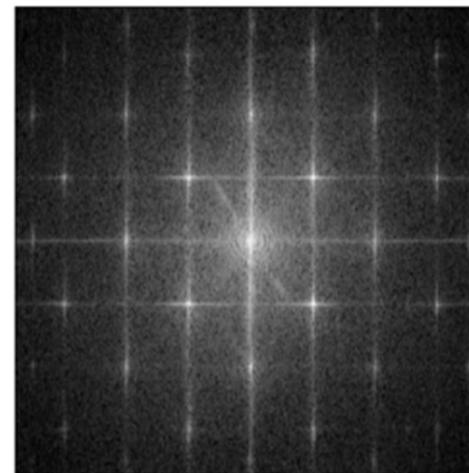
- Các mẫu chéo gây ra khi in ấn → dễ thấy (và loại bỏ) trong phô tần số



(a)

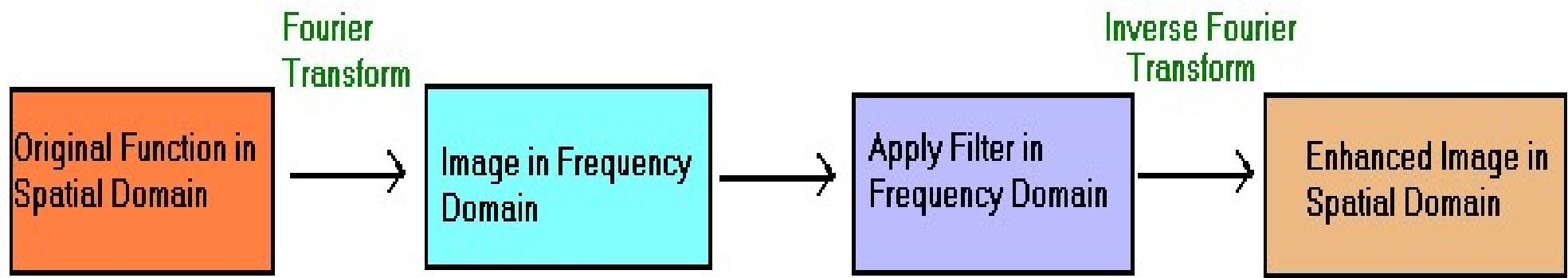


(b)

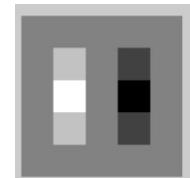


(c)

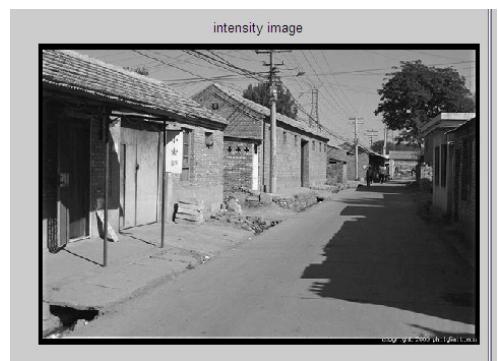
Lọc ảnh trong miền tần số



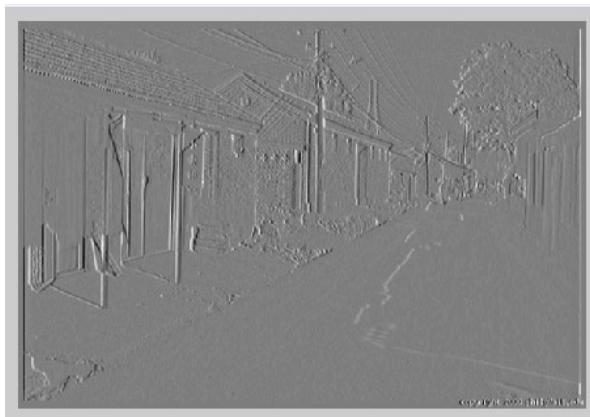
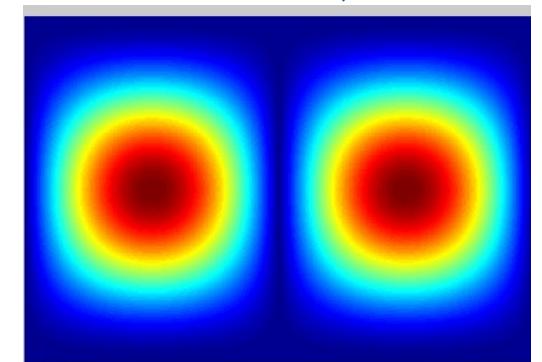
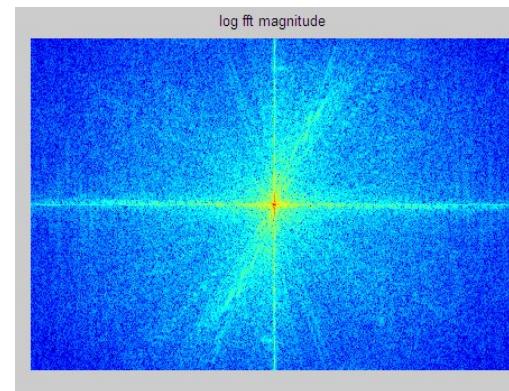
Lọc ảnh trong miền tần số



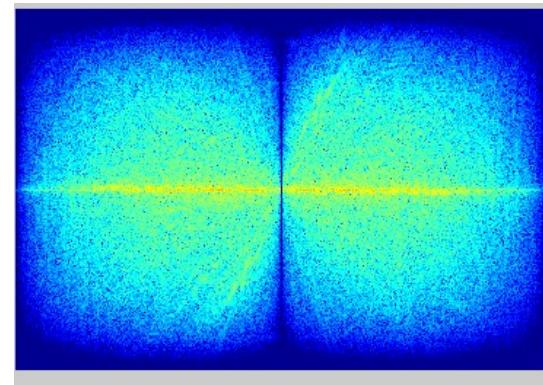
FFT



FFT



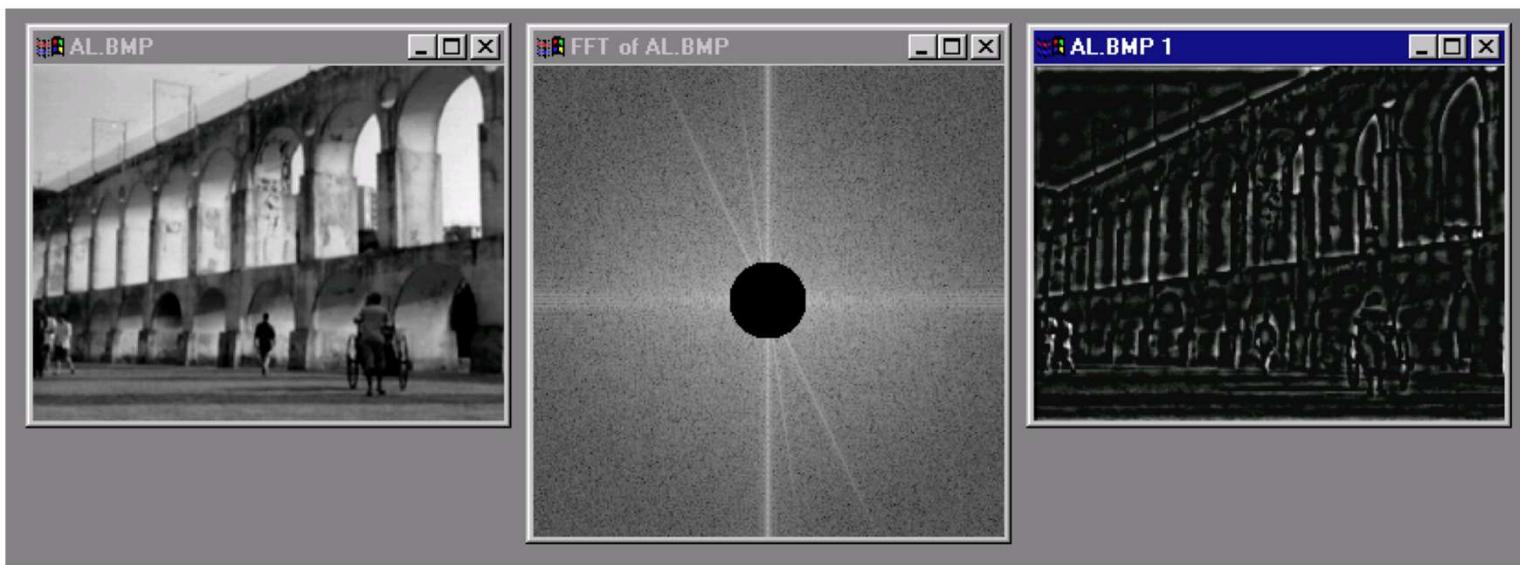
Inverse FFT



Cắt tín hiệu ở một số tần số



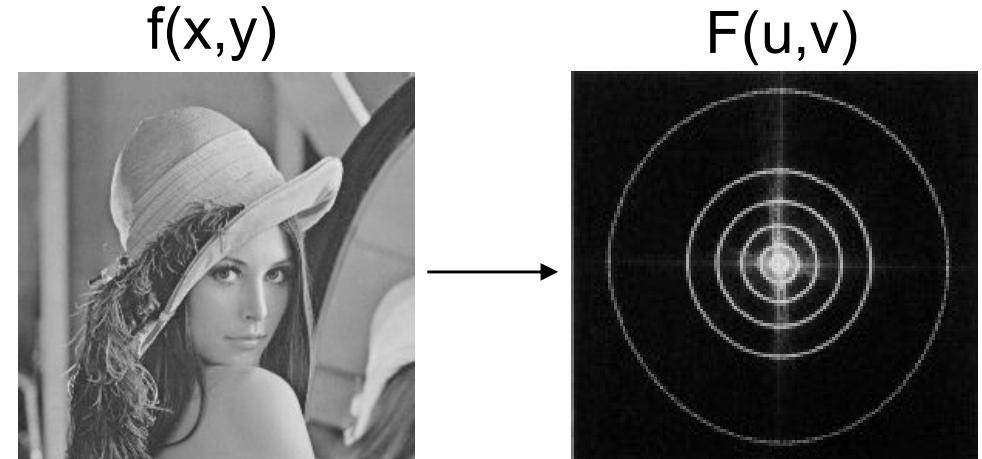
Bộ lọc thông thấp, bộ lọc thông cao



Bộ lọc thông thấp

Miền không gian Miền tần số

$$f(x,y) \longrightarrow F(u,v)$$



$$g(x,y) \longleftarrow G(u,v)$$

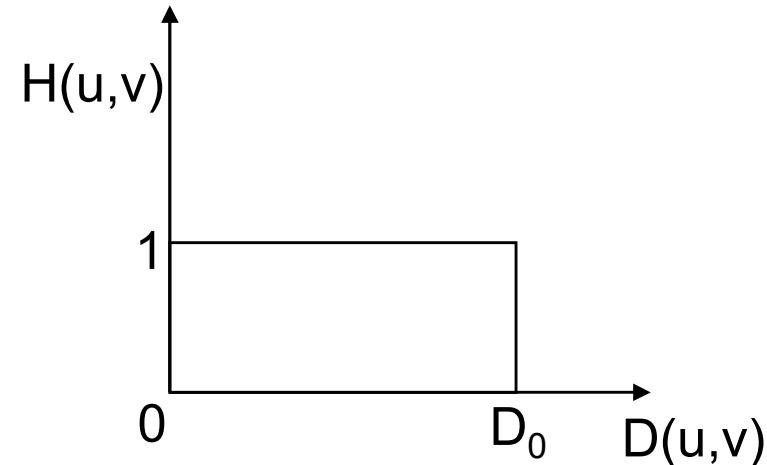
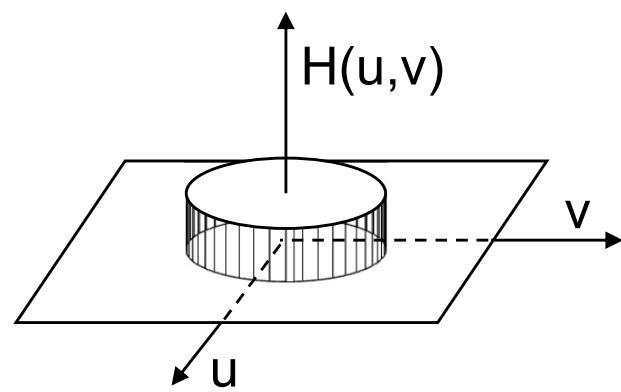
Mục đích: làm trơn, loại nhiễu



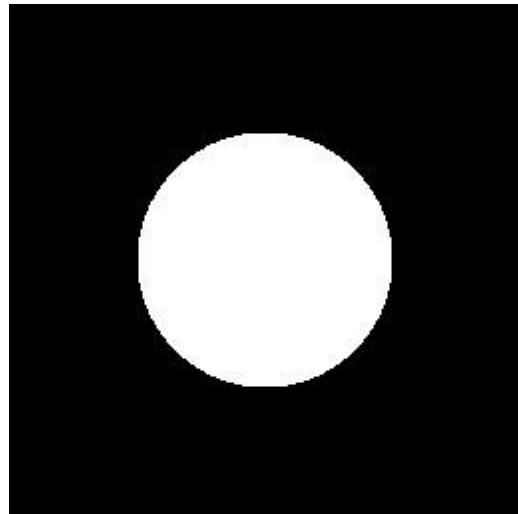
$H(u,v)$ - Lọc thông thấp lý tưởng

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & D(u,v) \leq D_0 \\ 0 & D(u,v) > D_0 \end{cases} \quad D(u,v) = \sqrt{u^2 + v^2}$$

D_0 = tần số cắt



Làm mờ - Lọc thông thấp lý tưởng



99.7%

99.37%

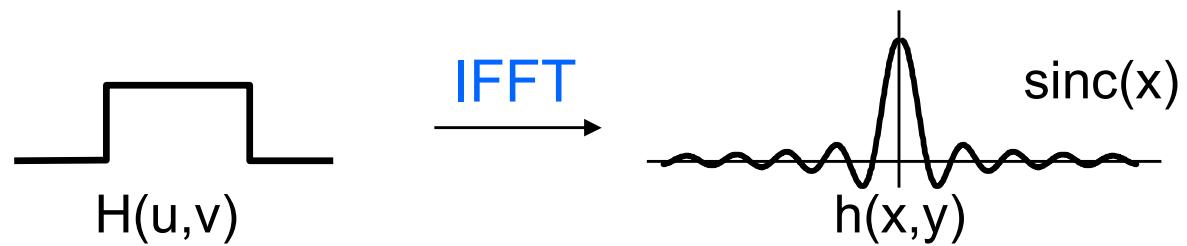
98.65%

Vấn đề "ringing"

$$G(u,v) = F(u,v) \cdot H(u,v)$$

Định lý nhân chập

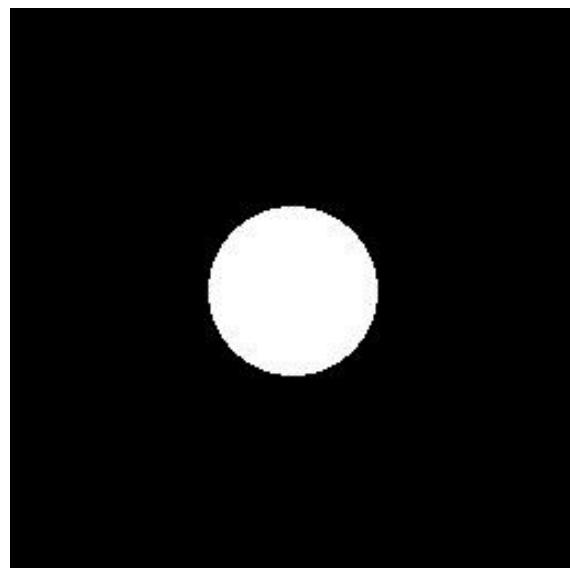
$$g(x,y) = f(x,y) * h(x,y)$$



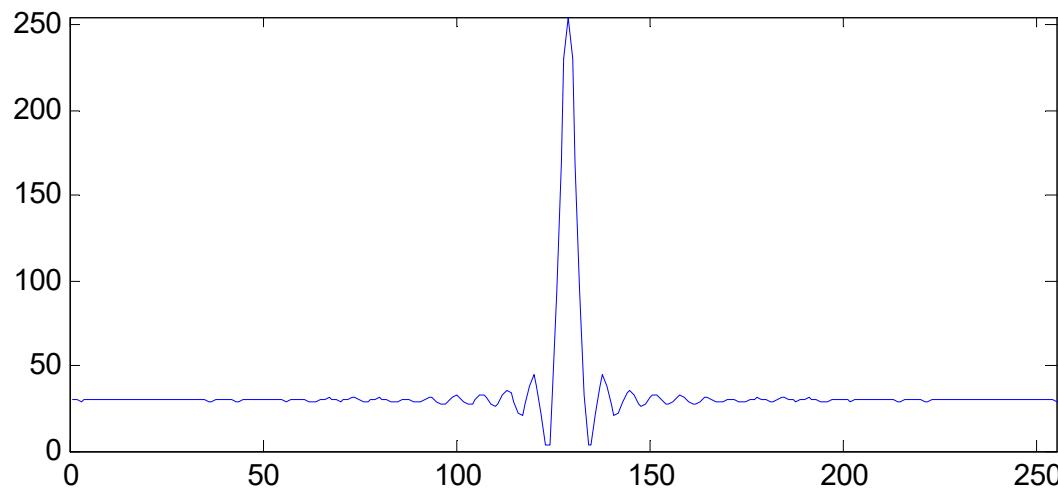
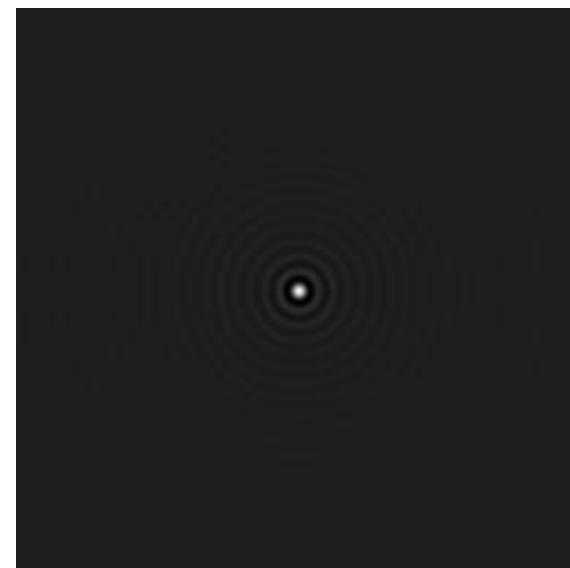
$\uparrow D_0$ —————→ \downarrow Bán kính Ringing + \downarrow mờ

Vấn đề "ringing"

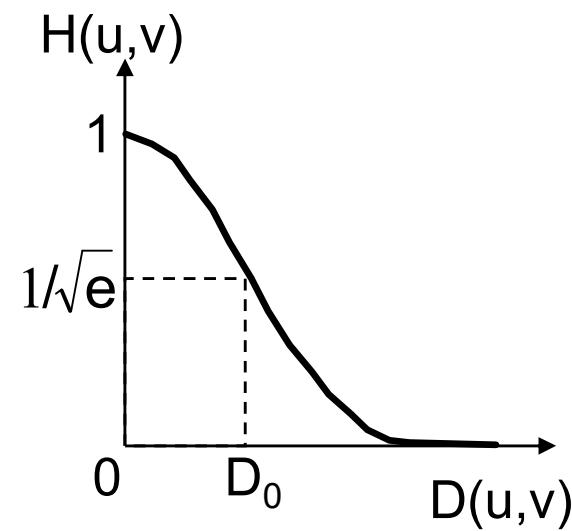
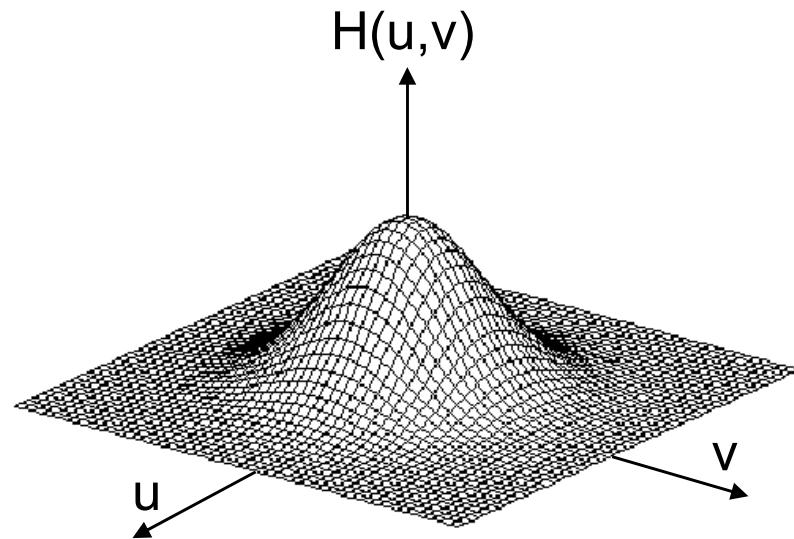
Freq. domain



Spatial domain



$H(u,v)$ - Gaussian filter

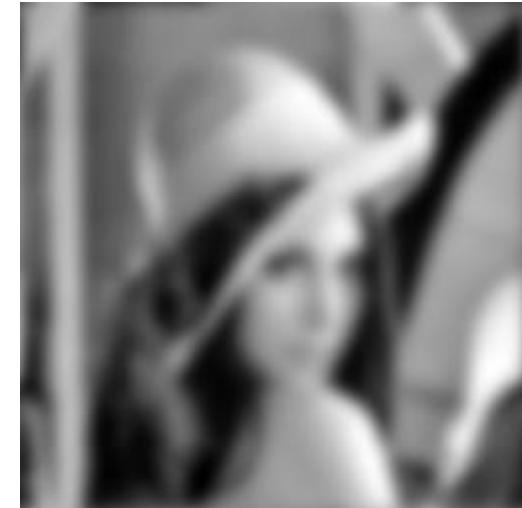


$$H(u,v) = e^{-D^2(u,v)/(2D^2_0)}$$

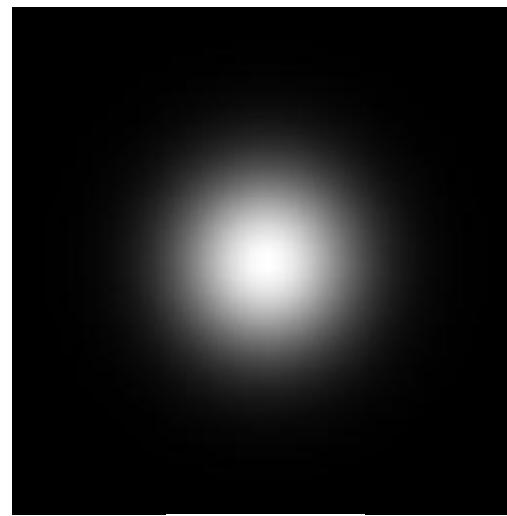
$$D(u,v) = \sqrt{u^2 + v^2}$$

Softer Blurring + no Ringing

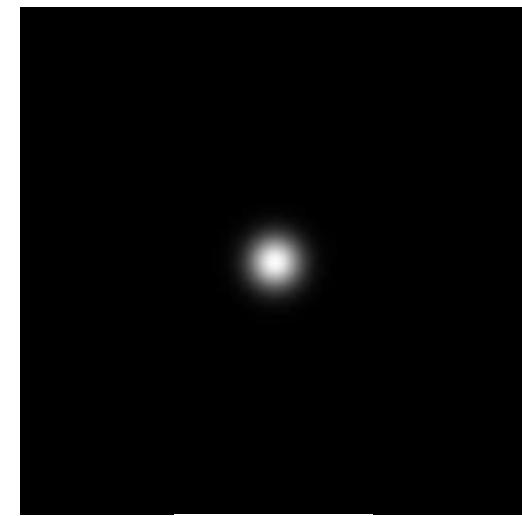
Blurring - Gaussain lowpass filter



99.11%



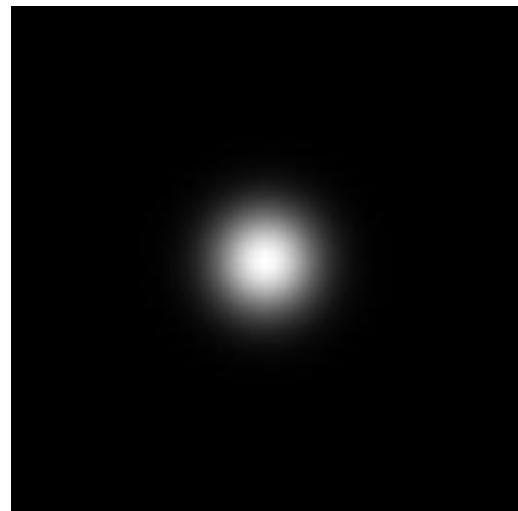
98.74%



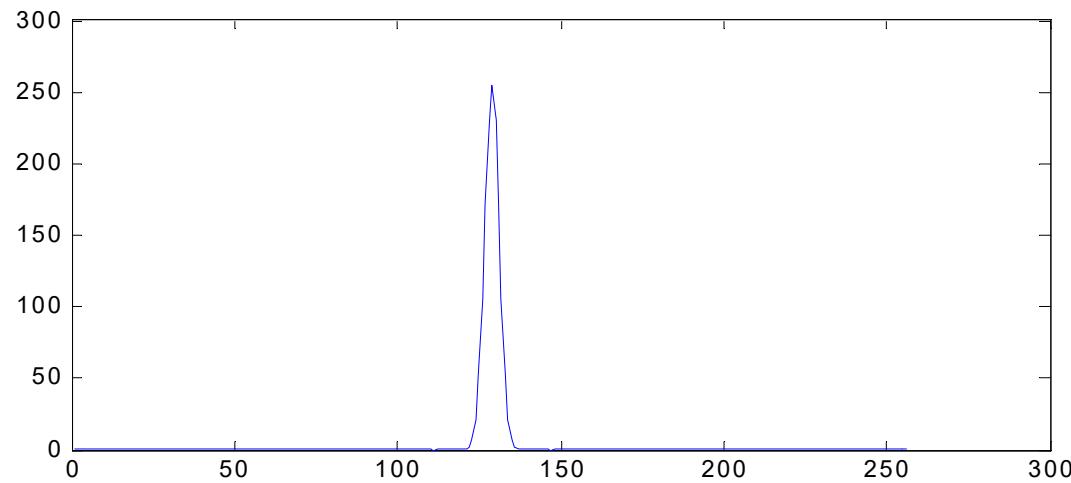
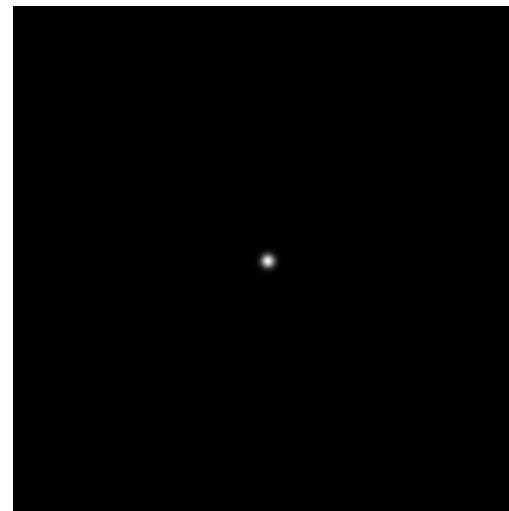
96.44%

Bộ lọc Gauss thông thấp

Miền không gian

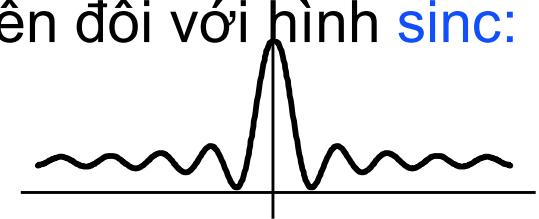


Miền tần số



Làm mờ trong miền tần số

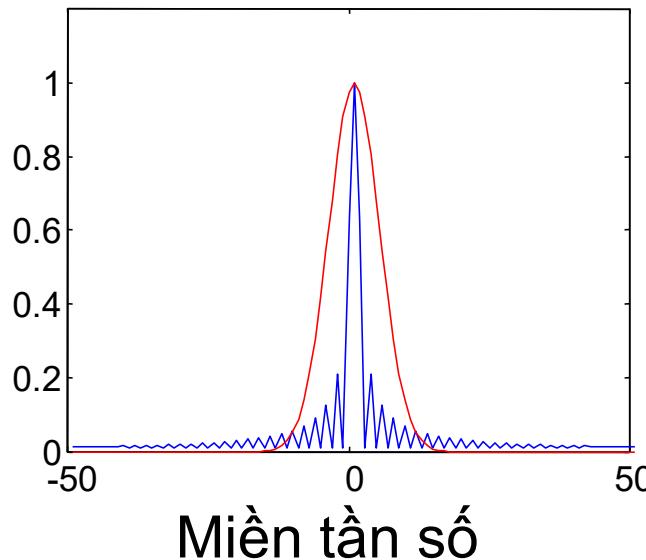
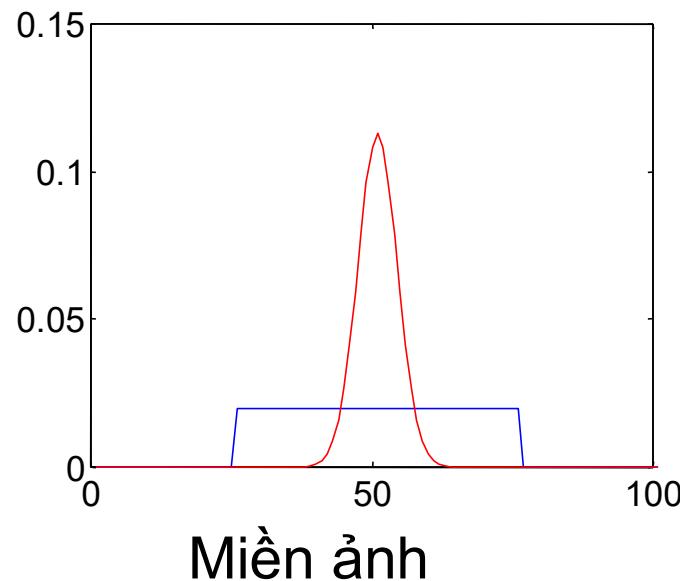
Trung bình = nhân chập với $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ = nhân điểm của biến đổi với hình sinc:



Gaussian trung bình = nhân chập với

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

= nhân điểm của biến đổi với phân bố Gaussian.

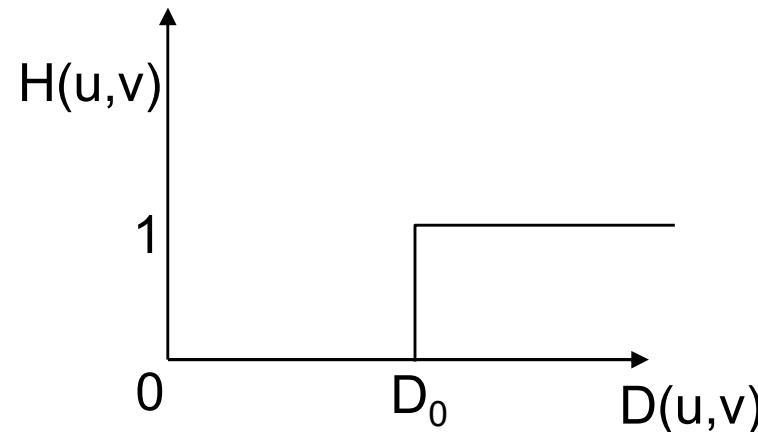
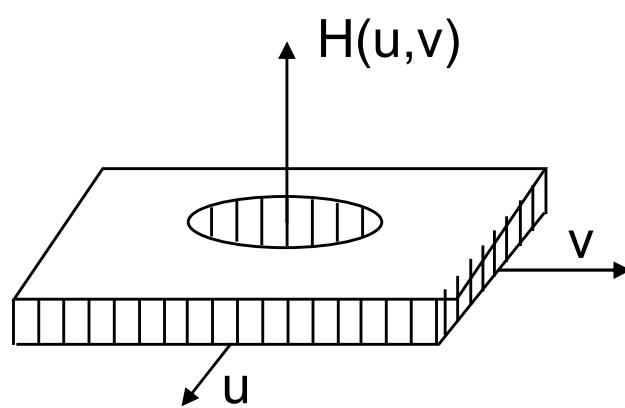


Bộ lọc thông cao

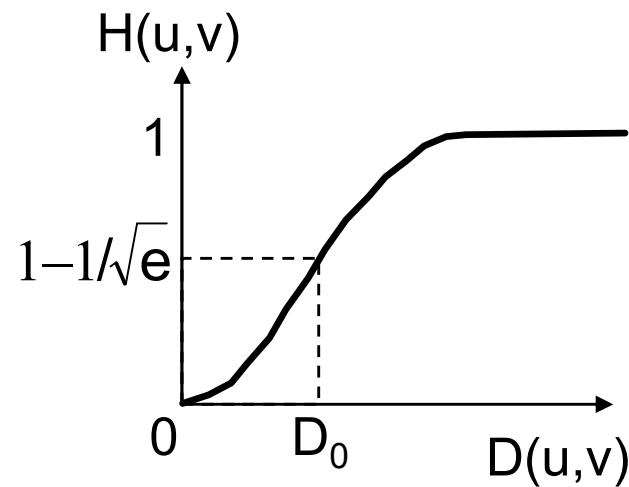
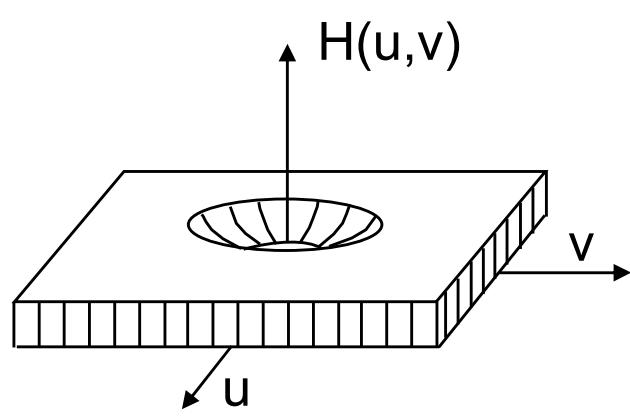
$H(u,v)$ - Ideal Filter

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & D(u,v) \leq D_0 \\ 1 & D(u,v) > D_0 \end{cases} \quad D(u,v) = \sqrt{u^2 + v^2}$$

D_0 = cut off frequency



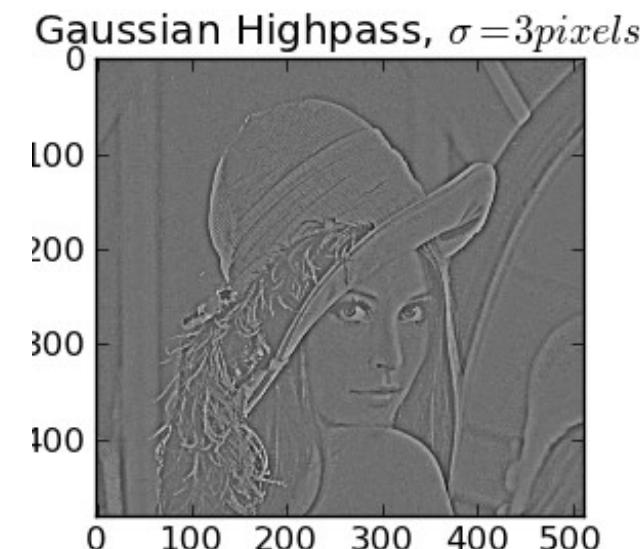
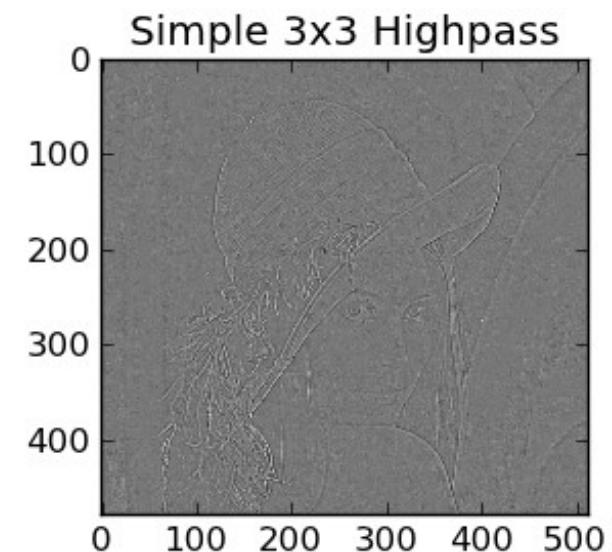
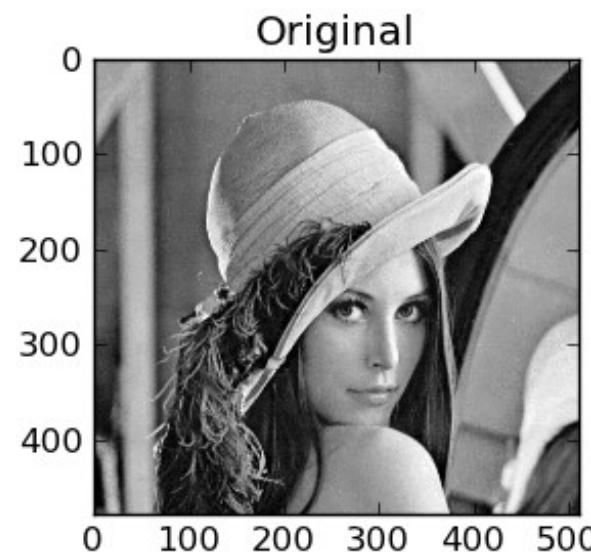
Lọc thông cao Gaussian



$$H(u,v) = 1 - e^{-D^2(u,v)/(2D_0^2)}$$

$$D(u,v) = \sqrt{u^2 + v^2}$$

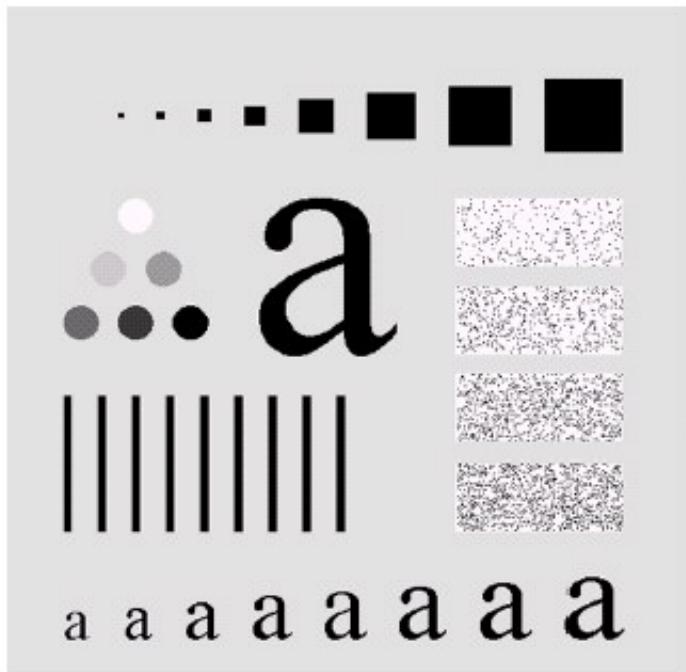
Lọc thông cao



$$h_1(3 \times 3) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Lọc thông cao

Original image



a b

Spectre with filters

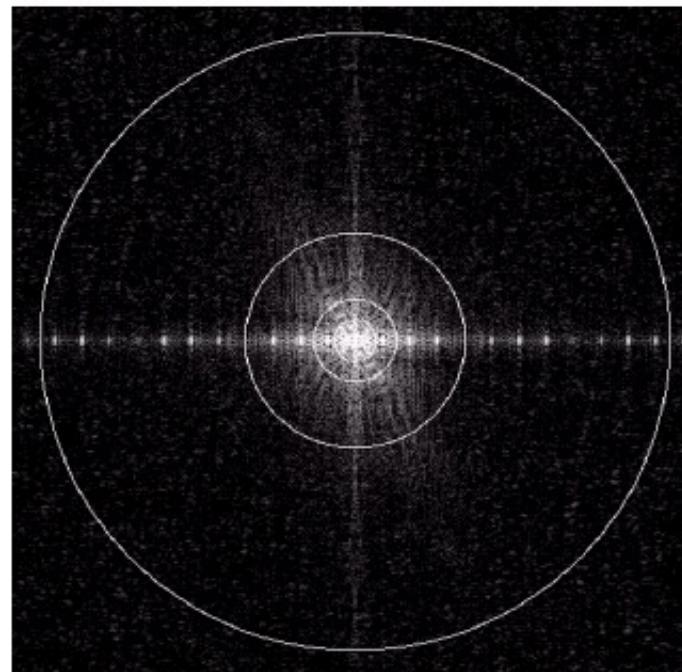
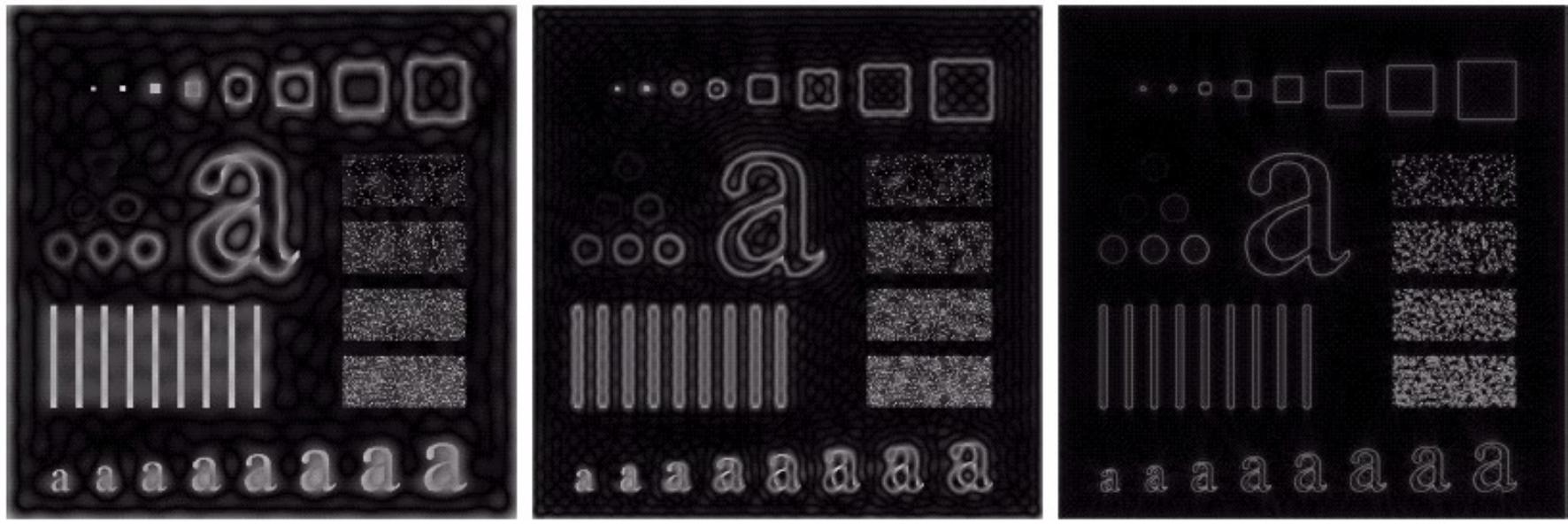


FIGURE 4.11 (a) An image of size 500×500 pixels and (b) its Fourier spectrum. The superimposed circles have radii values of 5, 15, 30, 80, and 230, which enclose 92.0, 94.6, 96.4, 98.0, and 99.5% of the image power, respectively.

Source : Gonzalez and Woods. *Digital Image Processing*. Prentice-Hall, 2002.

Lọc thông cao (ví dụ)



a b c

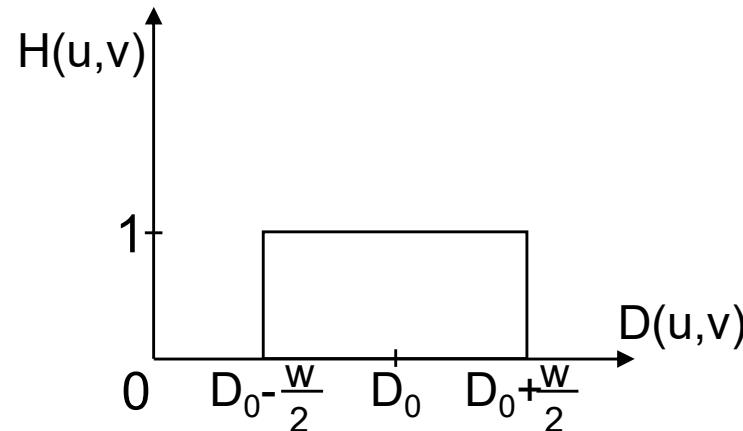
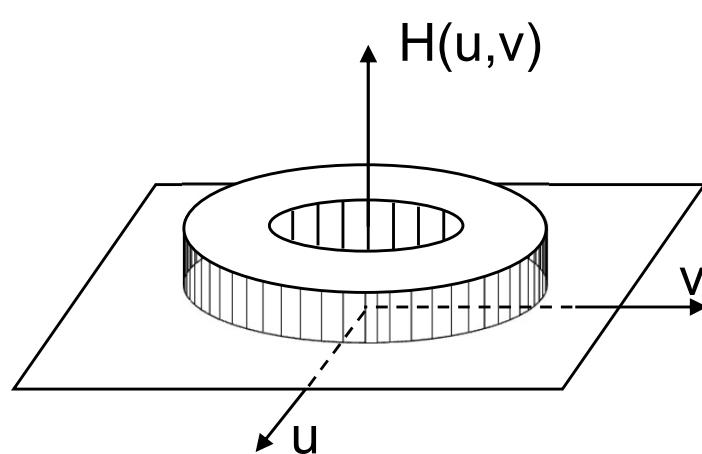
FIGURE 4.24 Results of ideal highpass filtering the image in Fig. 4.11(a) with $D_0 = 15, 30, and 80 , respectively. Problems with ringing are quite evident in (a) and (b).$

Source : Gonzalez and Woods. *Digital Image Processing*. Prentice-Hall, 2002.

Lọc dải tần (band-pass filtering)

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & D(u,v) \leq D_0 - \frac{w}{2} \\ 1 & D_0 - \frac{w}{2} \leq D(u,v) \leq D_0 + \frac{w}{2} \\ 0 & D(u,v) > D_0 + \frac{w}{2} \end{cases}$$

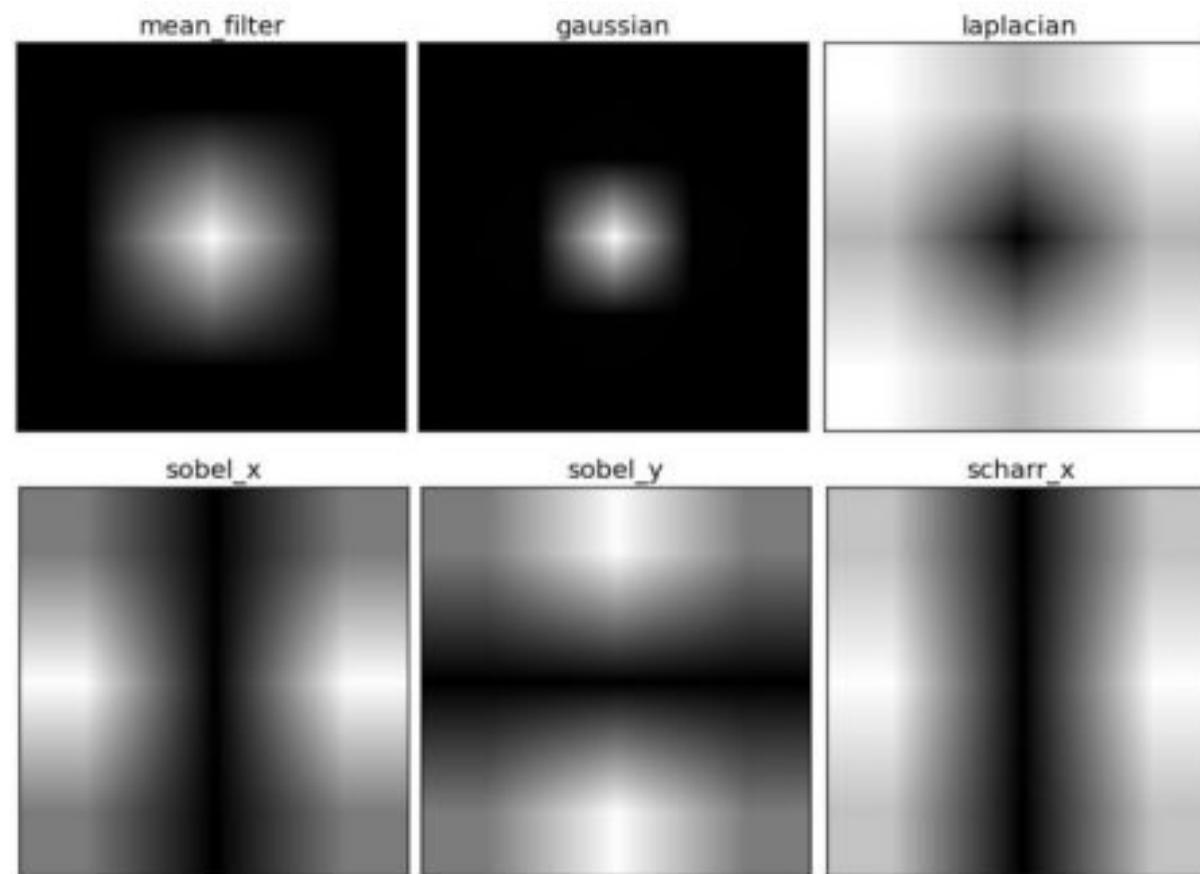
$D(u,v) = \sqrt{u^2 + v^2}$
 D_0 = cut off frequency
 w = band-width



Can be obtained by multiplying the filter functions of a **low-pass** and of a **high-pass** in the frequency domain

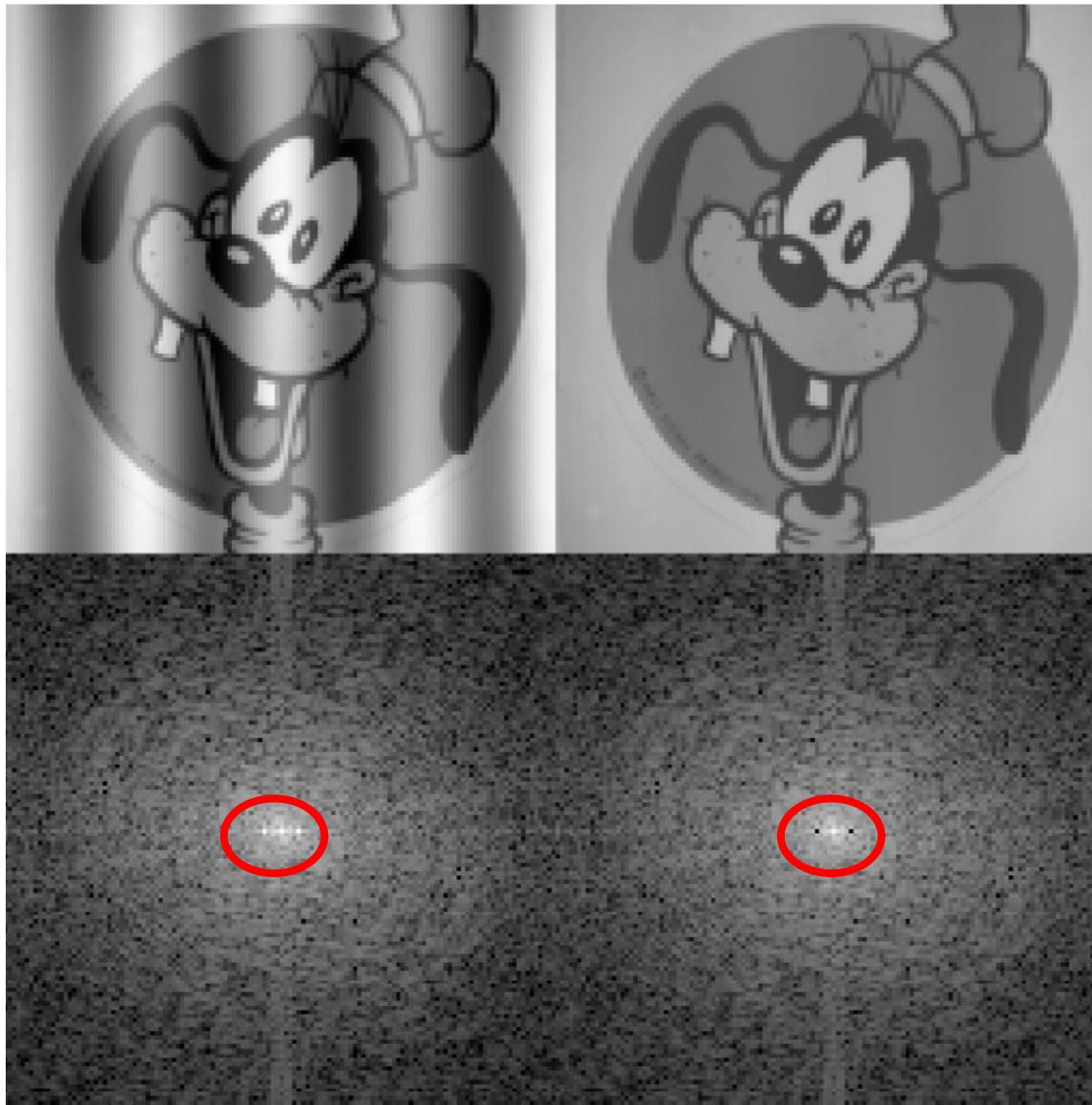
Các bộ lọc thông thường ở miền tần số

- Bộ lọc nhiễu là lọc thông thấp
- Bộ lọc làm sắc nét cạnh là lọc thông cao



Các bộ lọc điển hình khi biến đổi sang miền tần số (biên độ)

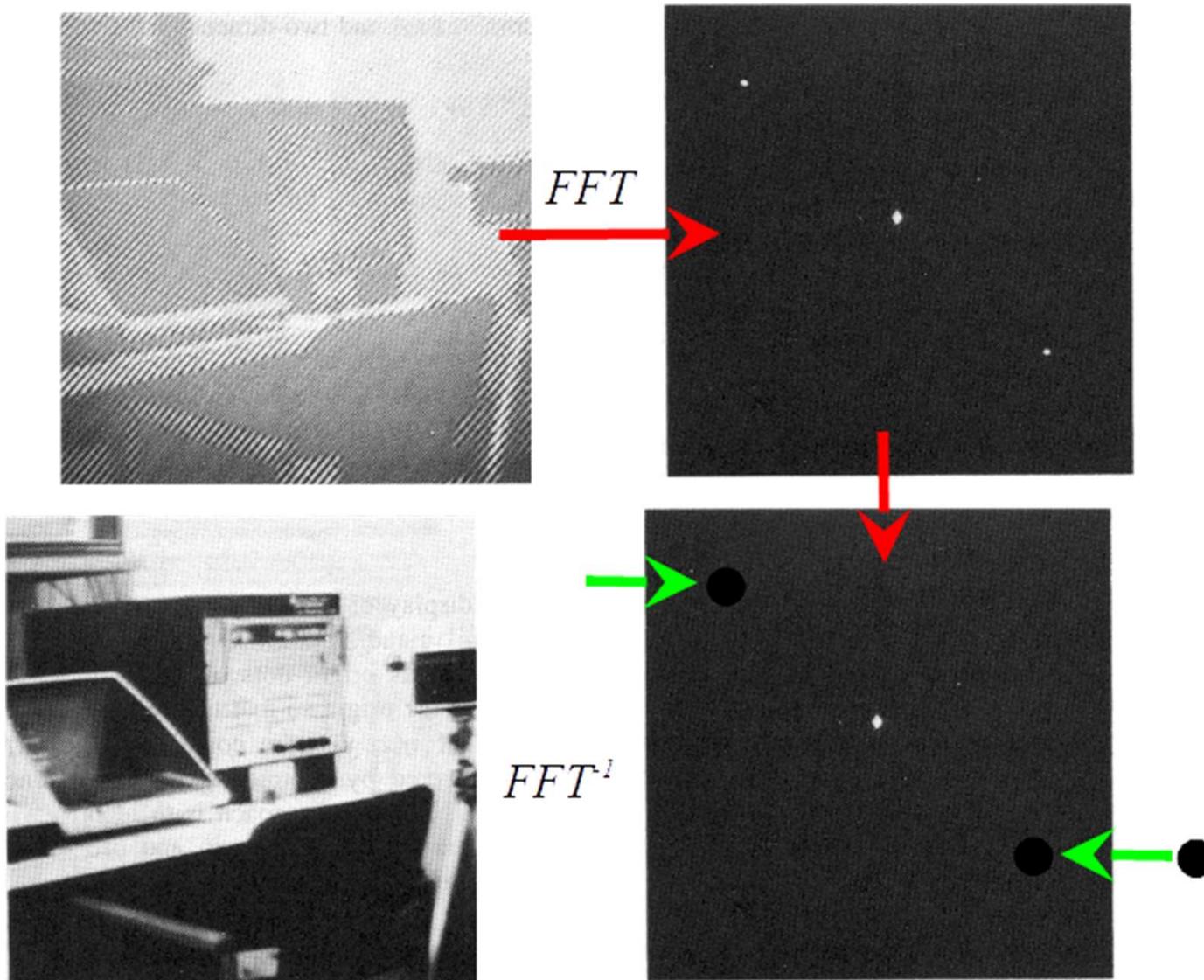
Lọc nhiễu hình sin



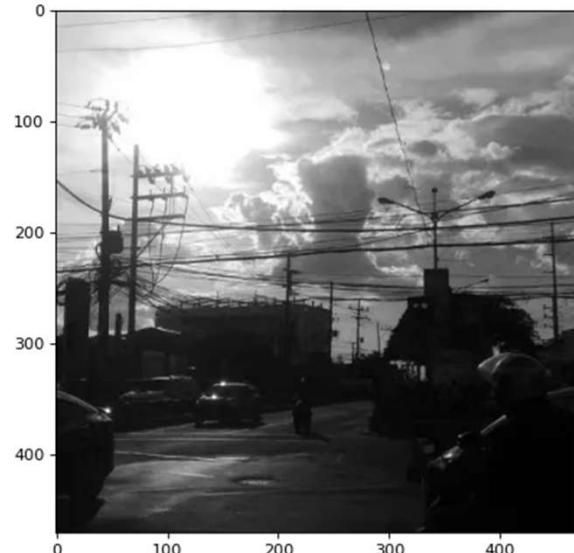
Ảnh gốc

Ảnh lọc nhiễu

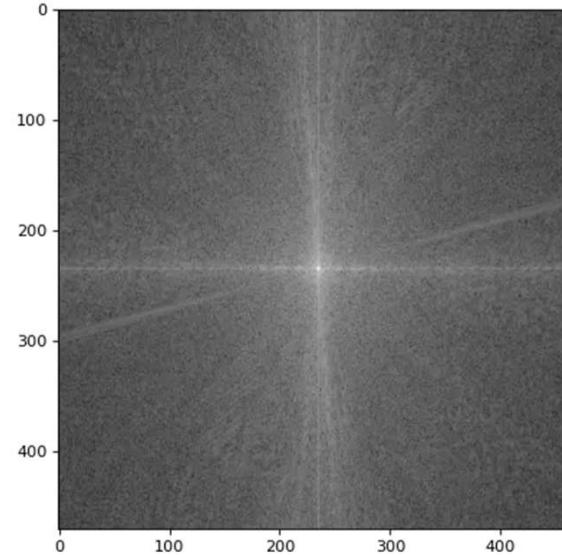
Lọc nhiễu hình sin



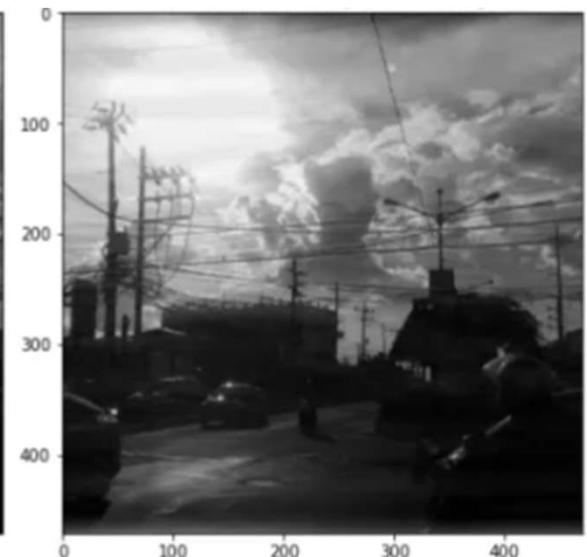
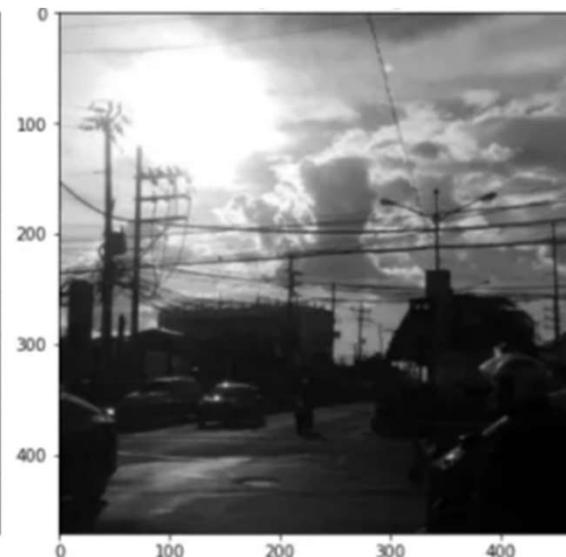
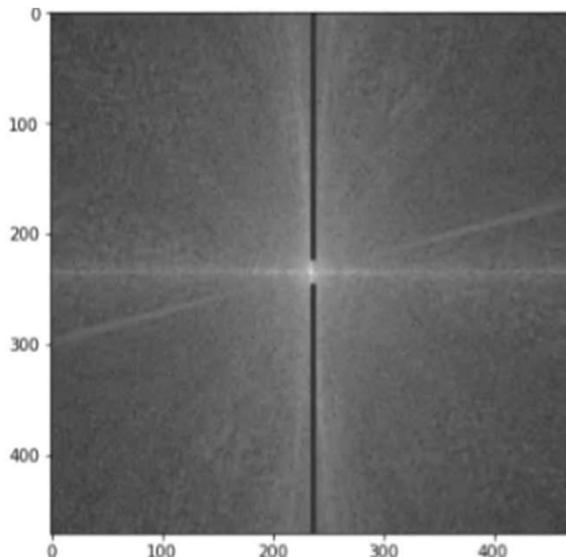
Loại bỏ đối tượng



Ảnh gốc

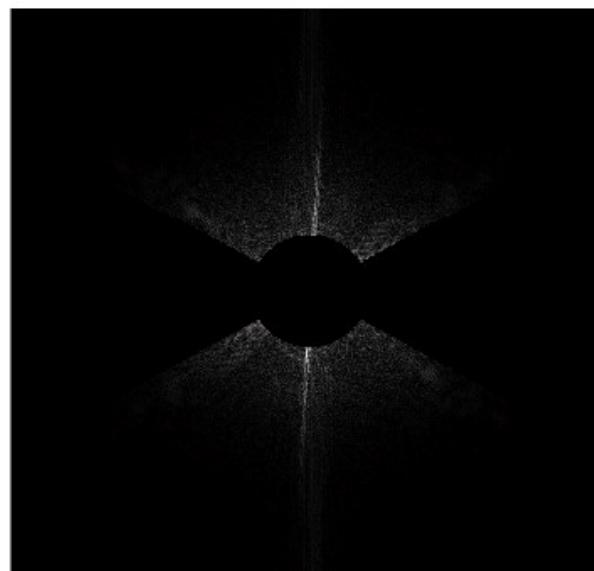
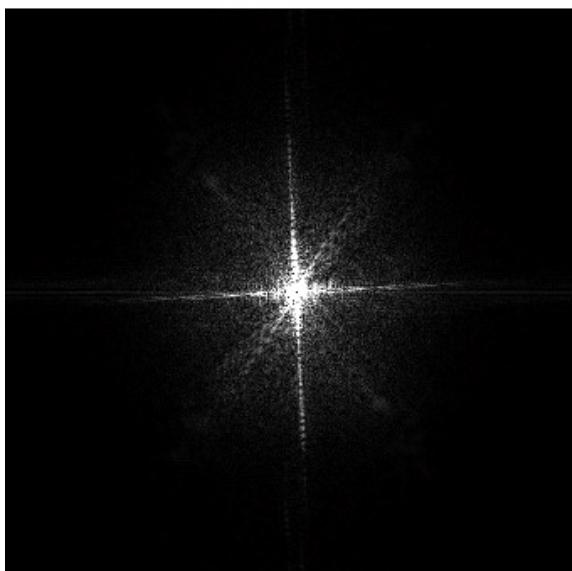
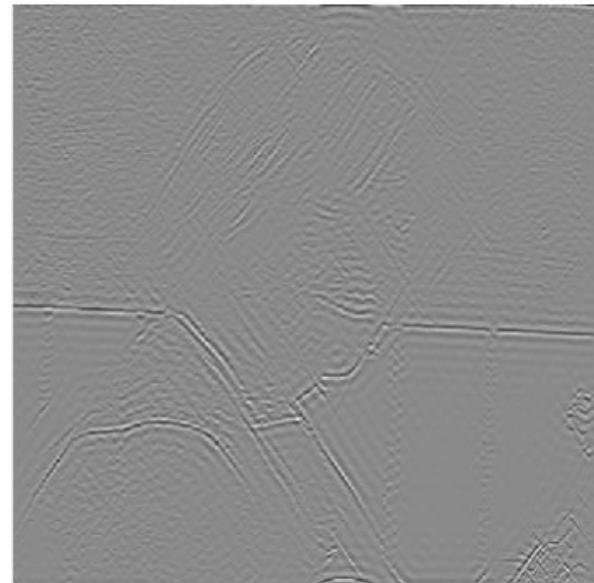


Biên độ miền tần số



Xóa các đường dây điện nằm ngang

Lọc thông cao + hướng



Ảnh lai

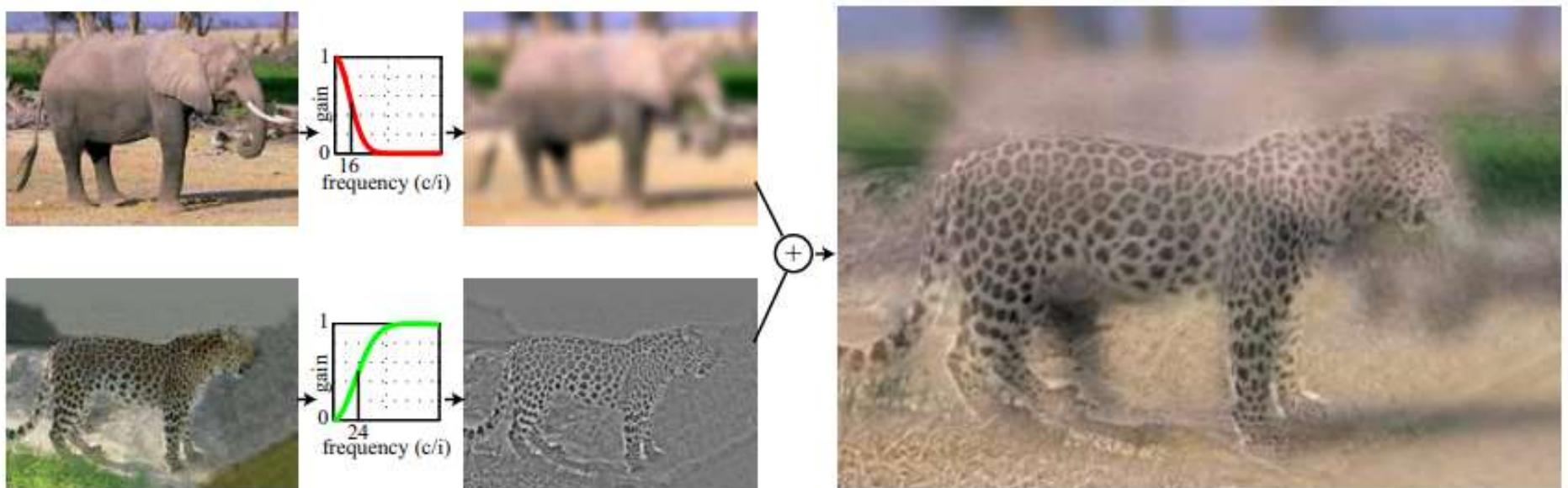


Figure 2: hybrid images are generated by superimposing two images at two different spatial scales: the low-spatial scale is obtained by filtering one image with a low-pass filter, and the high spatial scale is obtained by filtering a second image with a high-pass filter. The final hybrid image is composed by adding these two filtered images.

A. Oliva, A. Torralba, P.G. Schyns, SIGGRAPH 2006



DAI HOC
BACH KHOA
25
YEARS ANNIVERSARY
SOICT

VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG
SCHOOL OF INFORMATION AND COMMUNICATION TECHNOLOGY

**Thank you for
your attention!**

