

# Thị giác máy tính

## Bài 6: Calibration



1

## Nội dung

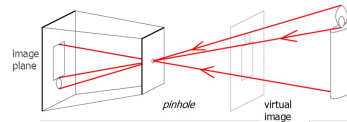
- Camera và phép chiếu
- Tham số camera và hiệu chỉnh camera
- Chỉnh méo



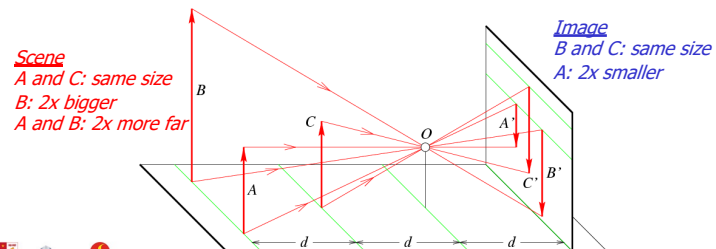
2

## Mô hình pinhole

- Pinhole camera

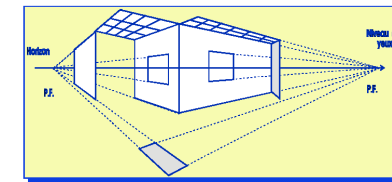
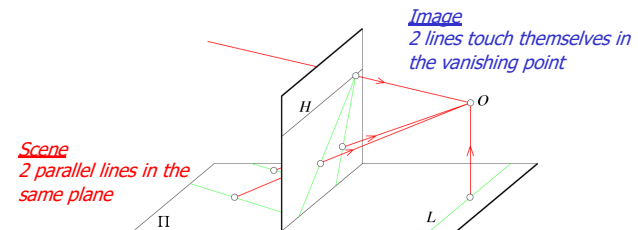


- Hiệu ứng của phép chiếu phối cảnh



3

## Điểm vô cực và đường chân trời



4

## Điểm vô cực và đường chân trời

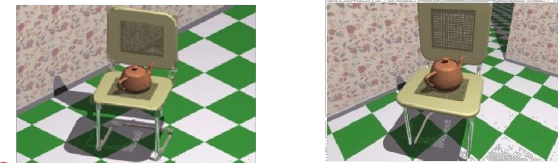
- Tất cả các đường thẳng song song giao nhau tại 1 điểm trong ảnh: điểm vô cực **vanishing point**
  - // = khác điểm xuất phát – cùng hướng
  - Vanishing point: đại diện cho hướng đó
  - Trong ảnh có thể có nhiều vanishing points
- Đường chân trời:** giao giữa mặt phẳng ảnh và mặt phẳng đi qua tâm chiếu và song song với mặt phẳng chứa đối tượng quan sát



5

## Phép chiếu trong ảnh (Projection)

- Là phép ánh xạ từ 1 điểm trên thế giới thực (3d) thành 1 điểm tọa độ ảnh (2D)
- Trong 1 hệ thống quang học, thường có 1 trong 2 phép chiếu:
  - Phép chiếu phối cảnh (perspective projection)
    - Ảnh nhìn thấy trông như ảnh thế giới thực 3D
  - Phép chiếu trực giao (orthographic projection).



6

## Phép chiếu phối cảnh

- Tại sao có thể cảm nhận được thế giới 3D trong bức ảnh ?
  - Do phép chiếu phối cảnh
- Ngoài ra, có thể cảm nhận thế giới 3D
  - Do texture
  - Do đổ bóng
  - Do chuyển động



<http://www.julianbeever.net/pave.htm>



7

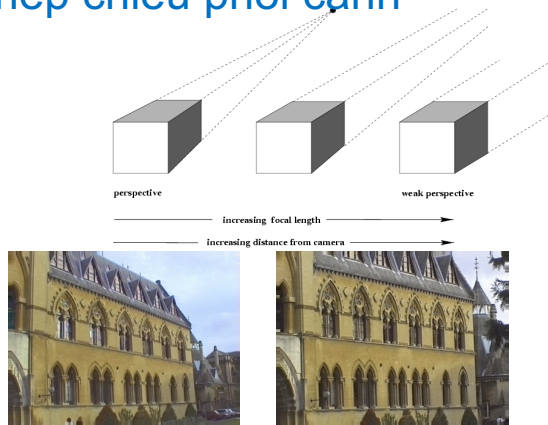
## Phép chiếu phối cảnh

- Các tia chiếu:
  - không song song với nhau
  - xuất phát từ tâm chiếu
- Tạo ra hiệu ứng
  - về khoảng cách xa gần → cảm giác về độ sâu của đối tượng trong thế giới thật
- Tham số:
  - Centre of projection (COP)
  - field of view ( $\theta, \phi$ )
  - projection direction
  - up direction



8

## Phép chiếu phối cảnh

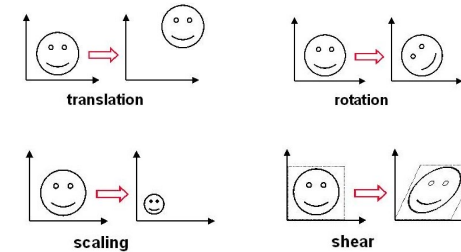


Source : Marc Pollefeys, Class 09: Camera Calibration, Multiple View Geometry, Univ. of NC (USA)

9

## Biến đổi affine

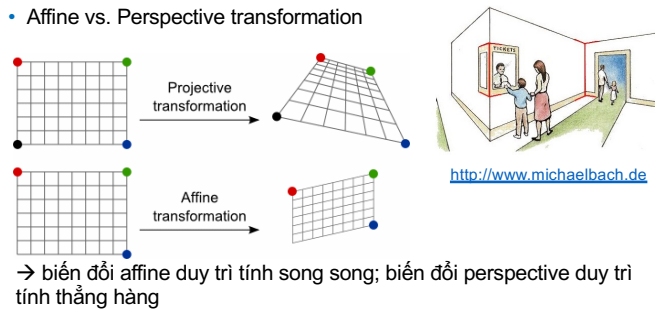
- Là biến đổi căn bản gồm các phép tịnh tiến, xoay, kéo giãn, tỉ lệ



10

## Affine vs. perspective

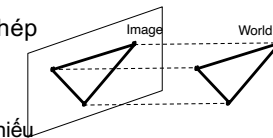
- Affine vs. Perspective transformation



11

## Phép chiếu trực giao

- Là một trường hợp đặc biệt của phép chiếu phối cảnh
  - Các tia chiếu song song với nhau
  - tia chiếu vuông góc với mặt phẳng chiếu thường dùng mặt phẳng  $z=0$
- còn được gọi là “parallel projection”:
  - $(x, y, z) \rightarrow (x, y)$
  - Thường dùng trong các hệ thống ống kính tele



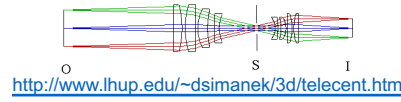
12

## Phép chiếu trực giao

Orthographic ("telecentric") lenses

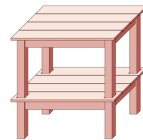


Navitar telecentric zoom lens



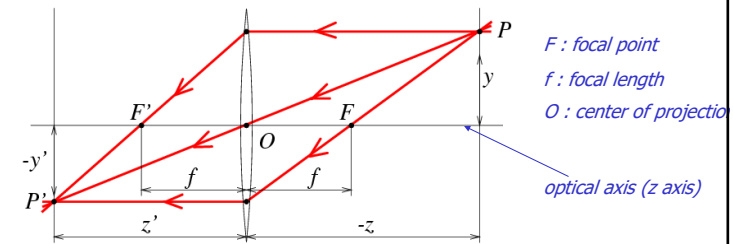
<http://www.lhup.edu/~dsimanek/3d/telecent.htm>

- What happens to parallel lines?
- What happens to angles?
- What happens to distances?



13

## Camera với hệ thống lens



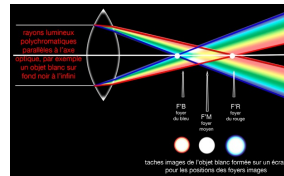
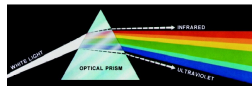
$$\begin{cases} x' = z' \frac{x}{z} \\ y' = z' \frac{y}{z} \end{cases} \quad \text{with} \quad \frac{1}{z'} - \frac{1}{z} = \frac{1}{f}$$



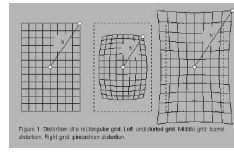
14

## Errors

- Aberration (chromatic and spherical)
  - Do hệ số khúc xạ tùy thuộc bước sóng
  - đặt hệ thống nhiều lens



- Radial distortion: → calibration



15

## Nội dung

- Camera và phép chiếu
- Tham số camera và hiệu chỉnh camera
- Chỉnh méo



16

16

## Các hệ quy chiếu

- Phân biệt 3 hệ quy chiếu :

### – Môi trường

(cảnh, thế giới thực, environment)

- Hệ quy chiếu coi đã biết
- Tất cả các đối tượng trong cảnh hay camera đều được định nghĩa theo hệ quy chiếu này

### – Camera

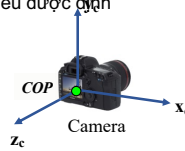
- Thực hiện phép chiếu từ 3D thành 2D

### – Ảnh

- Tọa độ các điểm ảnh được biểu diễn trong hệ quy chiếu này

$$\begin{matrix} \text{Image} & \text{Camera} & \text{Environment} \\ (x_i, y_i) & \leftarrow (x_c, y_c, z_c) & \leftarrow (x_e, y_e, z_e) \end{matrix}$$

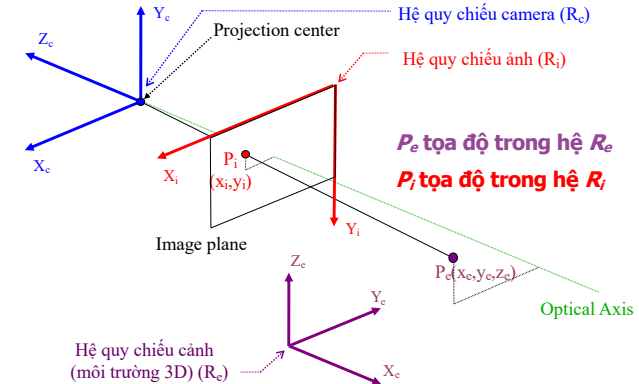
$$\begin{matrix} P_i & P_c & P_e \end{matrix}$$



17

17

## Các hệ quy chiếu



Source : Jacques-André Landry, Vision robotique, Ecole de Technologie Supérieure (Montréal, Canada)

18

18

## Tham số

- Mô hình camera thực hiện chuyển đổi tọa độ từ hệ quy chiếu của cảnh sang hệ quy chiếu ảnh :

$$\begin{matrix} \text{internes} & \text{externes} \\ \text{image} & \leftarrow \text{camera} & \leftarrow \text{scene} \end{matrix}$$

- 2 nhóm tham số:

### – Intrinsic parameters (internal)

- Đặc tính quang học và hình học bên trong camera
- Không thay đổi khi di chuyển camera

### – Extrinsic parameters (external)

- Thể hiện mối liên hệ giữa hệ quy chiếu của cảnh (môi trường) và hệ quy chiếu camera
- Vị trí và hướng của camera trong cảnh



19

19

## Homogeneous coordinates

Conversion to homogeneous coordinates

$$(x, y) \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (x, y, z) \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Conversion from homogeneous coordinates

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} \Rightarrow (x/w, y/w) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \Rightarrow (x/w, y/w, z/w)$$

Invariant to scales:

$$k \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \\ kw \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} kx \\ ky \\ kw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$



20

20

## Homogeneous coordinates

Line :  $ax + by + c = 0$

$$line_i = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Point (x, y)  $p_i = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$

Line is defined by 2 points :

$$line_{ij} = p_i \times p_j$$

Intersection between 2 lines :

$$q_{ij} = line_i \times line_j$$



21

21

## Homogeneous coordinates

Matrix multiplication

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/d & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -z/d \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(-d\frac{x}{z}, -d\frac{y}{z}\right)$$

$$\begin{bmatrix} -d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -dx \\ -dy \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(-d\frac{x}{z}, -d\frac{y}{z}\right)$$



22

22

## Homogeneous coordinates: Why?

- Basic 2D transformation in **cartesian** coordinates:
  - Rotation
  - Scaling
  - Translation



23

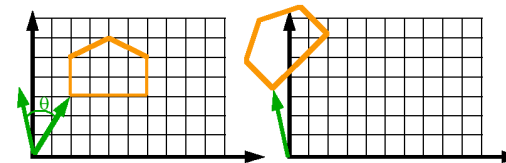
23

## Homogeneous coordinates: Why?

- Basic 2D transformation in **cartesian** coordinates:
  - Rotation: matrix **multiplication**

$$\begin{aligned} x' &= x \cos(\theta) - y \sin(\theta) \\ y' &= x \sin(\theta) + y \cos(\theta) \end{aligned}$$

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



24

24

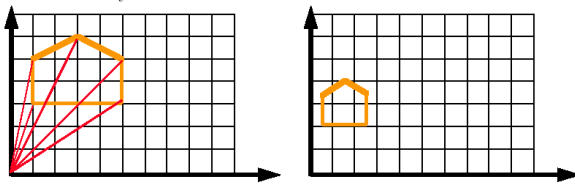
## Homogeneous coordinates: Why?

- Basic 2D transformation in **cartesian** coordinates:
  - Scaling: matrix **multiplication**

$$x' = S_x * x$$

$$y' = S_y * y$$

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



25

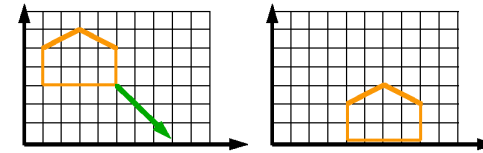
## Homogeneous coordinates: Why?

- Basic 2D transformation in **cartesian** coordinates:
  - Translation: matrix **addition**

$$x' = x + T_x$$

$$y' = y + T_y$$

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix}$$



26

## Homogeneous coordinates: Why?

- Basic 2D transformation in **Homogeneous** coordinates:
  - transformation = **matrix multiplication**

$$\text{General transformation matrix} = \begin{bmatrix} a & b & m \\ c & d & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Scaling

$$\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotation

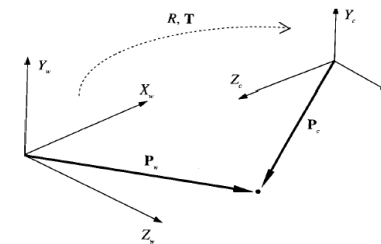
$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Translation

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

27

## 1) Tham số ngoài của camera



- Vị trí và hướng của camera → phép biến đổi trong KG 3D :
  - Phép dịch T** : chuyển gốc tọa độ môi trường về trùng với vị trí hệ quy chiếu camera
  - Phép quay R** : chỉnh để các trục cho cùng hướng với trục camera

28

### 1) Tham số ngoài của camera

**Tham số ngoài: R et T**

$$P_c = R \cdot P_e + T$$

*Homogeneous coordinates:*

$$\begin{pmatrix} x_c \cdot w \\ y_c \cdot w \\ z_c \cdot w \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{x/x} & r_{x/y} & r_{x/z} & t_x \\ r_{y/x} & r_{y/y} & r_{y/z} & t_y \\ r_{z/x} & r_{z/y} & r_{z/z} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ 1 \end{pmatrix} = [R \quad t] P_e = T_1 \cdot P_e$$



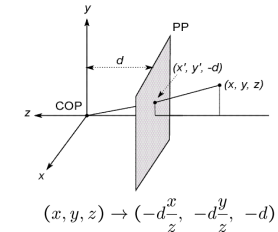
29

29

### 2) Phép chiếu phối cảnh (perspective projection)

$$\begin{pmatrix} x'_c \cdot w \\ y'_c \cdot w \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{f} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ 1 \end{pmatrix}$$

*f: tiêu cự camera (tham số trong)*



$$(x, y, z) \rightarrow (-d \frac{x}{z}, -d \frac{y}{z}, -d)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{f} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



30

30

### 3) Tham số trong camera

■ Chuyển từ tọa độ 2D camera sang tọa độ trong hệ quy chiếu ảnh:

- $(c_x, c_y)$ : tâm ảnh
- $(s_x, s_y)$ : hệ số scale của điểm ảnh (pixels/meter)
- $(f/s_x, f/s_y)$

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/s_x & 0 & c_x \\ 0 & 1/s_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_c \\ y'_c \\ 1 \end{pmatrix}$$

*Homogeneous coordinates*



31

31

### Mô hình camera

$$\begin{pmatrix} x_i w \\ y_i w \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -fs_x & 0 & c_x \\ 0 & -fs_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{T}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Calibration matrix K**

$$P_i = \mathbf{K} P_e = \mathbf{K} [R \quad t] P_e$$

**Camera matrix** (một số tài liệu cũng gọi là calibration matrix).  
Nếu P biết  $\Rightarrow$  K cũng tính được



32

32



## Mô hình camera

Trong trường hợp tổng quát, ma trận  $K$  được biểu diễn như sau

$$K = \begin{bmatrix} -f & s & c_x \\ 0 & -\alpha f & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



33

33

## Camera calibration

- Tìm ma trận  $P$ :
  - Do tất cả các tham số đều được tính tương đối với 1 hệ số tỷ lệ == > đặt  $p_{12} = 1$
  - $P$  gồm 11 biến cần xác định
    - Cần 5 ½ điểm
    - Cần nhiều điểm hơn để giảm lỗi
- Giải pháp tối ưu
  - Least squares method
  - SVD (Singular value decomposition)

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ p_5 & p_6 & p_7 & p_8 \\ p_9 & p_{10} & p_{11} & p_{12} \end{bmatrix}$$



34

34

## Vanishing point

$$P_i^{vp} = K[R \ t] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix} = KR \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ z_R \end{bmatrix}$$

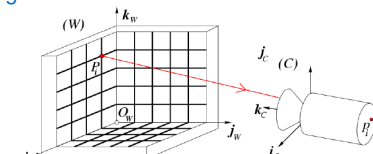
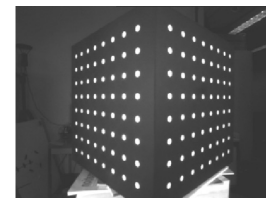


35

35

## Calibration target

- Sử dụng 1 vật tham chiếu để tìm  $P$
- Đối tượng tham chiếu cần chứa hình dáng dễ phát hiện (góc, tâm hình tròn), và vị trí của chúng là dễ xác định trong hệ quy chiếu của ảnh.
- Đối tượng tham chiếu phải chứa các điểm tham chiếu không đồng phẳng



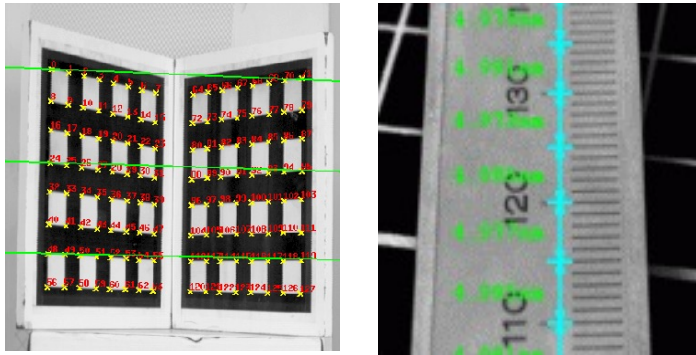
Sources : cis.poly.edu/cs664 + Justus Piater, Computer vision, Université de Liège (Belgique)



36

36

## Calibration target

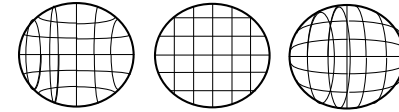


37

37

## Ma trận $\mathbf{P}$ dùng để làm gì ?

- Tính được các tham số trong và ngoài
- Chỉnh sửa ảnh
  - Sửa lỗi méo do lens
- Xác định được tọa độ điểm ảnh cho 1 điểm bất kỳ trong không gian thực.
- Xác định được đường thẳng trong không gian 3D được chiếu thành 1 điểm trên ảnh



38

38

## Ma trận $\mathbf{P}$ dùng để làm gì ?

- Tính được các tham số trong và ngoài ( $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{t}$ )



39

39

## Phân rã Camera Matrix

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ p_5 & p_6 & p_7 & p_8 \\ p_9 & p_{10} & p_{11} & p_{12} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{K}[\mathbf{R}|\mathbf{t}] \\ &= \mathbf{K}[\mathbf{R}] - \mathbf{R}\mathbf{c} \\ &= [\mathbf{M}] - \mathbf{M}\mathbf{c} \end{aligned}$$

Find the camera center  $\mathbf{C}$

*What is the projection of the camera center?*

$$\mathbf{P}\mathbf{c} = \mathbf{0}$$

*Solve?*

Find intrinsic  $\mathbf{K}$  and rotation  $\mathbf{R}$

$$\mathbf{M} = \mathbf{K}\mathbf{R}$$

right upper triangle

orthogonal

*How do we find  $\mathbf{K}$  and  $\mathbf{R}$ ?*



40

## Phân rã Camera Matrix

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ p_5 & p_6 & p_7 & p_8 \\ p_9 & p_{10} & p_{11} & p_{12} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{K}[\mathbf{R}|\mathbf{t}] \\ &= \mathbf{K}[\mathbf{R} | -\mathbf{R}\mathbf{c}] \\ &= [\mathbf{M} | -\mathbf{M}\mathbf{c}] \end{aligned}$$

Find the camera center  $\mathbf{C}$ 

$$\mathbf{P}\mathbf{c} = \mathbf{0}$$

SVD of  $\mathbf{P}$ !

$\mathbf{c}$  is the Eigenvector  
corresponding to smallest  
Eigenvalue

Find intrinsic  $\mathbf{K}$  and rotation  $\mathbf{R}$ 

$$\mathbf{M} = \mathbf{K}\mathbf{R}$$

QR decomposition



41

## Geometric camera calibration

Given a set of matched points

$$\{\mathbf{X}_i, \mathbf{x}_i\}$$

point in 3D space    point in the image    *Where do we get these matched points from?*

$$\mathbf{x} = \underset{\text{projection model}}{f}(\underset{\text{parameters}}{\mathbf{X}}; \underset{\text{Camera matrix}}{\mathbf{p}}) = \mathbf{P}\mathbf{X}$$

Find the (pose) estimate of

 $\mathbf{P}$ 

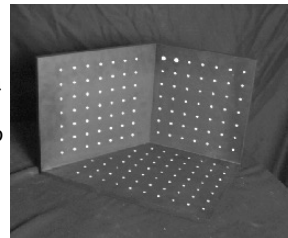
We'll use a **perspective**  
camera model for pose  
estimation



42

Calibration using a calibration target  
(reference object)Sử dụng 1 object biết trước đặt  
trong cảnh:

- Xác định các điểm tương ứng giữa ảnh và điểm thật 3D
- Tìm ảnh xạ tương ứng từ ảnh vào ảnh



Vấn đề:

- Cần thông tin **hình học chính xác** của đối tượng tham chiếu
- Cần biết sự **tương ứng của điểm 3D và điểm 2D** trong ảnh thu được



43

Calibration using a calibration target  
(reference object)

Ưu điểm:

- Đơn giản
- Rõ ràng

Nhược:

- Không mô hình méo xuyên tâm (radial distortion)
- Không tối thiểu lỗi

→ Phương pháp phi tuyến được ưu chuộng hơn

- Định nghĩa **hàm lỗi E** giữa hình chiếu của điểm 3D và điểm ảnh
  - E : hàm phi tuyến của **các tham số trong, ngoài và méo** xuyên tâm
- Tối thiểu E



44

Mapping between 3D point and image points

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ p_5 & p_6 & p_7 & p_8 \\ p_9 & p_{10} & p_{11} & p_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & \mathbf{p}_1^\top & - \\ - & \mathbf{p}_2^\top & - \\ - & \mathbf{p}_3^\top & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ \mathbf{X} \\ | \end{bmatrix}$$

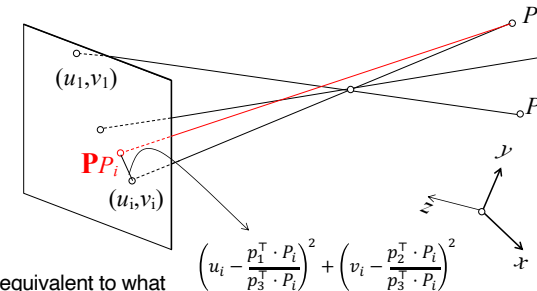
Heterogeneous coordinates

$$x' = \frac{\mathbf{p}_1^\top \mathbf{X}}{\mathbf{p}_3^\top \mathbf{X}} \quad y' = \frac{\mathbf{p}_2^\top \mathbf{X}}{\mathbf{p}_3^\top \mathbf{X}}$$



45

Minimizing reprojection error

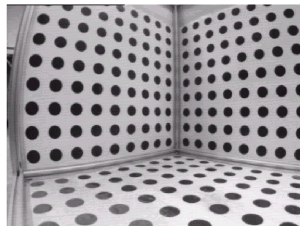


Is this equivalent to what we were doing previously?

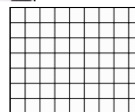


46

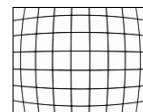
Radial distortion



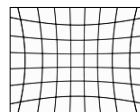
What causes this distortion?



no distortion



barrel distortion

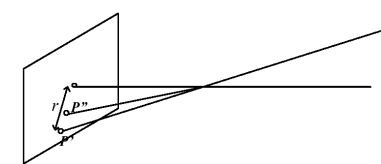


pincushion distortion



47

Radial distortion model



Ideal:

$$x' = f \frac{x}{z}$$

$$y' = f \frac{y}{z}$$

Distorted:

$$x'' = \frac{1}{\lambda} x'$$

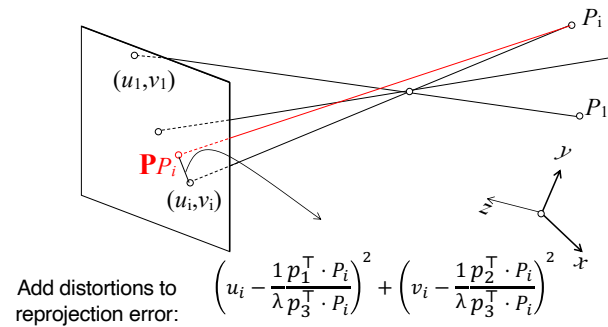
$$y'' = \frac{1}{\lambda} y'$$

$$\lambda = 1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + \dots$$



48

### Minimizing reprojection error with radial distortion



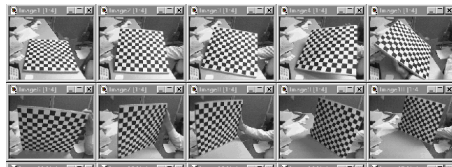
49

### Correcting radial distortion



50

### Alternative: Multi-plane calibration



Advantages:

- Only requires a plane
- Don't have to know positions/orientations

Disadvantage: Need to solve non-linear optimization problem.

51

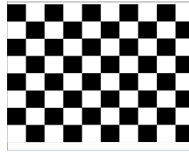
### Nội dung

- Camera và phép chiếu
- Tham số camera và hiệu chỉnh camera
- Chỉnh méo do lens

52

## Idea

- Vật tham chiếu: bàn cờ
  - Gồm các ô bàn cờ có cấu hình và kích thước biết trước
  - Thường dùng trong quá trình calibration để xác định
    - tham số trong
    - góc chụp của mỗi camera
- Dùng 1 bàn cờ, xác định tọa độ các góc
  - object point
- Ảnh bàn cờ ở các góc khác nhau
  - Phát hiện các điểm góc trên ảnh → image point
- (object point, image point)
  - Xác định tham số trong, ngoài, tham số méo → chỉnh méo



53

53

## Nội dung

- Camera và phép chiếu
- Tham số camera và hiệu chỉnh camera
- Chỉnh méo do lens
- Thực hành chỉnh méo len



58

58

## References

- Lecture 15, 16: CS 376: Computer Vision, Kristen Grauman, University of Texas at Austin
- Vision par Ordinateur, Alain Boucher, IFI
- Z. Zhang, "A flexible new technique for camera calibration," in *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 22, no. 11, pp. 1330-1334, Nov. 2000, doi: 10.1109/34.888718.



59

59



VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG  
SCHOOL OF INFORMATION AND COMMUNICATION TECHNOLOGY

**Thank you for  
your attention!**

soict.hust.edu.vn/ fb.com/groups/soict



60