HỒI QUY VÀ HIỆU CHỈNH

Tran Van Long

AI Academy Vietnam

20/7/2024

Nội dung

1. Hồi quy và hiệu chỉnh
2. Hiệu chỉnh
3. Ma trận nghịch đảo mở rộng
4. Một số dạng hiệu chỉnh
5. Thực hành và Bài tập

Hồi quy [1]

Cho dãy các quan sát $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ với $x_i \in \mathrm{R}^m$ và các giá trị $y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$ với $y \in \mathrm{R}$
Ta xây dựng mô hình về mối liên hệ giữa y và x bởi

$$y = \hat{f}(x)$$

với hàm $\hat{f} : \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}$.
Hàm $\hat{f}$ gọi là mô hình, hàm dự báo. Kết quả dự báo cho x^* là giá trị $y^* = \hat{f}(x^*)$.

[1] (Tài liệu 4)

Mô hình tham số tuyến tính

Ta gọi các hàm cơ sở $f_1, f_2, \ldots, f_p : \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}$. Các hàm $\{f_1, f_2, \ldots, f_p\}$ độc lập tuyến tính.

Mô hình:

$$\hat{f}(x) = \theta_1 f_1(x) + \theta_2 f_2(x) + \cdots + \theta_p f_p(x)$$

Sai số dự báo: Ta xây dựng mô hình để

$$y_i \approx \hat{f}(x_i), \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Sai số dự báo (phần dư)

$$r_i = y_i - \hat{f}(x_i).$$

Véc-tơ sai số $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$.
Giá trị dự báo tại x_i bởi mô hình $\hat{f}(x)$ là

$$\hat{f}(x_i) = \sum_{j=1}^{p} \theta_j f_j(x_i) = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}\theta_j, \text{ với } a_{ij} = f_j(x_i).$$

Phương pháp bình phương tối thiểu

Ta cần xác định các tham số $\theta = (\theta_j, j = \overline{1, p})$ sao cho tổng bình phương các sai số bé nhất

$$J(\theta) = \sum_{j=1}^{p} r_i^2 = ||r||^2 = ||y - A\theta||^2 = ||A\theta - y||^2 \to \min$$

với $A = (a_{ij} = f_j(x_i))_{n \times p}$
Ta tính đạo hàm của J đối với θ.

$$J(\theta) = ||A\theta - y||^2 = (A\theta - y)^T(A\theta - y) = \theta^T A^T A\theta - 2\theta^T A^T y + y^T y.$$
$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = 2A^T A\theta - 2A^T y = 0 \Rightarrow A^T A\theta = A^T y.$$

Phương trình chính tắc:

$$A^T A\theta = A^T y$$

Ước lượng tham số

Nếu A^TA khả nghịch ta có ước lượng tham số θ là

$$\hat{\theta} = (A^TA)^{-1}A^Ty.$$

Một số loại sai số

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i^2; \quad RMSE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i^2}$$

$$MAPE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{|r_i|}{y_i}; \quad MAE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |r_i|$$

Mean Squared Error, Root Mean Squared Error, Mean Absolute Percentage Error, Mean Absolute Error

Ví dụ 1

Bình phương tối thiểu với hàm hằng.
Ta xét $p = 1$, $f_1(x) = 1$.
Hàm hồi quy $y = \theta_0.1$
Xét sai số $MSE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ||y_i - \theta_0||^2 \to \min$
Tham số ước lượng là giá trị trung bình $\theta_0 = \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$.
Xét sai số $MAE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |y_i - \theta_0| \to \min$
Ước lượng tham số là giá trị median $\theta_0 = median(y_1, y_2, \ldots, y_n)$

Ví dụ 2

Trường hợp hàm một biến. $f_j(x) = x^{j-1}, j = 1, 2, \ldots, p$.
Hàm hồi quy

$$y = \theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 x^2 + \cdots + \theta_p x^p,$$

Các hệ số hồi quy với sai số *MSE* được xác định bằng cách giải hệ

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^p \\ 1 & x_2 & x_1^2 & \ldots & x_2^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Hệ có dạng

$$A\theta = y$$

Ví dụ 3: Hồi quy tuyến tính

$f_1(x) = 1, f_j(x) = x_{j-1}, j = 2, 3, \ldots, p+1$. Hàm hồi quy

$$y = \theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_p x_p,$$

Các hệ số hồi quy (với sai số MSE) được xác định bằng cách giải hệ

$$\begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Hệ có dạng

$$A\theta = y$$

Hàm xu hướng và mùa vụ

Trong phân tích chuỗi thời gian, hàm xu thế tuyến tính có dạng
$y_t = \theta_0 + \theta_1 t + \varepsilon_t, t = 1, 2, \ldots, T$.
Giả sử rằng dữ liệu dự báo phụ thuộc theo theo ngày trong tuần hoặc theo tháng trong năm thì ta bổ sung thêm các biến phụ.

	d_{1t}	d_{2t}	d_{3t}	d_{4t}	d_{5t}	d_{6t}
Thứ hai	1	0	0	0	0	0
Thứ ba	0	1	0	0	0	0
Thứ tư	0	0	1	0	0	0
Thứ năm	0	0	0	1	0	0

Hàm hồi quy xu thế tuyến tính theo mùa vụ

$$y_t = \theta_0 + \theta_1 t + \theta_2 d_{1t} + \theta_3 d_{2t} + \theta_4 d_{3t} + \theta_5 d_{4t} + \theta_5 d_{5t} + \theta_6 d_{6t} + \varepsilon_t$$

Hệ phương trình tuyến tính

Các bài toán hồi quy thường dẫn đến bài toán giải hệ

$$A\theta = y$$

Ta cần xác định tham số θ trong các trường hợp

- Hệ có nghiệm duy nhất
- Hệ vô nghiệm
- Hệ có vô số nghiệm

Dẫn đến bài toán tìm khái niệm ma trận nghịch đảo suy rộng (pseudo-ineverse).

Hồi quy có hiệu chỉnh [2]

Nếu $A^T A$ không khả nghịch, xác định tham số θ để

$$J(\theta) = ||A\theta - y||^2 + \lambda||\theta||^2,$$

ta thêm số hạng $\lambda||\theta||^2$ vào hàm mục tiêu (gọi là số hạng hiệu chỉnh), tham số $\lambda > 0$ gọi là tham số hiệu chỉnh.
Khi đó tham số θ được ước lượng bởi công thức

$$\hat{\theta} = (A^T A + \lambda I_p)^{-1} A^T y$$

Khi cho $\lambda \to 0^+$ ta có khái niệm ma trận nghịch đảo mở rộng

$$A^\dagger = \lim_{\lambda \to 0^+} (A^T A + \lambda I_p)^{-1} A^T = \lim_{\lambda \to 0^+} A^T (AA^T + \lambda I_p)^{-1}$$

theo nghĩa Moore-Penrose.

[2] (Tài liệu 4)

Ví dụ 1

Tính $A^{\dagger}$ với $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ta có $A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T A + \lambda I = \begin{bmatrix} 1+\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2+\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1+\lambda \end{bmatrix}$

$(A^T A + \lambda I)^{-1} =$

$$\frac{1}{\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda} \begin{bmatrix} \lambda^2 + 3\lambda + 1 & -1-\lambda & 1 \\ -1-\lambda & \lambda^2 + 2\lambda + 1 & -1-\lambda \\ 1 & -1-\lambda & \lambda^2 + 3\lambda + 1 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 1

$$(A^TA+\lambda I)^{-1}A^T = \begin{bmatrix} \frac{2+\lambda}{\lambda^2+4\,\lambda+3} & -\left(\lambda^2+4\,\lambda+3\right)^{-1} \\ (\lambda+3)^{-1} & (\lambda+3)^{-1} \\ -\left(\lambda^2+4\,\lambda+3\right)^{-1} & \frac{2+\lambda}{\lambda^2+4\,\lambda+3} \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = A^\dagger.$$

Ma trận nghịch đảo suy rộng [3]

Định nghĩa

Cho $A = (a_{ij})_{m\times n}$, nghịch đảo suy rộng của ma trận A là ma trận $A^\dagger$ thỏa mãn

- $AA^\dagger A = A$
- $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$
- $(AA^\dagger)^T = AA^\dagger$
- $(A^\dagger A)^T = A^\dagger A$

Có duy nhất ma trận $A^\dagger$ thỏa mãn điều kiện trên.

- Nếu A khả nghịch thì $A^\dagger = A^{-1}$.
- Nếu $rank(A) = m$ (các hàng độc lập tuyến tính) thì $A^\dagger = A^T(AA^T)^{-1}$.
- Nếu $rank(A) = n$ (các cột độc lập tuyến tính) thì $A^\dagger = (A^TA)^{-1}A^T$.

[3](Tài liệu 4)

Ví dụ 1

Tính $A^\dagger$ với $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ma trận A có các hàng độc lập nên $A^\dagger = A^T(AA^T)^{-1}$.

Tính $AA^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow (AA^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$

$$A^\dagger = A^T(AA^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Kiểm tra $AA^\dagger = I, A^\dagger A \neq I$

Ví dụ 2

Tính $A^\dagger$ với $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ma trận A có các cột độc lập nên $A^\dagger = (A^TA)^{-1}A^T$.

Tính $A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^TA)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$

$A^\dagger = (A^TA)^{-1}A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Kiểm tra $A^\dagger A = I, AA^\dagger \neq I$

Ma trận nghịch đảo suy rộng

Tính chất

$$A^\dagger = (A^T A)^\dagger A^T$$
$$A^\dagger = A^T (A A^T)^\dagger$$

Các ma trận $A^T A$ và AA^T là các ma trận đối xứng. Vậy ta chỉ cần tính nghịc đảo suy rộng cho các ma trận đối xứng.
Nếu ma trận A có các hàng hoặc các cột trực giao thì

$$A^\dagger = A^T.$$

Nghịch đảo suy rộng cho ma trận đối xứng

Cho A là ma trận đối xứng, khi đó A chéo hóa được bởi ma trận trực giao. Khi đó

$$A = VDV^T$$

với D là ma trận đường chéo và V là ma trận trực giao.
Nếu

$$D = diag[d_1, d_2, \dots, d_k, 0, \dots, 0]$$

$$\Rightarrow D^\dagger = diag[1/d_1, 1/d_2, \dots, 1/d_k, 0, \dots, 0]$$

Khi đó,

$$A^\dagger = VD^\dagger V^T.$$

Ví dụ

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Tính $A^\dagger$

Ta có $\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2 - 1 = (2-\lambda)(0-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 0, 2$

Véc-tơ riêng tương ứng $v_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ma trận nghịch đảo suy rộng

Phân tích hạng

Nếu A cấp $m \times n$ có hạng r thì $A = BC$ với B cỡ $m \times r$, C cỡ $r \times n$ có hạng bằng r. Khi đó

$$A^{\dagger} = C^{\dagger}B^{\dagger} = C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T.$$

Phân tích hạng của ma trận

Ma trận A có hạng r nên có r cột độc lập tuyến tính. Coi các cột là $B = [B_1, B_2, \ldots, B_r]$.
Khi đó mỗi cột của A là một tổ hợp tuyến tính của r cột trên. Giả sử

$$A_j = c_{1j}B_1 + c_{2j}B_2 + \cdots + c_{rj}B_r = [B_1, B_2, \ldots, B_r]\begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{rj} \end{pmatrix}$$

Vậy $A = [A_1, A_2, \ldots, A_n] = [B_1, B_2, \ldots, B_r]\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \ldots \\ C_r \end{pmatrix} = BC.$

Ma trận A có phân tích thành tổng của r ma trận hạng bằng 1.

$$A = B_1C_1 + B_2C_2 + \cdots + B_rC_r.$$

Ví dụ 2

Tính $A^{\dagger}$ với $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Ta thấy cột a_1, a_2 độc lập và $a_3 = -a_1 + 2a_2$

Vậy $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = BC$

$CC^T = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, B^TB = \begin{pmatrix} 66 & 78 \\ 78 & 93 \end{pmatrix}$

$$A^{\dagger} = C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T = \begin{bmatrix} -\frac{23}{36} & -1/6 & \frac{11}{36} \\ -1/18 & 0 & 1/18 \\ \frac{19}{36} & 1/6 & -\frac{7}{36} \end{bmatrix}$$

Áp dụng giải hệ tuyến tính

Xét hệ $Ax = b$ với A cỡ $m \times n$.

- Hệ có nghiệm tổng quát

$$x = A^\dagger b + (I - A^\dagger A)w, \quad \forall w.$$

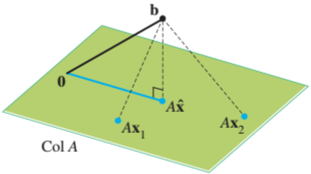
- Nếu hệ $Ax = b$ không có nghiệm thì "nghiệm" gần đúng $z = A^\dagger b$ thỏa mãn

$$||Az - b|| \leq ||Ax - b||, \ \ \forall x.$$

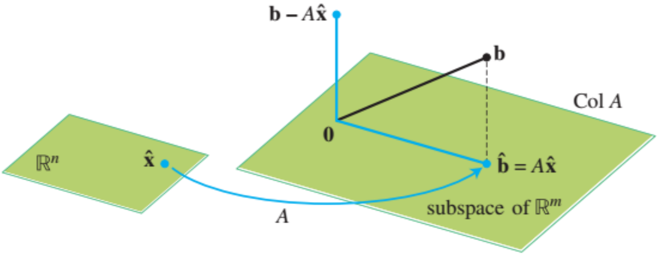
- Nếu hệ $Ax = b$ có nghiệm (không duy nhất) thì nghiệm $z = A^\dagger b$ thỏa mãn $||z|| \leq ||x||$ với mọi nghiệm x của hệ.

Đối với phương trình ma trận $AX = B$ ta cũng có kết quả tương tự.

Hình học



b
0
$A\hat{\mathbf{x}}$
$A\mathbf{x}_1$
$A\mathbf{x}_2$
Col A



$\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}$
b
Col A
0
$\mathbb{R}^n$
$\hat{\mathbf{x}}$
$\hat{\mathbf{b}} = A\hat{\mathbf{x}}$
subspace of $\mathbb{R}^m$
A

Hình học

Trước hết ta chiếu véc-tơ b xuống không gian sinh bởi các cột của ma trận A được véc-tơ $\hat{b}$.
Nếu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ trực giao (nếu không thì trực giao hóa). Khi đó,

$$\begin{aligned}\hat{b} &= \frac{b.a_1}{a_1.a_1}a_1 + \frac{b.a_2}{a_2.a_2}a_2 + \cdots + \frac{b.a_n}{a_n.a_n}a_n \\ &= x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n\end{aligned}$$

Sai số của nghiệm gần đúng là khoảng cách từ b đến $\hat{b}$,

$$E = ||b - \hat{b}||^2.$$

Ví dụ

Tìm nghiệm của hệ $Ax = b$ với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Hiệu chỉnh hàm hồi quy

- **Ridge Regression:**

$$J(\theta) = ||A\theta - y||^2 + \lambda||\theta||^2$$

- **Lasso Regression:**

$$J(\theta) = ||A\theta - y||^2 + \lambda||\theta||_1$$

- **Zero norm regression:**

$$J(\theta) = ||A\theta - y||^2 + \lambda||\theta||_0$$

Thực hành thư viện numpy

Thư viện numpy cung cấp các hàm tính
numpy.linalg.inv(a), ma trận nghịch đảo
numpy.linalg.pinv(a), ma trận nghịch đảo suy rộng
numpy.linalg.lstsq(a,b), nghiệm bình phương tối thiểu

Thực hành thư viện numpy

- Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$

  a) Tính ma trận $A^{\dagger}$.

  b) Tìm nghiệm xấp xỉ tốt nhất của hệ $Ax = b$.

- Mô tả nghiệm "tốt nhất" của hệ

$$\begin{cases} -x + 2y & = 4 \\ 2x - 3y & = 1 \\ -x + 3y & = 2 \end{cases}$$

- Mô tả nghiệm "tốt nhất" của hệ

$$\begin{cases} x + y & = 1 \\ x + y & = 2 \end{cases}$$

Bài tập 1

1. Tính nghịch đảo suy rộng của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
2. Cho $x, y \in \mathrm{R}^n, x, y \neq 0.$ Chứng minh
$$\left(xy^T\right)^\dagger = \frac{1}{||x||^2||y||^2} yx^T.$$
3. Cho A đối xứng và $1 + y^T A^\dagger x \neq 0.$ Chứng minh
$$(A + xy^T)^\dagger = A^\dagger - \frac{1}{1 + y^T A^\dagger x} A^\dagger xy^T A^\dagger$$
4. Kiểm tra $(AB)^\dagger \neq B^\dagger A^\dagger$ với
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bài tập 2

Cho dãy các điểm trên mặt phẳng

x_i	5	15	25	35	45	55
y_i	5	20	14	32	22	38

1. Xác định hàm hồi quy tuyến tính $y = \beta_0 + \beta_1 x$ và tính sai số MSE.
2. Xác định hàm hồi quy phi tuyến $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$ và tính sai số MSE.

Bài tập 3

Cho dãy số liệu (u, v) và giá trị quan sát y.

u	0	1	3	5	7	9	11	12
v	1	1	2	5	11	15	34	35
y	4	5	20	14	32	22	38	43

1. Xác định hàm hồi quy tuyến tính $y = a + bu + cv$ và tính MSE.
2. Xác định hàm hồi quy theo các biến $\{1, \sqrt{u}, \sqrt{v}\}$ và tính MSE.
3. Xác định hàm hồi quy tuyến tính theo các biến $\{1, u, v, u^2, v^2, uv\}$ và tính MSE.

Bài tập 4
thực hành dữ liệu milk.csv

	Year	Month	Milk.Prod
0	1995	Jan	2.112
1	1995	Feb	1.932
2	1995	Mar	2.162
3	1995	Apr	2.130
4	1995	May	2.227

Sử dụng các biến phụ tìm hàm hồi quy

$$Milk.Prod = \beta_0 + \beta_1 t + \theta_1 Jan + \theta_2 Feb + \cdots + \theta_{12} Dec.$$

Tài liệu tham khảo

1. Charu C. Aggarwal; Linear Algebra and Optimization for Machine Learning, Springer, 2020.
2. David C. Lay, Steven R. Lay, Judi J. McDonald; Linear Algebra and Its Applications, Fifth edition, Pearson, 2016
3. Gilbert Strang; Linear Algebra and Learning from Data, Wellesley- Cambridge Press, 2019.
4. Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe; Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares, Cambridge University Press, 2018.
5. Tom Lyche; Numerical Linear Algebra and Matrix Factorizations, Springer, 2020.
6. Hyun-Seok Son; Linear Algebra Coding with Python, 2020.