

Compte rendu n° 1: simulation numérique du problème d'Eshelby

22/10/2020

Baptiste Fraïsse

Introduction

Dans ce compte-rendu, la résolution numérique du problème d'Eshelby à l'aide de l'outil Fenics est présentée. En particulier, les résultats importants sur la déformation et les contraintes sont interprétés physiquement. Enfin, l'erreur est calculée en une norme usuelle pour valider la simulation. Les grandeurs seront exprimées sans unités : on pourra considérer qu'elles sont en unité du système international par exemple.

Définition du problème

Géométrie

Le problème est défini sur une variété différentielle de dimension deux dans la base (x, y) . Le domaine $\Omega = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq R_m^2\}$, disque de rayon $R_m = 3.0$, définit le système. Il est séparable en deux domaines : $\Omega = \Omega_m \cup \Omega_i$ tel que $\Omega_i = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq R_i^2\}$, un disque de rayon $R_i = 1.0$.

Matériaux

Le domaine Ω_i est occupé par un matériau homogène et isotrope dont le comportement est supposé élastique linéaire de module d'élasticité E_i et de coefficient de Poisson ν_i . Le domaine Ω_m est occupé par un matériau homogène et isotrope dont le comportement est supposé élastique linéaire de module d'élasticité E_m et de coefficient de Poisson ν_m . Ces paramètres peuvent être reliés aux coefficients de poisons. Les valeurs pour le problème sont rassemblées dans le tableau ci-dessous:

Paramètre	Matrice	Inclusion
Module d'élasticité	1.00	10.0
Coefficient de Poisson	0.30	0.30
Lamé λ	0.58	5.77
Lamé μ	0.38	3.85

Conditions aux limites

Le système est défini par un bord $\partial\Omega = \{(x, y); x^2 + y^2 = R_m^2\}$, cercle de rayon R_m . Le déplacement y est imposé comme $u(x, y)|_{\partial\Omega} = (y, x)$. Avec ces conditions le problème est bien posé.

Modélisation physique

Le problème est modélisé par la théorie de la mécanique des milieux continus : il existe un champ de tenseur contrainte $\underline{\underline{\sigma}}(x, y, t)$ et déformation $\underline{\underline{\epsilon}}(x, y, t)$ vérifiant à l'équilibre les équations locales:

$$\begin{cases} {}^t\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}} \\ \text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 \\ \underline{\underline{\epsilon}} = \text{sym}(\text{grad}(\underline{u})) \\ \underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}})\underline{I} + 2\mu\underline{\underline{\epsilon}} \end{cases} \quad (1)$$

De manière équivalente, les équations locales se reformulent en une forme variationnelle globale :

$$\text{Trouver } u \in H_{C.L.}^1(\Omega) \text{ tel que } \forall v \in H_0^1(\Omega) : \int \underline{\underline{\sigma}}(u) : \underline{\underline{\epsilon}}(v) dx dy = 0 \quad (2)$$

Parce que la forme variationnelle fait intervenir des intégrales, elle facilite la résolution numérique du problème. Par exemple, le module de résolution numérique Fenics résout ces équations en approchant les intégrales par une solution discrète projetée sur un espace de fonctions de formes

$\underline{u} \approx \sum_{i=0}^N U_j \phi_j$ afin de se ramener à la résolution d'un système linéaire $AU = 0$ où $[A]_{ij} = a(\phi_j, \hat{\phi}_i)$.

Les fonctions de formes sont des polynômes d'ordre n .

Résolution numérique

La résolution du problème avec Fenics fournit les solutions en déplacement. On en déduit les composantes tensorielles de la déformation sur la figures 1. On remarque, à des fins de vérifications, la symétrie : $\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx}$. Aussi, on remarque l'invariance par rotation d'un angle π de toutes les composantes. Enfin, on confirme l'égalité attendue des composantes ϵ_{xx} et ϵ_{yy} moyennant une rotation d'angle $\pi/2$. Conformément à l'intuition, les conditions aux limites conduisent le système à adopter une géométrie allongée suivant la bissectrice (figure 2).

Il est possible de tracer le déplacement vertical sur l'axe x et de lui superposer la solution analytique, sur la figure 4. Numériquement, on remarque que les courbes sont presque confondues en tout point: il semble que la simulation soit valide. Physiquement, on remarque que la pente faible de l'inclusion limite la déformation de la frontière globale: cela était prévisible compte tenu de son module d'élasticité plus élevé que la matrice.

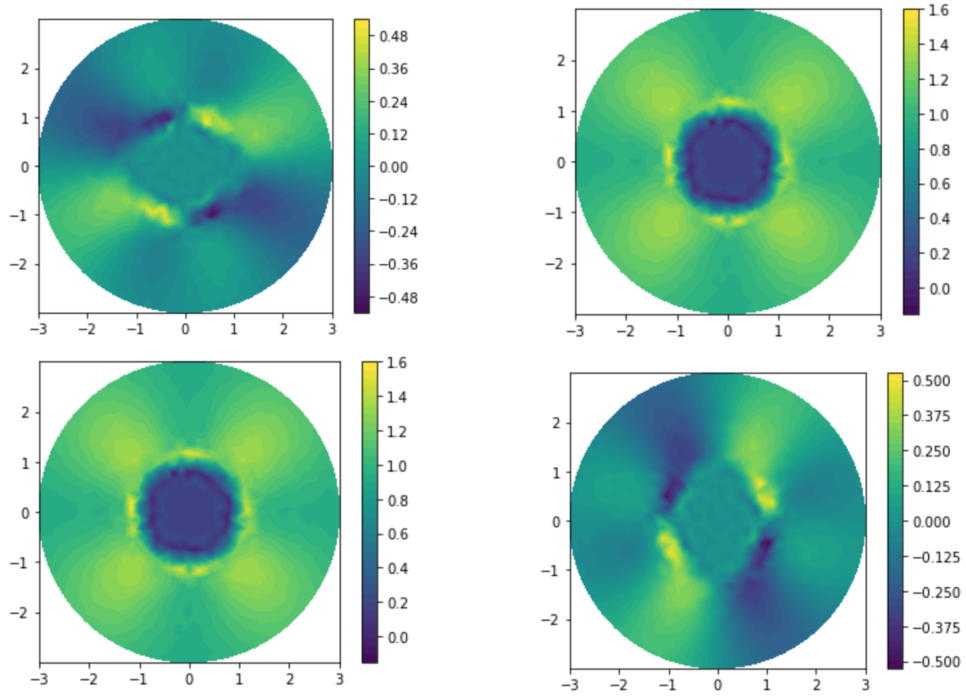


Figure 1: Tenseur des déformations $\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon_{xx}\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \epsilon_{xy}\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \epsilon_{yx}\underline{e}_y \otimes \underline{e}_x + \epsilon_{yy}\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y$

La déformation en cisaillement est presque uniforme dans l'inclusion. Ce résultat s'obtient par le calcul des déviations à la moyenne :

$$d_{kl} = \frac{\int_{\Omega_i} |\epsilon_{kl} - \langle \epsilon_{kl} \rangle| dx dy}{\langle \epsilon_{kl} \rangle} \Rightarrow \underline{\underline{d}} = \begin{pmatrix} 407 & 0.038 \\ 0.038 & 1052 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Le fait que le déviateur de $\underline{\underline{d}}$ soit négligeable devant sa partie sphérique atteste d'une déformation en cisaillement quasi-uniformes dans l'inclusion. Ce résultat pourrait être exploité à des fins expérimentales pour mettre en cisaillement uniforme un échantillon, par exemple.

Étude de convergence

Pour des fonctions de forme de degré 1 ou 2, la simulation converge et l'erreur relative par rapport à la solution analytique est toujours très faible devant l'unité en norme $L^2(\Omega)$. La figure 3 illustre la convergence de l'erreur pour des éléments finis de degrés 1. Pour un coefficient de Poisson limite ($\nu = 0.4999999$), l'erreur est importante quelque soit le maillage.

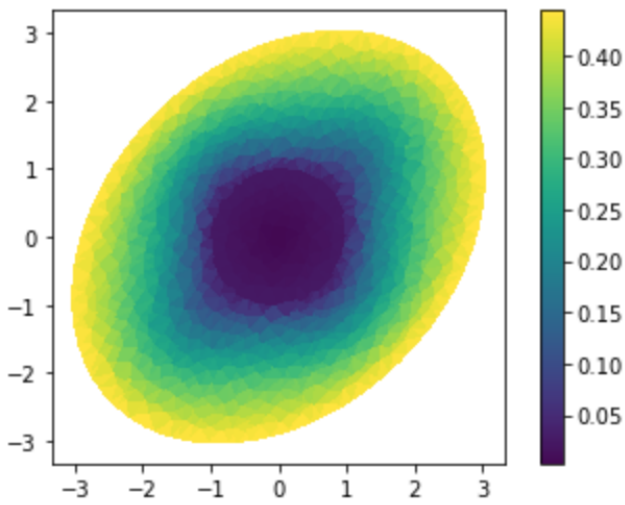


Figure 2: Déformée $0.15 \times \underline{u}(x,y)$

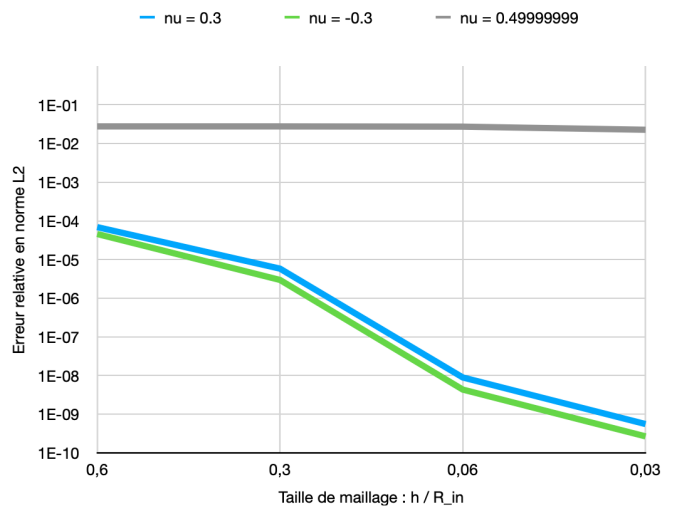


Figure 3: Étude de convergence en maillage

Conclusion

Numériquement, l'outil Fenics a permis la résolution numérique rapide, convergente et avec une faible erreur relative du problème d'Eschelby. Physiquement, la simulation a restitué les symétries et invariance attendues ainsi que des propriétés de ce problème - notamment l'uniformité des déformations en cisaillement dans l'inclusion.

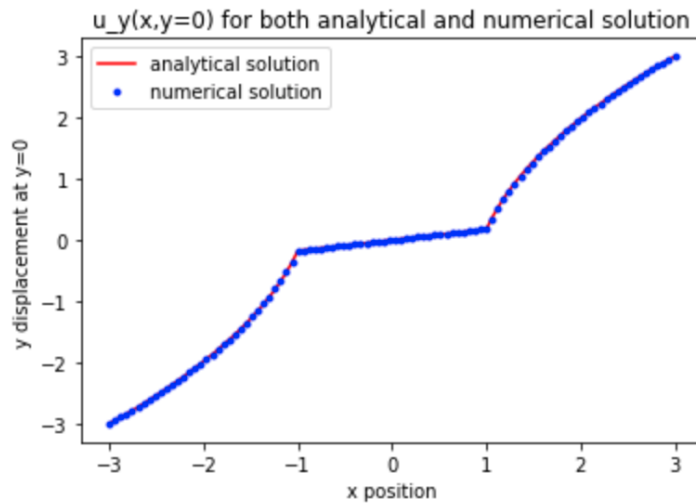


Figure 4: Déplacement sur l'axe