

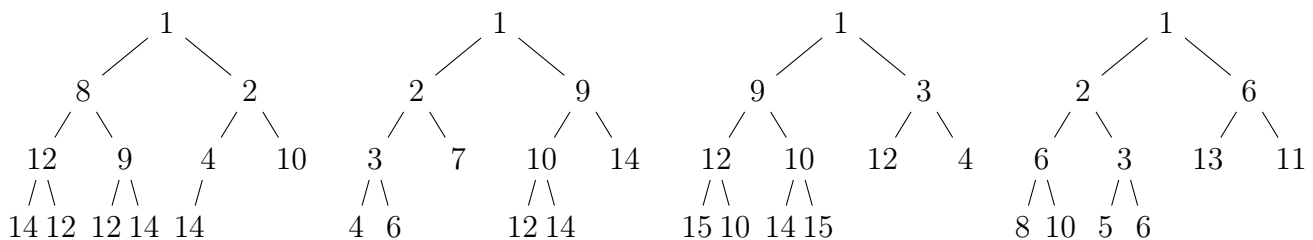
TECHNIQUES ALGORITHMIQUES ET PROGRAMMATION

Devoir Maison [du vendredi 17h au samedi 12h]

Toutes vos réponses sont à saisir dans le fichier `reponses.txt` accompagnant le sujet, et qui est à déposer sur la page [Moodle](#) du cours. Il est impératif de ne pas renommer ce fichier de réponses, ni de le compresser ou de changer son format. Vous pouvez mettre des commentaires directement dans `reponses.txt` si cela vous semble nécessaire. Enfin, ne cherchez pas à me rendre le sujet (.pdf) que je viens de vous envoyer.

Le sujet comporte 4 pages. Vous avez le droit d'utiliser les documents accessibles sur la [page de l'UE](#), en particulier les [notes de cours](#), ainsi que vos propres fichiers (notes et programmes de TP). Il s'agit d'un devoir individuel. Tout constat de manquement à cette consigne sera sanctionné.

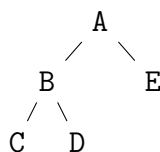
Tas minimum



Q1a. Pour chacun des arbres binaires ci-dessus indiquez ceux correspondant à un tas minimum. (De gauche à droite mettez V si c'est vrai et F sinon.)

Q1b. Donnez le tas résultant de l'insertion dans un tas minimum supposé vide au départ des 10 lettres du mot KNOTLTFOWE ajoutées une par une en le lisant de gauche à droite. On trie les lettres selon l'ordre alphabétique.

Indiquez la suite des 10 lettres obtenues en lisant l'arbre par niveau, de haut en bas et de gauche à droite. Par exemple, pour l'arbre ci-dessous, il faut indiquer les 5 lettres ABECD.

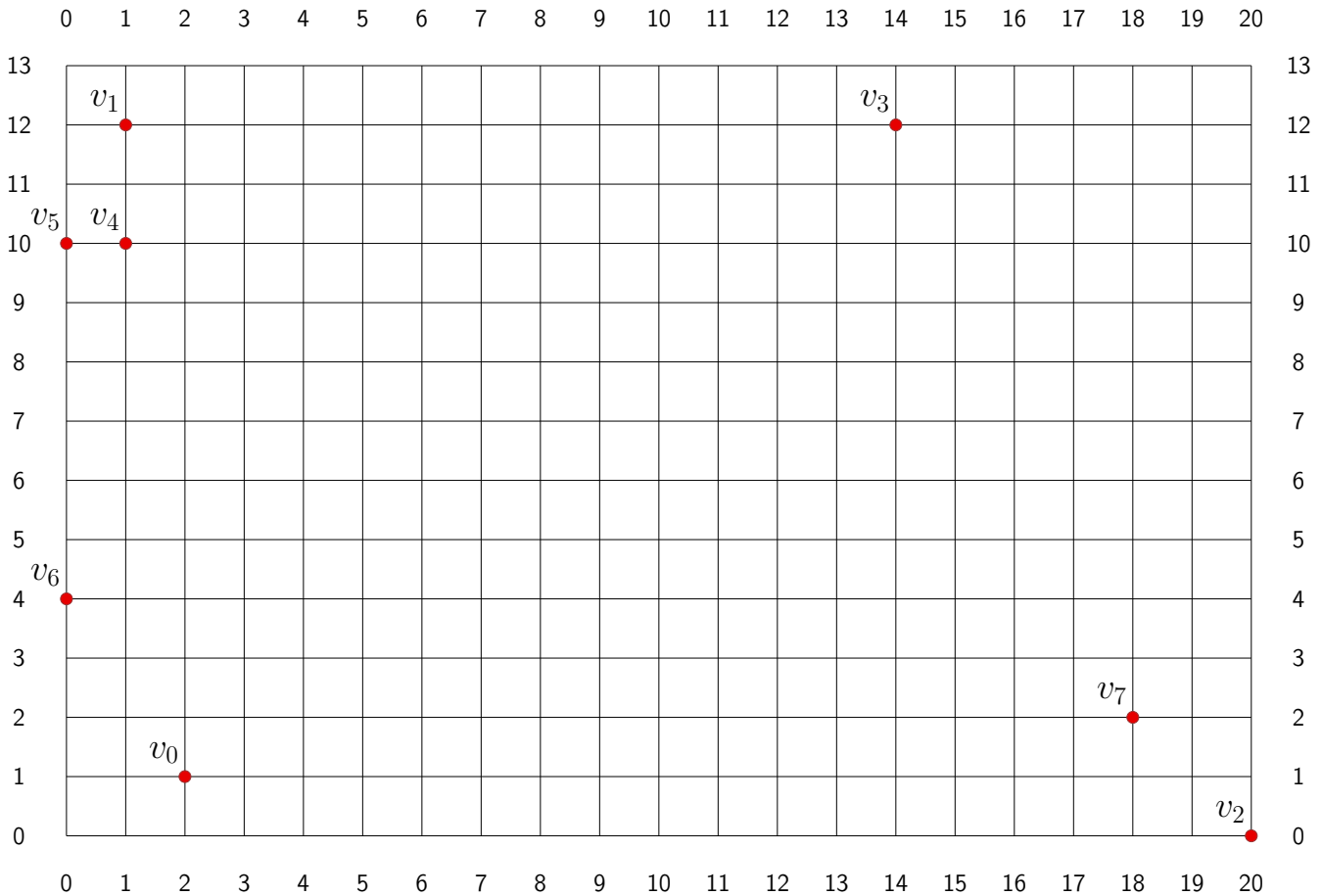


Q1c. Appliquez deux fois le dépilement d'un élément au tas obtenu à la question précédente. Donnez les tas obtenus après l'exécution de chacune des deux opérations (suivant le même format que la question précédente).

Q1d. Quelles sont, dans l'ordre, les deux lettres ainsi supprimées ?

Voyageur de commerce

On considère un ensemble de 8 points $V = \{v_0, v_1, \dots, v_7\}$ placés sur une grille rectangulaire comme ci-dessous. La distance entre deux points de V est la distance dite de Manhattan, c'est-à-dire la longueur d'un plus court chemin qui suit la grille, chaque pas de la grille valant 1. Plus précisément, la distance entre les points $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ est $d(A, B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|$. Notez bien que la grille ne comporte pas de diagonale et que toutes les distances sont entières.



Q2a. Calculez $d(v_0, v_1)$.

Q2b. Calculez $d(v_0, v_2)$.

Q3a. Donnez les indices des deux points les plus proches.

Q3b. Calculez la distance correspondante.

Q3c. Donnez trois points d'un triangle de V ayant le plus petit périmètre, c'est-à-dire trois points distincts v_i, v_j, v_k tels que $d(v_i, v_j) + d(v_j, v_k) + d(v_k, v_i)$ soit minimum.

On dit qu'une suite u_1, \dots, u_t de t points de la grille sont « alignés » s'il existe un plus court chemin de u_1 à u_t dans la grille passant par tous les points de la suite dans l'ordre u_1, \dots, u_t .

Q4a. Dans V , donnez une suite de trois points alignés.

Q4b. Dans V , donnez une suite de t points alignés avec le plus grand t possible. Pour simplifier la recherche, remarquez que tout plus court chemin sur la grille utilise, sur chaque dimension, des coordonnées toutes croissantes ou toutes décroissantes.

Q4c. Dans une grille de dimension suffisamment grande, trouver deux points A, B (pas forcément dans V) tels que l'ensemble de points $\{(4, 5), (8, 1), A, B\}$ ne possède pas trois points alignés. Dit autrement, quels que soient les trois points pris dans l'ensemble, ils ne sont jamais alignés.

On considère l'algorithme « du point le plus proche », un algorithme glouton vu en cours.

Q5a. *Donnez la tournée produite par cet algorithme depuis v_0 , c'est-à-dire la liste des indices des points de la tournée. Il est inutile de remettre en fin de tournée le point de départ.*

Q5b. *Calculez la longueur de la tournée ainsi produite.*

La matrice des distances pour V est la matrice carrée 8×8 , $M = (M_{i,j})$ où $M_{i,j} = d(v_j, v_i)$, donnant la distance entre chaque couple de points (v_j, v_i) de V . Il s'agit de calculer cette matrice. Mais comme la matrice est symétrique et que $M_{i,i} = 0$, seules certaines valeurs sont « utiles ». On notera L_i la i -ème ligne de la matrice M pour les valeurs $M_{i,j}$ avec $j < i$. On a donc :

	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
L_1	$d(v_0, v_1)$						
L_2	$d(v_0, v_2)$	$d(v_1, v_2)$					
L_3	$d(v_0, v_3)$	$d(v_1, v_3)$	$d(v_2, v_3)$				
L_4	$d(v_0, v_4)$	$d(v_1, v_4)$	$d(v_2, v_4)$	$d(v_3, v_4)$			
L_5	$d(v_0, v_5)$	$d(v_1, v_5)$	$d(v_2, v_5)$	$d(v_3, v_5)$	$d(v_4, v_5)$		
L_6	$d(v_0, v_6)$	$d(v_1, v_6)$	$d(v_2, v_6)$	$d(v_3, v_6)$	$d(v_4, v_6)$	$d(v_5, v_6)$	
L_7	$d(v_0, v_7)$	$d(v_1, v_7)$	$d(v_2, v_7)$	$d(v_3, v_7)$	$d(v_4, v_7)$	$d(v_5, v_7)$	$d(v_6, v_7)$

Q6. *Calculez chacune des lignes L_1, \dots, L_7 .*

Il s'agit maintenant de construire un arbre couvrant de poids minimum pour V , plus précisément du graphe complet induit par V . Vous pouvez pour cela appliquer la méthode que vous souhaitez, en vous appuyant sur la matrice des distances que vous venez de calculer.

Q7a. *Donnez la liste des arêtes d'un arbre couvrant de poids minimum.*

Q7b. *Calculez le poids de cet arbre.*

Q7c. *Parmi les arêtes du graphe complet induit par V , combien n'appartiennent pas à l'arbre ?*

Q7d. *Donnez l'arête de poids minimum du graphe complet à ne pas être dans l'arbre. (En choisir une s'il y en a plusieurs.) Notez que lorsqu'on applique l'algorithme de Kruskal, c'est la première arête à former un cycle.*

On s'intéresse maintenant aux tournées produites par l'algorithme de 2-approximation vu en cours.

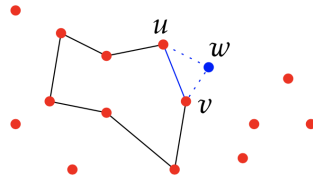
Q8a. *Donnez la tournée obtenue en effectuant un parcours en profondeur (DFS) depuis la racine v_0 . Important : s'il y a un choix, votre parcours devra choisir le point voisin ayant le plus petit indice.*

Q8b. *Calculez la longueur de cette tournée.*

On s'intéresse maintenant à un autre algorithme produisant une tournée pour V . Il s'agit de la variante de l'heuristique dite d'« insertion aléatoire » présentée brièvement dans la section 3.4.3 des notes de cours (d'où a été copiée l'illustration ci-après).

Le principe est le suivant : on démarre avec la tournée initiale $P = u^* - v^*$, définie sur deux points les plus proches possibles (par exemple, pour V , ceux de la question Q3a). Puis, pour chacun des points extérieurs à la tournée courante P , on « insère » le point w entre deux points consécutifs $u - v$ de P (voir la figure ci-après). Cela crée ainsi une nouvelle tournée avec un point de plus où l'arête $u - v$ de P a été remplacée par les arêtes $u - w$ et $w - v$.

Le point important, pour cette variante qu'on nommera « insertion minimum », est que le point w et l'arête $u - v$ de P sont choisis de façon à minimiser l'accroissement de la longueur de la tournée. On s'arrête bien évidemment lorsque tous les points ont été ainsi insérés.



Q9a. *Donnez l'ordre d'insertion des points de la tournée pour V obtenue par insertion minimum.*

Q9b. *Donnez la tournée résultante pour V .*

Q9c. *Calculez la longueur de cette tournée.*