# Des tribus en probabilités

*Introduction, exemples et motivations*

Le but de ce document est de présenter la notion de tribu à l'aide de dessins et d'analogies ainsi que de motiver la définition d'un tel objet.

Rappelons d'abord les notations usuelles. On désignera par $\Omega$ l'univers sur lequel on travaille, c'est à dire l'ensemble des issues possibles à notre expérience de probabilités. On note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de $\Omega$ (nous détaillerons cette notion dans les pages suivantes) et si $A$ est une partie de $\Omega$ alors on notera $A^c$ ou encore $\bar{A}$ son complémentaire.

On dit qu'une partie $T$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu si elle vérifie les points suivants :
- $\Omega \in T$ ;
- Si $A \in T$ alors $A^c \in T$ ;
- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $T$, alors $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$.

## 1 Motivation

*Pourquoi les tribus ?* Pourquoi s'embête-t-on à définir un objet pareil, sachant que dans les trois quarts de nos exemples nous nous contentons de prendre l'ensemble des parties de l'univers ? C'est ce que nous tentons de motiver ici.

Tout d'abord, la théorie des probabilités ne se résume pas à des univers finis. On peut se retrouver à travailler avec des **univers infinis.** Pire, des univers **continus** : on peut en effet travailler avec $\Omega = \mathbb{R}$, par exemple. Dans ce cas là, les probabilités peuvent alors se calculer à l'aide d'intégrales sur $\mathbb{R}$ où on **intègre des fonctions**. Déjà, ici, on est loin du calcul vu moult de fois de « probabilité d'avoir un chiffre pair lorsqu'on lance un dé à 6 faces ». Mais ça ne s'arrête pas là.

Les premiers exemples de fonctions à intégrer sont souvent fort sympathiques, elles sont continues, dérivables partout, *etc.* Mais on se retrouve parfois à devoir intégrer des fonctions **bien moins gentilles : ni dérivables, ni**

**continues.** Et pour faire cela, nous avons développés des *outils*, notamment pour définir **quelles sont les fonctions suffisamment sympathiques pour pouvoir être intégrées et lesquelles ne le sont pas assez.** C'est de là qu'est apparue la nécessité de définir les tribus : en fixant une tribu vous décidez de qui est intégrable, qui est **« mesurable »**. Parce que lorsqu'on travaille avec un univers $\Omega$ continu (par exemple $\Omega = \mathbb{R}$), prendre comme ensemble de gens mesurables $\mathcal{P}(\Omega)$ n'est pas possible, c'est trop « gros ». Il faut donc se restreindre à un **sous-ensemble de** $\mathcal{P}(\Omega)$ qui respecte certaines conditions (pour qu'on puisse quand même faire des calculs dessus). C'est ce sous-ensemble qu'on appelle tribu.

Alors, oui, dans nos exemples, la tribu est souvent simple et donnée par $\mathcal{P}(\Omega)$. Mais commencer à introduire cette notion maintenant, avec des exemples tangibles (le lancer de dé à 6 faces est plutôt parlant, peut-être modélisé « en vrai » et les calculs sont faisables) vous permet de manipuler les tribus dans un cadre bien plus amical que celui des *lois de probabilités à densité où on intègre sur* $\mathbb{R}$*, muni de la tribu des Boréliens, par rapport à la mesure de Lebesgue* (c'est moche, c'est plein de jargon opaque, mais cela vous fait entrevoir que les probas que nous faisons dans ce cours ne sont que le début d'une théorie foisonnante).

# 2 Des billes, des sacs de billes et des sacs de sacs de billes

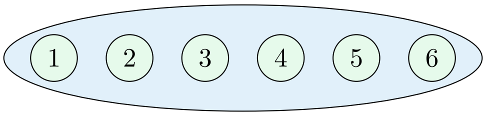
Prenons l'expérience usuelle de lancer de dé à 6 faces. On lance un dé, on regarde le résultat. Ce qui suit a pour vocation à détailler la notion de tribu à l'aide d'une **analogie avec des objets tangibles**. Les issues seront vues comme des billes, les événements comme des sacs de billes et une tribu comme un « sac de sacs de billes ». Si cette analogie ne vous convient pas, vous pouvez toujours remplacer les billes par des cartes, les sacs de billes par des decks et les sacs de sacs par un ensemble de decks possibles… ou toute autre analogie de bidules dans des paquets choses dans lots des trucs qui vous conviendrait.

Avec cette analogie de sac de billes, une manière de voir une issue possible (c'est à dire de voir un élément de l'univers) est de le considérer comme une bille avec le résultat du lancer de dé écrit dessus. Ainsi, **les issues possibles** sont :

1 2 3 4 5 6

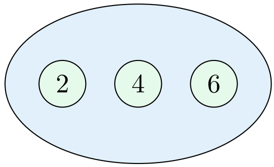
Alors **l'ensemble des issues possibles**, c'est à dire **l'univers** est *l'ensemble* (et j'insiste sur ce mot ensemble) de ces billes. C'est à dire **c'est le sac qui contient toutes ces billes.**

$\Omega$

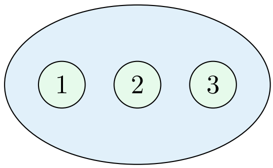



Nous avons vu qu'un **événement** était un ensemble d'issues possibles. Par exemple l'événement « le résultat est pair » correspond à $\{2, 4, 6\}$. Avec le point de vue précédent, un événement est **un sac rempli avec *certaines* des billes contenues dans $\Omega$.** Quelques exemples ci dessous.

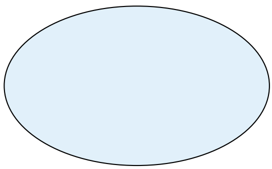
« le résultat est pair »




« le résultat est <4 »

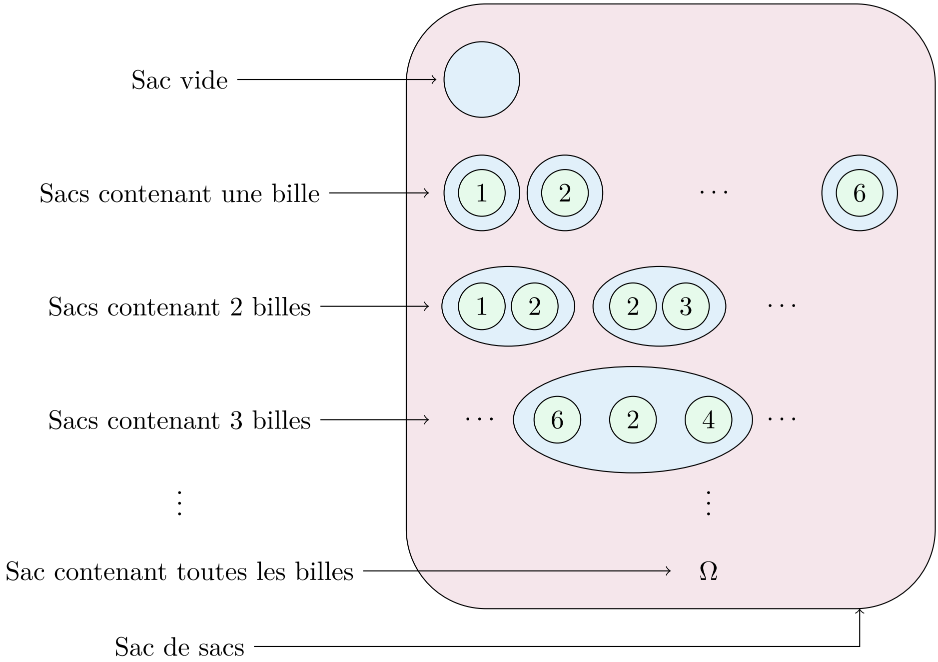



« le résultat est plus grand que 7 »

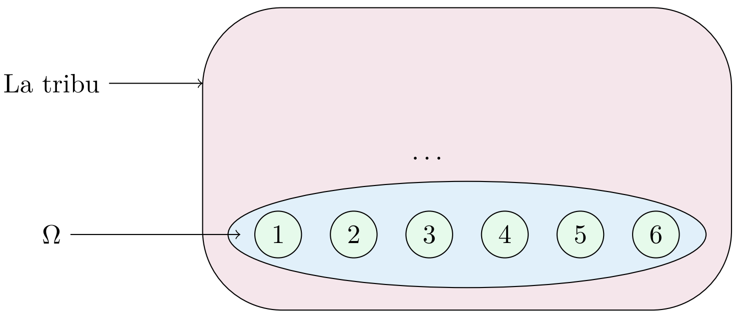


Dans ce dernier exemple il n'y a aucune issue satisfaisant la condition, donc il n'y a aucune bille dans le sac. C'est le **sac vide**. Ceci correspond à **l'ensemble vide**.

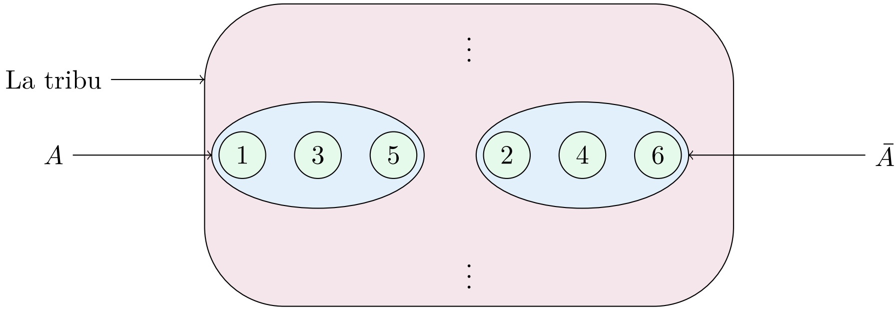
Maintenant que nous avons nos *parties de* $\Omega$, c'est à dire nos sacs de billes, nous pouvons regarder **l'ensemble des parties de** $\Omega$. L'ensemble des parties de $\Omega$ est l'ensemble des sacs de billes que l'on peut composer en utilisant les billes contenues dans Omega. C'est un **sac de sacs de billes.** Nous tentons de le schématiser ci dessous.




L'ensemble des parties de $\Omega$ est un premier exemple de ce qu'on appelle **tribu**. Mais ce n'est pas le seul. **Une tribu est un sac de sacs de billes** qui vérifie certaines conditions. Si on note $T$ la tribu, alors la condition « $\Omega \in T$ » se traduit par *« Le sac qui contient toutes les billes est contenu dans le sac de sacs. »*. Schématiquement :




La condition « Si $A \in T$ alors $A^c \in T$ » se traduit alors *« Si $T$ contient un sac de billes, alors il contient aussi un autre sac : celui qui contient les "autres" billes, c'est à dire toutes les billes qui ne sont pas dans le premier sac.»*. C'est ce que schématise le dessin ci-dessous.




Enfin, la condition « Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $T$, alors l'union $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est contenue dans $T$. » se traduit par *« Si $T$ contient une suite de sacs $A_1$, $A_2$,… alors $T$ contient le sac rempli avec les billes de $A_1$, de $A_2$,… ».* Schématiquement :