

Tentatives d'incorporation de normales prescrites dans le calcul sur maillages polygonaux

Baptiste GENEST

7 juillet 2022

Références

- [1] Fernando de Goes, Andrew Butts, Mathieu Desbrun (2020) *Discrete Differential Operators on Polygonal Meshes*.
- [2] David Coeurjolly, Jacques-Olivier Lachaud (2022) *A Simple Discrete Calculus for Digital Surfaces*.
- [3] David Coeurjolly, Jacques-Olivier Lachaud, Pierre Gueth (2021) *Digital surface regularization with guarantees*.
- [4] Thomas Caissard, David Coeurjolly, Jacques-Olivier Lachaud, Tristan Roussillon (2017) *Heat kernel Laplace-Beltrami operator on digital surfaces*.

1 Contexte

Stage au Liris du 17 mai 2022 au 8 juillet auprès de David Coeurjolly.

Après avoir achevé l'implémentation dans DGtal des opérateurs vectoriels issus de [1], nous avons tenté d'améliorer la précision des calculs pour les cas où on a à disposition des informations géométriques supplémentaires, principalement la donnée de normales aux faces ou aux sommets.

Le point de départ de [1], est la nécessité d'une normale dans l'expression du gradient intégré par le théorème de Stokes

$$\int_f \nabla \phi(x) dx = \oint_{\partial f} \phi(x) t(x) \times n(x) dx \quad (1)$$

ce qui pose problème dans le cadre du papier où les faces n'étant plus nécessairement planaires ni convexes (plus de choix naturel d'interpolant et normale variant sur la face si celle-ci n'est pas plane). Pour dépasser cela, tous les calculs partent de celui du cogradient :

$$\int_f \nabla \phi(x)^\perp dx = \oint_{\partial f} \phi(x) t(x) dx \quad (2)$$

qui lui ne dépend pas de la normale en x , mais uniquement de la tangente t qui se définit naturellement le long des arêtes.

En supposant ϕ linéaire par morceaux, ces versions faibles des principaux opérateurs différentiels s'expriment simplement par des matrices. La garantie du papier étant de retrouver une approche par éléments finis $P1$ dans le cas simpliciel.

Un élément important aura été que la quasi-totalité des tests auront été effectués sur des surfaces de voxels, ce qui semble être un cas pertinent puisque les normales calculées sont souvent très éloignées de celles de la surface discrétisée.

Enfin, la seule métrique pour évaluer les résultats des modifications des opérateurs aura été un script comparant les résultats du laplacien sur une sphère selon les différentes discrétisations, prenant comme référence l'opérateur défini dans [4] dont la convergence ponctuelle est prouvée. Cela a pu entraîner un biais car seuls les opérateurs sharp et flat sont employés (qui certes emploient d'autres opérateurs mais pas la totalité) il serait pertinent d'évaluer les résultats sur le gradient par exemple.

2 Approche par arrêtes splines

2.1 Normales aux sommets :

Qu'elles soient imposées ou calculées, les normales aux sommets discordent avec leur voisinage local en présence de courbure, i.e., les faces planaires ne peuvent pas être orthogonales à toutes les normales de chacun de leurs sommets.

L'idée initiale aura donc été de remplacer les arrêtes droites par des splines d'ordre variées mais qui seraient effectivement orthogonales aux arrêtes aux sommets.

La construction de splines se réduisant à la résolution de petits systèmes linéaires, plusieurs configurations dans le choix du nombre de conditions ainsi que la nature de celles ci auront abouties à des splines différentes ayant toutes des avantages et des inconvénients.

Définitions et notations :

Une spline de \mathbb{R}^3 de degré d peut être construite pour respecter exactement $3(d+1)$ conditions scalaires. Ici, le degré d'une spline est le degré des polynômes qui composent ses coordonnées.

On cherche à construire une spline S , définie sur $[0, 1]$, entre les sommets u et v .

On confond un sommet avec ses coordonnées et notons la i -ème coordonnée du point x par x_i .

On note le plan tangent au sommet i : T_i et la normale n_i .

Les courbes qui nous intéressent sont donc celles qui vérifient :

$$S(0) = u$$

$$S(1) = v$$

$$S'(0) \in T_u$$

$$S'(1) \in T_v$$

Les deux premières conditions sont directes et se traduisent par 3 conditions scalaires chacune, donc 6 conditions sont déjà imposées. La variété des approches réside donc dans la manière d'imposer l'appartenance au plan tangent.

2.1.1 Splines cubiques ($d = 3$)

Une première approche aura été d'imposer les vecteurs des dérivées premières aux extrémités, soit $e = v - u$ et P_{T_i} la matrice de projection orthogonale sur T_i , on peut imposer :

$$\begin{aligned} S'(0) &= P_{T_u} e \\ S'(1) &= P_{T_v} e \end{aligned}$$

ces deux conditions se traduisent également par 3 conditions chacune donc au total 12 conditions ce qui est adapté aux splines cubiques.

Pour l'exemple, en posant $S_i(t) = a_i t^3 + b_i t^2 + c_i t + d_i$. En évaluant S et S' en 0 et en 1, le système à résoudre devient :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \\ d_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ x_i \\ (P_{T_u} e)_i \\ (P_{T_v} e)_j \end{pmatrix} \quad (3)$$

L'avantage de cette construction est que le système est bien déterminé et se résout coordonnée par coordonnée. De plus la matrice est la même pour les 3 coordonnées et admet une inverse explicite et simple.

Bien que le projeté orthogonal de l'arrête soit naturel et permette de retrouver l'arrête droite quand $n_u = n_v$ et $n_u \cdot e = 0$, $\|S'(0)\|$ et $\|S'(1)\|$ dépendent de l'alignement entre e et les normales. On peut alors suggérer d'imposer :

$$\begin{aligned} S'(0) &= \|e\| \frac{P_{T_u} e}{\|P_{T_u} e\|} \\ S'(1) &= \|e\| \frac{P_{T_v} e}{\|P_{T_v} e\|} \end{aligned}$$

Néanmoins, imposer une vitesse initiale indépendamment du chemin à parcourir semble ne pas être optimal pour avoir une courbe la plus régulière possible.

Le fait que le choix de la vitesse initiale soit arbitraire motive à essayer de restreindre le nombre de conditions.

2.1.2 Splines quadratiques ($d = 2$)

En passant sur des splines d'ordre 2, on a désormais $3 \cdot 3$ conditions, dont les 6 premières sont toujours imposées comme étant le passage par les sommets.

Pour ne pas avoir à imposer les vitesses aux sommets, on peut simplement imposer les conditions $S'(0) \in T_u$ et $S'(1) \in T_v$, par les deux conditions scalaires :

$$\begin{aligned} S'(0) \cdot n_u &= 0 \\ S'(1) \cdot n_v &= 0 \end{aligned}$$

Aucune 9ème condition raisonnable ne nous ait apparu donc on obtient un système sous déterminé à 9 inconnues et 8 conditions : cette fois-ci, les deux dernières conditions impliquant les 3 coordonnées le système n'est plus décomposable et repose désormais sur tous les

coefficients de la spline donc une matrice $(8, 9)$. Le fait que le système soit sous déterminé permet un contrôle sur la spline.

En effet, en notant la matrice \mathbf{A} , par la décomposition de l'ensemble solution du système en :

$$\text{Sol} = \{x \in \mathbb{R}^9, \mathbf{A}x = b\} = y + \lambda \text{Ker}(\mathbf{A})$$

où y est une solution particulière, on peut choisir λ de telle sorte à minimiser une énergie. Par exemple, en introduisant la fonctionnelle quadratique :

$$\mathcal{E}_{\text{length}}(S) = \int_0^1 \|S'(t)\|^2 dt \quad (4)$$

Qui s'exprime explicitement par une forme quadratique en les coefficients de la spline :

$$\mathcal{E}_{\text{length}}(S) = Q(x_S) = x_S^t E x_S \quad (5)$$

où $x_S = (a_1, \dots, c_3)^t$. Ainsi, en prenant $z \in \text{Ker}(\mathbf{A})$, on peut choisir λ tel que :

$$\lambda^* = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} Q(y + \lambda z) \quad (6)$$

comme le problème ne dépend que de λ , on trouve un polynôme du second degré simple à minimiser. D'autres énergies ont été envisagées, comme par exemple :

$$\mathcal{E}_{\text{curv}}(S) = \int_0^1 \|S''(t)\|^2 dt \quad (7)$$

Où une combinaison linéaire des deux mais la première donne des splines plus régulières et courtes.

Néanmoins, comme pour toute norme L^2 , on a observé des comportements déviants (par exemple des splines très courtes et régulière partout sauf à une extrémité avec un changement brusque).

Une dernière méthode de construction de spline a alors été envisagée pour garantir l'unicité de la construction.

2.1.3 Spline à projection linéaire

Pour ne pas se confronter aux problèmes précédents, on a tenté de construire une spline qui soit intrinsèquement adaptée à notre problème.

On impose cette fois ci que la spline soit de la forme :

$$S(t) = u + te + t(1-t)(ae_1 + be_2) \quad (8)$$

où e_1 et e_2 complètent e en une b.o.n., ici, peu importe e_1, e_2, a, b , les propriétés de passage aux extrémités sont respectées. Le problème est alors que le vecteur $ae_1 + be_2$ est constant et donc la courbe est contenue dans un plan, ce qui est impossible à moins que n_u et n_v soient coplanaires. On peut alors projeter n_u et n_v sur $\text{Vect}(e, \frac{1}{2}(n_u + n_v))$ mais on perd alors l'exactitude du passage dans le plan tangent. Un autre avantage de cette forme est que, contrairement aux précédentes, pour la finalité du calcul qui est de remplacer (2) par,

$$\int_f \nabla \phi(x)^\perp dx = \sum_{S \in S_{\partial f_i}} \int_0^1 \phi(t) S'(t) dt \quad (9)$$

or, ce qui nous permet de remplacer l'interpolation linéaire dans l'espace de (2) $\phi(x)$ par l'interpolation directe des valeurs de ϕ aux extrémités est le fait qu'on suppose que S interpole l'arrête à vitesse linéaire, les méthodes précédentes ne le garantissent pas alors que la projection orthogonale de ces splines sur e évolue bien à vitesse constante.

2.2 Emploi des splines dans le calcul

Une fois ces splines construites, certains opérateurs centraux dans la construction des autres ont été adapté dans l'espoir d'améliorer la qualité des calculs. Comme évoqué plus haut, le cogradient intégré devient :

$$\int \nabla \phi^\perp(x) dx = \int_0^1 S'(t) \phi(t) dt \quad (10)$$

Comme les coefficients sont polynômiaux, au plus d'ordre 3 pour S , et comme ϕ est supposée linéaire, on emploie des formules de quadrature d'ordre 3 pour $S'\phi$.

Egalement, l'aire vectorielle qui s'exprime :

$$a_f = \frac{1}{2} \int_{\partial f} x \times t(x) dx \quad (11)$$

Qui est remplacée par la *shoelace formula* pour les arrêtes droites, mais qui dans le cas où chaque arrête est une spline, devient :

$$a_f = \frac{1}{2} \sum_S \int_0^1 S(t) \times S'(t) dt \quad (12)$$

on emploie donc des formules d'ordre 5 pour $S \times S'$.

2.3 Hypothèses sur l'échec des splines seules

Un autre élément de contexte important est la donnée d'un embedder présenté dans [2] qui agit par face en projetant la position des sommets sur le plan tangent à la face avant de construire les opérateurs. A premier abord, j'avais été gêné par l'incohérence induite entre les faces, néanmoins, il s'est avéré que chercher à respecter la géométrie initiale quand celle-ci est autant discordante avec les données normales n'est pas souhaitable.

Il semble que toute correction du calcul qui respecte la position non corrigée des sommets ne peut avoir un effet que négligeable devant la qualité du plongement.

Ainsi, corriger la position des sommets pour mieux respecter les normales a été un piste de recherche.

3 Construction d'un embedder par les splines

Dans la même optique que l'embedder de [2], le but était ici de chercher à modifier la position des sommets pour améliorer la cohérence avec les normales prescrites aux sommets. Cette correction de la position se devait d'être par un calcul local et peu couteux, des processus de régularisation globaux et performants existants déjà [3].

Pour ce faire, l'idée était de chercher le déplacement optimal de chaque point de telle sorte à minimiser la somme des énergies des splines issues de ce point.

On s'est basé sur les splines cubiques, celles-ci étant les plus régulières, pour définir un gradient d'une énergie quadratique en les positions d'un sommet pour une minimisation efficace.

Soit Σ la matrice inverse celle présentée en (3) qui permet étant donné les coordonnées x,y ou z de deux positions et deux vecteurs tangents aux extrémités de construire la spline cubique adaptée.

On exprime d'abord sous forme matricielle la construction d'une spline cubique étant données deux points X_i et X_j , les dérivées premières se calculent donc directement par projection de $X_j - X_i$ sur les plans tangents associés.

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & I_3 \\ -P_{T_i} & P_{T_i} \\ -P_{T_j} & P_{T_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_i \\ X_j \end{pmatrix} \quad (13)$$

où P est la matrice de permutation qui arrange les coordonnées des vecteurs pour grouper les 4 coordonnées x puis y puis z.

S_{ij} est donc la matrice (6,12) qui associe aux positions de deux sommets i et j les coefficients de la spline qui satisfait les conditions posées en 2.1.

Soit E la matrice associée à la forme quadratique d'une énergie définie comme en 2.1.2. qui effectue le calcul depuis les coefficients d'une spline. On peut donc désormais exprimer l'énergie quadratique depuis les coordonnées des points :

$$Q_{ij} = S_{ij}^t E S_{ij} \quad (14)$$

L'énergie sommée sur le sommet i est donc désormais définie par :

$$Q_i = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} Q_{ij} \quad (15)$$

La correction apportée par un déplacement du point X_i dans une direction h^* est donc définie comme le minimiseur de :

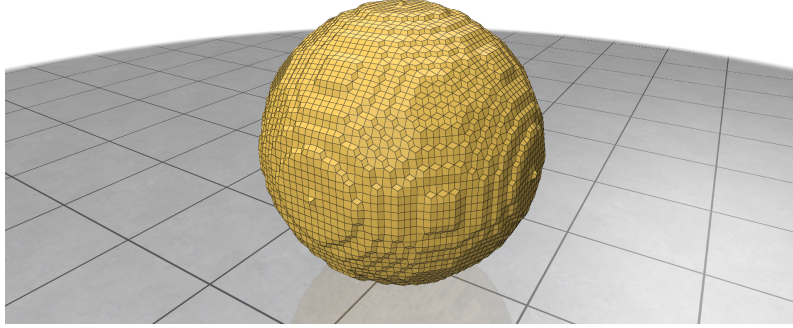
En posant $\tilde{h} = (h \ 0)^t$ et $X_{ij} = (X_i \ X_j)^t$.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(h) &= \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (X_i + h \ X_j) Q_{ij} \begin{pmatrix} X_i + h \\ X_j \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \tilde{h}^t Q_{ij} \tilde{h} + 2\tilde{h}^t Q_{ij} X_{ij} + X_{ij}^t Q_{ij} X_{ij} \\ &= \tilde{h}^t Q_i \tilde{h} + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} 2\tilde{h}^t Q_{ij} X_{ij} + X_{ij}^t Q_{ij} X_{ij} \end{aligned}$$

On cherche donc h^* tel que $\nabla \mathcal{E}(h^*) = 0$, soit,

$$\begin{aligned}\nabla \mathcal{E}(h) &= 2Q_i \tilde{h} + 2 \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} Q_{ij} X_{ij} = 0 \\ \Rightarrow Q_i \begin{pmatrix} h^* \\ 0 \end{pmatrix} &= - \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} Q_{ij} X_{ij}\end{aligned}$$

Cette correction est locale car chaque gradient est calculé en supposant que les autres sommets ne sont pas affectés.



Résultats de l'embedder sur une sphère de voxels.

Le résultat est bien une reconstitution plus lisse mais entre autre, l'aire de la surface est surestimée. Un avantage cependant est que la cohérence topologique autour de chaque sommet est respectée.

Sans supposer que l'emploi de spline soit exclu, le fait que l'interpolation soit arbitraire et pas supportée par une discrétisation d'une approximation d'une surface dans le cadre continu empêche d'être guidé par des résultats de géométrie différentielle classique, ce qui motive l'approche suivante.

4 Approximation d'ordre 2 de la surface

La définition de l'embedder défini dans [2] peut être interprétée comme une développement à l'ordre 1 de la surface à partir du centroïde :

$$\pi_f(x) = c_f + P_{T_i}(x - c_f) \quad (16)$$

Un développement à l'ordre 2 de la surface supposerait une connaissance de la seconde forme fondamentale de la surface. On exploite l'opérateur de forme fourni par [1] défini comme le gradient des normales à la face f , dont la précision est améliorée justement par le fait de supposer connaître les normales exactes aux sommets.

Le développement limité à l'ordre 2 de la surface est donc donnée par :

$$\pi_f(x) = c_f + P_{T_i}(x - c_f) + \frac{1}{2}(x - c_f)^t T_f S_f T_f^t (x - c_f) n_f \quad (17)$$

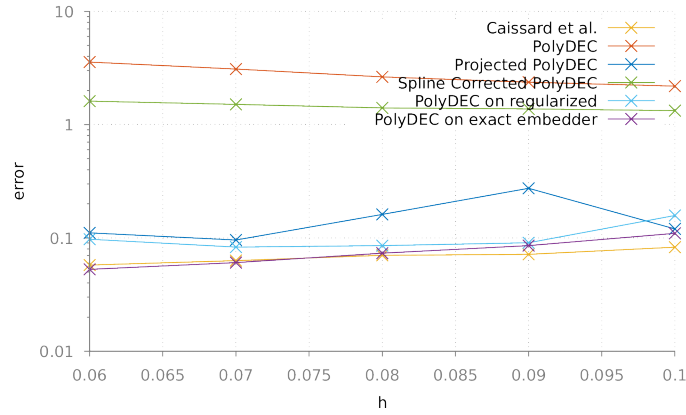
où T_f est la matrice $(3, 2)$ dont les colonnes sont les vecteurs orthonormés formant une base de l'espace tangent en f .

Un problème immédiat est que les opérateurs sharp et flat ne gardent que la partie tangentielle par rapport à la normale à la face, alors que la correction quadratique est justement le long de la normale.

Ainsi, pour percevoir les effets de la correction il faudrait adapter ces opérateurs, comme tenté précédemment. Il est peut-être possible d'obtenir une autre discrétisation du flat en reprenant la définition de la construction de la 1-forme par le calcul de la circulation du vecteur projeté sur la face le long des arrêtes (les arrêtes étant amenées à changer comme vivant désormais sur la surface quadratique).

Ce qu'il serait pertinent d'explorer semble donc être la manière d'adapter la géométrie de la face à la surface. De plus, comme le développement limité est une surface paramétrée explicitement, il peut être également pertinent de s'intéresser à employer plus directement des opérateurs non discrétisés.

5 Résultats et conclusions



Moyenne des erreurs des différentes méthodes sur une sphère discrétisée par un pas h

PolyDEC représente les opérateurs présentés dans [1] sans correction, *Projected PolyDEC* représente la méthode de correction [2].

Ainsi, un premier élément expliquant l'échec à l'obtention de meilleurs résultats est la faible marge de manoeuvre. En considérant uniquement le genre de méthodes présentées dans [2], l'espace d'amélioration est donc compris entre *Projected PolyDEC* et *PolyDEC on regularized* (qui emploie les mêmes opérateurs mais sur une un maillage lissé par la méthode présentée dans [3]). Ainsi, on pouvait chercher à améliorer les méthodes pour des maillages de basse résolution, toute amélioration d'ordre 2 ou plus devenant négligeable devant la contribution de [1] avec la finesse du maillage.

Pour conclure :

- L'évaluation des résultats ne s'est fait que dans un certain cadre, il est possible que des améliorations ponctuelles apparaissent par l'emploi d'une des méthodes présentées

ici.

- Etant donnée l'absence de relecture du code ou des calculs, il est également possible que des erreurs de raisonnement ou simplement d'implémentation aient eu lieu.
- La donnée principale du calcul étant le plongement des sommets, il semble essentiel de corriger ce dernier, au moins localement, pour obtenir de meilleurs résultats. A ce titre, l'approximation présentée en 4) semble prometteuse.