
GROUPES CLASSIQUES

par

Baptiste Calmès et Jean Fasel

Résumé. — Nous introduisons les groupes dits “classiques” sur une base quelconque, puis nous les replaçons dans la classification des groupes réductifs établie dans [SGA3].

Abstract. — We introduce so-called “classical” groups over a general base, and then we place them where they belong in the classification of reductive groups established in [SGA3].

Table des matières

1. Introduction	3
2. Préliminaires	3
2.1. Foncteurs de points	3
2.2. Structures	4
2.2.1. Structures élémentaires	4
2.2.2. Changement de base des structures	6
2.2.3. Champs	8
2.3. Faisceaux en groupes et toseurs	10
2.3.1. Actions de groupes	10
2.3.2. Toseurs	10
2.3.3. Torsion et structure	14
2.3.4. Formes	15
2.3.5. Suites exactes de cohomologie	20
2.4. Représentabilité	25
2.5. Quelques schémas fondamentaux	26

Mots clefs. — Groupe classique, algèbre centrale simple, algèbre à division, forme quadratique, groupe orthogonal, groupe linéaire, toseur.

MSC 2000: 14L15, 14L30.

2.5.1. \mathbf{O}_S -modules localement libres de type fini	26
2.5.2. Groupe linéaire	28
2.5.3. Torseurs sous \mathbf{GL}_n , \mathbf{G}_m et μ_n	29
2.5.4. Groupe projectif linéaire	32
2.6. Algèbres séparables, étales et d’Azumaya	34
2.6.1. Algèbres séparables	34
2.6.2. Algèbres étales	35
2.6.3. Algèbres d’Azumaya	37
2.6.4. Algèbres d’Azumaya à involution	40
2.7. Modules quadratiques	42
2.7.1. Déterminant	45
2.8. Algèbres de Lie	51
2.9. Lissité	54
2.10. Données radicielles	54
2.11. Groupes d’automorphismes	55
3. Groupes de type A_n	56
3.1. Groupe linéaire	56
3.2. Groupe déployé adjoint	58
3.3. Groupe déployé simplement connexe	61
3.4. Automorphismes	63
3.5. Groupes tordus	66
3.6. Suites exactes longues de cohomologie	71
3.6.1. Gerbes liées par μ_n et \mathbf{G}_m à la Brauer	71
3.6.2. Suites exactes	72
4. Groupes de nature quadratique	73
4.1. Groupe orthogonal	73
4.2. Algèbres de Clifford	75
4.3. Groupe spécial orthogonal	79
4.4. Groupes de Clifford et groupe spin	82
4.5. Suites exactes longues de cohomologie	88
5. Groupes semi-simples de type B_n	90
5.1. Groupe déployé adjoint	90
5.2. Groupe déployé simplement connexe	95
5.3. Automorphismes	99
5.4. Groupes tordus	99
6. Groupes semi-simples de type C_n	101
6.1. Groupe déployé adjoint	101
6.2. Groupe déployé simplement connexe	105
6.3. Automorphismes	108
6.4. Groupes tordus	108
7. Groupes semi-simples de type D_n	108
7.1. Groupe déployé adjoint	108

7.2. Groupe déployé simplement connexe	115
7.3. Automorphismes	118
7.4. Groupes tordus	119
8. Tables	119
Références	120

1. Introduction

L’objet principal de [SGA3] est la classification des schémas en groupes réductifs sur une base quelconque. Rappelons tout d’abord qu’un groupe algébrique G sur une base S est réductif (au sens de [SGA3], voir Exp. XIX, déf. 2.7) s’il est lisse et affine sur S , et à fibres géométriques réductives et connexes au sens de la théorie sur les corps ; sur les fibres géométriques, son radical est donc un tore (voir [SGA3, Exp. XIX, déf. 1.6.1]). Il est de plus semi-simple si ces fibres sont semi-simples (radical trivial). Notons qu’être réductif ou semi-simple est en fait par descente une propriété locale pour toutes les topologies considérées dans cet article.

Le but de cette note est de faire le lien entre les groupes linéaires dits “classiques” et la classification de [SGA3]. Cet exposé s’adressant en priorité aux lecteurs qui ne sont pas habitués à la terminologie employée dans l’ouvrage, de nombreux détails de calculs, exemples et traductions sont fournis.

Notations. — Dans tout ce qui suit, R désigne un anneau associatif commutatif et unitaire, S un schéma de base quelconque, implicitement égal à $\mathrm{Spec}(R)$ lorsqu’il est affine.

Soit X un schéma sur S , et soit $T \rightarrow S$ un morphisme de schémas. La notation X_T désigne le produit fibré de X sur T . Lorsque T est le spectre d’un anneau R' , on s’autorisera également la notation $X_{R'}$ pour X_T . Un point $s \in S$ correspond à un morphisme de son corps résiduel $\kappa(s)$ vers S , et $X_s = X_{\kappa(s)}$ est alors appelé *fibre* en s . Si \bar{s} est le spectre d’une clôture algébrique de $\kappa(s)$, le schéma $X_{\bar{s}}$ est appelé *fibre géométrique*.

Rajouter des remerciements à Philippe Gille, Cyril Demarche, Asher Auel.

fonctPoints_sec

2. Préliminaires

2.1. Foncteurs de points. — Un S -foncteur de points est un préfaisceau d’ensembles sur la catégorie des S -schémas. On peut restreindre ce foncteur à la sous-catégorie pleine des schémas affines sur S . Un schéma X définit un

foncteur de points qui à un S -schéma Y associe $X(Y)$, ses Y -points, c'est-à-dire l'ensemble des morphismes de S -schémas de Y vers X .

Or, le foncteur qui envoie un S -schéma sur son foncteur de points restreint aux S -schémas affines sur S est pleinement fidèle (voir [DG70, th. de comparaison, p. 18]). En d'autres termes, pour connaître un schéma, (ou un morphisme de schémas) il suffit de connaître ses points sur les schémas affines sur S . Nous définirons donc de nombreux schémas en donnant leurs S -points sur les schémas affines sur S , puis en montrant que le foncteur est représentable, ce qui montre que le foncteur de points s'étend de manière unique à tout les schémas sur S . Pour décrire un morphisme de schémas, il suffit alors de donner des morphismes de foncteurs de points. Autrement dit, lorsque X_1 et X_2 sont deux S -schémas, la donnée d'un morphisme de S -schémas $X_1 \rightarrow X_2$ revient à la donnée d'applications d'ensembles $X_1(Y) \rightarrow X_2(Y)$ pour tout S -schéma Y , de manière fonctorielle en Y . Il suffit même de donner ces morphismes pour les schémas Y affines sur S , par ce qui précède. Ce dernier point est particulièrement utile pour définir des morphismes de schémas sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$, car il suffit alors de décrire le morphisme sur tout les R -points, R étant un anneau. Par exemple, pour donner une structure de schéma en groupes sur un S -schéma X , on décrit les morphismes donnant la structure de groupe sur chaque $X(Y)$, de manière fonctorielle en Y .

Un S -foncteur de points peut être un faisceau pour différentes topologies de Grothendieck. Celles considérées dans le cadre qui nous occupe sont les topologies de Zariski, étale et dans une moindre mesure fppf et fpqc (dans l'ordre de la moins fine à la plus fine). Tout foncteur de points représentable est automatiquement un faisceau fpqc, donc fppf, donc étale, donc Zariski.

2.2. Structures. —

2.2.1. Structures élémentaires. — Rappelons brièvement et de manière informelle⁽¹⁾ la notion d'objet \mathfrak{X} en une structure \mathbf{struc} donnée sur une catégorie \mathcal{C} . Une telle structure sur une famille d'objets $\mathfrak{X} = (X_i)_{i \in I}$, souvent réduite à un objet, d'une catégorie \mathcal{C} munie de produits finis est donnée par :

- des objets (Y_j) , $j \in J$ de \mathcal{C} sont spécifiés (ils joueront le rôle de constantes, ils ne dépendent que de \mathbf{struc} , pas de l'objet \mathfrak{X} en \mathbf{struc} spécifique ; ex : $I = \{0\}$ et $Y_0 = \mathbf{O}_S$) ;
- des morphismes de \mathcal{C} entre des produits (finis) des Y_i sont spécifiés (jouant également le rôle de constantes, ex : la multiplication par -1 de $\mathbf{G}_m \rightarrow \mathbf{G}_m$) ;

1. Une structure se formalise de manière précise en termes de catégorie tensorielle libre sur des morphismes quotientée par des relations données par des diagrammes, puis un objet en cette structure par un foncteur monoïdal partant de cette catégorie.

- des morphismes entre des produits (finis) de copies des X_i , et des Y_j sont spécifiés (ex : $\mathbf{G}_m \times X \rightarrow X$). N.B. La forme de la source et du but de ces morphismes ne dépend que de \mathbf{struc} , pas de l'objet \mathfrak{X} spécifique.
- un nombre fini de diagrammes supposés commutatifs, appelées contraintes. Ces diagrammes sont entre des produits de copies des X_i et des Y_i , et impliquent des morphismes construits itérativement par composées et produits cartésiens en partant de l'identité, des morphismes précédents, des applications diagonales et des échanges de deux facteurs identiques. N.B. La forme de ces diagrammes et la manière itérative dont ils sont construits ne dépend que de \mathbf{struc} , pas de l'objet \mathfrak{X} spécifique.

On a une notion évidente de morphisme entre deux objets en \mathbf{struc} : c'est une famille de morphismes $f_i : X_i \rightarrow X'_i$ qui commutent à tout les morphismes définissant les objets \mathfrak{X} et \mathfrak{X}' en \mathbf{struc} . Cela définit donc la catégorie des objets en \mathbf{struc} de \mathcal{C} , notée $\mathcal{C}^{\mathbf{struc}}$.

Remarque 2.2.1.1. — La structure \mathbf{struc} comprend la donnée de la catégorie \mathcal{C} , car elle comprend la donnée des objets et morphismes constants dans \mathcal{C} .

structures_exem

Exemple 2.2.1.2. — Tout d'abord, la structure triviale sur un objet est celle pour laquelle les constantes, morphismes et diagrammes sont vides. Mentionnons encore les structures suivantes (sur des S-foncteurs, ou des S-faisceaux pour une certaine topologie) que nous rencontrerons :

1. groupe \mathbf{gr} : le seul objet constant est S , les morphismes sont l'unité $S \rightarrow G$, la loi de groupe $G \times G \rightarrow G$ et l'inverse $G \rightarrow G$, et les diagrammes commutatifs sont ceux bien connus.
2. groupe abélien : une structure de groupe, avec la commutativité ajoutée aux diagrammes ;
3. anneau : une loi d'addition, de multiplication et les diagrammes évidents. En particulier, dans la catégorie des S-foncteurs, l'anneau que nous noterons \mathbf{O}_S . Il est construit comme tiré à S de $\mathbf{O} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[T])$, et vérifie $\mathbf{O}_S(T) = \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$, qu'on abrège en $\Gamma(T)$, pour tout schéma T au-dessus de S . En particulier, $\mathbf{O}(\mathrm{Spec}(R)) = R$ pour tout anneau R (cf. [SGA3, Exp. I, 4.3.3]). Les morphismes structuraux sont ceux qui induisent la structure d'anneau dessus.
4. \mathbf{O}_S -module : la structure de l'anneau \mathbf{O}_S (qui ne fait donc intervenir que des objets constants) et une structure de groupe abélien et d'action de \mathbf{O}_S avec les contraintes habituelles ;
5. \mathbf{O}_S -algèbre \mathbf{alg} : la structure de \mathbf{O}_S -module assorti d'une multiplication avec les contraintes habituelles ;
6. \mathbf{O}_S -algèbre à involution \mathbf{alginv} : la structure de \mathbf{O}_S -algèbre avec un morphisme σ du \mathbf{O}_S -module sous-jacent, qui anti-commute à la multiplication et qui vérifie $\sigma^2 = \mathrm{Id}$ (et qui est donc un automorphisme de module).

anneastruc_item

OSmod_item

bilinéaire_item

7. \mathbf{O}_S -forme bilinéaire (resp. symétrique, alternée), c'est-à-dire une structure de \mathbf{O}_S -module, avec un morphisme $M \times M \rightarrow \mathbf{O}_S$ qui est bilinéaire (resp. et symétrique ou alterné).

quadratique_item

8. \mathbf{O}_S -module quadratique : une structure de \mathbf{O}_S module, à laquelle on rajoute un morphisme $q : M \rightarrow \mathbf{O}_S$ qui est quadratique en la multiplication par les scalaires de \mathbf{O}_S et tel que le module polaire associé satisfait aux contraintes de bilinéarité de l'exemple précédent.

modulentriv_item

9. \mathbf{O}_S -module trivialisé n -*Triv* : une structure de \mathbf{O}_S -module, ainsi qu'un isomorphisme $M^{\otimes n} \rightarrow \mathbf{O}_S$ (c'est-à-dire en fait deux morphismes dont la composée fait l'identité dans les deux sens). **On peut peut-être retirer puisque c'est un produit fibré.**

moduledet_item

10. \mathbf{O}_S -module déterminant \mathfrak{det} : la structure précédente pour $n = 2$. **Même remarque.**

groupeaction_item

11. G -action à gauche G -**act** (ou à droite **act**- G) : étant donné un objet en groupes G , utilisé comme objet constant, un G -objet est un objet X muni d'un morphisme $G \times X \rightarrow X$, satisfaisant les diagrammes d'associativité et de l'action triviale du neutre. Cette action peut être à gauche ou à droite, auquel cas le morphisme considéré est plutôt $X \times G \rightarrow X$.

Remarque 2.2.1.3. — Dans les exemples précédents, il est parfois utile d'ajouter des morphismes auxquels on ne pense pas immédiatement pour avoir les bonnes contraintes. Par exemple dans l'exemple des modules quadratiques, il faut construire la forme polaire. Pour cela, il est pratique d'utiliser le morphisme “multiplication par -1 ”, endomorphisme de l'objet constant \mathbf{O}_S et qu'on ajoutera donc aux morphismes de la structure.

2.2.2. Changement de base des structures. — Afin de formaliser les changements de base, la première notion à introduire est celle de catégorie fibrée sur une catégorie de base, qui sera pour nous toujours celle des S -schémas, aussi nous nous limitons à ce cas.

catfib_defi

Définition 2.2.2.1. — Une *Catégorie fibrée scindée* sur les S -schémas, ou plus simplement une *S -catégorie fibrée* est la donnée pour tout schéma T sur S d'une catégorie \mathcal{C}_T appelée fibre sur T , et de foncteurs de changement de base $\phi_{T' \rightarrow T} : \mathcal{C}_T \rightarrow \mathcal{C}_{T'}$ pour tout S -morphisme $T' \rightarrow T$. Ces foncteurs doivent respecter la composition, à un isomorphisme canonique près, que nous supposons être une égalité pour simplifier l'exposition.

Comme il est de coutume, si X est un objet de \mathcal{C}_T et T' un T -schéma, nous désignerons son changement de base $\phi_{T' \rightarrow T}(X)$ par $X_{T'}$.

fonctfib_defi

Définition 2.2.2.2. — Un foncteur F d'une S-catégorie fibrée \mathcal{C} vers une autre \mathcal{D} est la donnée, pour chaque T sur S , d'un foncteur $F_T : \mathcal{C}_T \rightarrow \mathcal{D}_T$, de manière à commuter avec les foncteurs de changement de base.

produitfibre_defi

Définition 2.2.2.3. — Soient $F_1 : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{D}$ et $F_2 : \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{D}$ deux foncteurs de S-catégories fibrées. Alors on définit le produit fibré de catégories fibrées $\mathcal{C}_1 \times_{\mathcal{D}} \mathcal{C}_2$ comme la catégorie fibrée dont les objets sur T sont les triplets (x_1, x_2, ϕ) avec $x_1, x_2 \in \mathcal{C}_T$, $\phi : F_1(x_1) \simeq F_2(x_2)$ et dont les morphismes $(x_1, x_2, \phi) \rightarrow (y_1, y_2, \psi)$ sont les paires de morphismes $f_1 : x_1 \rightarrow y_1$ et $f_2 : x_2 \rightarrow y_2$ tels que $\psi \circ F_1(f_1) = F_2(f_2) \circ \phi$.

Notons P_i pour $i = 1, 2$ les foncteurs de projection évidents $\mathcal{C}_1 \times_{\mathcal{D}} \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_i$, et notons c l'isomorphisme de foncteurs $F_1 P_1 \simeq F_2 P_2$ donnée par $c_{(x_1, x_2, \phi)} = \phi$. Il est immédiat que le produit fibré $\mathcal{C}_1 \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{C}_2$ satisfait à la propriété universelle suivante.

univprodfib_prop

Proposition 2.2.2.4. — Étant donné une S-catégorie fibrée \mathcal{A} , deux foncteurs $G_1 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}_1$ et $G_2 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}_2$ et un isomorphisme de foncteurs $a : F_1 G_1 \xrightarrow{\sim} F_2 G_2$, il existe un unique foncteur H tel que pour $i = 1, 2$, on ait $P_i H = F_i$ et l'égalité de morphismes de foncteurs $cH = a$.

Schéma de la propriété universelle.

Donner un bon exemple, du genre les déploiements de Clifford.

Un *groupoïde* est une catégorie dans laquelle tous les morphismes sont des isomorphismes. À toute catégorie \mathcal{C} , on peut associer un groupoïde \mathcal{C}_{\simeq} , qui a les mêmes objets, mais dont les morphismes sont les seuls isomorphismes de \mathcal{C} . De même, le groupoïde \mathcal{C}_{\simeq} associé à une catégorie fibrée \mathcal{C} est la catégorie fibrée de fibres $(\mathcal{C}_{\simeq})_T = (\mathcal{C}_T)_{\simeq}$.

Ajoutons maintenant une topologie de Grothendieck \mathbb{T} sur la catégorie des S-schémas, ce qui nous permettra de parler de propriétés locales d'objets de la catégorie fibrée. Cette topologie sera souvent sous-entendue.

Définition 2.2.2.5. — Un S-foncteur de points, i.e. un foncteur des S-schémas vers les ensembles, sera dit un S-faisceau (pour la topologie \mathbb{T}) s'il satisfait à **blablabla**.

On vérifie, voir [SGA3, Exp. IV, Prop. 4.5.2], que la restriction des S-foncteurs de points vers les T-foncteurs de points, envoyant X sur X_T donné par $X_T(T') = X(T')$ pour tout $T' \rightarrow T$, envoie bien les S-faisceaux sur les T-faisceaux. On peut donc définir la catégorie fibrée des faisceaux (pour la topologie \mathbb{T} sur S), en utilisant les restrictions comme foncteurs de changement de base. Nous noterons cette catégorie $\mathcal{Faisc}_{S, \mathbb{T}}$, voire \mathcal{Faisc}_S .

Nous voulons maintenant pouvoir manipuler des objets en une structure, mais sur une catégorie fibrée, et de manière compatible au changement de base.

En d'autres termes, étant donné une structure \mathbf{struc} dans la catégorie \mathcal{C}_S , nous allons définir la S-catégorie fibrée des objets en \mathbf{struc} . Il est immédiat qu'une structure \mathbf{struc} dans \mathcal{C}_S fournit par changement de base une structure \mathbf{struc}_T sur \mathcal{C}_T : les objets et morphismes constants sont obtenus par changement de base de ceux de \mathcal{C}_S à \mathcal{C}_T , et les objets en \mathbf{struc}_T doivent être muni de morphismes satisfaisant aux "mêmes" contraintes. Il est donc immédiat que le changement de base définit un foncteur de $\mathcal{C}_S^{\mathbf{struc}} \rightarrow \mathcal{C}_T^{\mathbf{struc}_T}$.

catfibrestruc_defi

Définition 2.2.2.6. — Étant donnée une S-catégorie fibrée \mathcal{C} et une structure \mathbf{struc} dans \mathcal{C}_S , on définit la catégorie fibrée $\mathcal{C}^{\mathbf{struc}}$ de fibre $(\mathcal{C}^{\mathbf{struc}})_T = (\mathcal{C}_T)^{\mathbf{struc}_T}$ et dont les changements de base sont induits par ceux de \mathcal{C} .

Donner un exemple.

2.2.3. Champs. — Pour pouvoir décrire concrètement les catégories de toreseurs sous des groupes classiques, nous avons besoin d'un cadre dans lequel on puisse tordre un objet d'une catégorie par un toseur sous son groupe d'automorphismes, et obtenir ainsi un nouvel objet de cette catégorie. Le bon cadre pour ce type d'opérations est celui des champs, tel que développé dans [Gi71], dont nous n'aurons en fait besoin que d'une petite part. Aussi, le but de ce qui suit est d'introduire et de rendre palpable la partie de la théorie dont nous aurons besoin pour le lecteur qui ne connaît pas les champs.

De manière imagée, un champ est une catégorie fibrée (sur une catégorie de base munie d'une topologie) dans laquelle on peut définir les objets et les morphismes localement par recollement. En étant encore plus imprécis, c'est une sorte de faisceau de catégories. Formellement :

SChamp_defi

Définition 2.2.3.1. — Un S-*champ* (pour la topologie \mathbb{T}) est une S-catégorie fibrée (voir déf. 2.2.2.1) \mathcal{C} qui vérifie pour tout S-schéma T :

faisceauchamp_item

1. Pour tout x, y objets de \mathcal{C}_T , le T -foncteur de points $T' \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{T'}}(x_{T'}, y_{T'})$ est un T -faisceau.
2. La descente sur les objets : Soit $(T_i)_{i \in I}$ un recouvrement de T . Notons T_{ij} le produit fibré de $T_i \times_T T_j$. Soient des objets $x_i \in \mathcal{C}_{T_i}$, et des isomorphismes $\psi_{ij} : (x_i)_{T_{ij}} \simeq (x_j)_{T_{ij}}$ vérifiant la condition de compatibilité évidente sur les produits fibrés triples. Alors il existe un unique (à isomorphisme unique près) objet $x \in \mathcal{C}_T$ muni d'isomorphismes $\lambda_i : x_i \simeq x_{T_i}$ tels que $\psi_{ij} = (\lambda_j)_{T_{ij}}^{-1} \circ (\lambda_i)_{T_{ij}}$ pour tout i, j .

Un morphisme de S-champs est un foncteur de S-catégories fibrées.

Exemple 2.2.3.2. — Le champ associé à un faisceau X sur S , est la S-catégorie fibrée dont la fibre sur le S-schéma T est la catégorie dont les objets sont les éléments de $X(T)$ avec pour morphismes $\mathrm{Hom}(x, x) = \{id_x\}$ et $\mathrm{Hom}(x, y) = \emptyset$ si $x \neq y$. C'est un exercice facile, qui utilise bien entendu

que X est un faisceau et pas un simple préfaisceau, dans la vérification des deux points de la définition. En particulier, le champ associé au faisceau final (constant, un point partout) n'a qu'un seul objet par fibre, et cet objet n'a qu'un seul morphisme, l'identité. Nous noterons ce champ *Final*.

fibresdiscretes_exem

Exemple 2.2.3.3. — En fait, on voit même facilement que si les fibres d'une catégorie fibrée sont discrètes et petites, c'est-à-dire que ce sont des catégories avec pour seuls morphismes les identités des objets, et ces objets forment un ensemble, comme dans l'exemple précédent, alors cette catégorie fibrée est un champ si et seulement si le foncteur de points qui à T associe l'ensemble des objets de \mathcal{C}_T est un faisceau.

Exemple 2.2.3.4. — La catégorie fibrée $\mathcal{Faisc}_{/S, \mathbb{T}}$ est un champ. C'est un exercice facile.

La morphismes sont des faisceaux est fait dans le lemme 7.23.1 Stacks Project, et la descente des objets en 7.23.2.

Faire d'autres exemples, la catégorie des modules quadratiques, etc. En fait, maintenant, il va falloir tout rentrer dans les champs.

Proposition 2.2.3.5. — Si \mathcal{C} est un champ, alors \mathcal{C}_{\sim} est un champ.

Démonstration. — On peut construire l'inverse d'un morphisme localement par descente. C'est le lemme 8.5.3 du chapitre Stacks du Stacks project. \square

champstruc_prop

Proposition 2.2.3.6. — Si \mathbf{struc} est une structure dans \mathcal{C}_S , où \mathcal{C} est un S -champ, alors la catégorie fibrée $\mathcal{C}^{\mathbf{struc}}$ est un champ. En particulier si \mathbf{struc} est une structure sur les S -faisceaux, alors $\mathcal{Faisc}_{/S}^{\mathbf{struc}}$, au sens de la définition 2.2.2.6, est un champ.

Démonstration. — C'est un exercice. Essentiellement, on construit les morphismes structuraux dans \mathcal{C} , et on montre qu'ils vérifient les diagrammes par descente. \square

isoaut_notat

Notation 2.1. — Lorsque \mathcal{C} est un S -champ, et X et Y sont des objets de \mathcal{C}_S , on note $\mathbf{Hom}_{X,Y}^{\mathcal{C}}$ le S -faisceau dont les T -points sont $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_T}(X_T, Y_T)$. Lorsque $\mathcal{C}^{\mathbf{struc}}$ est le champ défini à partir d'une structure sur \mathcal{C}_S , comme en 2.2.3.6, on utilise également la notation $\mathbf{Hom}_{X,Y}^{\mathbf{struc}}$ au lieu de $\mathbf{Hom}_{X,Y}^{\mathcal{C}^{\mathbf{struc}}}$. De même, on définit les faisceaux $\mathbf{End}_X^{\mathcal{C}} = \mathbf{Hom}_X^{\mathcal{C}}$, $\mathbf{Iso}_{X,Y}^{\mathcal{C}} = \mathbf{Hom}_{X,Y}^{\mathcal{C}_{\sim}}$ et $\mathbf{Aut}_X^{\mathcal{C}} = \mathbf{Iso}_{X,X}^{\mathcal{C}}$.

prodfibchamps_prop

Proposition 2.2.3.7 (produit fibré de champs). — Le produit fibré de deux champs au-dessus d'un troisième, au sens de la définition 2.2.2.3, est un champ.

Démonstration. — Laisser en exo. \square

Cette propriété va nous permettre de construire de nombreux champs à partir d'autres. **Donner l'exemple des déploiements de Clifford, et si possible quelques autres.**

torseurs_sec

2.3. Faisceaux en groupes et toseurs. — Ce blabla doit être englobé dans la philosophie des champs. En fait, c'est juste l'étape élémentaire où on tord concrètement qui est décrite dans ce paragraphe. Expliquons maintenant comment on tord un faisceau X muni d'une action d'un faisceau en groupes H par un toseur P sous H . L'espace ainsi obtenu $P \wedge^H X$ est appelé produit contracté (déf. 2.3.2.7). Lorsque \mathfrak{X} est un objet en une structure \mathbf{struc} (ex : X est un faisceau en groupes) et que H la respecte, on peut définir le produit contracté $P \wedge^H \mathfrak{X}$, qui est également un objet en \mathbf{struc} . Sous des hypothèses raisonnables (prop. 2.3.4.5), on obtient ainsi toutes les formes de X , c'est-à-dire les faisceaux isomorphes à X localement pour la topologie considérée. C'est ce qui nous servira à obtenir tout les groupes réductifs d'un type déployé donné à partir du groupe de Chevalley correspondant. Les questions de représentabilité de ces différents faisceaux par des schémas sont regroupées dans la section 2.4 et en particulier dans la proposition 2.4.0.19.

2.3.1. Actions de groupes. — Soit H un S -faisceau en groupes et soit X un S -faisceau, muni d'une action à gauche (resp. à droite) de H , donc un objet en $H\text{-act}$ (resp. en $\text{act-}H$) comme dans l'exemple 2.2.1.2 (11) ci-dessus. Ceci est équivalent à la donnée d'un morphisme de faisceaux en groupes $H \rightarrow \mathbf{Aut}_X$ (resp. $H^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Aut}_X$) (un faisceau à groupes d'opérateurs H dans la terminologie de [SGA3]).

Considérons alors la catégorie fibrée $\mathcal{Faisc}_{/S}^{H\text{-act}}$ (resp. $\mathcal{Faisc}_{/S}^{H\text{-act}}$), qui est un champ par la proposition 2.2.3.6. Les objets de sa T -fibre sont donc les T -faisceaux munis d'une action à gauche de H_T (resp. à droite).

2.3.2. Torseurs. — Soit T une topologie de Grothendieck sur les S -schémas. Sauf mention contraire, nous supposons toujours que les faisceaux mentionnés dans cette partie sont des faisceaux au sens de cette topologie. Notons que $\mathcal{Faisc}_{/S}$ étant un champ, un morphisme f de faisceaux est un isomorphisme si et seulement s'il en est un localement.

Quelque part, il va falloir mentionner les toseurs représentables, et là, il va falloir supposer la topologie plus fine que la canonique. Voir Giraud, 1.7.2 p. 127 (pe 69). Mais pour le moment, tant qu'on reste faisceautique, on n'a besoin de rien de tout cela, il semble. Mentionner ici tout de même qu'on renvoie à la partie sur la représentabilité. Puis, dans cette partie, rajouter le blabla de Giraud sur les toseurs représentables. Dans ce qui suit, P désigne toujours un S -faisceau avec action à droite de H , donc un objet de la catégorie $(\mathcal{Faisc}_{/S}^{\text{act-}H})_S$.

Définition 2.3.2.1. — On dit que P est un pseudo-torseur ⁽²⁾ (à droite) sous H si l'application $P \times H \rightarrow P \times P$ dont les composantes sont l'action et la projection est un isomorphisme de faisceaux.

Définition 2.3.2.2. — On dit que P est un torseur sous H pour la topologie \mathbb{T} , ou un \mathbb{T} -torseur, s'il est un pseudo-torseur et que \mathbb{T} -localement, P a un point, i.e. $P(S_i) \neq \emptyset$ pour tout S_i dans un certain recouvrement de S .

On notera que contrairement à la notion de pseudo-torseur, qui n'est qu'une notion de foncteurs de points, la notion de torseur dépend bien de la topologie \mathbb{T} . Le fait que P est localement non-vidé est revient à ce que son morphisme structural $P \rightarrow S$ soit un épimorphisme de faisceau.

Exemple 2.3.2.3. — Lorsqu'on fait agir H sur lui-même à droite par translations, on obtient évidemment un torseur, appelé torseur trivial.

torseurloc_prop

Proposition 2.3.2.4. — Un faisceau P muni d'une action à droite de H est un torseur si et seulement s'il est \mathbb{T} -localement isomorphe au torseur trivial H . Autrement dit, un torseur est un faisceau avec action qui est localement trivial pour la topologie \mathbb{T} . De plus, on a alors $P_{\mathbb{T}} \simeq H_{\mathbb{T}}$ si et seulement si $P(\mathbb{T}) \neq \emptyset$.

Démonstration. — Si $P(\mathbb{T})$ contient un point p , alors on construit immédiatement un isomorphisme $H_{\mathbb{T}} \simeq P_{\mathbb{T}}$ de faisceaux avec action à droite de H en envoyant h vers $p \cdot h$, et bien entendu, si $P_{\mathbb{T}} \simeq H_{\mathbb{T}}$, alors $P(\mathbb{T}) \neq \emptyset$, puisque $H(\mathbb{T})$ contient toujours l'élément neutre. Réciproquement, si P est muni d'une action à droite de H et si $P_{\mathbb{T}} \simeq H_{\mathbb{T}}$, alors l'application $P_{\mathbb{T}} \times H_{\mathbb{T}} \rightarrow P_{\mathbb{T}} \times P_{\mathbb{T}}$ mentionnée plus haut est alors un isomorphisme. C'est donc un isomorphisme localement, donc un isomorphisme. \square

flecheIsoTors_prop

Proposition 2.3.2.5. — Si P_1 et P_2 sont des torseurs sous H , et si $f : P_1 \rightarrow P_2$ est un morphisme de faisceaux qui est équivariant sous l'action de H , alors f est un isomorphisme.

Démonstration. — Si $P_1(\mathbb{T}) \neq \emptyset$, alors $f : P_1(\mathbb{T}) \rightarrow P_2(\mathbb{T})$ est une bijection. En effet, l'action de $H(\mathbb{T})$ est transitive des deux côtés et commute à f . Si $P_2(\mathbb{T}) \ni s$, alors on utilise un recouvrement de \mathbb{T} par des T_i tels que $(P_1)_{T_i}$ est trivial pour tout i (et a donc un point). On a donc des bijection $f_{T_i} : P_1(T_i) \rightarrow P_2(T_i)$, ce qui permet de construire un point dans $P_1(\mathbb{T})$ par recollement des $f^{-1}(s_{T_i})$, ce qui ramène au cas précédent. \square

Si P est un S -torseur sous H , alors pour tout $S' \rightarrow S$, $P_{S'}$ est un $H_{S'}$ -torseur, puisqu'être un pseudo-torseur et le fait d'avoir un point localement sont deux notions stables par changement de base. On peut donc définir une

2. formellement principal homogène dans [SGA3], voir Exposé IV, §5.1.

sous-catégorie fibrée (pleine) de $\mathcal{Faisc}_{/S}^{\text{act-H}}$, donc les objets de la fibre en S' sont les faisceaux avec action de $H_{S'}$ qui sont des toseurs. Cette sous-catégorie fibrée est un champ. En effet, les morphismes de toseurs sont simplement des isomorphismes d'objets avec action à droite, donc forment des faisceaux puisque $\mathcal{Faisc}_{/S}^{\text{act-H}}$ est un champ, et on a donc également la descente des objets. De plus, étant donné un morphisme $T \rightarrow S$, on peut considérer la sous-catégorie fibrée dont les objets de la fibre en S' sont les toseurs déployés par $T \times_S S' \rightarrow T$. Elle forme également un sous-champ de manière évidente. **Il faudra justifier dans la partie de représentabilité que la sous-catégorie des toseurs représentables est encore un champ, il faudra donc prendre une topologie entre Zariski et canonique.**

torschamp_defi

Définition 2.3.2.6. — On note $\mathcal{Tors}(H)$ le champ des toseurs (à droite) sous H , et $\mathcal{Tors}(H, T/S)$ le sous-champ des toseurs déployés par $T \rightarrow S$.

prodcontract_defi

Définition 2.3.2.7. — Soient X et P des faisceaux avec action de H respectivement à gauche et à droite. On note $P \wedge^H X$ le faisceau conoyau⁽³⁾ des deux flèches $H \times P \times X \rightarrow P \times X$ données respectivement sur les points par $(h, p, x) \mapsto (ph, x)$ et $(h, p, x) \mapsto (p, hx)$. On appelle $P \wedge^H X$ le *produit contracté* de P et X .

Autrement dit, $P \wedge^H X$ est le faisceautisé du préfaisceau des orbites de H agissant sur $P \times X$ par $(h, (p, x)) \mapsto (ph^{-1}, hx)$. Il est immédiat qu'on définit ainsi un foncteur de la catégorie des S -faisceaux avec action de H (avec morphismes respectant l'action) vers les S -faisceaux.

assoccontr_lemm

Lemme 2.3.2.8. — Cette construction est associative : lorsque Q est muni d'une action à gauche de H et à droite de H' et qu'elles commutent, on a

$$(P \wedge^H Q) \wedge^{H'} X \cong P \wedge^H (Q \wedge^{H'} X).$$

D'autre part, on a évidemment $H \wedge^H X \cong X$, d'où pour tout morphisme de groupes $\phi : H' \rightarrow H$, un isomorphisme $P \wedge^{H'} H \wedge^H X \cong P \wedge^{H'} X$ où H' agit sur X à travers ϕ .

Démonstration. — Laissée au lecteur. \square

Dans ce qui suit, P désigne toujours un pseudo-torseur.

tordprod_lemm

Lemme 2.3.2.9. — Si X_1 et X_2 sont munis d'une action de H , alors l'application naturelle $P \wedge^H (X_1 \times X_2) \rightarrow (P \wedge^H X_1) \times (P \wedge^H X_2)$, obtenue par covariance

3. Pour l'existence de ce faisceau, on a fait abstraction des problèmes de théorie des ensembles sur l'existence des faisceautisés d'un préfaisceau pour une topologie de Grothendieck. Pour y remédier, il faut soit savoir que ce faisceau existe dans les cas qui nous intéressent, soit se placer dans un univers fixé comme dans [DG70].

de $P \wedge^H (-)$ et par propriété universelle du produit, est un isomorphisme. N.B. C'est l'application faisceautisée de $(p, (x_1, x_2)) \mapsto ((p, x_1), (p, x_2))$.

Démonstration. — L'application inverse se définit aisément en utilisant que P est un pseudo-torseur pour identifier $P \times X_1 \times P \times X_2$ avec $P \times X_1 \times H \times X_2$ avant de quotienter par l'action de $H \times H$. \square

orialitegroupe_prop

Proposition 2.3.2.10. — Soit $\phi : H_1 \rightarrow H_2$ un morphisme de S -faisceaux en groupes. On peut alors munir H_2 d'une action à gauche de H_1 par ϕ . L'application

$$P \mapsto P \wedge^{H_1} H_2$$

définit un foncteur de la catégorie des H_1 -torseurs (à droite) vers les H_2 -torseurs (à droite), et il y a un morphisme de foncteurs d'associativité en cas de composition de deux morphismes.

Démonstration. — Le groupe H_2 agit bien à droite sur $P \wedge^{H_1} H_2$ car les actions de H_1 à gauche et de H_2 à droite sur H_2 commutent. On vérifie qu'il en fait un torseur. La fonctorialité en P est évidente. L'associativité provient du lemme 2.3.2.8. \square

Relions maintenant les produits fibrés de groupes et les produits fibrés de champs. Soient $f_1 : G_1 \rightarrow H$ et $f_2 : G_2 \rightarrow H$ deux morphismes de S -faisceaux en groupes. Le faisceau en groupes $G = (G_1 \times_H G_2)$, défini par $(G_1 \times_H G_2)(T) = G_1(T) \times_{H(T)} G_2(T)$, est un faisceau par l'exemple 2.2.3.3 et la proposition 2.2.3.7. Considérons le foncteur fibré

$$\begin{aligned} \text{Tors}(G) &\rightarrow \text{Tors}(G_1) \times_{\text{Tors}(H)} \text{Tors}(G_2) \\ P &\mapsto (P \wedge^G G_1, P \wedge^G G_2, (P \wedge^G G_1) \wedge^{G_1} H \simeq P \wedge^G H \simeq (P \wedge^G G_1) \wedge^{G_1}) \end{aligned}$$

fibgroupechamp_prop

Proposition 2.3.2.11. — Ce foncteur $\text{Tors}(G) \rightarrow \text{Tors}(G_1) \times_{\text{Tors}(H)} \text{Tors}(G_2)$ est une équivalence de catégories fibrées si l'une des des flèches $G_1 \rightarrow H$ ou $G_2 \rightarrow H$ est un épimorphisme de faisceaux.

Démonstration. — On construit un foncteur dans l'autre sens de la manière suivante. Étant donné un triplet $(P_1, P_2, \phi : P_1 \wedge^{G_1} H \simeq P_2 \wedge^{G_2} H)$, on fabrique le produit fibré $P_1 \times_\phi P_2$, à l'aide des morphismes $P_1 \rightarrow P_2 \wedge^{G_2} H$ et $P_2 \rightarrow P_2 \wedge^{G_2} H$ définis respectivement sur les points par $p \mapsto \phi((p, 1))$ et $p \mapsto (p, 1)$. On le munit de l'action évidente de G à droite par propriété universelle du produit fibré. Enfin, on vérifie que c'est un pseudo-torseur, grâce aux mêmes propriétés de P_1 et P_2 . Reste à vérifier que localement, le pseudo-torseur obtenu a un point. On peut donc se ramener au cas où $P_1 = G_1$, $P_2 = G_2$, et $G_1 \wedge^{G_1} H = G_2 \wedge^{G_2} H = H$. Le morphisme ϕ étant H équivariant à droite, il correspond alors à la multiplication à gauche par un point h de H . Par hypothèse, quitte à localiser encore, on peut supposer qu'il est l'image d'un point point g de G_1 (resp. de G_2). Le point $(g, 1)$ (resp. $(1, g^{-1})$) est alors

dans dans le produit fibré, qui est non vide. Cette construction est bien sûr fonctorielle, et le fait que le foncteur obtenu donne un inverse à isomorphisme près du précédent est laissé au lecteur. \square

Cette équivalence nous permettra de décrire les toseurs sous des noyaux, ou sous des produits cartésiens de groupes. **Référez à SL_n , μ_n , etc.**

2.3.3. Torsion et structure. — Expliquons maintenant comment un objet en une structure est tordu en un objet en la même structure. Soit \mathcal{C} une catégorie, soit H un objet en groupes de \mathcal{C} , i.e. un objet de la catégorie \mathcal{C}^{gr} , et soit \mathbf{struc} une structure élémentaire dans \mathcal{C} . Soit $\mathfrak{X} \in \mathcal{C}^{\mathbf{struc}}$, de famille $(X_i)_{i \in I}$ d'objets de \mathcal{C} . Supposons maintenant donnée une action de H sur chacun des $X_i, i \in I$ (exemple 11 de 2.2.1.2) et faisons-le agir trivialement sur tout les Y_i , puis diagonalement sur tout objet source ou but des morphismes de la structure.

tiongroupeelem_defi

Définition 2.3.3.1. — On dit que l'action de H sur \mathfrak{X} *respecte la structure \mathbf{struc}* si ces actions “diagonales” commutent à tout les morphismes de la structure. On dit alors que H agit sur X par automorphismes de \mathbf{struc} .

Soit \mathfrak{X} un S -faisceau en \mathbf{struc} , d'objets structuraux $(X_i), i \in I$. Supposons que chaque X_i soit muni d'une action de H , de manière à ce que les morphismes structurels soient équivariants quand on fait agir H trivialement sur les objets constants Y_j de \mathbf{struc} , puis diagonalement sur les produits. Alors les objets $P \wedge^H X_i$ et les morphismes obtenus en tordant les morphismes structuraux de X par P (le produit contracté commutant aux produits, par 2.3.2.9) forment un nouvel objet en \mathbf{struc} , qu'on notera $P \wedge^H \mathfrak{X}$. De plus, cette construction est fonctorielle : un morphisme d'objets en \mathbf{struc} se tord en un morphisme d'objets en \mathbf{struc} .

Ce serait bien de préciser une bonne fois pour toutes comment décrire les diagrammes (indépendamment de l'objet). Il semble qu'il faut utiliser des carquois, ce qui est pénible.

Exemple 2.3.3.2. — Tout les exemples de 2.2.1.2 conservent donc leur structure lorsqu'on les tord par un pseudo-torseur sous un groupe qui agit en respectant la structure.

Exemple 2.3.3.3. — Si $\mathfrak{X} = G$ et $H = \mathbf{Aut}_G^{\text{gr}}$ est le faisceau d'automorphismes d'objet en groupes (voir notation 2.1), alors $P \wedge^H G$ est naturellement muni d'une structure de groupe. Si plutôt $\mathfrak{X} = H = G$ muni de son action sur lui-même par conjugaison, c'est bien entendu également le cas, puisque H agit à travers $\mathbf{Aut}_G^{\text{gr}}$.

rsionmorphisme_prop

Proposition 2.3.3.4. — Si $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ est un morphisme de S -faisceaux en \mathbf{struc} , que $\phi : H \rightarrow G$ est un morphisme de S -faisceaux en groupes, que H (resp. G) agit sur \mathfrak{X} (resp. \mathfrak{Y}) en respectant la structure, et que f est H -équivariant

quand H agit sur \mathfrak{Y} à travers ϕ , alors pour tout H -torseur P , le morphisme f se tord en un morphisme $P \wedge^H \mathfrak{X} \rightarrow (P \wedge^H G) \wedge^G \mathfrak{Y}$ d'objets en \mathbf{struc} .

Démonstration. — C'est une conséquence facile de la fonctorialité. \square

Jusqu'ici, nous avons donc vu le produit contracté, qui permet de tordre par un toseur un objet en \mathbf{struc} , pour en obtenir un autre. Cette construction se généralise aux champs de la manière suivante.

Soit \mathcal{C} un S -champ, et soit H un S -faisceau en groupes. Une action (à gauche) de groupe de H sur un objet X de \mathcal{C}_T , est un morphisme de faisceaux en groupes $\phi : H_T \rightarrow \mathbf{Aut}_X$. Les paires (X, ϕ) forment donc une catégorie fibrée dite des objet à groupe d'opérateurs H , notée $Oper(H, \mathcal{C})$ où. On vérifie immédiatement que cette catégorie fibrée est un champ. Notons que lorsque $\mathcal{C} = \mathcal{Faisc}_S$, on a par définition $Oper(H, \mathcal{C}) = \mathcal{Faisc}_S^{\text{act-}H}$.

Par [Gi71, Ch. III, prop. 2.3.1], il existe un morphisme de champs (donc un foncteur de catégories fibrées)

$$Tw : Tors(H) \times Oper(H, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$$

qui envoie un couple (P, X) vers un objet noté $P \wedge^H X$ et tel que si $P = H$ le toseur trivial, alors $H \wedge^H X$ est canoniquement isomorphe (donc par un isomorphisme de foncteurs, disons i) à X . Cette paire (Tw, i) est unique à isomorphisme unique près.

Bien entendu, lorsque $\mathcal{C} = \mathcal{Faisc}^{\mathbf{struc}}$, on retrouve le produit contracté défini plus haut, par unicité.

Ce foncteur Tw n'est pas mystérieux. On peut construire $P \wedge^H X$ à la main par descente : on choisit un recouvrement (T_i) de T pour lequel P_{T_i} est trivial, et on choisit un point p_i de $P(T_i)$. Ensuite, puisque $P_{T_{ij}}$ reste trivial, il existe un élément h_{ij} de $H(T_{ij})$ qui envoie $(p_i)_{T_{ij}}$ vers $(p_j)_{T_{ij}}$. On peut donc considérer la donnée de descente $X_i = X_{T_i}$ et $X_{iT_{ij}} = X_{T_{ij}} \simeq (X_j)_{T_{ij}}$ donnée par l'action de h_{ij} . Il est immédiat que c'est une donnée de descente, et cela définit donc un objet de \mathcal{C} , puisque \mathcal{C} est un champ.

2.3.4. Formes. — Soit \mathcal{C} un S -champ, et soit X_0 un objet de \mathcal{C}_T , pour un certain $T \rightarrow S$.

formes_defi

Définition 2.3.4.1. — On dit qu'un objet X de \mathcal{C}_T est une *forme* de X_0 s'il est T -localement isomorphe à X_0 . C'est-à-dire qu'il existe un recouvrement $(T_i)_{i \in I}$ de T tel que $X_{T_i} \simeq (X_0)_{S_i}$. On dit que X est *déployé* par un morphisme $T' \rightarrow T$ si $X_{T'} \simeq (X_0)_{T'}$.

Soit X_0 un objet de \mathcal{C}_S . Une forme de $(X_0)_T$ s'envoie par changement de base $\mathcal{C}_T \rightarrow \mathcal{C}_{T'}$ sur une forme de $(X_0)_{T'}$, on obtient donc une ainsi une catégorie fibrée $\mathcal{Formes}(X_0)$. De même, $T \rightarrow S$ étant donné, on peut considérer les formes

de $(X_0)_{S'}$ déployées par un morphisme $T \times_S S' \rightarrow S$, et cela forme une sous-catégorie fibrée de la précédente, notée $\mathcal{Formes}(X_0, T/S)$.

Proposition 2.3.4.2. — *Les catégories fibrées $\mathcal{Formes}(X_0)$ et $\mathcal{Formes}(X_0, T/S)$ sont des champs.*

Démonstration. — Exercice. \square

formesstruc_defi

Proposition 2.3.4.3. — *Si X est un objet de \mathcal{C}_T et si P est un toreur sous H agissant sur X , le produit contracté $P \wedge^H X$ est une forme de X .*

Démonstration. — Par la proposition 2.3.2.4, le toreur P est T -localement isomorphe à H , et on a $H \wedge^H X \simeq X$. \square

ctfonctIsotors_prop

Proposition 2.3.4.4. — *Soit X une forme de X_0 (resp. déployée sur T'). Alors $\mathbf{Iso}_{X_0, X}$ est un toreur sous \mathbf{Aut}_{X_0} (resp. trivialisé sur T').*

Démonstration. — Clair. \square

On considère le champ $\mathcal{Tors}(\mathbf{Aut}_{X_0})$. Notons que c'est un champ en groupoïdes par la proposition 2.3.2.5. On considère également le champ en groupoïdes $\mathcal{Formes}(X_0)_{\simeq}$. Les foncteurs

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Tors}(\mathbf{Aut}_{X_0}) & \rightarrow & \mathcal{Formes}(X_0) \\ P & \mapsto & P \wedge^{\mathbf{Aut}_{X_0}} X_0 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{Formes}(X_0) & \rightarrow & \mathcal{Tors}(\mathbf{Aut}_{X_0}) \\ X & \mapsto & \mathbf{Iso}_{X_0, X} \end{array}$$

sont adjoints en utilisant pour unité et coïunité les applications évidentes

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Iso}_{X_0, X} \wedge^{\mathbf{Aut}_{X_0}} X_0 & \rightarrow & X \\ (\psi, x) & \mapsto & \psi(x) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} P & \rightarrow & \mathbf{Iso}_{X_0, (P \wedge^{\mathbf{Aut}_{X_0}} X_0)} \\ p & \mapsto & (x \mapsto (p, x)) \end{array}$$

(données ici quand $\mathbf{Iso}_{X_0, X}$ a un point, et on les construit donc par descente à partir de ce cas).

tordusformes_prop

Proposition 2.3.4.5. — *Ces foncteurs sont des équivalences de catégories fibrées inverses l'une de l'autre, entre $\mathcal{Tors}(\mathbf{Aut}_{X_0})$ et $\mathcal{Formes}(X_0)$. Ils se restreignent en une équivalence de catégories fibrées entre $\mathcal{Tors}(\mathbf{Aut}_{X_0}, T/S)$ et $\mathcal{Formes}(X_0, T/S)$.*

Démonstration. — Si X est une forme de X_0 (resp. déployée par $T \rightarrow S$), le faisceau $\mathbf{Iso}_{X_0, X}$ est un \mathbf{Aut}_{X_0} -toreur (resp. trivialisé par $T \rightarrow S$). La counité de l'adjonction $\mathbf{Iso}_{X_0, X} \wedge^{\mathbf{Aut}_{X_0}} X_0 \rightarrow X$ est un isomorphisme localement (resp. après extension à T), donc c'est un isomorphisme. On raisonne de même avec le morphisme naturel $P \rightarrow \mathbf{Iso}_{X_0, (P \wedge^{\mathbf{Aut}_{X_0}} X_0)}$. \square

produitformes_prop

Proposition 2.3.4.6. — Soient $F_1 : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{D}$ et $F_2 : \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{D}$ deux foncteurs de catégories fibrées entre S-champs. Soient $X_1 \in (\mathcal{C}_1)_S$, $X_2 \in (\mathcal{C}_2)_S$ et $\phi : F_1(X_1) \simeq F_2(X_2)$ un isomorphisme, donc un objet $X_0 = (X_1, X_2, \phi)$ de $(\mathcal{C}_1 \times_{\mathcal{D}} \mathcal{C}_2)_S$. Alors $\mathbf{Aut}_{X_0} \simeq \mathbf{Aut}_{X_1} \times_{\mathbf{Aut}_{F_1(X_1)}} \mathbf{Aut}_{X_2}$. Supposons de plus que

$$\mathbf{Aut}_{X_1} \times \mathbf{Aut}_{X_2} \longrightarrow \mathbf{Iso}_{F(X_1), F(X_2)}$$

donné sur les points par $(f, g) \mapsto F_2(g) \circ \phi \circ F_1(f^{-1})$ est un épimorphisme de faisceaux (ce qui est en particulier le cas si $\mathbf{Aut}_{X_1} \rightarrow \mathbf{Aut}_{F_1(X_1)}$ ou $\mathbf{Aut}_{X_2} \rightarrow \mathbf{Aut}_{F_2(X_2)}$ est un épimorphisme de faisceaux). Alors le foncteur fibré $\mathbf{Formes}(X_0) \rightarrow \mathbf{Formes}(X_1) \times_{\mathbf{Formes}(F_1(X_1))} \mathbf{Formes}(X_2)$ obtenu par la propriété universelle du produit fibré est une équivalence de catégories.

Démonstration. — La propriété sur les groupes d'automorphismes est immédiate sur les points. L'équivalence de catégories suit alors des propositions 2.3.2.11 et 2.3.4.5. \square

On veut maintenant pouvoir comparer le faisceau en groupes d'automorphismes de $X = P \wedge^H X_0$ avec le groupe $P \wedge^H \mathbf{Aut}_X$ où H agit sur \mathbf{Aut}_X par automorphismes intérieurs.

auttordus_prop

Proposition 2.3.4.7. — Considérons le morphisme de faisceaux en groupes

$$P \wedge^H \mathbf{Aut}_X \longrightarrow \mathbf{Aut}_{(P \wedge^H X)}$$

défini sur les points par

$$(p, a) \mapsto ((p', x) \mapsto (p, ah_{p,p'}(x)))$$

où $h_{p,p'} \in H$ est tel que $ph_{p,p'} = p'$. C'est un isomorphisme.

Démonstration. — Tout d'abord, il faut vérifier que ce morphisme est bien défini et respecte les structures de groupes. Ce point est laissé au lecteur. Il suffit ensuite de prouver que c'est un isomorphisme après trivialisations de P . Or dans ce cas, à isomorphismes canoniques près, c'est l'application identité de \mathbf{Aut}_X . \square

Remarque 2.3.4.8. — Le cas particulier où $H = \mathbf{Aut}_X$ est souvent utile.

Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un morphisme de S-champs, i.e. un foncteur de catégories fibrées. Pour tout objet X de \mathcal{C} , on a un donc morphisme $\mathbf{Aut}_X \rightarrow \mathbf{Aut}_{F(X)}$. Par exemple, un \mathbf{O}_S -module quadratique est naturellement un \mathbf{O}_S -module tout court. Dans cette situation, on a alors le résultat suivant.

foncttors_prop

Proposition 2.3.4.9. — Soit P un tore sous \mathbf{Aut}_X , et soit P' le tore sous $\mathbf{Aut}_{F(X)}$ obtenu en poussant P le long de $\mathbf{Aut}_X \rightarrow \mathbf{Aut}_{F(X)}$.

fonctobjet_item

1. On a un isomorphisme naturel $P' \wedge^{\mathbf{Aut}_{F(X)}} F(X) \simeq F(P \wedge^{\mathbf{Aut}_X} X)$.

fonctaut_item

2. Par la proposition 2.3.3.4, le morphisme $\mathbf{Aut}_X \rightarrow \mathbf{Aut}_{F(X)}$ se tord en le morphisme $\mathbf{Aut}_{P \wedge \mathbf{Aut}_X X} \rightarrow \mathbf{Aut}_{F(P \wedge \mathbf{Aut}_X X)}$, en utilisant les identifications de la proposition 2.3.4.7 et du point précédent.

Démonstration. — Ajouter. Probablement plus facile avec les toreseurs iso au lieu de toreseurs abstraits, mais je sais le faire de toutes manières, c'est juste une question de recopiage de brouillons. \square

Exemple 2.3.4.10. — Faire le morphisme de champ donné par un oubli de structure (ex : modules quadratiques vers modules) et dire ce que ça dit.

isoFoncFib_prop

Proposition 2.3.4.11. — Soient $F_1, F_2 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ deux foncteurs fibrés entre deux champs. Supposons que pour un objet $X_0 \in \mathcal{C}$, on ait un isomorphisme $\phi : F_1(X_0) \simeq F_2(X_0)$ et que la conjugaison par cet isomorphisme $\text{int}_\phi : \mathbf{Aut}_{F_1(X_0)} \rightarrow \mathbf{Aut}_{F_2(X_0)}$ fasse commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Aut}_{X_0} & \xrightarrow{F_1} & \mathbf{Aut}_{F_1(X_0)} \\ & \searrow F_2 & \downarrow \text{int}_\phi \\ & & \mathbf{Aut}_{F_2(X_0)}. \end{array}$$

Alors F_1 et F_2 se restreignent en des foncteurs $\mathcal{F}ormes(X_0) \rightarrow \mathcal{F}ormes(F_1(X_0)) = \mathcal{F}ormes(F_2(X_0))$, munis d'un isomorphisme de foncteurs canoniquement induit par ϕ .

Démonstration. — Par la proposition 2.3.4.5, il suffit de considérer les objets de la forme $P \wedge^{\mathbf{Aut}_{X_0}} X_0$. Les foncteurs se restreignent par le point 1 de la proposition 2.3.4.9 et l'isomorphisme de foncteurs est donné par

$$F_1(P \wedge^{\mathbf{Aut}_{X_0}} X_0) \simeq P \wedge^{\mathbf{Aut}_{F_1(X_0)}} F_1(X_0) \simeq P \wedge^{\mathbf{Aut}_{F_2(X_0)}} F_2(X_0) \simeq F_2(P \wedge^{\mathbf{Aut}_{X_0}} X_0).$$

 \square

Attention, ici, il faut s'assurer que \mathbf{O}_S est bien lui-même un faisceau. C'est certainement le cas pour toute topologie plus fine que la canonique, car il est bien sûr un faisceau Zariski et représentable localement, donc représentable. Par contre, en général, c'est peut-être un peu glissant, ou alors il faut prendre le faisceautisé de \mathbf{O}_S . Si $\mathbf{struc} = \mathbf{alg}$ et si A est un faisceau en \mathbf{O}_S -algèbres, on peut considérer son faisceau des éléments inversibles pour la multiplication, noté $\mathbf{GL}_{1,A}$, et qui est naturellement un faisceau en groupes. Soit maintenant H un faisceau en groupes qui agit sur A en respectant sa structure d'algèbre, il agit donc sur $\mathbf{GL}_{1,A}$ en respectant la structure \mathbf{gr} . Soit P un toseur sous H . Dans le même esprit que la proposition 2.3.4.7 et avec une preuve analogue, on obtient :

GLtordu_prop

Proposition 2.3.4.12. — Le morphisme $P \wedge^H \mathbf{GL}_{1,A} \rightarrow \mathbf{GL}_{1,P \wedge^H A}$ est un isomorphisme.

Si G est un faisceau en groupes, on définit son centre \mathbf{Centre}_G par

$$\mathbf{Centre}_G(T) = \{g \in G(T), gg' = g'g, \forall T' \longrightarrow T \text{ et } g' \in G(T')\}.$$

On vérifie facilement que c'est bien un faisceau. Pour tout faisceau en groupes G , on a des morphismes canoniques de faisceaux $G \rightarrow G/\mathbf{Centre}_G \rightarrow \mathbf{Aut}_G^{\text{gr}}$.

intfortint_defi

Définition 2.3.4.13. — Si G est un faisceau en groupes, on dit que G' est une forme intérieure (resp. fortement intérieure) de G s'il est obtenu en tordant G par un torseur provenant d'un torseur sous G/\mathbf{Centre}_G (resp. sous G).
 Veut-on également parler de formes qui proviennent du groupe simplement connexe ? Ce serait probablement intéressant dans certains cas adjoints.

En particulier, lorsque G est adjoint, il est de centre trivial, et toutes ses formes intérieures sont fortement intérieures.

Soit G' un sous-faisceau en groupes normal d'un faisceau en groupes G , et soit H un faisceau en groupes agissant sur G et dont l'action préserve G' . L'action de H sur G se restreint à G' et descend au quotient G/G' en rendant les morphismes $G' \rightarrow G$ et $G \rightarrow G/G'$ équivariants.

torsionsec_prop

Proposition 2.3.4.14. — Soit P un torseur sous un faisceau en groupes H agissant sur G en préservant G' , par exemple si H agit par automorphismes intérieurs de G . La suite exacte de faisceaux en groupes

$$1 \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow G/G' \longrightarrow 1$$

se tord en une suite exacte de faisceaux en groupes

$$1 \longrightarrow P \wedge^H G' \longrightarrow P \wedge^H G \longrightarrow P \wedge^H (G/G') \longrightarrow 1.$$

Démonstration. — Il est évident que les groupes et les morphismes se tordent, et la suite reste exacte : utiliser que l'application naturelle du tordu d'un noyau vers le noyau des tordus est un isomorphisme puisque c'en est un localement après trivialisations de P , de même pour les images. \square

secautext_rema

Remarque 2.3.4.15. — La proposition qui précède s'applique en particulier au cas où G est le groupe des automorphismes de G' et où G' s'inclut dedans comme les automorphismes intérieurs. On notera qu'il agit alors sur G' par un automorphisme, et sur lui-même par automorphismes intérieurs, et que l'inclusion de G' dans G est compatible à ces deux actions. En d'autres termes, on peut voir un automorphisme extérieur de G' comme un automorphisme intérieur, mais sur le groupe plus gros G .

Corriger ce paragraphe parce qu'on a désormais défini les actions de groupe en mettant le groupe dans les objets constants. Lorsque (G, X) est muni d'une structure d'action de groupe (voir le point 11 de 2.2.1.2), si H agit sur G et sur X en respectant cette action, le tordu de (G, X) par H est donc encore une action de groupe. Nous allons utiliser ce point essentiellement dans deux situations. Soit Q un sous-faisceau en groupes de G . Alors $(G, G/Q)$ est naturellement muni d'une telle structure d'action de groupe.

Exemple 2.3.4.16. — Si $H = G$ agit sur lui-même par automorphismes intérieurs, ainsi que sur G/Q à gauche, alors la structure d'action de groupe sur $(G, G/Q)$ est respectée, et on obtient pour tout torseur P sous G une paire $(P \wedge^G G, P \wedge^G G/Q)$.

Exemple 2.3.4.17. — Supposons qu'on a une suite exacte de faisceaux en groupes

$$1 \longrightarrow G \longrightarrow H \xrightarrow{\phi} E \longrightarrow 1$$

muni d'une section $s : E \rightarrow H$ (ce qui est équivalent à se donner un isomorphisme $G \rtimes E \simeq H$). Faisons agir E sur G à travers s par conjugaison (dans H) et supposons que Q est un sous-faisceau en groupes de G préservé par cette action de E . Considérons l'action de H sur lui-même donnée par $(h, g) \mapsto h \cdot g \cdot (s \circ \phi(h^{-1}))$. Alors

- Cette action préserve G et les orbites de G sous Q (agissant à droite). Elle induit donc une action de H sur G/Q .
- Faisons agir H sur G par conjugaison sur G . Avec l'action précédente, cela fournit une action de H sur $(G, G/Q)$. Cette action est compatible à la structure d'action de groupe $(G, G/Q)$.

Pour tout H -torseur, le tordu $(P \wedge^H G, P \wedge^H G/Q)$ est donc bien toujours muni d'une structure d'action de groupe.

Plus généralement, on peut tordre de même en utilisant un torseur sous tout groupe H' muni d'un morphisme $f : H' \rightarrow H$.

Cet exemple s'applique en particulier lorsque G est un S -groupe semi-simple adjoint, que $H = \text{Aut}_G$ et que Q est un sous-groupe parabolique standard défini par un sous-ensemble du diagramme de Dynkin préservé par tout automorphisme de celui-ci. Ces paraboliqes sont dits adaptés à un épinglage dans la terminologie de [SGA3], voir [SGA3, Exp. XXVI, déf. 1.11]. Lorsqu'on utilise $H' = E$ et $f = s$, on dit qu'on est dans la situation *quasi-déployée*.

2.3.5. Suites exactes de cohomologie. — Peut-être essayer d'expliquer cela comme une suite exacte de champs pointés, en disant qu'à chaque étape, on a une équivalence de catégorie entre la catégorie des objets isomorphe à l'objet particulier, et les gugusses qui viennent du foncteur d'avant. Ensuite, en passant aux classes d'iso (et en fixant la base) on trouve la suite exacte longue en cohomologie.

En présence d'une suite exacte courte de \mathbb{T} -faisceaux en groupes

$$1 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_2 \longrightarrow G_3 \longrightarrow 1,$$

on obtient une suite exacte longue en cohomologie

$$(1) \quad 1 \longrightarrow G_1(S) \longrightarrow G_2(S) \longrightarrow G_3(S) \longrightarrow H_{\mathbb{T}}^1(S, G_1) \longrightarrow H_{\mathbb{T}}^1(S, G_2) \longrightarrow H_{\mathbb{T}}^1(S, G_3)$$

où $H_{\mathbb{T}}^1(S, G)$ désigne l'ensemble des classes d'isomorphismes de S -torseurs sous G , pointé par G lui-même. Les morphismes entre les points des groupes sont les morphismes évidents, les morphismes entre $H_{\mathbb{T}}^1$ sont induits par la fonctorialité 2.3.2.10 et le morphisme $G_3(S) \rightarrow H_{\mathbb{T}}^1(S, G_1)$ envoie un point s de $G_3(S)$ sur la fibre image réciproque de s dans G_2 , qui est naturellement un G_1 -torseur. L'exactitude en $G_1(S)$ et $G_2(S)$ est en tant que groupes, alors que c'est en tant qu'ensembles pointés pour le reste de la suite. Voir [Gi71, Ch. III, prop. 3.3.1] pour la preuve de ces faits.

Dans certains cas, la suite exacte longue se prolonge à un ensemble $H_{\mathbb{T}}^2$, défini à l'aide de gerbes. Survolons donc la définition et les quelques propriétés des gerbes qui nous serviront à définir et à utiliser l'ensemble $H_{\mathbb{T}}^2(S, A)$ d'un schéma en groupes abéliens A sur S . La référence de base [Gi71] traite ces questions dans un grand degré de généralité. Nous avons au contraire cherché à traduire autant que possible cette généralité dans les cas particuliers qui nous intéressent, ce qui nous conduit à énoncer des définitions dans un cadre beaucoup plus restreint, mais probablement plus familier au lecteur peu au fait de la cohomologie non abélienne.

Définition 2.3.5.1. — Une S -gerbe est un S -champ \mathcal{G} pour lequel toutes les catégories \mathcal{G}_T sont des groupoïdes, et qui est :

- localement non vide : pour tout T sur S , il existe un recouvrement $(T_i)_{i \in I}$ de T tel que pour tout i , la catégorie \mathcal{G}_{T_i} a au moins un objet (il suffit de l'imposer pour $T = S$) ;
- localement connexe : pour tout couple d'objets x et y de \mathcal{G}_T , il existe un recouvrement $(T_i)_{i \in I}$ de T tel que $\text{Hom}_{\mathcal{G}_{T_i}}(x_{T_i}, y_{T_i})$ est non vide pour tout i .

Un morphisme de S -gerbes est un morphisme de champs, donc un foncteur de catégories fibrées.

Notons que ces conditions sont conservées par restriction de la catégorie fibrée de base des S -schémas aux T -schémas, ce qui définit un foncteur de changement de base des S -gerbes vers les T -gerbes.

Exemple 2.3.5.2. — Soit G un faisceau en groupes sur S . Le champ des G -torseurs $\text{Tors}(G)$ est une gerbe. En effet, la première condition est triviale, puisque le toseur trivial G est présent dans toute fibre. La deuxième condition provient de la proposition 2.3.2.4.

selcohomologie_eq

Définition 2.3.5.3. — Une S -gerbe isomorphe à la gerbe Tors_G d'un S -faisceaux en groupes G est dite *neutre*.

Proposition 2.3.5.4. — *Toute gerbe est localement neutre.*

Démonstration. — Localement, une gerbe \mathcal{G} est non-vide et on prend pour G le groupe des automorphismes d'un objet x . Remarquons que les objets de \mathcal{G}_T sont des formes de $x\mathcal{G}_T$, par connexité locale de la gerbe, et que toutes les formes de x sont bien des objets de \mathcal{G}_T , à isomorphisme près, par descente. On utilise alors une équivalence de catégories analogue à celle de la proposition 2.3.4.5 entre \mathcal{G}_T et les \mathbf{Aut}_x -torseurs. \square

Remarquons que le groupe G ci-dessus n'est pas unique. Il dépend du choix de x : les formes d'un groupe ne lui sont pas toutes isomorphes.

gerbeli\`ee_defi

Définition 2.3.5.5. — Une S -gerbe *liée*⁽⁴⁾ par un groupe abélien A est une S -gerbe \mathcal{G} munie, pour tout objet $x \in \mathcal{G}_T$, d'un isomorphisme de T -faisceaux $\iota_x : A_T \rightarrow \mathbf{Aut}_x$. Ces isomorphismes doivent commuter aux changements de \mathcal{G} et à tout morphisme $\mathbf{Aut}_x \rightarrow \mathbf{Aut}_y$ induit par un isomorphisme $x \rightarrow y$. Un morphisme $(\mathcal{G}, \iota) \rightarrow (\mathcal{G}', \iota')$ de gerbes liées par A est un morphisme de gerbes, donc un foncteur de S -catégories fibrées F , tel que pour tout x le morphisme $\phi_{F,x} : \mathbf{Aut}_x \rightarrow \mathbf{Aut}_{F(x)}$ induit par F vérifie $\phi_{F,x} \circ \iota_x = \iota'_{F(x)}$.

Il suit de la définition que pour deux objets $x, y \in \mathcal{G}_T$, le faisceau $\mathbf{Hom}_{x,y} = \mathbf{Iso}_{x,y}$ est un A_T -torseur à travers ι_x .

Lemme 2.3.5.6. — *Tout morphisme de gerbes liées par A est une équivalence de catégories.*

Démonstration. — La pleine fidélité vient du fait que le foncteur F induit un morphisme de A -torseurs entre $\mathbf{Hom}_{x,y} = \mathbf{Aut}_{x,y}$ et $\mathbf{Hom}_{F_T(x), F_T(y)} = \mathbf{Aut}_{F_T(x), F_T(y)}$. Or tout morphisme de A -torseurs est un isomorphisme, voir la proposition 2.3.2.5. Le caractère essentiellement surjectif de F se déduit alors de la condition de descente. \square

Lemme 2.3.5.7. — *Une gerbe (\mathcal{G}, ι) liée par A est équivalente par un morphisme de gerbes liées par A à la gerbe $\text{Tors}(A)$ si et seulement si $\mathcal{G}_S \neq \emptyset$.*

Démonstration. — Puisque $\text{Tors}(A)_S$ contient l'objet A , un sens est évident. Pour l'autre, considérons $x \in \mathcal{G}_S$. Alors le foncteur fibré F donné par $F_T : y \mapsto \mathbf{Iso}_{x_T, y}$ est bien un morphisme de gerbes liées par A . **Non, il y a un automorphisme qui traîne.** \square

4. La notion de gerbe liée est définie de manière beaucoup plus générale dans [Gi71] en utilisant la notion de lien, mais nous nous contenterons de cette situation simplifiée, qui correspond chez Giraud au cas où le lien est représenté par un groupe abélien A .

Il faut une sorte de critère analogue pour deux gerbes équivalentes.

Exemple 2.3.5.8. — La gerbe $\mathcal{Tors}(A)$ est naturellement liée par le groupe abélien A , car pour tout A -torseur P , on a un isomorphisme canonique $A \simeq \mathbf{Aut}_P$. Bien entendu, le fait que A est abélien est essentiel ; cela implique qu’il ne se tord pas par automorphismes intérieurs. Dans le cas contraire, \mathbf{Aut}_x serait un tordu de A , par 2.3.4.7, non nécessairement isomorphe à A .

Définition 2.3.5.9. — L’ensemble pointé $H_{\mathbb{T}}^2(S, A)$ est l’ensemble des classes d’équivalences (de catégories fibrées) de gerbes liées par A , pointé par la classe de la gerbe $\mathcal{Tors}(A)$.

deuxbord_exem

Exemple 2.3.5.10. — Soit $B \rightarrow C$ un morphisme de S -faisceaux en groupes, et soit Q un C -torseur. Un relèvement de Q à B est un couple (P, p) où P est un B -torseur, et p est un morphisme de C -torseurs $P \wedge^B C \simeq Q$. Un morphisme de relèvements $(P_1, p_1) \rightarrow (P_2, p_2)$ est un morphisme de toseurs $\phi : P_1 \rightarrow P_2$ tel que $p_2 \circ (\phi \wedge^B C) = p_1$. Le champ en groupoïdes dont la fibre sur T est la catégorie des relèvements de Q_T à B_T est une gerbe liée par le noyau de $B \rightarrow C$. On la note $\partial(P)$. **Le fait que le noyau de $B \rightarrow C$ est central dans B et ne se tord donc pas par automorphisme intérieur de B doit être ici essentiel, mais pourquoi ? Le rajouter après vérification. En tout cas, Giraud insiste sur l’action de B sur A qui doit être triviale.**

En présence d’une suite exacte de S -faisceaux en groupes

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 1$$

où A est central dans B (condition portant sur les points), on définit un foncteur de la catégorie des C -torseurs vers celle des gerbes liées par A , en envoyant un C -torseur P sur la gerbe $\partial(P)$ des relèvements de P à B .

deuxbord_defi

Définition 2.3.5.11. — Le foncteur précédent induit un morphisme d’ensembles pointés $\partial : H_{\mathbb{T}}^1(G, C) \rightarrow H_{\mathbb{T}}^2(G, A)$ appelé *second morphisme de bord*.

Proposition 2.3.5.12. — Si A est central dans B , la suite exacte longue (1) associée à la suite exacte $1 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 1$ prolongée par le second morphisme de bord est encore exacte en $H_{\mathbb{T}}^1(C)$ en tant que suite d’ensembles pointés.

Démonstration. — C’est presque tautologique : Un toseur P sur C provient de B si et seulement si $\partial(P)_S$ est non-vide, si et seulement si la gerbe $\partial(P)$ est neutre. \square

On vérifie immédiatement que cette construction de deuxième cobord est fonctorielle en la suite exacte courte.

Proposition 2.3.5.13. — *coïncidence avec le groupe de cohomologie de Čech (voir Giraud), puis étale.*

Si \mathbb{T}_2 est une topologie plus fine que \mathbb{T}_1 , et que G est un faisceau pour la topologie \mathbb{T}_2 , et donc aussi pour \mathbb{T}_1 , on obtient immédiatement un morphisme

$$H_{\mathbb{T}_1}^1(S, G) \longrightarrow H_{\mathbb{T}_2}^1(S, G)$$

par faisceautisation pour la topologie \mathbb{T}_2 . Notons que si G est un foncteur de points représentable, il est automatiquement un faisceau pour toute topologie \mathbb{T} entre la topologie Zariski et la topologie canonique. Tout torseur sous G est alors également représentable, par la proposition 2.4.0.16 ci-après. Du coup, pour deux telles topologies, le morphisme de changement de topologie consiste simplement à envoyer la classe d'un foncteur de points P , qui se trouve être un \mathbb{T}_1 -faisceau, vers la classe du même foncteur de points, qui se trouve être également un \mathbb{T}_2 -faisceau. Il est de plus injectif, puisque l'existence d'un isomorphisme entre deux torseurs ne dépend pas de la topologie considérée.

Le même type de raisonnement est valable pour les gerbes : si A est un groupe algébrique abélien, les gerbes pour la topologie \mathbb{T}_1 liées par A vu comme \mathbb{T}_1 -faisceau sont également des gerbes pour la topologie \mathbb{T}_2 liées par A vu comme \mathbb{T}_2 -faisceau. L'application de changement de topologie

$$H_{\mathbb{T}_1}^2(S, G) \longrightarrow H_{\mathbb{T}_2}^2(S, G)$$

envoie la classe d'une gerbe sur elle-même, et est injective car une gerbe \mathcal{G} est triviale si et seulement si $\mathcal{G}_S \neq \emptyset$, ce qui ne dépend pas non plus de la topologie considérée.

Pour les groupes réductifs sur une base S , on a alors les résultats suivants.

Théorème 2.3.5.14. — *Tout groupe réductif sur une base S est localement déployé pour la topologie étale.*

Démonstration. — Voir [SGA3, Exp. XXII, cor. 2.3]. □

Théorème 2.3.5.15. — *Pour tout groupe algébrique G lisse sur S (ex : G réductif), l'application $H_{\text{ét}}^1(S, G) \rightarrow H_{\text{fppf}}^1(S, G)$ est un isomorphisme. Il en est de même pour l'application $H_{\text{ét}}^2(S, G) \rightarrow H_{\text{fppf}}^2(S, G)$ si G est abélien.*

Démonstration. — Au niveau des H^1 , l'application est injective, voir ci-dessus. Il reste donc à voir qu'un pseudo-torseur déployé par un recouvrement fppf est en fait déjà déployé par un recouvrement étale. C'est vrai lorsque la base S est locale hensélienne par [SGA3, Exp. XXIV, prop. 81], puis pour tout anneau local et enfin pour un voisinage Zariski de tout point de S par deux arguments de limite successifs. Donner une référence pour les H^2 . Le mieux serait d'avoir un tel théorème directement pour les gerbes, et peut-être que ça découle trivialement de l'énoncé sur les torseurs, il faut vérifier en comprenant

reductifetale_theo

lisseetalefppf_theo

bien les gerbes liées. Sinon, dans 10 exposés de Grothendieck, il s'agit du théorème 11.7, p. 180, qui s'applique au cas d'un groupe abélien, et de la cohomologie usuelle de faisceaux étales ou fppf. Ensuite, on utilise le théorème de comparaison. \square

representabilite_sec

2.4. Représentabilité. — Rappelons quelques résultats de représentabilité dont nous nous servirons constamment. Là, il faut rajouter des choses sur les toseurs représentables, pour une topologie entre Zariski et canonique, à base du fait que le plongement des schémas est pleinement fidèle. Il y a peut-être également un lemme à dégager qui permet, étant donné un champ dans lequel les faisceaux Aut sont représentables (ou au moins certains), et une structure sur la catégorie de base, de montrer que les Aut dans le champ en struc sont représentables. Cela peut skouizer la représentabilité de PGL, simplement à partir de celle des automorphismes de \mathbf{O}_S -modules localement libres. De même, il y a peut-être un lemme de représentabilité pour les automorphismes d'un objet du produit fibré, quand les automorphismes de ses deux projections sont représentables, et qui aurait alors celui des produits fibrés de groupes ci-dessous comme corollaire ?

reprLocal_prop

Proposition 2.4.0.16. — *Un faisceau pour la topologie de Zariski qui est représentable localement sur la base S est représentable. Un faisceau pour la topologie étale qui est représentable localement par des schémas affines sur S est représentable.*

Démonstration. — Voir [SGA3, Exp. VIII, lemme 1.7.2]. \square

Cette proposition nous sera souvent utile pour nous ramener au cas d'une base S affine. Nous aurons également besoin du résultat suivant.

produit_fibre_lemm

Lemme 2.4.0.17. — *Soient F, G, H des S -foncteurs en groupes représentables par les schémas X, Y et Z respectivement. Soient encore $f : F \rightarrow H$ et $g : G \rightarrow H$ des morphismes de foncteurs en groupes. Alors le foncteur $F \times_H G$ défini par $(F \times_H G)(T) := F(T) \times_{H(T)} G(T)$ est également représentable, par le schéma $X \times_Z Y$, et il est muni naturellement d'une structure de schéma en groupes et il satisfait la propriété universelle du produit fibré de F et G au-dessus de H dans la catégorie des schémas en groupes.*

Démonstration. — Voir [EGA, I, (3.2.6) et (3.4.3.2)] pour l'existence du produit. Le reste est laissé au lecteur. \square

imageinvnoyau_rema

Remarque 2.4.0.18. — Un cas particulier du lemme précédent est le cas où $g : G \rightarrow H$ est l'inclusion d'un sous-groupe. On obtient alors le schéma en groupes *image inverse de G par f* . Si ce sous-groupe est le groupe trivial, on obtient le schéma noyau de f , noté $\ker(f)$.

reprschemas_prop

Proposition 2.4.0.19. — Si $T \rightarrow S$ est un morphisme fidèlement plat et quasi-compact et si X_0 est un S -schéma, alors toute forme de X_0 déployée sur T est encore un S -schéma si X_0 est affine sur S .

Démonstration. — Voir [SGA3, Exp. VIII, Lemme 1.7.2 (ii)] (toute forme est canoniquement munie d’une donnée de descente). \square

2.5. Quelques schémas fondamentaux. — Introduisons maintenant certains schémas qui nous serviront constamment par la suite. Rappelons que \mathbf{O}_S est le S -schéma en anneaux tel que $\mathbf{O}_S(T) = \Gamma(T, \mathcal{O}_T) = \Gamma(T)$ et donc $\mathbf{O}_S(\text{Spec}(R)) = R$ pour tout schéma affine $\text{Spec}(R)$ au dessus de S , avec addition et multiplication données par celles de R (point 3 des exemples 2.2.1.2).

2.5.1. \mathbf{O}_S -modules localement libres de type fini. — Si \mathcal{F} est un \mathcal{O}_S -module, et $T \rightarrow S$ un morphisme on note \mathcal{F}_T le \mathcal{O}_T module $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_T$. Rappelons que le foncteur \mathbf{W} des \mathcal{O}_S -modules vers les \mathbf{O}_S -modules est défini par

$$\mathbf{W}(\mathcal{F})(T) = \Gamma(T, \mathcal{F}_T).$$

Wprop_prop

Proposition 2.5.1.1. — Le foncteur \mathbf{W} possède les propriétés suivantes :

Wpf_item

1. Il est pleinement fidèle.

Wchmtbase_item

2. Il est compatible au changement de base : $\mathbf{W}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_T) = \mathbf{W}(\mathcal{F})_T$.

Wloclib_item

3. Il envoie les faisceaux localement libres de type fini au sens de Zariski (resp. étale) vers les faisceaux localement libres de type fini pour la topologie de Zariski (resp. étale) sur S .

Démonstration. — Pour les points 1 et 2, voir [SGA3, Exp. I, prop. 4.6.2]. Le point 3 est une conséquence immédiate du point 2. \square

loclibre_prop

Proposition 2.5.1.2. — Soit M un foncteur de points en \mathbf{O}_S -modules. Les conditions suivantes sont équivalentes.

zarzar_item

1. M est un faisceau Zariski et il est Zariski-localement isomorphe à un \mathbf{O}_S -module libre de type fini.

Wzarlib_item

2. $M \simeq \mathbf{W}(\mathcal{M})$ où \mathcal{M} est localement libre de type fini.

etzar_item

3. M est un faisceau étale, et il est Zariski-localement isomorphe à un \mathbf{O}_S -module libre de type fini.

etet_item

4. M est un faisceau étale, et il est étale-localement isomorphe à un \mathbf{O}_S -module libre de type fini.

Wetlib_item

5. $M \simeq \mathbf{W}(\mathcal{M})$ où \mathcal{M} est étale-localement libre de type fini.

Démonstration. — Les implications $3 \Rightarrow 1$ et $3 \Rightarrow 4$ sont évidentes, ainsi que $2 \Rightarrow 1$ et $5 \Rightarrow 4$ car \mathbf{W} commute au changement de base. Pour $1 \Rightarrow 2$, il suffit de voir qu’un tel faisceau Zariski est représentable par la proposition

2.4.0.16 et parce que \mathbf{O}_S^n l'est, et la structure de module est transportée car \mathbf{W} est pleinement fidèle. De même, $4 \Rightarrow 5$ par la même proposition, car les schémas représentant étale-localement M sont affines sur S . Toujours par représentabilité, on a $2 \Rightarrow 3$ (tout foncteur représentable est un faisceau étale). Enfin, $5 \Rightarrow 2$ par descente sur \mathcal{M} (voir [EGA, IV 2.5.2]). \square

loclibre_defi

Définition 2.5.1.3. — Nous appellerons simplement \mathbf{O}_S -module localement libre de type fini un foncteur de points en \mathbf{O}_S -modules qui vérifie les conditions équivalentes de la proposition précédente. Son rang est alors défini comme on le devine, et il est localement constant et fini.

La proposition 2.5.1.2 dit alors en particulier :

equivloclibres_coro

Corollaire 2.5.1.4. — Le foncteur \mathbf{W} définit une équivalence de catégories des \mathcal{O}_S -modules localement libres de type fini vers les \mathbf{O}_S -modules localement libres de type fini.

Si $S = \text{Spec}(R)$, on a $\mathbf{O}_S(S) = R$ et donc la suite de foncteurs suivants

$$R\text{-mod} \xrightarrow[\simeq]{(-)} \mathcal{O}_S\text{-mod quasi-cohérents} \xrightarrow{\mathbf{W}} \mathbf{O}_S\text{-mod}$$

où le premier est l'équivalence de catégories bien connue, et le second est pleinement fidèle. Il s'ensuit que si R' est une extension de R et qu'on pose $T = \text{Spec}(R')$, on a alors pour tous modules M et N sur R , on a

$$\begin{aligned} \mathbf{Hom}_{\mathbf{W}(\tilde{M}), \mathbf{W}(\tilde{N})}^{\mathbf{O}_S\text{-mod}}(T) &= \mathbf{Hom}_{\mathbf{O}_T\text{-mod}}(\mathbf{W}(\tilde{M})_T, \mathbf{W}(\tilde{N})_T) \\ &= \mathbf{Hom}_{\mathbf{O}_T\text{-mod}}(\mathbf{W}(\tilde{M}_T), \mathbf{W}(\tilde{N}_T)) \\ &= \mathbf{Hom}_{\mathcal{O}_T\text{-mod}}(\tilde{M}, \tilde{N}) \\ &= \mathbf{Hom}_{R'\text{-mod}}(M_{R'}, N_{R'}) \end{aligned}$$

Waffine_eq

(2)

où le premier terme est défini en 2.1. Il en est de même pour **End**, **Iso** et **Aut**.

Walg_rema

Remarque 2.5.1.5. — Le foncteur \mathbf{W} étant additif, il permet de transporter une structure de \mathcal{O}_S -algèbre sur un module \mathcal{A} en une structure de \mathbf{O}_S -algèbre sur $\mathbf{W}(\mathcal{A})$. Réciproquement, comme \mathbf{W} est pleinement fidèle, si un \mathbf{O}_S -module $\mathbf{W}(\mathcal{A})$ est muni d'une structure de \mathbf{O}_S -algèbre, elle provient d'une unique structure de \mathcal{O}_S -algèbre sur \mathcal{A} . Il en est de même pour le foncteur $\widetilde{(-)}$ dans le cas affine.

homMN_lemm

Lemme 2.5.1.6. — La flèche naturelle

$$\mathbf{Hom}_{\mathbf{O}_S\text{-mod}}(M, N) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathbf{O}_S(S)\text{-mod}}(M(S), N(S))$$

est un isomorphisme lorsque M et N sont libres ou lorsqu'ils sont localement libres de type fini et S est affine.

Démonstration. — Lorsque M et N sont libres, on utilise $\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}_S\text{-mod}}(\mathbf{O}_S, \mathbf{O}_S) = \mathbf{O}_S(S) = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$. Dans le cas affine, on utilise la suite d'égalités (2). \square

On pose que $\mathbf{M}_{n,S}$ est la \mathbf{O}_S -algèbre $\mathbf{End}_{\mathbf{O}_S^n}^{\mathbf{O}_S\text{-mod}}$ et par ce qui précède, on a bien

$$\mathbf{M}_{n,S}(T) = M_n(\Gamma(T)).$$

Ce foncteur de points est représentable comme un produit de n^2 copies de \mathbf{O} , et les morphismes définissant sa structure de \mathbf{O} -algèbre sont ceux qu'on imagine. Plus généralement, lorsque M est un \mathbf{O}_S -module localement libre de type fini, le foncteur de points $\mathbf{End}_M^{\mathbf{O}_S\text{-mod}}$ est représentable par 2.4.0.16, car c'est un faisceau Zariski puisque M en est un, et il est localement isomorphe à $\mathbf{M}_{n,S}$.

matrices_defi

Définition 2.5.1.7. — Pour un \mathbf{O}_S -module localement libre de type fini M , on note \mathbf{End}_M le schéma en \mathbf{O}_S -algèbres qui vérifie

$$\mathbf{End}_M(T) = \mathrm{End}_{\mathbf{O}_T\text{-mod}}(M_T)$$

pour tout $T \rightarrow S$. En particulier, si $M = \mathbf{O}_S^n$, on a $\mathbf{End}_M = \mathbf{M}_{n,S}$ avec

$$\mathbf{M}_{n,S}(T) = M_n(\Gamma(T))$$

pour tout $T \rightarrow S$. On supprime S de toutes ces notations lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Considérons la S -catégorie fibrée $\mathcal{V}ec$ (resp. $\mathcal{V}ec_n$) dont la fibre en T est la catégorie des \mathbf{O}_T -modules localement libres de type fini (resp. de rang constant n).

Proposition 2.5.1.8. — *Les catégories fibrées $\mathcal{V}ec$ et $\mathcal{V}ec_n$ sont des champs.*

Démonstration. — Sans la restriction “localement libre de type fini”, la catégorie fibrée obtenue est un champ par la proposition 2.2.3.6 appliquée à l'exemple 2.2.1.2 (4). Il suffit alors de voir que la propriété d'être localement libre de type fini descend ainsi que d'être de rang constant n , ce qui est immédiat. \square

2.5.2. Groupe linéaire. —

GLrepr_prop

Proposition 2.5.2.1. — *Soit A une \mathbf{O}_S -algèbre unitaire et associative (non nécessairement commutative) qui est localement libre de type fini en tant que \mathbf{O}_S -module. Considérons le foncteur en groupes “éléments inversibles”*

$$T \mapsto A(T)^\times.$$

Ce foncteur est représentable.

Démonstration. — Il est facile de voir que ce foncteur est un faisceau pour la topologie de Zariski, en utilisant que A en est un. Par 2.4.0.16, on peut donc supposer que $S = \text{Spec}(R)$, et par la remarque 2.5.1.5 que $A = \mathbf{W}(\tilde{B})$ où B est une R -algèbre libre de rang fini comme R -module. On peut donc définir une norme $N : B \rightarrow R$ en associant à un élément le déterminant de la multiplication à gauche par cet élément. Le foncteur de points de l'énoncé est alors représentable par le schéma affine $\text{Spec}(S(B^\vee)[N^{-1}])$ où $S(B^\vee)$ est l'algèbre symétrique sur $B^\vee = \text{Hom}_R(B, R)$ et N est l'élément de $S^n(B^\vee)$ correspondant à la norme définie ci-dessus. En effet

$$\text{Hom}_{R\text{-alg}}(S(B^\vee), R') = \text{Hom}_{R\text{-mod}}(B^\vee, R') = \text{Hom}_{R\text{-mod}}(B^\vee, R) \otimes_R R' = B_{R'}$$

où on a utilisé le fait que B est libre pour les deux dernières égalités. Lorsqu'on remplace $S(B^\vee)$ par $S(B^\vee)[N^{-1}]$ à gauche, on obtient le sous-ensemble des morphismes qui envoient N dans R^\times , et donc à droite $B_{R'}^\times$.⁽⁵⁾ \square

GLn_defi

Définition 2.5.2.2. — Soit $\mathbf{GL}_{1,A}$ le schéma en groupes défini par la proposition précédente. Lorsque $A = \mathbf{M}_{n,S}$, on utilise la notation $\mathbf{GL}_{n,S} = \mathbf{GL}_{1,\mathbf{M}_{n,S}}$, et on supprime S de la notation lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. Enfin, lorsque M est un \mathbf{O}_S -module localement libre de type fini, on utilise également la notation \mathbf{GL}_M pour $\mathbf{GL}_{1,\text{End}(M)}$.

Gm_defi

Définition 2.5.2.3. — Le schéma en groupes $\mathbf{G}_{m,S}$, ou \mathbf{G}_m , est par définition $\mathbf{GL}_{1,S}$.

On a donc $\mathbf{G}_m(T) = \Gamma(T)^\times$.

mun_defi

Définition 2.5.2.4. — Soit $\mu_{n,S}$, ou μ_n , le noyau de l'application élévation à la puissance n du schéma en groupes $\mathbf{G}_{m,S}$ vers lui-même.

Pour tout schéma T sur S , on a donc $\mu_n(T) = \{u \in \Gamma(T)^\times \text{ t.q. } u^n = 1\}$. De plus, il est facile de voir que sur une base affine $S = \text{Spec}(R)$, le schéma en groupes μ_n est représenté par $\text{Spec}(R[x]/(x^n - 1))$. Il est donc représentable par la proposition 2.4.0.16. C'est un cas particulier de groupe diagonalisable, voir [SGA3, Exp. VIII] pour plus de détails, et il est lisse si et seulement si n est premier aux caractéristiques résiduelles de S , voir [SGA3, Exp. VIII, prop. 2.1].

5. Si la multiplication à gauche par a est inversible, il a un inverse à droite, donc la multiplication à droite par a a un déterminant inversible, et est donc inversible, donc a a un inverse à gauche.

GLGmmunTors_sec

2.5.3. *Torseurs sous \mathbf{GL}_n , \mathbf{G}_m et μ_n .* — Notons que par définition, $\mathbf{GL}_{n,S} = \mathbf{Aut}_{\mathbf{O}_S^n}$ et $\mathbf{GL}_M = \mathbf{Aut}_M$, où \mathbf{O}_S^n et M sont des objets du champ $\mathcal{V}ec$.

Les propositions 2.3.4.5 et 2.5.1.2 et impliquent immédiatement :

GLntors_prop

Proposition 2.5.3.1. — *Le foncteur $M \mapsto \mathbf{Iso}_{\mathbf{O}_S^n, M}$ définit une équivalence de catégories fibrées*

$$(\mathcal{V}ec_n)_{\simeq} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Tors}(\mathbf{GL}_n)$$

du champ en groupoïdes des modules localement libres de rang constant n vers le champ en groupoïdes des \mathbf{GL}_n -torseurs pour la topologie Zariski ou étale. En particulier, lorsque $n = 1$, cela définit une équivalence de catégories fibrées

$$(\mathcal{V}ec_1)_{\simeq} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Tors}(\mathbf{G}_m)$$

des \mathbf{O}_S -modules inversibles vers les \mathbf{G}_m -torseurs.

Notons Δ_M le déterminant du \mathbf{O}_S -module (localement libre de type fini) M . Sur une composante connexe de S , il s'agit du module puissance extérieure maximale $\Lambda^r(M)$ où r est le rang (constant) de M . Il s'agit donc toujours d'un \mathbf{O}_S -module localement libre de rang 1. Cela définit, pour chaque rang, non nécessairement constant, un foncteur Δ des \mathbf{O}_S -modules localement libres de ce rang vers les \mathbf{O}_S -modules localement libre de rang constant 1.

Detchamps_defi

Définition 2.5.3.2. — Soit Δ le foncteur de catégories fibrées $\Delta : \mathcal{V}ec \rightarrow \mathcal{V}ec_1$ défini sur les fibres comme ci-dessus.

Le morphisme déterminant $\mathbf{GL}_{n,S} \rightarrow \mathbf{G}_{m,S}$ de groupes algébriques est défini sur les points par la formule habituelle.

torsDetFonct_lemm

Lemme 2.5.3.3. — *Le long de ce morphisme déterminant, le toseur $\mathbf{Iso}_{\mathbf{O}_S^n, M}$ se pousse en le toseur $\mathbf{Iso}_{\mathbf{O}_S, \Delta_M}$.*

Démonstration. — Par la proposition 2.3.2.5, il suffit de donner un morphisme $\mathbf{Iso}_{\mathbf{O}_S^n, M}^{\mathbf{O}_S-\text{mod}} \wedge^{\mathbf{GL}_n} \mathbf{G}_m \rightarrow \mathbf{Iso}_{\mathbf{O}_S, \Delta_M}^{\mathbf{O}_S-\text{mod}}$. On vérifie immédiatement que sur les points, $(f, u) \mapsto \det(f) \cdot u$ est bien définie, où $\det(f) : \mathbf{O}_S \rightarrow \Delta_M$ est la puissance extérieure n -ième de $f : \mathbf{O}_S^n \rightarrow M$, ce qui définit le morphisme par descente. \square

Lorsque le schéma $\mu_{n,S}$ n'est pas lisse, i.e. lorsque S a un point géométrique de caractéristique non première à n , ses toseurs pour la topologie étale ne coïncident pas avec ses toseurs pour la topologie fppf. Ces derniers sont plus faciles à décrire, et suffisants pour les applications qui nous intéressent ; en effet, μ_n apparaît principalement dans des suite exactes courtes de groupes algébriques où les autres groupes sont lisses, et pour lesquels il est donc indifférent de considérer les toseurs étales ou fppf. Décrivons-donc les μ_n -torseurs pour la topologie fppf.

Considérons le foncteur fibré $(\mathcal{V}ec_1)_{\simeq} \rightarrow (\mathcal{V}ec_1)_{\simeq}$ qui envoie un module de rang 1 sur sa puissance n -ième, ainsi que le foncteur fibré $\mathcal{F}inal \rightarrow \mathcal{V}ec_1$ qui envoie le seul objet de la fibre sur T vers \mathbf{O}_T .

Définition 2.5.3.4. — Le champ (cf. proposition 2.2.3.7) des modules inversibles n -trivialisés $n\text{-}Triv$ est le produit fibré de $(\mathcal{V}ec_1)_{\simeq} \times_{\mathcal{V}ec_1} \mathcal{F}inal$ à l'aide de ces deux foncteurs.

Diagramme ? Explicitement, un objet de $n\text{-}Triv_T$ est donc donné par un \mathbf{O}_T -module localement libre L de rang constant 1 muni d'un isomorphisme $\phi : L^{\otimes n} \rightarrow \mathbf{O}_S$, et un morphisme de \mathbf{O}_S -modules trivialisés $(L_1, \phi_1) \rightarrow (L_2, \phi_2)$ est donc un morphisme $r : L_1 \rightarrow L_2$ tel que $\phi_2 \circ r^{\otimes n} = \phi_1$.

Définition 2.5.3.5. — Le module n -trivialisé *trivial* est le couple (\mathbf{O}_S, m) où $m : \mathbf{O}_S^{\otimes n} \rightarrow \mathbf{O}_S$ est la multiplication.

Lemme 2.5.3.6. — *Il me semble que la phrase "ϕ est localement une puissance n-ième" n'est pas très claire. Je pense que "ϕ : L^{⊗n} → O_S factorise localement par m : O_S^{⊗n} → O_S" est plus transparente. Pour toute topologie entre la topologie de Zariski et la topologie canonique telle que ϕ est localement une puissance n-ième, un module n-trivialisé (L, ϕ) est localement trivial, i.e. est une forme de (O_S, m), C'est toujours le cas pour la topologie fppf.*

Démonstration. — La seule chose qui n'est pas évidente est l'affirmation sur la topologie fppf : on commence par se restreindre à un ouvert Zariski sur lequel L est trivial et la base est affine et vaut $\text{Spec}(R)$, et il faut alors montrer que tout élément $\lambda \in R$ devient une puissance n -ième après une extension fppf. On prend l'extension évidente $R[x]/(x^n - \lambda)$. \square

On suppose maintenant que la topologie vérifie les conditions du lemme précédent.

Il est immédiat qu'on a $\mathbf{Aut}_{(\mathbf{O}_S, m)}^{n\text{-}Triv} = \mu_n$ où les objets sont dans le champ $n\text{-}Triv$. On considère le faisceau $\mathbf{Iso}_{(\mathbf{O}_S, m), (L, \phi)}$, torseur sous le précédent. Explicitement :

$$\mathbf{Iso}_{(\mathbf{O}_S, m), (L, \phi)}(T) = \{r : \mathbf{O}_T \longrightarrow L_T, \phi_{T'} \circ r_{T'}^{\otimes n} = m_{T'}, \forall T' \longrightarrow T\}.$$

(Les r considérés sont des morphismes de \mathbf{O}_S -modules ; ils sont automatiquement inversibles.) L'action à droite de $\mu_n = \mathbf{Aut}_{(\mathbf{O}_S, m)}$ revient à la multiplication d'un morphisme par un scalaire. Remarquons au passage que le faisceau $\mathbf{Iso}_{(\mathbf{O}_S, m), (L, \phi)}$ est représentable car c'est la fibre au dessus de ϕ de l'application $(-)^{\otimes n} : \mathbf{Hom}_{L, \mathbf{O}_S} \rightarrow \mathbf{Hom}_{L^{\otimes n}, \mathbf{O}_S}$ entre faisceaux d'ensembles représentables. **Il y a peut-être un lemme de représentabilité sur les produits fibrés de champs caché.** La proposition 2.3.4.5 donne alors immédiatement :

orseursfppfmun_prop

Proposition 2.5.3.7. — *Le foncteur $(L, \phi) \mapsto \mathbf{Iso}_{(\mathbf{O}_S, m), (L, \phi)}$ est une équivalence de catégories fibrées entre champs en groupoïdes*

$$\mathcal{Formes}((\mathbf{O}_S, m)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{Tors}(\mu_n).$$

En particulier, si la topologie est fppf, tout les modules n -trivialisés sont des formes de (\mathbf{O}_S, m) et on a

$$n\text{-Triv} \xrightarrow{\sim} \mathcal{Tors}(\mu_n).$$

Enfin, par la proposition 2.3.4.9, on a :

pousseisontriv_lemm

Lemme 2.5.3.8. — *Le torseur $\mathbf{Iso}_{(\mathbf{O}_S, m), (L, \phi)}$ se pousse le long de $\mu_n \rightarrow \mathbf{G}_m$ en un torseur isomorphe à $\mathbf{Iso}_{\mathbf{O}_S, L}$ par la fonctorialité définie en 2.3.2.10.*

Remarquons que l'isomorphisme $\mathbf{Iso}_{(\mathbf{O}_S, m), (L, \phi)} \wedge^{\mu_n} \mathbf{G}_m \simeq \mathbf{Iso}_{\mathbf{O}_S, L}$ peut s'expliciter. Sur les points, il envoie un couple (r, u) , où r un isomorphisme r tel que $\phi \circ r^{\otimes n} = m$ et u un point de \mathbf{G}_m , donc un automorphisme de \mathbf{O}_S , vers l'élément $r \circ u$.

2.5.4. Groupe projectif linéaire. —

autrepr_prop

Proposition 2.5.4.1. — *Soit A une \mathbf{O}_S -algèbre localement libre de type fini, mais non nécessairement commutative, associative ou unitaire. Le foncteur en groupes $\mathbf{Aut}_A^{\text{alg}}$ est représentable par un schéma en groupes affine sur S et de type fini, qui est un sous-groupe fermé de \mathbf{GL}_A (A est vu comme \mathbf{O}_S -module, ici).*

Démonstration. — C'est un faisceau Zariski puisque A en est un. On se ramène donc au cas $S = \text{Spec}(R)$ affine et A libre comme \mathbf{O}_S -module, avec $A = \mathbf{W}(\tilde{B})$. Considérons alors le R -module $M = \text{Hom}_R(B \otimes_R B, B)$ et l'élément m qui y représente la multiplication de B . Le stabilisateur de m est représentable par un sous-schéma en groupes fermé de $\mathbf{GL}_{\mathbf{W}(\tilde{M})}$, par [SGA3, Exp. I, §6.7]. Définissons un morphisme $\mathbf{GL}_A \rightarrow \mathbf{GL}_{\mathbf{W}(\tilde{M})}$ en envoyant un élément α des points de $\mathbf{GL}_A(T)$ sur l'endomorphisme de M_T qui à un morphisme $f : B_T \otimes B_T \rightarrow B_T$ associe le morphisme $\alpha \circ f \circ (\alpha^{-1} \otimes \alpha^{-1})$. L'image réciproque du stabilisateur de m est le foncteur en groupes de l'énoncé, et il est représentable par la remarque 2.4.0.18. \square

PGLA_defi

Définition 2.5.4.2. — On note \mathbf{PGL}_A le foncteur de points représentable de la proposition précédente.

PGLApoints_prop

Proposition 2.5.4.3. — *Pour tout schéma T au dessus de S , on a*

$$(\mathbf{PGL}_A)_T = \mathbf{PGL}_{A_T}.$$

De plus, si T est affine et égal à $\text{Spec}(R')$, alors

$$\mathbf{PGL}_A(T) = \text{Aut}_{R' \text{-alg}}(A(T)).$$

Démonstration. — La première égalité est évidente. Lorsque T est affine, alors $A_T = \mathbf{W}(\widetilde{A(T)})$ puisque A_T vérifie la condition 2 de la proposition 2.5.1.2. On conclue par pleine fidélité de \mathbf{W} et $(-)$. \square

Nous aurons enfin besoin des deux foncteurs suivants.

stab_prop

Proposition 2.5.4.4. — Soit N un \mathbf{O}_S -module localement libre de type fini et $v \in N(S)$. Alors \mathbf{Stab}_v , défini par

$$\mathbf{Stab}_v(T) = \{\alpha \in \mathbf{GL}_N(T), \alpha(v_{T'}) = v_{T'}, \forall T' \longrightarrow T\}$$

est un sous-groupe représentable et fermé de \mathbf{GL}_N .

Démonstration. — On vérifie aisément que ce foncteur est un faisceau Zariski. On peut donc se ramener au cas où N est libre par la proposition 2.4.0.16. Choisissons alors une base e_1, \dots, e_n de $N(S)$, qui permet d'identifier $\mathbf{GL}_N \simeq \mathbf{GL}_n$. Le terme de droite est représenté par l'anneau $A = \mathbb{Z}[x_{ij}, \det^{-1}]$. Écrivant $v = (v_1, \dots, v_n)$ dans la base donnée, on considère l'idéal I de A défini par les équations

$$\sum_{k=1}^n x_{jk} v_k = v_j$$

pour $j = 1, \dots, n$. On voit que A/I représente \mathbf{Stab}_v et que ce foncteur est fermé dans \mathbf{GL}_N . \square

normalisateur_prop

Proposition 2.5.4.5. — *L'énoncé ci-dessous ne fait pas de sens. Je suppose que tu voulais plutôt écrire quelque chose comme ça : Soient N un \mathbf{O}_S -module localement libre, et M un sous- \mathbf{O}_S -module localement facteur direct de N . Alors le foncteur normalisateur \mathbf{Norm}_M , défini par*

$$\mathbf{Norm}_M(T) = \{g \in \mathbf{GL}_N(T), g(M_{T'}) = M_{T'}, \forall T' \longrightarrow T\}$$

est un sous-groupe fermé représentable de \mathbf{GL}_N . De plus, je ne comprends pas pourquoi tu as besoin de la condition $\forall T' \rightarrow T$ ci-dessus. Soit G un S -groupe algébrique, N un \mathbf{O}_S -module localement libre, et M un sous- \mathbf{O}_S -module localement facteur direct de N . Alors le foncteur normalisateur $\mathbf{Norm}_{\rho, M}$, défini par

$$\mathbf{Norm}_{\rho, N}(T) = \{g \in G(T), g(N_{T'}) = N_{T'}, \forall T' \longrightarrow T\}$$

est un sous-groupe fermé représentable de G .

Démonstration. — Comme dans la proposition précédente, on se ramène au cas où M et N sont libres avec $N \simeq M \oplus M'$ et sur une base affine $\text{Spec}(R)$. On choisit alors des bases $\{e_1, \dots, e_m\}$ de M et $\{e_{m+1}, \dots, e_{m+n}\}$ de M' , ce qui permet d'identifier \mathbf{GL}_N avec \mathbf{GL}_{m+n} , représenté par $R[x_{ij}, 1 \leq i, j \leq m+n]$.

$m + n, \det^{-1}]$. Le groupe recherché est alors l'image réciproque par ρ du sous-groupe fermé de \mathbf{GL}_N défini par l'idéal engendré par les x_{ij} avec $1 \leq j < n + 1 \leq i \leq n + m$. On conclut donc par la remarque 2.4.0.18. \square

2.6. Algèbres séparables, étales et d’Azumaya. — Rappelons dans cette partie la définition et quelques propriétés des algèbres séparables, puis étales et enfin d’Azumaya sur un anneau, ou plus généralement des faisceaux en algèbres de ces types. Le livre de Knus et Ojanguren [KnusOj74] est une bonne référence pour ces trois notions, ainsi que l’article de Grothendieck [BrI].

Dans cette section, sauf mention contraire, la topologie de Grothendieck considérée est la topologie étale, et toutes les formes sont donc implicitement des formes étales.

2.6.1. Algèbres séparables. —

Définition 2.6.1.1. — Une algèbre A localement libre de type fini sur R est dite *séparable* si elle est projective comme module sur $A \otimes_R A^{\text{op}}$ (agissant par $(x \otimes y).a = xay$).

Proposition 2.6.1.2. — Soit A un faisceau en \mathbf{O}_S -algèbres localement libres de type fini. Les conditions suivantes sont équivalentes.

1. Localement pour la topologie de Zariski, l’algèbre A est l’image par le foncteur \mathbf{W} d’une algèbre séparable sur $\Gamma(S)$.
2. Pour tout schéma affine T au-dessus de S , l’algèbre $A(T)$ est séparable sur $\Gamma(T)$.
3. Localement pour la topologie étale, l’algèbre A est associée par le foncteur \mathbf{W} à une algèbre séparable sur $\Gamma(S)$.

Démonstration. — Je suppose que tu voulais plutôt dire que le point 1. implique les points 2. et 3. Le point 2 implique évidemment les points 1 et 3. Pour $2 \Rightarrow 1$, voir [KnusOj74, Ch. III, prop. 2.5]. Enfin, pour $3 \Rightarrow 1$, voir [KnusOj74, Ch. III, prop. 2.2, (b)]. \square

Définition 2.6.1.3. — Un faisceau en \mathbf{O}_S -algèbres localement libres de type fini qui satisfait aux conditions équivalentes de la proposition précédente est appelé *séparable*.

Exemple 2.6.1.4. — Un produit fini de copies de R est séparable. Une algèbre de matrices $M_n(R)$ est séparable sur R .

Proposition 2.6.1.5. — Lorsque R est un corps, une algèbre de type fini est séparable si et seulement si elle est isomorphe à un produit fini d’algèbres de matrices sur des algèbres à division (corps gauches) de dimension finie sur R et dont les centres sont des extensions de corps (finies) séparables de

R. En particulier, si une telle algèbre est commutative, c'est un produit fini d'extensions de corps finies séparables de R. Voir [KnusOj74, Ch. III, th. 3.1].

2.6.2. Algèbres étales. — Passons maintenant aux algèbres étales.

algetale_defi

Définition 2.6.2.1. — Une algèbre commutative sur un anneau R est dite *étale* si elle est séparable, plate et de présentation finie. Elle est alors dite *finie* si elle est de type fini comme R-module.

Une algèbre étale finie est automatiquement localement libre de rang fini comme module sur R (voir [EGA, IV₄, 18.2.3]).

Proposition 2.6.2.2. — Soit Z un faisceau en \mathbf{O}_S -algèbres. Les conditions suivantes sont équivalentes.

1. Localement pour la topologie de Zariski, l'algèbre A est l'image par le foncteur $\mathbf{W} \circ \widetilde{(-)}$ d'une algèbre étale finie sur $\Gamma(S)$.
2. Pour tout schéma affine T au-dessus de S, l'algèbre $Z(T)$ est étale finie sur $\Gamma(T)$.
3. Localement pour la topologie étale, l'algèbre A est l'image par le foncteur $\mathbf{W} \circ \widetilde{(-)}$ d'une algèbre étale finie sur $\Gamma(S)$.

Démonstration. — Les conditions d'être séparable, plate ou de présentation finie peuvent se tester localement pour les topologies Zariski ou étale, respectivement par la proposition 2.6.1.2, puis par les propositions 2.5.1 et 2.7.1 et le corollaire 17.7.3 de [EGA, IV]. \square

faiscalget_defi

Définition 2.6.2.3. — Nous appellerons \mathbf{O}_S -algèbre étale finie un faisceau Z en \mathbf{O}_S -algèbres qui satisfait aux conditions équivalentes de la proposition précédente. On dit qu'elle est *de rang n* si son rang comme module localement libre est constant sur S et égal à n.

algetfinies_prop

Proposition 2.6.2.4. — Les formes étales de la \mathbf{O}_S -algèbre \mathbf{O}_S^n sont les \mathbf{O}_S -algèbres étales finies de rang n. Pour une telle forme Z, le faisceau $\mathbf{Aut}_Z^{\text{alg}}$ est une forme étale du faisceau en groupes constant $(\mathcal{S}_n)_S$ (groupe symétrique).

Démonstration. — On dispose d'un morphisme évident $\mathcal{S}_n \rightarrow \mathbf{Aut}_{\mathbf{O}_S^n}^{\text{alg}}$ dont on vérifie facilement qu'il est un isomorphisme localement. La deuxième affirmation de l'énoncé découle alors de la première par la proposition 2.3.4.7.

Les propriétés d'être étale, finie et localement libre de rang n sont locales pour la topologie étale, donc toute forme étale de \mathbf{O}_S^n est encore étale finie de rang n.

Réciproquement, montrons que toute \mathbf{O}_S -algèbre étale finie de rang n est localement isomorphe à \mathbf{O}_S^n pour la topologie étale. On peut supposer S affine

et l'algèbre libre sur \mathbf{O}_S et la base locale, par un argument de limite. On est alors ramené au cas d'une algèbre étale finie A sur un anneau local R . Par changement de base au corps résiduel, on obtient une extension de degré n de corps, étale donc séparable. On prend un générateur de cette extension, et on le relève en un élément x de A . Par le lemme de Nakayama, on montre facilement que les éléments $1, x, \dots, x^{n-1}$ engendrent A , qui s'écrit donc $R[x]/P(x)$ avec P unitaire de degré n , et $P'(x)$ inversible dans A , par [EGA, IV, cor. 18.4.3]. Montrons alors par récurrence sur n que A est déployée par une extension étale finie. C'est évident si $n = 1$. Utilisons l'extension $R \rightarrow A$ elle-même, et considérons donc $A \otimes_R A \simeq A[y]/P(y)$. Le polynôme unitaire $P(y)$ se décompose en $(y - x)Q(y)$ où Q est un polynôme unitaire en y à coefficients dans A . Puisque $P'(y) = (y - x)Q'(y) + Q(y)$ est inversible, les éléments $y - x$ et $Q(y)$ engendrent l'idéal unité. Par le théorème chinois, on a donc $A \otimes_R A \simeq A[y]/(y - x) \times A[y]/Q(y) \simeq A \times A[y]/Q(y)$. De plus $Q'(y)$ est inversible dans $A[y]/Q(y)$ par la même équation, ce qui nous ramène au cas $n - 1$ de la récurrence. \square

Remarque 2.6.2.5. — Le fait que toute \mathbf{O}_S -algèbre étale finie de degré n est localement \mathbf{O}_S^n pour la topologie étale peut également se voir comme conséquence de la théorie des revêtements étales (i.e. des morphismes finis étales). En effet, c'est exactement dire que le revêtement correspondant est localement trivial pour la topologie étale. C'est une conséquence de deux faits : l'hensélisé strict d'un anneau local est obtenu comme limite inductive d'algèbres étales, et tout revêtement d'un hensélisé strict est trivial (voir [EGA, IV, déf. 18.8.7 et prop. 18.8.8, (i)]).

etaledegree2_coro

Corollaire 2.6.2.6. — Si Z est une \mathbf{O}_S -algèbre étale finie de rang $n = 2$, $\mathrm{Aut}_Z^{\mathrm{alg}} = (\mathbb{Z}/2)_S$ canoniquement.

Démonstration. — Le groupe symétrique $\mathcal{S}_2 = \mathbb{Z}/2$ étant commutatif, ses tordus par des torseurs sous un groupe agissant par automorphismes intérieurs lui sont isomorphes. \square

Remarque 2.6.2.7. — On peut construire à la main l'automorphisme différent de l'identité lorsque $n = 2$. Si $Z(T)$ est libre sur $R' = \mathbf{O}_S(T)$ pour T affine, on définit $\mathrm{tr}(z)$ la trace de $z \in Z(T)$ comme la trace de la multiplication par z exprimée sur une base quelconque. Le morphisme $z \mapsto \mathrm{tr}(z) - z$ est bien un automorphisme de R' -algèbres et c'est le seul différent de l'identité. Comme il est canonique, il permet de définir par recollement un automorphisme d'algèbres de Z au-dessus de S .

Les propositions 2.3.4.5 et 2.6.2.4 impliquent immédiatement :

Proposition 2.6.2.8. — Le foncteur $Z \mapsto \mathbf{Iso}_{Z, \mathbf{O}_S^n}$ définit une équivalence de catégories fibrées des \mathbf{O}_S -algèbres étales finies de rang n vers $\mathbf{Tors}(\mathcal{S}_n)$ le champ des toseurs étales sous \mathcal{S}_n .

2.6.3. Algèbres d’Azumaya. — Examinons maintenant les algèbres d’Azumaya.

Définition 2.6.3.1. — Une algèbre séparable A sur un anneau R est appelée R -algèbre d’Azumaya si R s’injecte dans A et si le centre de A est réduit à R .

Exemple 2.6.3.2. — Une algèbre d’Azumaya sur un corps est une algèbre centrale simple sur ce corps par la proposition 2.6.1.5.

azudefi_prop

Proposition 2.6.3.3. — Soit A une \mathbf{O}_S -algèbre localement libre de type fini. Les conditions suivantes sont équivalentes.

azuloczar_item

1. Localement pour la topologie de Zariski, l’algèbre A est l’image par le foncteur $\mathbf{W} \circ \widetilde{(-)}$ d’une algèbre d’Azumaya sur $\Gamma(S)$.

azuaffine_item

2. Pour tout schéma affine T au-dessus de S , l’algèbre $A(T)$ est une algèbre d’Azumaya sur $\Gamma(T)$.

azulocet_item

3. Localement pour la topologie étale, l’algèbre A est l’image par le foncteur $\mathbf{W} \circ \widetilde{(-)}$ d’une algèbre d’Azumaya sur $\Gamma(S)$.

Démonstration. — On a trivialement $2 \Rightarrow 1 \Rightarrow 3$. Pour $3 \Rightarrow 2$, se ramener à une base affine, puis utiliser l’équivalence entre les points 4 et 1 de [KnusOj74, Ch. III, th. 6.6]. \square

Définition 2.6.3.4. — Un \mathbf{O}_S -faisceau en algèbres d’Azumaya, ou plus simplement une \mathbf{O}_S -algèbre d’Azumaya, est un faisceaux en \mathbf{O}_S -algèbres A qui satisfait aux conditions équivalentes de la proposition précédente.

EndMAzumaya_exem

Exemple 2.6.3.5. — Pour tout n , la \mathbf{O}_S -algèbre $\mathbf{M}_{n,S}$ est une \mathbf{O}_S -algèbre d’Azumaya ; on vérifie que son centre est bien \mathbf{O}_S en utilisant les matrices élémentaires. De même, pour tout \mathbf{O}_S -module localement libre M , le faisceau en \mathbf{O}_S -algèbres \mathbf{End}_M est une \mathbf{O}_S -algèbre d’Azumaya : on se ramène au cas précédent localement.

Proposition 2.6.3.6. — Le rang comme \mathbf{O}_S -module d’une \mathbf{O}_S -algèbre d’Azumaya est un carré.

Démonstration. — Voir [KnusOj74, Ch. III, prop. 6.1 et th. 6.4]. \square

degreAzumaya_defi

Définition 2.6.3.7. — Le degré d’une \mathbf{O}_S -algèbre d’Azumaya est la racine carrée de son rang. C’est une fonction localement constante à valeurs entières par la proposition précédente.

Azumayaforme_prop

Proposition 2.6.3.8. — *Un \mathbf{O}_S -faisceau en algèbres d’Azumaya de degré n sur une base S est un faisceau en \mathbf{O}_S -algèbres qui est une forme (étale) de $\mathbf{M}_{n,S}$.*

Démonstration. — Puisque $\mathbf{M}_{n,S}$ est une algèbre d’Azumaya, toute forme étale de $\mathbf{M}_{n,S}$ en est également une par le point 3 de 2.6.3.3.

Réciproquement, on se ramène au cas où la base est affine puis on utilise le point 4 de [KnusOj74, Ch. III, th. 6.6]. \square

Proposition 2.6.3.9. — *Le centre d’une algèbre d’Azumaya est \mathbf{O}_S .*

Démonstration. — Comme tout recouvrement étale est épimorphique (universel) par [SGA3, Exp. IV, prop. 4.4.3], pour tester si un élément central est dans $\mathbf{O}_S(T)$, on peut supposer que l’algèbre est $\mathbf{M}_{n,S}$, dont le centre est bien \mathbf{O}_S par un calcul direct de commutation aux matrices élémentaires. \square

Définir ici le champ des algèbres d’Azumaya de degré n

Décrivons maintenant les toseurs sous $\mathbf{GL}_{1,A}$ lorsque A est une \mathbf{O}_S -algèbre d’Azumaya.

Soit M un A -module, donc donné par une structure analogue à celle des \mathbf{O}_S -modules, en remplaçant \mathbf{O}_S par A . C’est automatiquement un \mathbf{O}_S -module, puisque \mathbf{O}_S est inclus dans A (comme son centre).

Lemme 2.6.3.10. — *Si un tel M est localement libre type fini sur A , alors il est localement libre de type fini sur \mathbf{O}_S . De plus, si A est de degré constant n , alors M est de rang m sur A si et seulement s’il est de rang mn^2 sur \mathbf{O}_S .*

Démonstration. — Localement, $A \simeq \mathbf{M}_n$. \square

Pour toute \mathbf{O}_S -algèbre d’Azumaya A de degré constant n , considérons la catégorie fibrée $A\text{-}\mathcal{V}ec_m$ dont les objets de la fibre sur T sont des A_T -modules à gauche, qui sont localement libres de rang m comme A -modules. Cette catégorie fibrée est un champ : sans la condition “localement libre de rang m ”, c’est un champ (pour les topologies Zariski, étale ou fppf) par la proposition 2.2.3.6. Il faut ensuite voir que cette condition descend, ce qui est clair.

Définissons le foncteur fibré “Endomorphismes”

$$\text{End} : (A^{\text{op}}\text{-}\mathcal{V}ec_1)_{\simeq} \longrightarrow \mathcal{A}zumaya_n$$

qui envoie un objet M sur \mathbf{End}_M (endomorphismes de A^{op} -modules) et un (iso)morphisme f sur int_f .

Le A^{op} -module A_d qui est A vu comme A -module à droite, et donc comme A^{op} -module à gauche est évidemment libre de rang 1. Alors, dans le champ $A^{\text{op}}\text{-}\mathcal{V}ec_1$ le faisceau d’endomorphismes \mathbf{End}_{A_d} est canoniquement isomorphe à A (comme \mathbf{O}_S -algèbre) par $f \mapsto f(1)$. L’objet A_d s’envoie donc sur A par

le foncteur End . De plus, $\mathbf{Aut}_{A_d} = \mathbf{GL}_{1,A}$, et le foncteur End induit la flèche canonique

$$\mathbf{GL}_{1,A} = \mathbf{Aut}_{A_d}^{A^{\text{op}}\text{-}\mathcal{V}ec_1} \longrightarrow \mathbf{Aut}_A^{\mathcal{A}zumaya_n} = \mathbf{PGL}_A.$$

(les premiers automorphismes sont de A^{op} -modules, les seconds de \mathbf{O}_S -algèbres).

Puisque tout objet de $A^{\text{op}}\text{-}\mathcal{V}ec_1$ est localement isomorphe à A_d , par la proposition 2.3.4.5, on obtient :

Proposition 2.6.3.11. — *Le foncteur fibré $\mathbf{Iso}_{A_d,-}$ définit une équivalence de champs en groupoïdes*

$$A^{\text{op}}\text{-}\mathcal{V}ec_1 \xrightarrow{\sim} \text{Tors}(\mathbf{GL}_{1,A}).$$

De même, puisque toute algèbre d’Azumaya est localement isomorphe à A , on obtient également :

Proposition 2.6.3.12. — *Le foncteur fibré $\mathbf{Iso}_{A,-}$ définit une équivalence de champs en groupoïdes*

$$\mathcal{A}zumaya_n \xrightarrow{\sim} \text{Tors}(\mathbf{PGL}_A).$$

De plus, par la proposition 2.3.4.9, on a enfin :

Lemme 2.6.3.13. — *A travers ces équivalences, le foncteur End induit la fonctorialité $\text{Tors}(\mathbf{GL}_{1,A}) \rightarrow \text{Tors}(\mathbf{PGL}_A)$ le long du morphisme canonique $\mathbf{GL}_{1,A} \rightarrow \mathbf{PGL}_A$.*

Intéressons-nous au cas particulier où $A = \mathbf{End}_M$ où M est un \mathbf{O}_S -module localement libre de rang n . On a alors l’équivalence de Morita :

$$\text{End}_M^{\text{op}}\text{-}\mathcal{V}ec_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}ec_n$$

qui est donnée par le foncteur $M \otimes_{\mathbf{End}_M^{\text{op}}} -$ et par le foncteur $M^\vee \otimes -$ dans l’autre sens. Cela utilise l’isomorphisme classique $M \otimes_{\mathbf{End}_M^{\text{op}}} M^\vee \simeq \mathbf{O}_S$ qui envoie $m \otimes f$ sur $f(m)$ ainsi que l’isomorphisme $M^\vee \otimes M \simeq \mathbf{End}_M^{\text{op}}$. Par cette équivalence, $M \in \mathcal{V}ec_n$ est donc envoyé sur $\mathbf{End}_M^{\text{op}}$ dans $\text{End}_M^{\text{op}}\text{-}\mathcal{V}ec_1$ et on retrouve la description de la proposition 2.5.3.1 dans le cas où $M = \mathbf{O}_S^n$.

Le foncteur fibré $\mathcal{V}ec_1 \rightarrow A^{\text{op}}\text{-}\mathcal{V}ec_1$ envoyant un fibré en droites L sur le A^{op} -module $A_d \otimes L$ (l’action de A^{op} se faisant sur A_d) envoie l’objet \mathbf{O}_S sur A_d et induit entre leurs automorphismes l’inclusion $\mathbf{G}_m \rightarrow \mathbf{GL}_{1,A}$.

Peut-être renvoyer à un endroit où on énoncera la suite exacte longue. Si possible, montrer alors que sur les points, la suite exacte avec \mathbf{SL}_M et \mathbf{GL}_M n’est pas surjective entre \mathbf{GL}_M et \mathbf{G}_m . Cela revient à trouver un fibré dont les endomorphismes ne s’envoient pas surjectivement (par le déterminant) sur \mathbf{O}_S . Ça ne peut pas arriver avec une somme de fibrés en droites, mais peut-être avec le fibré tautologique d’une grassmannienne ? Peut-être qu’il y a une norme réduite qui se promène.

2.6.4. Algèbres d’Azumaya à involution. — Pour finir, passons en revue différents types d’involutions sur des algèbres d’Azumaya. Rappelons qu’une involution sur un anneau A est un anti-automorphisme d’ordre 2, c’est-à-dire un endomorphisme R -linéaire de A qui vérifie $\sigma(xy) = \sigma(y)\sigma(x)$ pour $x, y \in A$ et $\sigma^2 = \text{id}$.

Définition 2.6.4.1. — Une algèbre d’Azumaya à involution de première espèce sur un anneau R est une algèbre d’Azumaya A sur R munie d’une involution σ qui est R -linéaire.

Si M est un R -module localement libre de type fini et $b : M \rightarrow M^\vee$ est un isomorphisme δ -symétrique ($b = \delta b^\vee \circ \varpi$ où $\varpi : M \rightarrow (M^\vee)^\vee$ est l’identification canonique, et $\delta \in \mu_2(R)$), autrement dit un (M, b) est un module bilinéaire δ -symétrique non dégénéré renvoyer à plus loin, alors on peut lui associer une involution σ_b sur $A = \text{End}(M)$, donnée par $\sigma_b(x) = b^{-1}x^\vee b$. Il est clair que si $\sigma_b = \sigma_{b'}$, alors $\text{int}_b = \text{int}_{b'}$ et donc $b = \lambda b'$ pour un certain λ inversible, puisque le noyau de $\text{GL}_n \rightarrow \text{PGL}_n$ est bien \mathbf{G}_m .

Lemme 2.6.4.2. — Localement pour la topologie étale, toute involution σ de première espèce est isomorphe à une involution σ_b pour une certaine forme bilinéaire b , qui est δ -symétrique pour un certain $\delta \in \mu_2(R)$, qui ne dépend que de l’involution de départ.

Démonstration. — On peut supposer que l’algèbre sous-jacente est $M_n(R)$ par 2.6.3.8. La composition $\sigma \circ {}^t(-)$ est un automorphisme de $M_n(R)$. Quitte à localiser encore R , il est donc intérieur (voir 3.2.0.40), égal à int_b pour un certain $b \in \text{GL}_n(R)$. Or comme $\sigma^2 = \text{id}$, on doit avoir ${}^t b b^{-1} \in \mu_2(R)$. L’élément b est celui cherché, à l’identification canonique de R^n avec $(R^n)^\vee$ près. Il n’est fixé qu’à un élément du centre près, le produit $b b^{-1}$ est donc canonique. Par recollement, on construit donc l’élément $\delta \in \mu_2(R)$ recherché, qui ne dépend que de σ . \square

Définition 2.6.4.3. — Le type d’une algèbre à involution A de première espèce est l’élément de $\mu_2(R)$ obtenu par la construction précédente. Si cet élément est 1, on dit que l’involution est *orthogonale*, et s’il est -1 , on dit que l’involution est *symplectique*.

Remarque 2.6.4.4. — Notons que tout $\lambda \in \mu_2(R)$ est effectivement le type d’une involution de première espèce. Par exemple, sur $A = M_2(R)$, alors l’application $a \mapsto u \cdot {}^t a \cdot u^{-1}$ avec $u = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est de type λ .

Lorsque $2 \in R^\times$ et que R est connexe, une involution est donc soit orthogonale soit symplectique et ces deux cas s’excluent. Lorsque $2 = 0 \in R$, au contraire, les types orthogonal et symplectique se confondent, et lorsque R

n'est pas un corps, il y a donc d'autres types, même localement, si $\mu_2(R)$ est strictement plus gros que $(\mathbb{Z}/2)(R)$.

Définition 2.6.4.5. — Une \mathbf{O}_S -algèbre d'Azumaya à involution de première espèce est un faisceau en \mathbf{O}_S -algèbres à involution (structure **alginv** des exemples 2.2.1.2), dont le faisceau en algèbres sous-jacent est un faisceau en \mathbf{O}_S -algèbres d'Azumaya. Il est immédiat que sur une base affine, cette structure est l'image par le foncteur $\mathbf{W} \circ \widetilde{(-)}$ d'une algèbre à involution de première espèce.

Définition 2.6.4.6. — Le type d'un faisceau en algèbres d'Azumaya à involution de première espèce est l'élément de $\mu_2(S)$ obtenu par recollement à partir des types sur un recouvrement affine de la base.

Proposition 2.6.4.7. — Les \mathbf{O}_S -algèbres d'Azumaya de rang n à involution de première espèce et de type orthogonal sont les formes (étales) de ???
Attention, il doit en fait y avoir plusieurs classes, car l'involution associée à la forme bilinéaire hyperbolique ne peut pas être localement isomorphe à celle associée à la forme bilinéaire dont la matrice est l'identité, sinon les formes bilinéaires seraient localement proportionnelles, mais c'est faux, car l'une a une forme quadratique associée nulle modulo 2 et l'autre non. En fait, en rang pair, il faut probablement plutôt considérer les paires à involution (involution + forme trace des éléments symétriques vers \mathbf{O}_S). Avant cela, il faut avoir montré que ces éléments symétriques sont un module localement libre de rang $2n^2$ pour une involution orthogonale de degré $2n$. Il faut alors considérer le champ de ces paires, et voire qu'elles sont localement isomorphes à la paire canonique. En rang impair, il faut voir ce dont on a vraiment besoin. Peut-être pas d'involution. Les \mathbf{O}_S -algèbres d'Azumaya de rang n à involution de première espèce et de type symplectique sont les formes (étales) de ??? Ici, on a peut-être plus de chances qu'il n'y ait qu'une classe..

Démonstration. — Compléter. Attention, s'il est exact que les formes de la forme bilinéaire hyperbolique de dimension paire sont les formes non dégénérées dont la forme quadratique associée est nulle modulo 2, alors comme cette propriété n'est pas modifiée par multiplication par un inversible, les involutions qu'on obtient comme forme de l'involution associée à une involution hyperbolique sont localement associées à la forme bilinéaire hyperbolique. \square

Définition 2.6.4.8. — Une algèbre à involution de deuxième espèce sur un anneau R est une algèbre d'Azumaya A sur Z , qui est une algèbre étale finie de degré 2 sur R , muni d'une involution R -linéaire σ qui se restreint à Z en son unique automorphisme de R -algèbres partout localement non trivial (voir cor. 2.6.2.6).

Définition 2.6.4.9. — Un faisceau en algèbres d’Azumaya *avec involution de deuxième espèce* est un faisceau en \mathbf{O}_S -algèbres d’Azumaya A sur une \mathbf{O}_S -algèbre étale finie Z de degré 2 sur \mathbf{O}_S , muni d’une involution qui se restreint à Z en son unique automorphisme de \mathbf{O}_S -algèbre partout localement non trivial. Clairement, dans le cas où S est affine, c’est l’image par le foncteur $\mathbf{W} \circ \widetilde{(-)}$ de la structure de la définition précédente.

Soit τ l’involution sur $M_n(\mathbb{Z}) \times M_n^{\text{op}}(\mathbb{Z})$ définie par $(a, b) \mapsto (b, a)$. En considérant le morphisme de faisceau associé à τ , et en étendant la base de \mathbb{Z} à S , on obtient donc un faisceau en \mathbf{O}_S -algèbres à involution $(\mathbf{M}_{n,S} \times \mathbf{M}_{n,S}^{\text{op}}, \tau_S)$ de deuxième espèce, que nous appellerons *déployée*.

Proposition 2.6.4.10. — Les S -formes (au sens de la structure \mathbf{O}_S -alginv) de la \mathbf{O}_S -algèbre à involution déployée $(\mathbf{M}_{n,S} \times \mathbf{M}_{n,S}^{\text{op}}, \tau_S)$ sont les \mathbf{O}_S -algèbres d’Azumaya de degré n avec involution de deuxième espèce.

Démonstration. — Par les propositions 2.6.2.4 et 2.6.3.8, toute forme de l’algèbre à involution déployée est bien une \mathbf{O}_S -algèbre à involution de deuxième espèce.

Réciproquement, étant donné une \mathbf{O}_S -algèbre à involution de deuxième espèce (A, Z) , par les mêmes propositions, localement pour la topologie étale, on peut supposer que $Z = \mathbf{O}_S \times \mathbf{O}_S$ et $A = \mathbf{M}_{n,S} \times \mathbf{M}_{n,S}^{\text{op}}$. Un court calcul utilisant les deux projecteur canoniques du centre $\mathbf{O}_S \times \mathbf{O}_S$ montre alors que l’involution est de la forme $(\sigma \times (\sigma^{-1})^{\text{op}}) \circ \tau$ où σ est un automorphisme de \mathbf{M}_n . Voir par exemple [KMRT98, 2.14]. Or dans ce cas, le morphisme $(\sigma \times \text{id})$ définit un isomorphisme de \mathbf{O}_S -algèbres à involution de $(\mathbf{M}_n \times \mathbf{M}_n^{\text{op}}, \tau)$ vers $(\mathbf{M}_n \times \mathbf{M}_n^{\text{op}}, (\sigma \times (\sigma^{-1})^{\text{op}}) \circ \tau)$. On a donc montré que localement pour la topologie étale, toute \mathbf{O}_S -algèbre à involution de deuxième espèce est déployée. \square

2.7. Modules quadratiques. — Toujours rappeler la situation sur un anneau, qui sera le cas local.

Rappelons qu’un \mathbf{O}_S -module bilinéaire (resp. quadratique) est un objet en \mathbf{O}_S -modules bilinéaires (resp. quadratiques), au sens de l’exemple 7 de 2.2.1.2 (resp. 8). Nous éviterons d’utiliser la terminologie “forme bilinéaire” car le mot “forme” est déjà pris (déf. 2.3.4.1). De plus, pour alléger, nous désignerons souvent un module bilinéaire (resp. quadratique) par la seule mention de l’application $b : M \times M \rightarrow \mathbf{O}_S$ (resp. $q : M \rightarrow \mathbf{O}_S$), et nous utiliserons parfois le terme “module” à la place de \mathbf{O}_S -module.

La notation M^\vee désigne le module dual donné par

$$M^\vee(T) = \text{Hom}_{\mathbf{O}_T\text{-mod}}(M_T, \mathbf{O}_T).$$

Pour un \mathbf{O}_S -module localement libre de type fini, le morphisme canonique $\varpi_M : M \rightarrow (M^\vee)^\vee$ est un isomorphisme. Nous supposons dans cette partie et dans toute la suite du texte que, sauf mention explicite, tout les modules quadratiques ou bilinéaires sont localement libres de type fini.

La somme orthogonale de deux modules bilinéaires b_1 et b_2 est notée $b_1 \perp b_2$. Idem pour les modules quadratiques.

On montre facilement que se donner un \mathbf{O}_S -module bilinéaire est équivalent à se donner un \mathbf{O}_S -module M (loc. libre de type fini) et un morphisme $\phi : M \rightarrow M^\vee$. Ce \mathbf{O}_S -module sera symétrique si $(\phi)^\vee \circ \varpi_M = \phi$ et antisymétrique si $(\phi)^\vee \circ \varpi_M = -\phi$.

Lorsque la base S est égale à $\text{Spec}(R)$, le foncteur $\widetilde{(-)}$ induit une équivalence de catégorie entre les modules bilinéaires (resp. quadratiques) usuels sur R et les \mathbf{O}_S -modules bilinéaires (resp. quadratiques).

Un module quadratique q vient par définition avec un *module polaire associé* b_q , qui est un module bilinéaire symétrique. Sur les points, il s'agit de $b_q(x, y) = q(x + y) - q(x) - q(y)$.

De même, partant d'un module bilinéaire b , on obtient un module quadratique associé q_b en précomposant le morphisme bilinéaire $M \times M \rightarrow \mathbf{O}_S$ par l'application diagonale $M \rightarrow M \times M$. On a $q_{b_q} = 2q$ et si b est symétrique, $b_{q_b} = 2b$. Ces deux constructions sont clairement fonctorielles.

Définition 2.7.0.11. — Nous utiliserons la notation usuelle $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ pour désigner le module quadratique diagonal d'équation $a_1x_1^2 + \dots + a_nx_n^2$ sur \mathbf{O}_S^n . Pour les modules bilinéaires, nous utiliserons la même notation pour désigner le module d'équation $a_1x_1y_1 + a_2x_2y_2 + \dots + a_nx_ny_n$ sur \mathbf{O}_S^n .

On a donc $b_{\langle a_1, \dots, a_n \rangle} = \langle 2a_1, \dots, 2a_n \rangle$ et $q_{\langle a_1, \dots, a_n \rangle} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$.

Si (M, b) est un module bilinéaire et si N est un sous-module de M , l'orthogonal de N , noté N^\perp désigne le sous-module de M noyau de l'application correspondante $M \rightarrow M^\vee$ restreinte à N , autrement dit

$$N^\perp(T) = \{m \in M(T) \text{ t.q. } b(m_{T'}, n) = 0 \ \forall T' \longrightarrow T \text{ and } \forall n \in N(T')\}.$$

Si (M, q) est un module quadratique, alors l'orthogonal d'un sous-module est toujours pris au sens de la forme polaire b_q associée.

radical_defi

Définition 2.7.0.12. — Le *radical* rad_b d'un module bilinéaire (M, b) est le noyau de l'application $M \rightarrow M^\vee$. Étant donné un module quadratique (M, q) , nous appellerons *radical polaire*, noté rad_q , le radical de son module polaire b_q et nous appellerons *radical quadratique*, noté grad_q le sous-module de son radical polaire constitué des éléments s'envoyant sur 0 par q .

Remarque 2.7.0.13. — On vérifie aisément que le radical quadratique d'un module quadratique est bien un sous-module. Par contre, en général, il n'est

pas localement libre. Si 2 est inversible dans $\Gamma(S)$, alors le radical quadratique et le radical polaire de q coïncident. Sur un anneau, ni le radical polaire, ni le radical quadratique ne commutent en général à l'extension des scalaires, au sens que $\text{grad}_q(R) \otimes R'$ peut-être strictement contenu dans $\text{grad}_{q_{R'}}(R')$. Il suffit de prendre l'exemple des formes $\langle 1 \rangle$ et $\langle 2 \rangle$ sur \mathbb{Z} puis sur les corps de car. 2 ou pas, pour avoir tout les cas possibles. Le radical polaire commute aux extensions plates de la base, car c'est le noyau de $M \rightarrow M^\vee$ et donc en particulier, sur un corps de base, comme tout est plat, il y a commutation à l'extension des scalaires. Par contre, le radical quadratique ne commute même pas à ces extensions plates : sur un corps k de caractéristique 2, on peut prendre $R' = k[t]/t^2$ (qui est plate). Mais la forme quadratique quasi-linéaire $\langle 1 \rangle$ vérifie $\text{grad}_{\langle 1 \rangle}(k) = \{0\}$ et pourtant $\text{grad}_{\langle 1 \rangle_{R'}}(R') = \{tx, x \in k\}$.

Rajouter quelquepart l'explication des formes quasi-linéaires ?

La situation en rang un est la suivante.

rangun_prop

Proposition 2.7.0.14. — *Le foncteur $b \mapsto q_b$ induit une équivalence de catégories des modules bilinéaires de rang 1 vers les modules quadratiques de rang 1.*

Démonstration. — Étant donné un module quadratique q sur un \mathbf{O}_S -module localement libre de rang 1, construisons une forme bilinéaire b telle que $q_b \simeq q$. Lorsque L est libre de rang 1 et que e est une base de $\mathbf{O}_S(S)$, l'application q est entièrement déterminée par l'image $q(e)$, et on choisit la forme bilinéaire donnée sur les points par $(xe, ye) \mapsto xyq(e)$; cette forme est indépendante du choix de e . Pour un L quelconque, on prend un recouvrement ouvert Zariski qui trivialise L , et on construit b par recollement à partir du cas précédent ; l'isomorphisme $q \simeq q_b$ peut se tester localement. Cela montre que le foncteur est essentiellement surjectif. Il est fidèle puisque les modules sous-jacents ne changent pas, et on vérifie qu'il est plein en localisant à nouveau à des ouverts Zariski. \square

Remarque 2.7.0.15. — Étant donné $b_{q_b} = 2b$, il est clair que si 2 est inversible dans $\mathbf{O}_S(S)$, alors $q \mapsto b_q$ et $b \mapsto q_b$ sont des équivalences de catégories. Mais hors de cette hypothèse, dès le rang 2, il y a des modules quadratiques qui ne sont pas de la forme q_b avec b bilinéaire. Il suffit de prendre une base S en caractéristique 2 (i.e. où $2 = 0$ dans $\mathbf{O}_S(S)$). On a alors $b_{q_b} = 2b = 0$, donc un module quadratique q tel que b_q est non nul fournit un exemple. C'est le cas de q sur $M = \mathbf{O}_S^2$ donné par $q(ae_1 + be_2) = ab$ (qui est hyperbolique, voir ci-dessous).

hyperbolique_defi

Définition 2.7.0.16. — Le \mathbf{O}_S -module bilinéaire sur $M \oplus M^\vee$ donné par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varpi_M & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique et sera noté b_M^h . De même, le module bilinéaire donnée par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varpi_M & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique et sera noté a_M^h . On les

appelle respectivement module hyperbolique bilinéaire symétrique et anti-symétrique. Le module quadratique hyperbolique sur $M \oplus M^\vee$, noté q_M^h , est donné par l'évaluation $q_M^h(m, e) = e(m)$ sur les points. Lorsque $M = \mathbf{O}_S^n$, on utilise les notations b_{2n}^h , a_{2n}^h et q_{2n}^h .

Attention, on a $b_{q_M^h} = b_M^h$ mais $q_{b_M^h} = 2q_M^h$.

qhyperbolique_defi

Définition 2.7.0.17. — En rang impair, on note b_{2n+1}^h et q_{2n+1}^h les sommes orthogonale de b_{2n}^h et q_{2n}^h avec le module $\langle 1 \rangle$, bilinéaire ou quadratique respectivement.

Attention, on a alors $b_{q_{2n+1}^h} = \langle 2 \rangle \perp b_{2n}^h$ et $q_{b_{2n+1}^h} = \langle 1 \rangle \perp 2q_{2n}^h$.

regulier_defi

Définition 2.7.0.18. — Un \mathbf{O}_S -module bilinéaire est dit *régulier* si son radical est nul. Un \mathbf{O}_S -module quadratique est dit régulier si son module bilinéaire polaire associé est régulier.

Exemple 2.7.0.19. — Les modules hyperboliques b_M^h , a_M^h et donc q_M^h sont réguliers. **Explication de la régularité en caractéristique 2, et sur un corps algébriquement clos ?**

regulierloca_prop

Proposition 2.7.0.20. — Un \mathbf{O}_S -module bilinéaire (resp. quadratique) est régulier si et seulement s'il l'est localement pour la topologie étale.

Démonstration. — Le fait d'être un isomorphisme se teste localement pour la topologie étale. \square

2.7.1. Déterminant. — Définissons maintenant le déterminant d'un module bilinéaire. Rappelons que Δ_M est le déterminant du \mathbf{O}_S -module localement libre de type fini M .

Définition 2.7.1.1. — Le *morphisme déterminant* d'un module bilinéaire $b : M \rightarrow M^\vee$, est le morphisme de \mathbf{O}_S -modules $(\Delta_M)^{\otimes 2} \rightarrow \mathbf{O}_S$ donné par la composition du morphisme $id \otimes \Delta_b : \Delta_M^{\otimes 2} \rightarrow \Delta_M \otimes \Delta_{M^\vee}$ suivi des isomorphismes canoniques

$$\Delta_M \otimes \Delta_{M^\vee} \simeq \Delta_M \otimes \Delta_M^\vee \simeq \mathbf{O}_S.$$

On le note d_b .

Remarque 2.7.1.2. — Lorsque $M = \mathbf{O}_S^n$, on a canoniquement $\mathbf{O}_S \simeq \mathbf{O}_S^{\otimes 2} \simeq \Delta_M^{\otimes 2}$ et on obtient bien le déterminant de la matrice qui décrit l'application bilinéaire sur la base canonique, en regardant l'élément de $\mathbf{O}_S(S)$ qui est l'image de 1 par ce morphisme.

detregiso_prop

Proposition 2.7.1.3. — *Un module bilinéaire M est régulier si et seulement si son morphisme déterminant $\Delta_M^{\otimes 2} \rightarrow \mathbf{O}_S$ est un isomorphisme. Un module quadratique est régulier si et seulement si le déterminant de son module bilinéaire associé est inversible.*

Démonstration. — La deuxième affirmation est une conséquence triviale de la première, qui se vérifie localement pour la topologie de Zariski, et lorsque le module est \mathbf{O}_S^n , l'affirmation est classique : une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est inversible. \square

Un \mathbf{O}_S -module déterminant est un objet en \mathfrak{det} au sens de l'exemple 10 de 2.2.1.2. Autrement dit, c'est un module n -trivialisé avec $n = 2$, voir la partie 2.5.3 ; Explicitement, c'est un couple (L, ϕ) où L est un \mathbf{O}_S -module inversible de rang constant 1, et $\phi : L^{\otimes 2} \rightarrow \mathbf{O}_S$ est un isomorphisme.

moddet_defi

Définition 2.7.1.4. — On note $\mathcal{ModDet} = 2\text{-}Triv$ le champ des modules déterminants.

Notons que pour tout module déterminant (L, ϕ) , on a $\mathbf{Aut}_{(L, \phi)} = \mu_2$.

Définition 2.7.1.5. — Soit (M, b) un module bilinéaire (resp. quadratique) régulier. Son *module déterminant* est le module déterminant (Δ_M, d_b) (resp. (Δ_M, d_{b_q})).

Par compatibilité aux formes hyperboliques, il est parfois nécessaire d'ajouter un signe au module déterminant trivial.

moddettriv_defi

Définition 2.7.1.6. — Soit $\varepsilon = 1$ ou -1 . Le \mathbf{O}_S -module déterminant $(\mathbf{O}_S, \varepsilon \cdot m)$ où $m : \mathbf{O}_S^{\otimes 2} \rightarrow \mathbf{O}_S$ est la multiplication est appelé le \mathbf{O}_S -module déterminant *trivial pair* si $\varepsilon = 1$ et *trivial impair* si $\varepsilon = -1$.

Lemme 2.7.1.7. — *Le module déterminant du module hyperbolique q_{2n}^h est le module déterminant trivial de la parité de n .*

Démonstration. — Le déterminant de la matrice associée à la forme bilinéaire sur la base canonique est $(-1)^n$. \square

La proposition 2.5.3.7 avec $n = 2$ se décline pour $\varepsilon = \pm 1$.

champmu2_prop

Proposition 2.7.1.8. — *Le foncteur $(L, \phi) \mapsto \mathbf{Iso}_{(\mathbf{O}_S, \varepsilon \cdot m), (L, \phi)}$ est une équivalence de catégories fibrées entre champs en groupoïdes*

$$\mathcal{Formes}((\mathbf{O}_S, \varepsilon \cdot m)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{Tors}(\mu_2).$$

des formes de $(\mathbf{O}_S, \varepsilon \cdot m)$ vers les μ_2 -torseurs. En particulier, si la topologie est fppf, puisque (-1) est localement un carré, et que tout les modules 2-trivialisés sont des formes de (\mathbf{O}_S, m) et on a

$$2\text{-}Triv \simeq \mathcal{Tors}(\mu_n).$$

Notons enfin :

Lemme 2.7.1.9. — Deux (L_1, ϕ_1) et (L_2, ϕ_2) sont isomorphes si et seulement s'il existe un isomorphisme $\psi : L_1 \simeq L_2$ et si $\phi_1^{-1}\psi^{\otimes 2}\phi_2(1)$ est un carré de $\mathbf{G}_m(S)$.

Démonstration. — Un sens est évident, et dans l'autre, s'il existe un tel ϕ , on peut le modifier par une racine carrée de l'élément de $\mathbf{G}_m(S)$ pour le corriger en un morphisme de module déterminants. \square

Il faut modifier un peu ce qui suit à l'aune des n -trivialisations.

Lorsque (M, b) est un module bilinéaire régulier, son module déterminant (Δ_M, d_b) définit donc un μ_2 -torseur $\mathbf{Iso}_{(\mathbf{O}_S, \varepsilon \cdot m), (\Delta_M, d_b)}$. Préciser (et justifier) quand c'est un toseur étale et pas seulement fppf. Clairement, c'est le cas quand q est une forme du module hyperbolique de rang pair, par la proposition 2.7.1.13

torseurdet_defi

Définition 2.7.1.10. — On appelle *module déterminant pair* (resp. *impair*) le module déterminant $(\Delta_M, \varepsilon d_b)$ avec $\varepsilon = 1$ (resp. $\varepsilon = -1$) associé à un module bilinéaire (b, M) régulier. On le note D_b^ε . Lorsque q est un module quadratique régulier, on définit son module déterminant pair ou impair $D_q^\varepsilon = D_{b_q}^\varepsilon$. Cela définit un foncteur fibré

$$D : \mathcal{Formes}(q_{2n}^h) \longrightarrow \mathcal{ModDet}.$$

qui à q associe D_q .

Vérifier que finalement, on a bien besoin de ce signe. J'ai l'impression que non. C'est juste que le module hyperbolique a un signe dans son module déterminant, mais c'est pas grave, ce signe est absorbé dans ses automorphismes, alors on s'en fiche, en pratique.

Sur le module \mathbf{O}_S^2 , de base canonique (e_1, e_2) , étant donné deux éléments a et b de $\Gamma(S)$, on note $[a, b]$ le module quadratique donné sur les points par $xe_1 + ye_2 \mapsto ax^2 + xy + by^2$.

ab_lemm

Lemme 2.7.1.11. — Le module $[a, b]$ est régulier si et seulement si $1 - 4ab \in \Gamma(S)^\times$. Le schéma $T = \text{Spec}(\mathcal{O}_S[t]/(t^2 - t + ab))$ est alors étale sur S et si $a, b \in \Gamma(S)^\times$, le module $[a, b]_T$ est isomorphe à $(q_2^h)_T$.

Démonstration. — On vérifie immédiatement que le déterminant de $[a, b]$ est la multiplication par $4ab - 1$ de $\mathbf{O}_S = \mathbf{O}_S^{\otimes 2} \rightarrow \mathbf{O}_S$. C'est donc un isomorphisme si et seulement si $1 - 4ab$ est inversible, ce qui prouve l'affirmation sur la régularité.

On peut vérifier que l'extension est étale localement, lorsque $S = \text{Spec}(R)$, en calculant la dérivée de $t^2 - t + ab$ qui vaut $2t - 1$, qui est donc inversible dans $R' = R[t]/(t^2 - t + ab)$ puisque $(2t - 1)^2 = 1 - 4ab$.

Lorsque a et b sont inversibles, on peut alors vérifier que sur T , $(te_1 - ae_2, (1 - t)e_1 - ae_2)$ est une nouvelle base du module, sur laquelle il est clairement isomorphe à q_2^h . \square

Proposition 2.7.1.12. — *Sur un anneau local, un module quadratique de rang pair est régulier si et seulement s'il est isomorphe à une somme directe de modules de la forme $[a, b]$ ci-dessus avec $1 - ab$, a et b dans $\Gamma(S)^\times$. Est-ce que ce n'est pas plutôt $1 - 4ab$, $a, b \in \Gamma(S)^\times$?*

Démonstration. — Voir [Knus91, Ch. IV, lemme 2.2.2]. La preuve est essentiellement qu'on peut prouver ce type de décomposition sur un corps, puis la relever du corps résiduel à l'anneau local par le lemme de Nakayama. \square

setaleshyppair_prop

Proposition 2.7.1.13. — *Les formes étales du module quadratique hyperbolique q_{2n}^h (de rang $2n$ sur \mathbf{O}_S^{2n}) sont les modules quadratiques réguliers de rang $2n$.*

Démonstration. — Puisque q_{2n}^h est régulier, toute forme étale est régulière par 2.7.0.20. Réciproquement, étant donné un module quadratique régulier, on peut supposer que son module sous-jacent est libre. Comme il s'écrit comme somme de modules de la forme $[a, b]$ avec $a, b, 1 - 4ab \in R^\times$ sur les anneaux locaux et qu'il n'y a alors qu'un nombre fini de coefficients, c'est encore le cas sur un voisinage Zariski et affine de chaque point. On conclut par le lemme 2.7.1.11. \square

Ici, il faut dire quelque chose sur le rang impair. Probablement parler du demi-déterminant classique et essayer de caractériser les modules formes fppf du module hyperbolique comme les module quadratiques semi-réguliers en un sens à définir. Lorsqu'on définit le demi-déterminant pour ces formes, plus loin, avec l'algèbre de Clifford, il faudra raccorder les deux notions. Attention, il y a un signe : en effet, pour notre demi-déterminant, la forme hyperbolique donne le module déterminant trivial (sans signe) donné par la multiplication $\mathbf{O}_S \otimes \mathbf{O}_S \simeq \mathbf{O}_S$. Par contre le demi-déterminant de Kneser donne un signe $(-1)^n$ qu'on voit en 3.2 p. 209 de Knus.

Expliquer aussi qu'on peut définir des éléments dans les faisceaux $\mathbf{G}_m/\mathbf{G}_m^2$, et les comparer.

Comparer les définitions de déterminants ici avec ceux classiques, notamment les discriminants à signes.

Partant d'un module quadratique (M, q) , considérons $\mathbf{Aut}_{M, q}$, que nous noterons $\mathbf{O}_{M, q}$ ou même \mathbf{O}_q (voir les parties 4 et 5 pour plus de détails). Donner peut-être ses points ici, et reléguer la représentabilité à plus tard ? On a besoin des points pour le déterminant juste en dessous. En fait, les points et la représentabilité semblent aller ensemble, alors peut-être faire tout ici ?

Nous aurons besoin d'un raffinement dû à Kneser du théorème de Cartan-Dieudonné.

Définition 2.7.1.14. — Soit (M, q) un module quadratique quelconque. Soit v un élément de $M(S)$ tel que $q(v) \in \Gamma(S)^\times$. La *réflexion orthogonale* associée à v est l'élément de $\mathbf{O}_{M,q}(S)$ de la forme $\tau_v = x \mapsto x - \frac{b_q(x, v)}{q(v)}v$.

Lorsqu'on parle de réflexion orthogonale sans préciser le vecteur v , il s'agit toujours d'une réflexion orthogonale associée à un vecteur v comme dans la définition précédente (donc avec $q(v) \in \Gamma(S)^\times$).

detrefl_lemm

Lemme 2.7.1.15. — *Le déterminant d'une réflexion orthogonale est $-1 \in \Gamma(S)^\times$.*

Démonstration. — Ceci peut se vérifier localement pour la topologie de Zariski. On peut donc supposer que S est le spectre d'un anneau local et que M est libre. On prend alors une base e_1, \dots, e_n de M avec $v = \sum v_i e_i$, et on calcule

$$\begin{aligned} \Delta(\tau_v)(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) &= \tau_v(e_1) \wedge \dots \wedge \tau_v(e_n) \\ &= (e_1 - \frac{b_q(v, e_1)}{q(v)}v) \wedge \dots \wedge (e_n - \frac{b_q(v, e_n)}{q(v)}v) \\ &= (1 - \sum v_i \frac{b_q(v, e_i)}{q(v)})(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) \end{aligned}$$

or $2q(v) = b_q(v, v) = \sum v_i b_q(v, e_i)$ donc le facteur entre parenthèses vaut bien (-1) . \square

Kneser_theo

Théorème 2.7.1.16 (Kneser). — *Soit (q, M) un module quadratique sur un anneau local R , et soit N et N' deux sous-modules libres de M tels que $q|_N$ soit régulière, et munis d'un isomorphisme $t : N \rightarrow N'$ de modules quadratiques $(q|_N, N) \rightarrow (q|_{N'}, N')$. Alors t peut se prolonger en un élément de $\mathbf{O}_{M,q}(R)$ et de plus, cet élément peut-être choisi comme un produit de réflexions orthogonales si l'une des conditions suivantes est satisfaite : 1. le corps résiduel de R est différent de \mathbb{F}_2 , et la forme $q_{\mathbb{F}_2}$ n'est pas identiquement nulle. 2. le corps résiduel de R est \mathbb{F}_2 , et la forme $q_{\mathbb{F}_2}$ n'est pas identiquement nulle sur M^\perp .*

Démonstration. — Voir [Knes02], Ch. I, (4.4) et (4.5) dans le cas où $E = H$ avec la notation de loc. cit. \square

Attention, la condition 2 doit être comprise comme non satisfaite si $M^\perp = \{0\}$, donc en particulier, ce théorème ne dit rien lorsque le corps résiduel est \mathbb{F}_2 et le module est régulier.

cartan-Dieudonne_theo

Théorème 2.7.1.17 (Cartan-Dieudonné). — Si (M, q) est un module quadratique régulier sur un anneau local, alors tout élément de $\mathbf{O}_{M,q}(\mathbf{R})$ se décompose en produit de réflexions orthogonales, sauf peut-être si le corps résiduel est \mathbb{F}_2 et si le rang de M est inférieur ou égal à 4.

Démonstration. — On prend $N = N' = M$ dans le théorème précédent. Si le corps résiduel n'est pas \mathbb{F}_2 , alors la condition 1 est vérifiée. Si le corps résiduel est \mathbb{F}_2 , alors voir [Knes02, Ch. I, (4.6)]. \square

cartanDieudonne_rema

Remarque 2.7.1.18. — Pour une forme semi-régulière renvoyer à quelque chose sur un anneau local, tout élément du groupe orthogonal n'est pas forcément un produit de réflexions. C'est déjà faux pour la forme hyperbolique q_{2n+1}^h , $n \geq 1$ sur $\mathbb{F}_2[x]/x^2$: si e est le vecteur de base portant la forme $\langle 1 \rangle$, toute réflexion orthogonale τ_v préserve le sous-espace engendré par e , puisque dans ce cas de caractéristique 2, c'est le radical polaire. Donc, $\tau_v(e) = \lambda e$. Il suit que $\lambda e = \tau_v(e) = e - \frac{b_q(e,v)}{q(v)}v$, donc soit $b_q(e,v) = 0$ et $\tau_v(e) = e$, soit $b_q(e,v) \neq 0$, et v est proportionnel à e , donc $\tau_v(e) = -e = e$. Dans les deux cas, $\tau_v(e) = e$ pour tout vecteur v et donc $f(e) = e$ pour tout produit de réflexions. Ainsi, l'application égale à l'identité sur le sous-espace sous-jacent à q_{2n}^h et envoyant e sur $(1+x)e$ est bien dans le groupe orthogonal puisque $(1+x)^2 = 1$, mais ne peut être un produit de réflexions.

Ne pas oublier que quelque part, il faut montrer que les formes à valeurs dans un fibré en droites sont des formes des formes à valeurs dans le fibré tout court, parce que ce fibré en droites doit être un carré, et qu'elles ont le même groupe orthogonal, par la construction carré.

ilformespaires_prop

Proposition 2.7.1.19. — Les formes étales du \mathbf{O}_S -module bilinéaire hyperbolique b_{2n}^h sont les \mathbf{O}_S -module b réguliers tels que la forme q_b associée est nulle réduite modulo 2.

Démonstration. — Si la forme est localement isomorphe à une hyperbolique, elle est régulière, et elle est nulle modulo 2 parce que ces deux conditions se testent localement. Vérifier si elle est suffisante. On doit pouvoir se ramener aux anneaux locaux, et alors il ne reste à traiter que le cas de caractéristique résiduelle 2, puisque pour les autres, on a déjà le résultat par les formes quadratiques et par $b_{q_b} = 2b$ avec 2 qu'on peut rendre carré par une extension étale. Ensuite, en caractéristique 2, sur le corps, on décompose en somme de plans, et on relève. Il reste à montrer que chacun de ces plans est bien localement hyperbolique. \square

Formes étales du module quadratique hyperbolique en dimension paire : modules non dégénérés. Attention, ça doit être faux pour les modules bilinéaires, à cause de la différence entre xy et $x^2 + y^2$ en char 2.

Formes (étales) du module quadratique hyperbolique en dimension impaire pour le type B_n .

Formes (étales) de la forme bilinéaire alternée de matrice antidiagonale b_n pour le type (intérieur ?) C_n . Il faudra aussi les formes de l'algèbre à involution (probablement symplectique) associée.

Formes (étales) de la forme bilinéaire alternée

2.8. Algèbres de Lie. — Soit I_S le schéma des nombres duaux sur S , défini comme le spectre de la \mathcal{O}_S -algèbre $\mathcal{O}_S[t]/t^2$. Son morphisme structural $I_S \rightarrow S$ admet une section canonique correspondant à l'application envoyant t sur 0. Voir [SGA3, Exp. II, §2] pour les détails. On a $\mathbf{O}_S(I_T) = \mathbf{O}_S(T)[t]/t^2$ pour tout $T \rightarrow S$.

Dans [SGA3, Exp. II], l'algèbre de Lie \mathbf{Lie}_G d'un schéma en groupes G sur une base S est défini (en 3.9.0.1) comme le foncteur de points tiré le long de la section unité $S \rightarrow G$ du fibré tangent \mathbf{T}_G à G , lui-même défini (en 3.1) comme le foncteur de points des $T \mapsto \mathbf{T}_G(T) = G(I_T)$. Ce fibré tangent et l'algèbre de Lie sont munis d'une structure de foncteur en groupes, et on a ainsi pour tout $T \rightarrow S$ une suite exacte scindée de groupes

$$\boxed{\text{seLie_eq}} \quad (3) \quad \mathbf{Lie}_G(T) \xrightarrow{i} G(I_T) \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} G(T)$$

qui identifie $\mathbf{Lie}_G(T)$ au noyau du morphisme p , et où p et s sont induits par les deux morphismes mentionnés plus haut entre S et I_S . Le foncteur \mathbf{Lie}_G s'identifie (par 3.3) à la fibration vectorielle $\mathbf{V}(\omega_{G/S}^1)$, au sens de [SGA3, Exp. I, déf. 4.6.1], associée au \mathcal{O}_S -module cohérent $\omega_{G/S}^1$ des différentielles relatives de G par rapport à S tiré à S par la section unité. En particulier, ce foncteur est représentable, et est muni d'une structure de \mathbf{O}_S -module. Son crochet de Lie est défini (en 4.7.2) par l'intermédiaire de la représentation adjointe, et $G \mapsto \mathbf{Lie}_G$ définit naturellement un foncteur des schémas en groupes vers les \mathbf{O}_S -modules munis d'une loi de composition bilinéaire (voir [SGA3, Exp. II, (i) avant la prop. 4.8]).

$\boxed{\text{LieOS_prop}}$ **Proposition 2.8.0.20.** — Dans le cas du groupe additif sous-jacent au \mathbf{O}_S -module \mathbf{O}_S lui-même, on a les identifications $\mathbf{T}_{\mathbf{O}_S} = \mathbf{O}_S[t]/t^2$ et $\mathbf{Lie}_{\mathbf{O}_S} = \mathbf{O}_S$, muni du crochet nul.

Démonstration. — C'est immédiat. \square

Proposition 2.8.0.21. — Pour toute extension $T \rightarrow S$, on a $(\mathbf{Lie}_G)_T = \mathbf{Lie}_{G_T}$.

Démonstration. — Voir [SGA3, Exp. II], proposition 3.4 et 4.1.2.0. \square

Posons $\mathcal{L}ie_G = (\omega_{G/S}^1)^\vee$.

Proposition 2.8.0.22. — Si G est lisse sur S , alors $\omega_{G/S}^1$ est localement libre de type fini et $\mathbf{Lie}_G = \mathbf{W}(\mathcal{L}ie_G)$. Si de plus S est affine égal à $\mathrm{Spec}(R)$, on a donc $\mathcal{L}ie_G = \tilde{A}$ où $A = \mathcal{L}ie_G(S) = \mathbf{Lie}_G(S)$ est un module localement libre sur R et pour schéma affine $T = \mathrm{Spec}(R')$ au-dessus de S , on a

$$\mathbf{Lie}_G(T) = A_{R'}.$$

Démonstration. — Le faisceau $\omega_{G/S}^1$ est localement libre de type fini par [SGA1, Exp. II, th. 4.3]. On a $\mathbf{Lie}_G = \mathbf{V}(\omega_{G/S}^1)$ et $\mathbf{V}(\omega_{G/S}^1) = \mathbf{W}((\omega_{G/S}^1)^\vee)$ par [SGA3, Exp. I, cor. 4.6.5.1]. Le cas affine s'obtient par la suite d'identifications

$$\mathbf{Lie}_G(T) = (\mathbf{Lie}_G)_T(T) = \mathbf{W}(\tilde{A})_T(T) = \mathbf{W}((\tilde{A})_T)(T) = \mathbf{W}(\widetilde{A_{R'}})(T) = A_{R'}.$$

□

Remarque 2.8.0.23. — Dans le cas affine et lisse de la proposition précédente, le module A est muni d'une structure d'algèbre de Lie sur R par pleine fidélité de \mathbf{W} et comme cette algèbre permet de retrouver complètement le foncteur \mathbf{Lie}_G , nous appellerons parfois A l'algèbre de Lie de G .

Le lemme suivant justifie les calculs des algèbres de Lie de nombreux groupes “classiques”.

sous_algebre_lemm

Lemme 2.8.0.24. — Soit G un foncteur en groupes représentable sur une base S et soit $f : F \rightarrow G$ un sous-groupe représentable. Alors $\mathbf{Lie}_f : \mathbf{Lie}_F \rightarrow \mathbf{Lie}_G$ identifie \mathbf{Lie}_F à une sous- \mathbf{O}_S -algèbre de Lie de \mathbf{Lie}_G .

Démonstration. — Le fait que c'est un sous- \mathbf{O}_S -module est clair par la définition utilisant les nombres duaux. □

Soit A une \mathbf{O}_S -algèbre associative et unitaire (mais non nécessairement commutative), localement libre comme \mathbf{O}_S -module et telle que \mathbf{O}_S est central dans A . On note \mathcal{L}_A le foncteur en algèbres de Lie de \mathbf{O}_S -module sous-jacent A et de crochet $[a, b] = ab - ba$.

LieGLn_prop

Proposition 2.8.0.25. — L'algèbre de Lie $\mathbf{Lie}_{\mathbf{GL}_{1,A}}$ est isomorphe à \mathcal{L}_A , et par cet isomorphisme, la représentation adjointe correspond à la conjugaison.

Démonstration. — Le morphisme naturel $A \otimes_{\mathbf{O}_S} \mathbf{T}_{\mathbf{O}_S} \rightarrow \mathbf{T}_A$ est un isomorphisme de \mathbf{O}_S -modules car A est localement libre (voir [SGA3, Exp. II, 4.4.2]). Cela permet d'identifier l'espace tangent $\mathbf{T}_A(T) = A(I_T) = A(T)[t]/t^2$, et la suite (3) pour $G = \mathbf{GL}_{1,A}$ devient alors

LieGLn_eq

$$(4) \quad A(T) \xrightarrow{i} A(T)^\times \times A(T) \xrightleftharpoons[s]{p} A(T)^\times$$

avec la loi de groupe additive sur $A(T)$. La représentation adjointe est donc immédiate, et on vérifie facilement que le crochet de Lie est bien celui de \mathfrak{L}_A en utilisant la méthode de [SGA3, Exp. II, 4.7.3], ce qui revient à calculer $(1+xt)(1+yt')(1-xt)(1-yt') = 1 + (xy - yx)tt'$ où t et t' sont deux variables de carré nul, intervenant dans $I_S \times_S I_S$ \square

Si B est une R -algèbre, soit $\text{Dér}_R(B, B)$ le module des différentielles de B dans B , c'est-à-dire des applications R -linéaires $d : B \rightarrow B$ satisfaisant à $d(ab) = d(a)b + ad(b)$. Elles sont automatiquement nulles sur R . Muni du crochet $[d, e] = d \circ e - e \circ d$, c'est une algèbre de Lie. Pour tout \mathbf{O}_S -algèbre A , on définit alors $\text{Dér}_{\mathbf{O}_S\text{-alg}}(A, A)$ comme le sous-ensemble des endomorphismes de \mathbf{O}_S -module de A dont les éléments vérifient la condition ci-dessus sur les T -points pour tout $T \rightarrow S$.

Le R -module sous-jacent à B muni du crochet $[a, b] = ab - ba$ est également une algèbre de Lie. Ce crochet est nul sur R , et définit donc une structure d'algèbre de Lie sur le module quotient B/R . L'application $\phi : B \rightarrow \text{Dér}_R(B, B)$ qui à a associe la dérivation ($x \mapsto ax - xa$) est un morphisme d'algèbres de Lie (i.e. respecte le crochet). Son noyau est le centre (multiplicatif) de B ; elle se factorise donc en une application d'algèbres de Lie $\bar{\phi} : B/R \rightarrow \text{Dér}_R(B, B)$. Pour toute \mathbf{O}_S -algèbre A , on définit ainsi une application $\bar{\phi} : A/\mathbf{O}_S \rightarrow \text{Dér}_{A, A}$.

Définition 2.8.0.26. — Soit A une \mathbf{O}_S -algèbre localement libre. Notons $\mathbf{Dér}_{A, A}$ le foncteur de points $T \mapsto \text{Dér}_{\mathbf{O}_T\text{-alg}}(A_T, A_T)$.

algLieAut_prop

Proposition 2.8.0.27. — On a un isomorphisme d'algèbres de Lie

$$\mathbf{Lie}_{\mathbf{Aut}_A^{\text{alg}}} \simeq \mathbf{Dér}_{A, A}.$$

La représentation adjointe est donnée par $\sigma(d) = \sigma \circ d \circ \sigma^{-1}$ pour $\sigma \in \text{Aut}_{\mathbf{O}_T\text{-alg}}(A_T)$ et $d \in \text{Dér}_{\mathbf{O}_T}(A_T, A_T)$. Lorsque l'algèbre A est séparable⁽⁶⁾ sur \mathbf{O}_S et de centre \mathbf{O}_S , le morphisme $\bar{\phi}$ est un isomorphisme, et à travers cet isomorphisme, la représentation adjointe est donnée par l'action usuelle des \mathbf{O}_S -automorphismes de A sur A/\mathbf{O}_S , le quotient par le centre.

Démonstration. — En utilisant à nouveau $A_{I_S}(T) \simeq A(T)[t]/t^2$, on calcule directement que

$$\mathbf{T}_{\mathbf{Aut}_A^{\text{alg}}}(T) = \mathbf{Aut}_A^{\text{alg}}(I_T) = \text{Aut}_{\mathbf{O}_T[t]/t^2\text{-alg}}(A_T[t]/t^2)$$

s'identifie à l'ensemble des couples (ϕ_1, ϕ_2) où $\phi_1 \in \text{Aut}_{\mathbf{O}_T\text{-alg}}(A_T)$, $\phi_2 \in \text{End}_{\mathbf{O}_T\text{-mod}}(A_T)$ avec $\phi_2(ab) = \phi_1(a)\phi_2(b) + \phi_2(a)\phi_1(b)$ sur les points, et l'algèbre de Lie est le sous-groupe des éléments tels que ϕ_1 est l'identité, donc $\mathbf{Dér}_{A, A}$. Pour une algèbre séparable, l'application ϕ est un isomorphisme

6. C'est-à-dire que localement pour la topologie étale, l'algèbre $A(T)$ est séparable.

localement par [KnusOj74, III, th. 1.4 p. 73]. Pour tout $\sigma \in \text{Aut}(A_T)$, on a $\phi(\sigma(a)) = \sigma \circ \phi(a) \circ \sigma^{-1}$, d'où l'action adjointe annoncée. \square

2.9. Lissité. — Pour montrer qu'un groupe algébrique sur S est réductif, sa lissité sur S est un point clé. Le critère de lissité par fibres [EGA, IV-4, prop. 17.8.2] permet de déduire la lissité sur S de la lissité des fibres au-dessus de tout les points de S à condition d'avoir la platitude sur S , ce qui n'est pas évident pour des groupes définis comme des foncteurs de points. On rappelle donc un critère issu de [SGA3] qui nous permettra d'obtenir la lissité sans peine dans les cas que nous considérerons.

Proposition 2.9.0.28. — *Soit G un schéma en groupes de type fini sur un corps k . Alors G est lisse sur k si et seulement si son algèbre de Lie est de dimension égale à la dimension (de Krull) de G .*

Démonstration. — Soit $g \in G$. Par descente plate de la lissité [SGA1, Exp. II, cor. 4.13], on peut supposer que g est k -rationnel, et par changement de base le long de la multiplication par g , on peut supposer que g est l'unité de G . Le résultat découle alors de [SGA1, Exp. II, th. 5.5]. \square

Proposition 2.9.0.29. — *Modifier l'énoncé avec $S = \text{Spec } \mathbb{Z}$ Soit G un groupe algébrique localement de présentation finie sur une base S réduite, dont les fibres sont lisses, connexes et de dimension localement constante. Alors G est lisse sur S .*

Démonstration. — Si S n'est pas connexe, G se décompose en une union disjointe de groupes sur les composantes connexes de S . On peut donc supposer que S est connexe. On remarque ensuite que le morphisme structurel $G \rightarrow S$ est scindé par la section unité. On en déduit que G est connexe puisque S est connexe et les fibres sont connexes. Le résultat suit alors de [SGA3, exp. VI, cor. 4.4]. \square

Exemple 2.9.0.30. — Le schéma en groupes $\mu_{n,S}$ est lisse si et seulement si n est premier aux caractéristiques résiduelles de S . Voir [SGA3, Exp. VIII, prop. 2.1].

2.10. Données radicielles. — Rappelons brièvement la notion de donnée radicielle, qui est la donnée combinatoire qui permet la classification des groupes réductifs déployés, et comment un groupe réductif fournit une donnée radicielle, afin de pouvoir par la suite faire correspondre les groupes classiques avec la classification de [SGA3].

Une donnée radicielle est la donnée d'un \mathbb{Z} -module libre de rang fini M , d'un sous-ensemble fini Σ de M dont les éléments sont appelés *racines*, d'une injection $\Sigma \rightarrow M^\vee$, habituellement notée $\alpha \mapsto \alpha^\vee$, dont les images sont appelées *coracines*, et qui satisfont à deux axiomes rappelés en [SGA3, Exp. XXI, déf.

1.1.1]. Cette donnée est plus générale que celle d'un système de racines pour deux raisons : premièrement, il peut y avoir une partie de M qui n'est pas engendrée par les racines (même après tensorisation par \mathbb{Q}) et qui correspond au fait que le groupe peut avoir un radical non trivial s'il n'est pas semi-simple. Deuxièmement, par rapport à un système de racines, on conserve la donnée du réseau des caractères du tore entre le réseau des racines et celui des poids.

Soit G un groupe algébrique réductif sur S contenant un tore maximal T qu'on suppose déployé, c'est-à-dire isomorphe à $D_S(M)$ pour un groupe abélien libre M , qui s'identifie donc aux caractères de T . Les racines de G sont alors les éléments $\alpha \in M$ pour lesquels, sur toutes les fibres, α reste non nul et l'espace propre correspondant dans la représentation adjointe de G restreinte à T est également non nul [SGA3, Exp. XIX, déf. 3.2]. La coracine $\alpha^\vee \in M^\vee$ correspondant à α est obtenue par unicité dans [D65, th. 2.4.1], qui reprend [SGA3, Exp. XX, th. 2.1]. Tout cela forme bien une donnée radicielle par [SGA3, Exp. XXII prop. 1.14]. Pour identifier les données radicielles de groupes réductifs donnés, nous utiliserons donc [D65, th. 2.4.1], qui fait intervenir les morphismes exponentiels, qu'il faudra donc avoir identifiés avant, toujours par unicité, voir [D65, th. 2.3.4] ou [SGA3, Exp. XX, th. 1.5].

neAccouplement_rema

Remarque 2.10.0.31. — Attention, les énoncés de [D65, th. 2.4.1] diffèrent d'un signe dans l'accouplement entre espaces propres de racines opposées de l'algèbre de Lie (désigné par $(X, Y) \mapsto XY$). La raison de cette différence de signe, qui est un choix à faire, est expliquée par la note de Demazure dans le présent volume, et il en ressort que le choix de [D65, th. 2.4.1] est meilleur. Nous nous y tiendrons donc, et le lecteur devra donc multiplier l'accouplement par (-1) s'il veut utiliser les formules de [SGA3].

2.11. Groupes d'automorphismes. — Rappelons quelques résultats sur les groupes d'automorphismes de groupes réductifs, qui nous seront utiles par la suite.

Un schéma en groupes réductif G est un faisceau étale en groupes, et a donc à ce titre un faisceau en groupes d'automorphismes $\mathbf{Aut}_G = \mathbf{Aut}_G^{\text{gr}}$, défini par 2.1.

Le quotient (en tant que faisceaux fpqc) d'un groupe réductif par son centre est représentable et est un groupe réductif semi-simple adjoint, appelé groupe adjoint de G et qu'on notera ici G_{adj} .

automorphismes_theo

Théorème 2.11.0.32. — *Pour tout groupe réductif sur S , on a une suite exacte de S -faisceaux étales en groupes*

$$1 \longrightarrow G_{\text{adj}} \longrightarrow \mathbf{Aut}_G \longrightarrow \mathbf{AutExt}_G \longrightarrow 1$$

où la première flèche envoie un élément sur l'automorphisme intérieur associé, et où \mathbf{AutExt}_G est défini comme le quotient.

1. Lorsque G est déployé et donc muni d'un épinglage, on a un isomorphisme canonique entre \mathbf{AutExt}_G et le groupe des automorphismes de la donnée radicielle épinglée, et la suite est scindée.
2. Lorsque G est semi-simple simplement connexe ou adjoint, ce dernier groupe coïncide avec celui des automorphismes du diagramme de Dynkin.

Démonstration. — Voir [SGA3, Exp. XXIV, th. 1.3] pour les deux premiers points, suivi de [SGA3, Exp. XXI, prop. 6.7.2 et cor. 7.4.5] pour le dernier. \square

Il se trouve que $\mathbf{Aut}_G^{\text{gr}}$ est alors représentable comme conséquence de ce théorème, mais nous n'en aurons pas besoin. Nous utiliserons uniquement ce faisceau en groupes pour tordre un groupe déployé donné, et obtenir tout les groupes réductifs de même donnée radicielle déployée.

3. Groupes de type A_n

3.1. Groupe linéaire. — Le groupe linéaire est probablement le groupe le plus classique qui soit, et comme la plupart des autres groupes d'automorphismes sont définis comme des sous-groupes du groupe linéaire, il est naturel de le traiter en premier. C'est de plus un bon exemple pour se faire la main. Il a été défini en 2.5.2.2, et sa représentation adjointe dans son algèbre de Lie est décrite en 2.8.0.25. C'est le prototype du groupe réductif qui n'est pas semi-simple.

GL1red_prop

Proposition 3.1.0.33. — *Pour toute \mathbf{O}_S -algèbres A localement libre de type fini séparable, le schéma en groupes $\mathbf{GL}_{1,A}$ est réductif.*

Démonstration. — Comme cela se vérifie localement sur la base, on se ramène au cas S affine et A libre. Par construction (voir prop. 2.5.2.1), le schéma $\mathbf{GL}_{1,A}$ est alors affine et ouvert dans A qui est un fibré vectoriel sur S , donc lisse. Il suffit alors de vérifier que les fibres géométriques sont réductives et connexes. On est donc ramené à la théorie sur les corps algébriquement clos. Or sur un tel corps, une algèbre séparable est un produit d'algèbres de matrices par la proposition 2.6.1.5, et son groupe linéaire est donc bien réductif par la preuve classique. \square

Soit $\mathbf{Diag}_{n,S}$ le sous-groupe de $\mathbf{GL}_{n,S}$ formé des matrices diagonales (i.e. le foncteur de points de ces matrices). C'est évidemment un sous-groupe de $\mathbf{GL}_{n,S}$ représentable comme $\mathbf{G}_{m,S}^n$, qui est un tore déployé. Les caractères de ce tore sont donnés par le \mathbb{Z} -module libre de base t_1, \dots, t_n où t_i donne la i -ème coordonnée d'un élément diagonal.

toreGLn_prop

Proposition 3.1.0.34. — *Le sous-groupe $\mathbf{Diag}_{n,S}$ est un tore maximal de $\mathbf{GL}_{n,S}$.*

Démonstration. — La théorie sur les corps étant supposée connue, on voit immédiatement que c'est un tore maximal sur toute fibre géométrique. \square

Soit $\mathbf{TriSup}_{n,S}$ le sous-groupe de $\mathbf{GL}_{n,S}$ formé des matrices triangulaires supérieures. On montre qu'il est resprésentable comme un sous-schéma fermé de $\mathbf{GL}_{n,S}$ défini par les équations qui fixent la partie sous la diagonale à zéro.

borelGLn_prop

Proposition 3.1.0.35. — *Le sous-groupe $\mathbf{TriSup}_{n,S}$ de $\mathbf{GL}_{n,S}$ est un sous-groupe de Borel au sens de [SGA3, exp. XIV, déf. 4.5].*

Démonstration. — La situation sur un corps k étant connue, $\mathbf{TriSup}_{n,k}$ est un sous-groupe de Borel de $\mathbf{GL}_{n,k}$ et il est lisse. Le groupe $\mathbf{TriSup}_{n,\mathbb{Z}}$ est alors lisse par la proposition 2.9.0.29, ainsi que $\mathbf{TriSup}_{n,S}$ par changement de base. Le fait d'être un sous-groupe de Borel se vérifie alors par définition sur les fibres. \square

Considérons l'action adjointe de $\mathbf{GL}_{n,S}$ sur son algèbre de Lie. Par la proposition 2.8.0.25, cette algèbre de Lie est $\mathbf{M}_{n,S}$ muni du crochet classique, et l'action adjointe est donnée sur les points par la conjugaison de matrices. On restreint alors cette action au tore maximal $\mathbf{Diag}_{n,S}$. Soit $e_{i,j}$ la matrice élémentaire avec un 1 en ligne i colonne j et zéro ailleurs. Un calcul immédiat montre que \mathbf{Diag}_n agit sur $\mathbf{O}_S \cdot e_{i,j}$ par $t_i - t_j$. Cela donne donc les racines de $\mathbf{GL}_{n,S}$ par rapport au tore $\mathbf{Diag}_{n,S}$.

Par [SGA3, exp. XXII, th. 1.1], pour chaque racine α il existe un unique morphisme \exp_α du groupe algébrique (additif) correspondant à l'espace propre de α de l'algèbre de Lie vers $\mathbf{GL}_{n,S}$, qui induise entre algèbre de Lie l'inclusion canonique de cet espace propre dans l'algèbre de Lie de $\mathbf{GL}_{n,S}$. Un calcul immédiat montre que le morphisme

$$\begin{aligned} \exp_{\alpha_{i,j}} : \quad \mathbf{O}_S \cdot e_{i,j} &\rightarrow \mathbf{GL}_{n,S} \\ \lambda \cdot e_{i,j} &\mapsto \text{Id} + \lambda \cdot e_{i,j} \end{aligned}$$

(décrit sur les points) fournit le candidat.

eradicielleGLn_prop

Proposition 3.1.0.36. — *La donnée radicielle de $\mathbf{GL}_{n,S}$ relativement au tore maximal déployé $\mathbf{Diag}_{n,S}$ est*

- Le \mathbb{Z} -module libre $M \simeq \mathbb{Z}^n$ des caractères de $\mathbf{Diag}_{n,S}$ (dont t_1, \dots, t_n forment une base) ;
- Le sous-ensemble fini de celui-ci formé des racines $\alpha_{i,j} = t_i - t_j$ pour $1 \leq i, j \leq n$ et $i \neq j$;
- Le \mathbb{Z} -module libre $M^\vee \simeq \mathbb{Z}^n$ des cocaractères (de base duale $t_1^\vee, \dots, t_n^\vee$) ;
- Le sous-ensemble fini de celui-ci formé des coracines $\alpha_{i,j}^\vee = t_i^\vee - t_j^\vee$ pour $1 \leq i, j \leq n$ et $i \neq j$.

Démonstration. — On lit les racines dans la décomposition précédente de l'algèbre de Lie, et on vérifie immédiatement que les coracines associées sont

bien celles proposées en appliquant le critère-définition [D65, th. 2.4.1] (voir la remarque 2.10.0.31) : l'accouplement entre sous-espaces propres de racines opposées est $\lambda \cdot e_{i,j} \otimes \mu \cdot e_{j,i} \mapsto -\lambda\mu$ et le morphisme de groupes $\alpha_{i,j}^\vee : \mathbf{G}_m \rightarrow \mathbf{Diag}_{n,S}$ envoie $u \in \mathbf{G}_m(S)$ sur la matrice diagonale avec u (resp. u^{-1}) en position i (resp. j) et 1 ailleurs. C'est bien ce qui correspond à $t_i^\vee - t_j^\vee$ par l'isomorphisme $\mathbf{Diag}_{n,S} \simeq D_S(M)$. On vérifie à la main la formule (F) de loc. cit., les morphismes exponentiels ayant déjà été décrits. \square

autoDonneeRadGL_exo

Exercice 3.1. — Montrer par un calcul direct que pour $n \geq 2$, si ϕ est un automorphisme de M qui permute les racines simples $(t_i - t_{i+1})_{1 \leq i \leq n-1}$ et tel que ϕ^\vee permute les coracines simples $(t_i^\vee - t_{i+1}^\vee)_{1 \leq i \leq n-1}$, alors ϕ est l'identité ou la matrice avec des -1 sur l'antidiagonale, et 0 partout ailleurs.

centreGLn_prop

Proposition 3.1.0.37. — Le centre de $\mathbf{GL}_{n,S}$ est $\mathbf{G}_{m,S}$ envoyé diagonalement dedans.

Démonstration. — Les matrices inversibles qui commutent à toutes les autres sont diagonales, par un calcul classique utilisant les matrices élémentaires. \square

3.2. Groupe déployé adjoint. —

PGLn_defi

Définition 3.2.0.38. — Soit $\mathbf{PGL}_{n,S}$ le groupe algébrique sur S défini par le foncteur de points $\mathbf{Aut}_{\mathbf{M}_{n,S}}^{\mathbf{O}_S\text{-alg}}$ (représentable, affine et de type fini sur S par la proposition 2.5.4.1). Lorsque la base S est implicite, on ne la mentionne plus dans la notation.

Proposition 3.2.0.39. — Pour tout S -schéma T , on a

$$\mathbf{PGL}_{n,T} = (\mathbf{PGL}_{n,S})_T = (\mathbf{PGL}_{n,\mathbb{Z}})_T.$$

De plus,

$$\mathbf{PGL}_{n,S}(T) = \mathbf{Aut}_{\Gamma(T)\text{-alg}}(\mathbf{M}_n(\Gamma(T))).$$

Pour tout anneau R , on a donc $\mathbf{PGL}_n(R) = \mathbf{Aut}_{R\text{-alg}}(\mathbf{M}_n(R))$.

Démonstration. — La première égalité est une répétition de la proposition 2.5.4.3. Il suffit ensuite de voir que la flèche naturelle

$$\mathbf{Aut}_{\mathbf{M}_{n,S}}^{\mathbf{O}_S\text{-alg}}(T) = \mathbf{Aut}_{\mathbf{O}_T\text{-alg}}(\mathbf{M}_{n,T}) \longrightarrow \mathbf{Aut}_{\Gamma(T)\text{-alg}}(\mathbf{M}_{n,S}(\Gamma(T)))$$

est un isomorphisme. Cela provient du même isomorphisme pour \mathbf{End} car \mathbf{M}_n est un \mathbf{O}_S -module libre et de ce que les conditions à imposer pour être un automorphisme d'algèbre sont évidemment les mêmes des deux côtés de ce dernier isomorphisme. \square

On définit alors le morphisme canonique $\mathbf{GL}_{n,S} \rightarrow \mathbf{PGL}_{n,S}$ en envoyant un élément inversible de $\mathbf{M}_n(S)$ vers l'automorphisme conjugaison par cet élément. On obtient ainsi :

secPGLn_prop

Proposition 3.2.0.40. — Sur toute base S , la suite de faisceaux Zariski

$$1 \longrightarrow \mathbf{G}_{m,S} \longrightarrow \mathbf{GL}_{n,S} \longrightarrow \mathbf{PGL}_{n,S} \longrightarrow 1$$

est exacte (\mathbf{G}_m est envoyé diagonalement dans \mathbf{GL}_n). Il en est de même pour les topologies entre Zariski et canonique, comme étale ou fppf.

Démonstration. — Une suite exacte de faisceaux étales reste exacte par changement de base, voir [SGA3, Exp. IV, 4.5.7 et 4.5.8]. Il suffit donc de faire le cas $S = \text{Spec}(\mathbb{Z})$. Le noyau du morphisme $\mathbf{GL}_n \rightarrow \mathbf{PGL}_n$ est bien \mathbf{G}_m , par la proposition 3.1.0.37. Il suffit de vérifier la surjectivité de faisceaux sur leurs germes, qui sont des anneaux locaux. Or, sur un anneau local, le théorème de Skolem-Noether vaut : tout les automorphismes des algèbres de matrices sont intérieurs (voir [AusGol60, th. 3.6]). Le foncteur de points \mathbf{PGL}_n étant représentable, c'est directement un faisceau pour toute topologie entre la topologie Zariski et canonique, la surjectivité comme faisceau Zariski montre la surjectivité pour les autres topologies. \square

En d'autres termes, le faisceau étale \mathbf{PGL}_n est le faisceau associé au pré-faisceau qui à Y associe $\mathbf{GL}_n(Y)/\mathbf{G}_m(Y)$.

PGLncorps_coro

Corollaire 3.2.0.41. — Pour tout schéma S tel que $\text{Pic}(S) = 0$, on a $\mathbf{PGL}_n(S) \simeq \mathbf{GL}_n(S)/\mathbf{G}_m(S)$. En particulier, c'est le cas lorsque S est le spectre d'un corps, ou même d'un anneau local.

Démonstration. — On considère la suite exacte en cohomologie associée à la suite exacte courte de faisceaux étales de la proposition 3.2.0.40, avec l'identification $H_{\text{ét}}^1(S, \mathbf{G}_m) = \text{Pic}(S)$. \square

Considérons le sous-groupe de $\mathbf{PGL}_{n,S}$ image du tore $\mathbf{Diag}_{n,S}$ par le morphisme $\mathbf{GL}_{n,S} \rightarrow \mathbf{PGL}_{n,S}$. C'est le quotient de $\mathbf{Diag}_{n,S}$ par $\mathbf{G}_{m,S}$, c'est donc le dual de Cartier du noyau de l'application somme des coordonnées $\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$. Ce noyau est isomorphe à \mathbb{Z}^{n-1} donc le sous-groupe considéré est un tore déployé de rang $n - 1$. Appelons-le $\mathbf{PDiag}_{n,S}$.

PGLToreMax_coro

Corollaire 3.2.0.42. — Le sous-groupe $\mathbf{PDiag}_{n,S}$ de $\mathbf{PGL}_{n,S}$ décrit ci-dessus est un tore maximal (déployé) au sens de [SGA3].

Démonstration. — Par le corollaire 3.2.0.41, ce tore donne le tore maximal connu de $\mathbf{PGL}_{n,S}$ sur chaque fibre géométrique (étant donné connue la théorie sur les corps). \square

algLiePGLn_prop

Proposition 3.2.0.43. — L'algèbre de Lie de $\mathbf{PGL}_{n,S}$ est le \mathbf{O}_S -module $\mathbf{M}_{n,S}/\mathbf{O}_S$, muni du crochet $[\overline{m}, \overline{n}] = \overline{mn - nm}$ sur les points. La représentation adjointe est l'action des automorphismes sur le quotient par le centre.

Démonstration. — C'est une application immédiate de la proposition 2.8.0.27. \square

Proposition 3.2.0.44. — *Le groupe $\mathbf{PGL}_{n,S}$ est réductif.*

Démonstration. — Le groupe $\mathbf{PGL}_{n,S}$ est de type fini et affine par construction (voir la prop. 2.5.4.1). Sur un corps k , on sait que $\mathbf{PGL}_{n,k}$ est lisse, connexe et réductif. La lissité de $\mathbf{PGL}_{n,\mathbb{Z}}$ résulte donc de la proposition 2.9.0.29, puis celle de $\mathbf{PGL}_{n,S}$ vient par changement de base.

Alternativement, cela découle de [SGA3, Exp. XXII, prop. 4.3.1] puisque $\mathbf{GL}_{n,S}$ est réductif et déployé par les propositions 3.1.0.33 et 3.1.0.34 et que \mathbf{PGL}_n en est le quotient par son centre, par les propositions 3.1.0.37 et 3.2.0.40. \square

Comme dans le cas de $\mathbf{GL}_{n,\mathbb{R}}$, on identifie les applications exponentielles par unicité. L'application $\exp_{\bar{\alpha}_{i,j}}$ envoie $\lambda \cdot \bar{e}_{i,j}$ vers l'image de la matrice $1 + \lambda e_{i,j}$ dans $\mathbf{GL}_n(S)$ (donc vers l'automorphisme de $\mathbf{M}_n(S)$ de conjugaison par cette matrice).

radiciellePGLn_prop

Proposition 3.2.0.45. — *La donnée radicielle de $\mathbf{PGL}_{n,S}$ relativement au tore maximal déployé $\mathbf{PDiag}_{n,S}$ est*

- Le \mathbb{Z} -module libre $\ker(\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z})$ des caractères de \mathbf{Diag}_n dont la somme des coordonnées est nulle (dont $t_1 - t_2, \dots, t_{n-1} - t_n$ forment une base) ;
- Le sous-ensemble fini de celui-ci formé des racines $\alpha_{i,j} = t_i - t_j$ pour $1 \leq i, j \leq n$ et $i \neq j$;
- Le \mathbb{Z} -module libre dual $\text{coker}(\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^n)$, quotient des cocaractères de \mathbf{Diag}_n par l'application diagonale (de base duale $\bar{t}_1^\vee, \bar{t}_1^\vee + \bar{t}_2^\vee, \dots, \bar{t}_1^\vee + \dots + \bar{t}_{n-1}^\vee$) ;
- Le sous-ensemble fini de celui-ci formé des coracines $\alpha_{i,j}^\vee = \bar{t}_i^\vee - \bar{t}_j^\vee$ pour $1 \leq i, j \leq n$ et $i \neq j$.

Démonstration. — Par la description du tore maximal $\mathbf{PDiag}_{n,S}$ comme quotient de $\mathbf{Diag}_{n,S}$, on a immédiatement qu'il agit sur le sous-espace $\mathbf{O}_S \cdot \bar{e}_{i,j}$ par $\bar{\alpha}_{i,j}$, ce qui donne les racines. Les coracines sont alors immédiatement obtenues par unicité en utilisant comme pour \mathbf{GL}_n la formule (F) de [D65, th. 2.4.1] (il n'y a rien à vérifier, cela a déjà été fait pour \mathbf{GL}_n , et on ne fait que regarder les images dans \mathbf{PGL}_n). \square

Théorème 3.2.0.46. — *Pour tout $n \geq 1$, le groupe (semi-simple) adjoint déployé de type A_n sur une base S est $\mathbf{PGL}_{n+1,S}$.*

Démonstration. — Un tel groupe est unique à isomorphisme près. Le groupe \mathbf{PGL}_n étant réductif et déployé, l'énoncé ne dépend que de sa donnée radicielle (voir [SGA3, exp. XXIII, cor. 5.4]), on est donc ramené à la situation sur un corps, supposée connue. On peut en tout cas facilement lire directement sur la donnée radicielle que le groupe est semi-simple adjoint : les racines engendrent

les caractères du tore. Alternativement, c'est une conséquence de [SGA3, prop. 4.3.5]. \square

Proposition 3.2.0.47. — *Le sous-ensemble de racines $\Delta = \{\alpha_{i,i+1}, 1 \leq i \leq n-1\}$ forme un système de racines simples, et assorti des éléments $u_{i,i+1} = \overline{1 + e_{i,i+1}} = \overline{e_{i,i+1}} \in \mathbf{M}_n(\mathbf{S})/\mathbf{O}_S(\mathbf{S})$, ils munissent le groupe $\mathbf{PGL}_{n,\mathbf{S}}$, le tore $\mathbf{PDiag}_{n,\mathbf{S}}$ et son système de racines d'un épinglage.*

Démonstration. — L'ensemble de racines simples est classique. Il est immédiat de vérifier que les $u_{i,i+1}$ satisfont à la condition de [SGA3, exp. XXIII, déf. 1.1]. \square

Profitons-en pour signaler que le morphisme $\mathbf{GL}_{n,\mathbf{S}} \rightarrow \mathbf{PGL}_{n,\mathbf{S}}$ induit un morphisme de données radicielles (voir [SGA3, exp. XXI, déf. 6.1]). Il est donné par la projection de $\mathbf{Diag}_{n,\mathbf{S}}$ vers $\mathbf{PDiag}_{n,\mathbf{S}}$ et des morphismes associés respectivement entre caractères et cocaractères. Ces morphismes induisent bien des bijections entre ensemble de racines, ainsi qu'entre ensembles de coracines. Il s'agit du morphisme de $\mathbf{GL}_{n,\mathbf{S}}$ vers son groupe adjoint associé, qui correspond au morphisme de la donnée radicielle adjointe vers la donnée radicielle de $\mathbf{GL}_{n,\mathbf{S}}$ (voir [SGA3, prop. 6.5.5]).

3.3. Groupe déployé simplement connexe. —

SLn_def i

Définition 3.3.0.48. — Pour $n \geq 1$, on définit $\mathbf{SL}_{n,\mathbf{S}}$, schéma en groupe affine de type fini sur \mathbf{S} , comme le noyau de l'application déterminant $\mathbf{GL}_{n,\mathbf{S}} \rightarrow \mathbf{G}_{m,\mathbf{S}}$.

Démonstration. — Ce noyau est clairement représentable par un schéma affine de type fini sur \mathbf{S} , car localement sur un anneau \mathbf{R} , il est le sous-schéma fermé de $\mathbf{GL}_{n,\mathbf{R}}$ donné par l'équation du déterminant. \square

Proposition 3.3.0.49. — *Pour tout \mathbf{S} -schéma \mathbf{T} , le groupe $\mathbf{SL}_{n,\mathbf{S}}(\mathbf{T})$ est l'ensemble des matrices de $\mathbf{M}_n(\mathbf{T}) = \mathbf{M}_n(\mathbf{O}_S(\mathbf{T}))$ de déterminant 1. En particulier, on a*

$$\mathbf{SL}_{n,\mathbf{T}} = (\mathbf{SL}_{n,\mathbf{S}})_{\mathbf{T}} = (\mathbf{SL}_{n,\mathbb{Z}})_{\mathbf{T}}.$$

Démonstration. — Évident. \square

Proposition 3.3.0.50. — *L'algèbre de Lie de $\mathbf{SL}_{n,\mathbf{S}}$ est isomorphe au sous \mathbf{O}_S -module libre de $\mathbf{M}_{n,\mathbf{S}}$ constitué des matrices de trace nulle. L'action adjointe de $\mathbf{SL}_{n,\mathbf{R}}$ dessus est donnée par conjugaison.*

Démonstration. — C'est immédiat à partir de l'algèbre de Lie de \mathbf{GL}_n en utilisant le lemme 2.8.0.24. \square

Proposition 3.3.0.51. — *Le groupe $\mathbf{SL}_{n,\mathbf{S}}$ est réductif.*

Démonstration. — Il ne manque que la lissité, qui se déduit sur \mathbb{Z} de la situation connue sur les corps par la proposition 2.9.0.29, puis par changement de base pour $\mathbf{SL}_{n,S}$. \square

Proposition 3.3.0.52. — *L'intersection du tore maximal $\mathbf{Diag}_{n,S}$ de $\mathbf{GL}_{n,S}$ avec $\mathbf{SL}_{n,S}$ est un tore maximal (déployé) de $\mathbf{SL}_{n,S}$. Notons-le $\mathbf{PDiag}_{n,S}$. Il est de rang $n - 1$.*

Démonstration. — Il est clair que c'est un tore déployé de rang $n - 1$, dual de Cartier du conoyau de l'application diagonale $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^n$ duale du déterminant sur $\mathbf{Diag}_{n,S}$. La théorie sur les corps étant connue, il est maximal dans chaque fibre géométrique. \square

Proposition 3.3.0.53. — *L'intersection de $\mathbf{TriSup}_{n,S}$ avec $\mathbf{SL}_{n,S}$ est un sous-groupe de Borel de $\mathbf{SL}_{n,S}$ contenant le tore précédent.*

Démonstration. — Immédiat par fibres. \square

centreSL_prop

Proposition 3.3.0.54. — *Le centre de $\mathbf{SL}_{n,S}$ est $\mu_{n,S}$ inclus diagonalement.*

Démonstration. — C'est clair sur tout les T-points en utilisant les matrices élémentaires. \square

La décomposition de l'algèbre de Lie de $\mathbf{SL}_{n,S}$ en caractères se lit immédiatement, (comme celle de $\mathbf{GL}_{n,S}$ qu'on a déjà traitée). On obtient que les racines sont les caractères $\alpha_{i,j} = \bar{t}_i - \bar{t}_j$ avec $i \neq j$, d'espace propre $\mathbf{O}_S \cdot e_{i,j}$. Les morphismes exponentiels sont les mêmes que pour $\mathbf{GL}_{n,S}$ (ils se factorisent par $\mathbf{SL}_{n,S}$).

eradicielleSLn_prop

Proposition 3.3.0.55. — *La donnée radicielle de $\mathbf{SL}_{n,S}$ relativement au tore maximal déployé $\mathbf{PDiag}_{n,S}$ est*

- *Le \mathbb{Z} -module libre $\text{coker}(\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^n)$ (diagonale), quotient des caractères de \mathbf{Diag}_n (dont $\bar{t}_1, \bar{t}_1 + \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_1 + \dots + \bar{t}_{n-1}$ est une base).*
- *Le sous-ensemble fini de celui-ci formé des racines $\alpha_{i,j} = \bar{t}_i - \bar{t}_j$ pour $1 \leq i, j \leq n$ et $i \neq j$;*
- *Le \mathbb{Z} -module libre dual $\ker(\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z})$ (somme des coordonnées), sous groupe des cocaractères de \mathbf{Diag}_n (de base duale $t_1^\vee - t_n^\vee, \dots, t_{n-1}^\vee - t_n^\vee$) ;*
- *Le sous-ensemble fini de celui-ci formé des coracines $\alpha_{i,j}^\vee = t_i^\vee - t_j^\vee$ pour $1 \leq i, j \leq n$ et $i \neq j$.*

Démonstration. — La preuve est la même que pour $\mathbf{GL}_{n,S}$. \square

Théorème 3.3.0.56. — *Pour $n \geq 1$, le groupe (semi-simple) simplement connexe déployé de type A_n est $\mathbf{SL}_{n+1,S}$.*

Démonstration. — Un tel groupe est unique à isomorphisme près. Le groupe $\mathbf{SL}_{n+1,S}$ est semi-simple et simplement connexe de manière évidente puisque les coracines engendrent les cocaractères. Son type de Dynkin se lit sur une fibre géométrique où la théorie est connue. Alternativement, il se voit sur la donnée radicielle. \square

On a donc le diagramme de morphismes de groupes algébriques correspondant au diagramme de données radicielles de [SGA3, cor. 6.5.5] :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{SL}_n = (\mathbf{GL}_n)_{\text{sc}} = (\mathbf{GL}_n)_{\text{dér}} & \xrightarrow{\quad} & (\mathbf{GL}_n)_{\text{ss}} = (\mathbf{GL}_n)_{\text{adj}} = \mathbf{PGL}_n \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & \mathbf{GL}_n & \end{array}$$

Décrivons maintenant les \mathbf{SL}_n -torseurs. Considérons les foncteurs fibrés $\text{dét} : (\mathcal{V}ec_n)_{\simeq} \rightarrow \mathcal{V}ec_1$, défini en 2.5.3.2, et $\mathcal{F}inal \rightarrow \mathcal{V}ec_1$ qui envoie le seul objet de $\mathcal{F}inal_{\mathbf{T}}$ sur $\mathbf{O}_{\mathbf{T}}$. Définissons alors le produit fibré $\mathcal{V}ec_n \times_{\mathcal{V}ec_1} \mathcal{F}inal$, qui est un champ par la proposition 2.2.3.7.

Définition 3.3.0.57. — On appelle $\mathcal{V}ecTrivDet_n$ le produit fibré précédent, et on le nomme *champ des \mathbf{O} -modules de déterminant trivialisé*.

Explicitement, un objet de $(\mathcal{V}ecTrivDet_n)_{\mathbf{T}}$ est donc une paire (M, ϕ) où M est un $\mathbf{O}_{\mathbf{T}}$ -module localement libre de rang constant n , et $\phi : \Delta_M \xrightarrow{\sim} \mathbf{O}_{\mathbf{S}}$ est un isomorphisme. Un morphisme $(M_1, \phi_1) \rightarrow (M_2, \phi_2)$ est un isomorphisme de $\mathbf{O}_{\mathbf{S}}$ -modules $f : M_1 \rightarrow M_2$ tel que $\text{dét } f : \Delta_{M_1} \xrightarrow{\sim} \Delta_{M_2}$ satisfait à $\phi_2 \circ \text{dét } f = \phi_1$.

Considérons alors dans $(\mathcal{V}ecTrivDet_n)_S$ l'objet (\mathbf{O}_S^n, d) où d est l'isomorphisme "déterminant" qui envoie un produit extérieur $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$ sur le déterminant des vecteurs v_1, \dots, v_n . On a alors l'égalité de faisceaux $\mathbf{Aut}_{(\mathbf{O}_S^n, d)} = \mathbf{SL}_n$, puisque par la description concrète des morphismes ci-dessus, un isomorphisme f doit vérifier $d \circ \text{dét } f = d$, donc $\text{dét } f = 1$.

Localement, pour la topologie Zariski (donc également étale, etc.), tout objet (M, ϕ) de $\mathcal{V}ecTrivDet_n$ est isomorphe à (\mathbf{O}_S^n, d) . En effet, localement $M \simeq \mathbf{O}_S^n$ par la définition 2.5.1.3, puis $(\mathbf{O}_S^n, \phi) \xrightarrow{\sim} (\mathbf{O}_S^n, d)$ localement dans le cas affine, car il est facile de construire dans le cas affine un isomorphisme $\mathbf{O}_n \xrightarrow{\sim} \mathbf{O}_n$ de déterminant donné, avec une matrice diagonale.

La proposition 2.3.4.5 fournit alors immédiatement :

Proposition 3.3.0.58. — *Le foncteur fibré qui envoie un objet (M, ϕ) de $\mathcal{V}ecTrivDet_n$ vers $\mathbf{Iso}_{(\mathbf{O}_S^n, d), (M, \phi)}$ définit une équivalence de catégories fibrées du champ en groupoïdes $\mathcal{V}ecTrivDet_n$ vers le champ $\mathbf{Tors}(\mathbf{SL}_n)$ (la topologie sous-jacente étant toujours la topologie étale, mais c'est vrai pour une topologie plus fine que Zariski).*

automorphismes_sec

3.4. Automorphismes. — Intéressons-nous maintenant aux automorphismes de \mathbf{PGL}_n , et donnons-en une description en termes de groupes classiques.

Étant donnée un faisceau en algèbres A sur S localement libre de type fini comme \mathbf{O}_S -module, munie d'une involution σ (\mathbf{O}_S -linéaire), on considère $\mathbf{Aut}_{A,\sigma}^{\text{alginv}}$ son faisceau des automorphismes (avec la notation 2.1).

Proposition 3.4.0.59. — *Pour tout schéma T au-dessus de S , on a*

$$(\mathbf{Aut}_{A,\sigma}^{\text{alginv}})_T = \mathbf{Aut}_{A_T,\sigma_T}^{\text{alginv}}.$$

Lorsque T est un schéma affine, alors $\mathbf{Aut}_{A,\sigma}^{\text{alginv}}(T)$ est l'ensemble des automorphismes d'algèbre de $A(T)$ commutant à l'involution. De plus, ce faisceau est représentable.

Démonstration. — En dehors de la représentabilité, la preuve est identique à celle de la proposition 2.5.4.3, mais avec une involution en plus. Le faisceau est ensuite représentable comme sous-schéma fermé de $\mathbf{Aut}_A^{\text{alg}}$. En effet, on se réduit au cas affine $S = \text{Spec}(R)$ par 2.4.0.16. L'algèbre $A(S)$ est alors de type fini sur R , la commutation à σ s'exprime par un certain nombre (fini) d'équations sur des générateurs. \square

Définition 3.4.0.60. — On note $\mathbf{Aut}_{A,\nu}^{\text{alginv}}$ le schéma ainsi obtenu.

L'opposé d'une algèbre A , notée A^{op} a la même structure de R -module sous-jacente que A et la multiplication y est définie à partir de celle de a en inversant l'ordre des deux facteurs. Rappelons que τ est l'involution sur $\mathbf{M}_n \times \mathbf{M}_n^{\text{op}}$, qui à (a, b) associe (b, a) . Considérons un automorphisme d'algèbre commutant à τ . Sa restriction au centre $\mathbf{O}_S \times \mathbf{O}_S$ est l'identité ou l'échange des facteurs (sur chaque composante connexe). Si sa restriction au centre est l'identité, il est facile de voir qu'il est de la forme $(\epsilon, \epsilon^{\text{op}})$ avec $\epsilon \in \mathbf{Aut}_{\mathbf{M}_n}$. On obtient donc que \mathbf{PGL}_n s'identifie à un sous-groupe normal de $\mathbf{Aut}_{\mathbf{M}_n \times \mathbf{M}_n^{\text{op}}, \tau}^{\text{alginv}}$, noyau de l'application de restriction au centre

$$\mathbf{Aut}_{\mathbf{M}_n \times \mathbf{M}_n^{\text{op}}, \tau}^{\text{alginv}} \longrightarrow \mathbf{Aut}_{\mathbf{O}_S \times \mathbf{O}_S, \tau}^{\text{alginv}} \simeq (\mathbb{Z}/2)_S.$$

De plus la conjugaison par tout $\sigma \in \text{Aut}(\mathbf{M}_n(S) \times \mathbf{M}_n^{\text{op}}(S), \tau)$ préserve ce noyau et définit donc une application

$$\phi : \mathbf{Aut}_{\mathbf{M}_n \times \mathbf{M}_n^{\text{op}}, \tau}^{\text{alginv}} \longrightarrow \mathbf{Aut}_{\mathbf{PGL}_n}^{\text{gr}}$$

(toutes ces constructions commutent à l'extention de la base S de manière évidente).

PGLAut_theo

Théorème 3.4.0.61. — Pour $n \geq 3$, on a un isomorphisme de suites exactes courtes scindées

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & \mathbf{Aut}_{M_n}^{\text{alg}} & \longrightarrow & \mathbf{Aut}_{M_n \times M_n^{\text{op}}, \tau}^{\text{alginv}} & \longrightarrow & \mathbf{Aut}_{O_S \times O_S, \tau}^{\text{alginv}} \longrightarrow 1 \\
 & & \parallel & & \downarrow \phi \simeq & & \downarrow \simeq \\
 1 & \longrightarrow & \mathbf{PGL}_n & \longrightarrow & \mathbf{Aut}_{\mathbf{PGL}_n}^{\text{gr}} & \longrightarrow & \mathbf{AutExt}_{\mathbf{PGL}_n} \longrightarrow 1
 \end{array}$$

où les flèches de la ligne du haut sont décrites ci-dessus, les flèches de la ligne du bas sont les flèches canoniques (conjugaison et quotient). Les deux groupes de droite sont isomorphes au groupe (localement) constant $(\mathbb{Z}/2)_S$. Soit d la matrice antidiagonale et ${}^t : M_n \rightarrow M_n^{\text{op}}$ la transposition. L'application qui, sur chaque composante connexe de S , envoie l'élément $\tau \neq \text{id}$ sur l'automorphisme $ex : (a, b) \mapsto (d({}^t b)d^{-1}, d({}^t a)d^{-1})$ est un scindage de la surjection d'en haut.

Pour $n \leq 2$, le groupe \mathbf{PGL}_n n'a pas d'automorphisme extérieur. On a le même diagramme, mais la flèche ϕ n'est pas un isomorphisme, et la flèche de droite est la projection vers le groupe trivial.

Démonstration. — Toutes les affirmations étant Zariski locales sur la base S , on peut supposer $S = \text{Spec}(R)$ où R est un anneau local. Le carré de gauche commute par construction, et l'affirmation sur le scindage se vérifie immédiatement par calcul. Le groupe \mathbf{PGL}_1 est trivial et \mathbf{PGL}_2 n'a pas d'automorphisme extérieur car le diagramme de Dynkin est un point. Il n'y a donc rien de plus à justifier pour $n = 1, 2$. Supposons donc $n \geq 3$. Les deux groupes de droite sont bien isomorphes au groupe constant $(\mathbb{Z}/2)_R$. C'est évident pour $\mathbf{Aut}_{R \times R, \tau}$, et cela découle de l'interprétation de \mathbf{AutExt} en termes d'automorphismes du diagramme de Dynkin, voir [SGA3, Exp. XXIV, th. 1.3 (iii)]. Pour vérifier que le carré de droite commute, il suffit donc de vérifier que $\phi(ex)$ s'envoie bien sur l'élément non trivial de \mathbf{AutExt} . Or, on voit comment $\phi(ex)$ agit sur $\mathbf{PGL}_{n,R}$ (identifié aux éléments de la forme $(\epsilon, \epsilon^{\text{op}})$) et en particulier sur l'image de $\mathbf{GL}_{n,R}$, où les éléments sont de la forme $(\text{int}_g, \text{int}_g^{\text{op}})$, $g \in \mathbf{GL}_{n,R}$, qu'il envoie sur $(\text{int}_{d({}^t g^{-1})d^{-1}}, \text{int}_{d({}^t g^{-1})d^{-1}}^{\text{op}})$. Il préserve donc le tore \mathbf{PDiag} image de \mathbf{Diag} , en agissant dessus comme le dual de Cartier de l'automorphisme des caractères qui envoie $\alpha_{i,i+1} = t_i - t_{i+1}$ sur $-t_{n+1-i} + t_{n-i} = \alpha_{n-i,n-i+1}$. Il préserve donc aussi l'ensemble des racines simples Δ , sur lequel il agit comme l'automorphisme non trivial du diagramme de Dynkin. De plus, il envoie l'élément $u_{i,i+1}$ sur $u_{n-i,n-i+1}$. Il est ainsi un morphisme de groupes épinglés selon [SGA3, exp. XXIII, déf. 1.3], et fournit l'élément non trivial de \mathbf{AutExt} . \square

Remarque 3.4.0.62. — Dans \mathbf{PGL}_2 , le candidat à être un automorphisme extérieur n'en est pas un : pour tout automorphisme $\epsilon \in \text{Aut}(M_n(R))$, on a

${}^t \circ \epsilon^{\text{op}} \circ {}^t = \text{int}_e \circ \epsilon \circ \text{int}_e^{-1}$ où $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. C'est un calcul immédiat quand l'automorphisme ϵ est lui-même intérieur, ce qui suffit localement.

Par le théorème 2.11.0.32, le groupe \mathbf{SL}_n a les mêmes automorphismes que \mathbf{PGL}_n . On veut toutefois comprendre comment ils agissent sur \mathbf{SL}_n lorsqu'on les identifie à $\mathbf{Aut}_{\mathbf{M}_n \times \mathbf{M}_n^{\text{op}}, \tau}^{\text{alginv}}$. Considérons le monomorphisme $\mathbf{GL}_n \rightarrow \mathbf{M}_n \times \mathbf{M}_n^{\text{op}}$ qui envoie un élément $g \in \mathbf{GL}_n(S)$ vers l'élément $(g, g^{-1}) \in \mathbf{M}_n(S) \times \mathbf{M}_n^{\text{op}}(S)$. L'image de cette application est préservée par $\mathbf{Aut}_{\mathbf{M}_n \times \mathbf{M}_n^{\text{op}}, \tau}^{\text{alginv}}$. Par la suite exacte scindée du théorème précédent, il suffit de le vérifier pour l'élément ex et pour tout $(\epsilon, \epsilon^{\text{op}})$, ce qui est immédiat. Par identification de \mathbf{GL}_n à l'image, cela définit donc une action de $\mathbf{Aut}_{\mathbf{M}_n \times \mathbf{M}_n^{\text{op}}, \tau}^{\text{alginv}}$ sur \mathbf{GL}_n , pour laquelle $ex(g) = {}^t g^{-1}$ et $(\epsilon, \epsilon^{\text{op}})(g) = \epsilon(g)$.

SLnactionaut_lemm

Lemme 3.4.0.63. — *Le sous-groupe algébrique \mathbf{SL}_n est préservé par cette action.*

Démonstration. — Comme plus haut, il suffit de le vérifier pour l'élément ex , pour lequel c'est évident, et pour tout élément de la forme $(\epsilon, \epsilon^{\text{op}})$. On a affaire à des faisceaux, on peut vérifier l'énoncé localement pour la topologie étale. Par 3.2.0.40, on peut alors supposer que ϵ est la conjugaison par un élément inversible, et préserve donc le déterminant. \square

autGLSL_theo

Théorème 3.4.0.64. — *L'action de $\mathbf{Aut}_{\mathbf{M}_n \times \mathbf{M}_n^{\text{op}}, \tau}^{\text{alginv}}$ sur \mathbf{GL}_n (resp. \mathbf{SL}_n) définie ci-dessus et celle de $\mathbf{Aut}_{\mathbf{M}_n \times \mathbf{M}_n^{\text{op}}, \tau}^{\text{alginv}}$ sur \mathbf{PGL}_n du théorème 3.4.0.61 commutent au morphisme naturel $\mathbf{GL}_n \rightarrow \mathbf{PGL}_n$ (resp. $\mathbf{SL}_n \rightarrow \mathbf{PGL}_n$). Pour $n \geq 3$, il identifie ainsi les automorphismes de \mathbf{GL}_n (resp. \mathbf{SL}_n) à $\mathbf{Aut}_{\mathbf{M}_n \times \mathbf{M}_n^{\text{op}}, \tau}^{\text{alginv}}$. Pour $n = 2$, ce dernier groupe coïncide toujours avec les automorphismes de \mathbf{GL}_2 (mais pas avec ceux de \mathbf{SL}_2 ni \mathbf{PGL}_2 comme vu plus haut).*

Démonstration. — La compatibilité avec la projection $\pi : \mathbf{GL}_n \rightarrow \mathbf{PGL}_n$ se teste sur ex et les $(\epsilon, \epsilon^{\text{op}})$. Pour $n \geq 3$, on a bien les automorphismes de \mathbf{SL}_n et ceux de \mathbf{GL}_n par le théorème 2.11.0.32 et l'exercice 3.1. Pour $n = 2$, l'automorphisme extérieur de \mathbf{GL}_2 est bien fourni par $g \mapsto {}^t g^{-1}$, le raisonnement de la fin de la preuve du théorème 3.4.0.61 s'applique. \square

3.5. Groupes tordus. — Commençons par le cas semi-simple adjoint et donc de donnée radicielle déployée isomorphe à celle de $\mathbf{PGL}_{n,S}$ sur une base quelconque S , omise des notations pour alléger.

Par 2.3.4.5, toute forme de \mathbf{PGL}_n est obtenue par torsion par un torseur P sous son groupe d'automorphismes, qui est $\mathbf{Aut}_{\mathbf{M}_n \times \mathbf{M}_n^{\text{op}}, \tau}$ (voir 3.4.0.61). On tord donc la suite du théorème 3.4.0.61 à l'aide de la proposition 2.3.4.14 dans

le cas de la remarque 2.3.4.15. On obtient une suite de groupes d'automorphismes tordus

$$1 \longrightarrow P \wedge^H \mathbf{PGL}_n \longrightarrow P \wedge^H H \longrightarrow P \wedge^H \mathbf{Aut}_{S \times S, \tau}^{\text{alginv}} \longrightarrow 1$$

où $H := \mathbf{Aut}_{\mathbf{M}_n \times \mathbf{M}_n^{\text{op}}, \tau}^{\text{alginv}}$. En utilisant 2.3.4.7, on identifie le terme du milieu

$$P \wedge^H H = \mathbf{Aut}_{P \wedge^H (\mathbf{M}_n \times \mathbf{M}_n^{\text{op}}, \tau)}^{\text{alginv}} = \mathbf{Aut}_{A, \nu}$$

pour un certain faisceau en algèbres d'Azumaya (A, ν) de deuxième espèce sur S . De même, le terme de droite s'identifie à

$$P \wedge^H \mathbf{Aut}_{S \times S, \tau} = \mathbf{Aut}_{Z(A), \nu}$$

où $Z(A)$ est le centre de A , un faisceau en algèbres étales finies de degré 2 sur S et ν est le seul S -automorphisme non trivial de $Z(A)$ sur toutes les composantes connexes de S (Voir 2.6.2.1 et 2.6.2.6). Notons que ν est une involution et un automorphisme puisque $Z(A)$ est commutatif. Dans le cas d'une forme intérieure, le tore P est de la forme $Q \wedge^{\mathbf{PGL}_n} H$ où Q est un tore sous \mathbf{PGL}_n , et on a donc

$$P \wedge^H \mathbf{PGL}_n = Q \wedge^{\mathbf{PGL}_n} \mathbf{PGL}_n = Q \wedge^{\mathbf{Aut}_{\mathbf{M}_n}^{\text{alg}} \mathbf{Aut}_{\mathbf{M}_n}^{\text{alg}}} = \mathbf{Aut}_{Q \wedge^{\mathbf{Aut}_{\mathbf{M}_n}^{\text{alg}} \mathbf{M}_n}}^{\text{alg}} = \mathbf{Aut}_A^{\text{alg}}$$

pour un certain faisceau en algèbres d'Azumaya A de degré n sur S . Puisque toutes les formes s'obtiennent par torsion (voir 2.3.4.5) et que tout groupe réductif est localement déployé pour la topologie étale (voir 2.3.5.14), on a donc montré :

Proposition 3.5.0.65. — À isomorphisme près, les groupes réductifs de donnée radicielle déployée identique à celle de $\mathbf{PGL}_{n,S}$ ($n \geq 3$), c'est-à-dire de type déployé A_{n-1} et adjoint, sont les noyaux de $\mathbf{Aut}_{A, \nu} \rightarrow \mathbf{Aut}_{Z(A), \nu}$ où (A, ν) est un faisceau d'algèbre d'Azumaya sur S de deuxième espèce, de degré n et de centre $Z(A)$ étale fini de degré 2 sur S . Pour $n \geq 2$, les formes intérieures sont les \mathbf{PGL}_A où A est un faisceau en algèbre d'Azumaya de degré n (voir déf. 2.5.4.2). Le groupe \mathbf{PGL}_2 n'a que des formes intérieures.

Passons maintenant au cas simplement connexe, c'est-à-dire les formes (étales) de $\mathbf{SL}_{n,S}$. Nous obtiendrons également celles de $\mathbf{GL}_{n,S}$. D'après 2.3.5.14 et 2.3.4.5, un tel groupe est obtenu par torsion de $\mathbf{GL}_{n,S}$ par un tore étale sous $\mathbf{Aut}_{\mathbf{SL}_{n,S}} = \mathbf{Aut}_{\mathbf{PGL}_{n,S}}$.

Soit (A, ν) un faisceau en algèbres à involution de deuxième espèce sur S (voir déf. 2.6.4.9). Considérons le S -foncteur de points défini par

$$\mathbf{U}_{A, \nu}(T) = \{a \in A(T), \nu(a)a = 1\}.$$

adjointtordu_prop

Urepr_prop

Proposition 3.5.0.66. — Pour tout schéma T au-dessus de S , on a

$$(\mathbf{U}_{A,\nu})_T = \mathbf{U}_{A_T, \nu_T}.$$

De plus, ce foncteur est représentable.

Démonstration. — La première égalité est claire. Pour la représentabilité, on montre que le foncteur est un faisceau Zariski en utilisant que c'est un sous-foncteur de $\mathbf{GL}_{1,A}$ et en utilisant que la condition $\nu(a)a = 1$ est de nature locale. On se ramène alors au cas S affine et A libre par la proposition 2.4.0.16. Dans ce cas, $A = \mathbf{W}(\widetilde{A(S)})$ et la condition $\nu(a)a = 1$ est donnée par des équations sur des générateurs de $A(S)$. \square

U_defi

Définition 3.5.0.67. — On note $\mathbf{U}_{A,\nu}$ le S -groupe algébrique représentant le foncteur décrit ci-dessus, et on l'appelle le schéma en groupes *unitaire* de (A, ν) .

UGL_lemm

Lemme 3.5.0.68. — Le morphisme définit sur les points par $g \mapsto (g, g^{-1})$ définit un isomorphisme de schémas en groupes $\mathbf{GL}_{n,S} \simeq \mathbf{U}_{\mathbf{M}_n \times \mathbf{M}_n^{\text{op}}, \tau}$.

Démonstration. — Clair. \square

Tout faisceau en groupes H agissant sur (A, ν) en respectant la structure de $\mathfrak{alg}_{\text{inv}}$ agit également sur $\mathbf{U}_{A,\nu}$ de la manière évidente.

Uforme_prop

Proposition 3.5.0.69. — Soit P un torseur sous un tel H . On a un isomorphisme canonique

$$P \wedge^H \mathbf{U}_{\mathbf{M}_n \times \mathbf{M}_n^{\text{op}}, \tau} \simeq \mathbf{U}_{P \wedge^H (\mathbf{M}_n \times \mathbf{M}_n^{\text{op}}, \tau)}$$

Démonstration. — On procède comme pour la proposition 2.3.4.12. \square

formesGLn_theo

Théorème 3.5.0.70. — Toute groupe réductif dont la donnée radicielle déployée est celle de \mathbf{GL}_n est isomorphe à $\mathbf{U}_{A,\nu}$ où (A, ν) est un faisceau en algèbres d'Azumaya à involution de deuxième espèce de degré n sur S . Les formes intérieures sont les $\mathbf{GL}_{1,A}$ où A est un faisceau en algèbres d'Azumaya de degré n . Les formes fortement intérieures sont les \mathbf{GL}_M où M est un S -faisceau localement libre de rang n sur S .

Démonstration. — Il suffit d'utiliser la proposition 3.5.0.69 dans le cas $H = \mathbf{Aut}_{\mathbf{M}_{n,S} \times \mathbf{M}_{n,S}^{\text{op}}}$ et de voir que l'action qui y est considérée correspond bien à celle du théorème 3.4.0.64 par l'identification du lemme 3.5.0.68. Pour les formes intérieures, il suffit d'utiliser la proposition 2.3.4.12. Enfin, pour les formes fortement intérieures, on utilise l'équivalence 2.5.3.1 entre les $\mathbf{GL}_{n,S}$ torseurs (étales ou Zariski) et les faisceaux localement libre de type fini sur S . Lorsqu'on tord \mathbf{M}_n par un tel torseur, on obtient justement \mathbf{End}_M où M est le faisceau localement libre associé. \square

Tout faisceau en algèbres à involution (A, ν) de deuxième espèce est obtenu par définition comme $P \wedge^H (\mathbf{M}_{n,S} \times \mathbf{M}_{n,S}^{\text{op}}, \tau)$ où P est un toreur sous $\mathbf{Aut}_{\mathbf{M}_{n,S} \times \mathbf{M}_{n,S}^{\text{op}}, \tau}^{\text{alginv}}$. Le morphisme $\mathbf{GL}_{1, \mathbf{M}_{n,S} \times \mathbf{M}_{n,S}^{\text{op}}} = \mathbf{GL}_n \times \mathbf{GL}_n^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{G}_{m,S}$ donné par le déterminant sur la première composante se restreint en un morphisme $\mathbf{U}_{\mathbf{M}_{n,S} \times \mathbf{M}_{n,S}^{\text{op}}, \tau} \rightarrow \mathbf{G}_{m,S}$.

Lemme 3.5.0.71. — *Ce morphisme est équivariant si $\mathbf{Aut}_{\mathbf{M}_{n,S} \times \mathbf{M}_{n,S}^{\text{op}}, \tau}^{\text{alginv}}$ agit sur $\mathbf{G}_{m,S}$ trivialement. Son noyau s'identifie à $\mathbf{SL}_{n,S}$ par l'isomorphisme du lemme 3.5.0.68, qui est donc stable par l'action.*

Démonstration. — Cela découle immédiatement du lemme 3.4.0.63. \square

Il se tord donc en un morphisme $\mathbf{U}_{A,\nu} \rightarrow \mathbf{G}_{m,S}$.

SU_defi

Définition 3.5.0.72. — On définit le faisceau en groupes $\mathbf{SU}_{A,\nu}$ comme le noyau du morphisme $\mathbf{U}_{A,\nu} \rightarrow \mathbf{G}_{m,S}$ ci-dessus. C'est donc bien le tordu de $\mathbf{SL}_{n,S}$ par le toreur donnant (A, ν) .

En particulier, à travers l'identification $\mathbf{GL}_{n,S} \simeq \mathbf{U}_{\mathbf{M}_{n,S} \times \mathbf{M}_{n,S}^{\text{op}}, \tau}$, le sous groupe $\mathbf{SL}_{n,S}$ s'identifie à $\mathbf{SU}_{\mathbf{M}_{n,S} \times \mathbf{M}_{n,S}^{\text{op}}, \tau}$.

On fait agir $\mathbf{Aut}_{\mathbf{M}_{n,S}}$ sur $\mathbf{GL}_{n,S} = \mathbf{GL}_{\mathbf{M}_{n,S}}$ de manière évidente et sur $\mathbf{G}_{m,S}$ trivialement.

Lemme 3.5.0.73. — *Le morphisme déterminant $\mathbf{GL}_{n,S} \rightarrow \mathbf{G}_{m,S}$ est équivariant.*

Démonstration. — Il suffit de le vérifier localement pour la topologie étale, et on peut donc supposer par 3.2.0.40 qu'on fait agir un élément de $\mathbf{Aut}_{\mathbf{M}_{n,S}}(T)$ qui la conjugaison par un élément de $\mathbf{GL}_{n,S}(T)$, auquel cas c'est évident. \square

Si A est un faisceau en algèbres d'Azumaya de degré n , donc obtenu comme $P \wedge^{\mathbf{Aut}_{\mathbf{M}_{n,S}}} \mathbf{M}_{n,S}$ avec P un toreur sous $\mathbf{Aut}_{\mathbf{M}_{n,S}}$, on a vu en 2.3.4.12 que $P \wedge^{\mathbf{Aut}_{\mathbf{M}_{n,S}}} \mathbf{GL}_{n,S} = \mathbf{GL}_{1,A}$. Le morphisme déterminant étant équivariant, il se tord donc en un morphisme

$$\mathbf{GL}_{1,A} \longrightarrow \mathbf{G}_{m,S}$$

appelé *norme réduite*.

detGLM_rema

Remarque 3.5.0.74. — Lorsque $A = \mathbf{End}_M$ pour un \mathbf{O}_S -module localement de type fini M , cette norme réduite est bien le déterminant usuel qui, sur les points, à un automorphisme de M associe son automorphisme déterminant, point de $\mathbf{Aut}_{\Delta_M} = \mathbf{G}_m$.

SLA_defi

Définition 3.5.0.75. — Pour tout S-faisceau en algèbres d’Azumaya A de degré n , on note $\mathbf{SL}_{1,A}$ le noyau du morphisme norme réduite ci-dessus ; C’est bien le tordu de $\mathbf{SL}_{n,S}$ par 2.3.4.14.

Proposition 3.5.0.76. — Pour tout S-schéma T , on a $(\mathbf{SL}_{1,A})_T = \mathbf{SL}_{1,A_T}$.

Démonstration. — Clair. \square

formesSLn_theo

Théorème 3.5.0.77. — Les groupes réductifs dont la donnée radicielle déployée est celle de \mathbf{SL}_n , c’est-à-dire de type déployé A_{n-1} et simplement connexe, sont les groupes isomorphe à $\mathbf{SU}_{A,\nu}$ où (A,ν) est un faisceau en algèbres d’Azumaya à involution de deuxième espèce de degré n sur S . Les formes intérieures sont les $\mathbf{SL}_{1,A}$ où A est un faisceau en algèbres d’Azumaya de degré n . Les formes fortement intérieures sont les \mathbf{SL}_M où M est un faisceau localement libre de rang n sur S et de déterminant trivial. Lorsque $n \leq 2$, toutes les formes sont intérieures.

Démonstration. — Par la définition 3.5.0.72, si P est un toreur sous $H = \mathbf{Aut}_{M_n \times M_n^{\text{op}}, \tau}$, et si $(A,\nu) = P \wedge^H (M_n \times M_n^{\text{op}}, \tau)$, alors $P \wedge^H \mathbf{SL}_{n,S} = \mathbf{SU}_{A,\nu}$. Les formes intérieures s’obtiennent par la définition 3.5.0.75. Pour les formes fortement intérieures, on utilise comme dans la preuve du théorème 3.5.0.70, l’équivalence de catégories 2.5.3.1 entre les toreurs sous $\mathbf{GL}_{n,S}$ et les fibrés vectoriels sur S de rang n et on constate par la suite exacte scindée $1 \rightarrow \mathbf{SL}_{n,S} \rightarrow \mathbf{GL}_{n,S} \rightarrow \mathbf{G}_{m,S} \rightarrow 1$ que les toreurs provenant de $\mathbf{SL}_{n,S}$ correspondent aux fibrés vectoriels de déterminant trivial, grâce au lemme 2.5.3.3.

Le groupe $\mathbf{SL}_{1,S}$ est trivial. Toutes les formes de $\mathbf{SL}_{2,S}$ sont intérieures, l’absence d’automorphisme extérieur se lit sur le diagramme de Dynkin. Le groupe $\mathbf{Aut}_{M_2 \times M_2^{\text{op}}}$ est plus gros que le groupe d’automorphismes \mathbf{Aut}_{M_2} et son action se factorise par celui-ci. \square

Remarque 3.5.0.78. — La suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathbf{G}_{m,S} \longrightarrow \mathbf{GL}_{n,S} \longrightarrow \mathbf{PGL}_{n,S} \longrightarrow 1$$

ou encore en identifiant $\mathbf{PGL}_n = \ker(\mathbf{Aut}_{M_n \times M_n^{\text{op}}} \rightarrow \mathbf{Aut}_{O_S \times O_S, \tau})$,

$$1 \longrightarrow \mathbf{G}_{m,S} \longrightarrow \mathbf{GL}_{n,S} \longrightarrow \mathbf{Aut}_{M_n \times M_n^{\text{op}}} \longrightarrow \mathbf{Aut}_{O_S \times O_S, \tau} \longrightarrow 1$$

se tord en

$$1 \longrightarrow \mathbf{G}_{m,S} \longrightarrow \mathbf{U}_{A,\nu} \longrightarrow \mathbf{Aut}_{A,\nu} \longrightarrow \mathbf{Aut}_{Z(A),\nu} \longrightarrow 1.$$

(Le premier morphisme est bien équivariant pour l’action triviale sur $\mathbf{G}_{m,S}$ et passe donc à la torsion par le même type de raisonnement local que dans le lemme 3.4.0.63.) Dans le cas intérieur, on a simplement

$$1 \longrightarrow \mathbf{G}_{m,S} \longrightarrow \mathbf{GL}_A \longrightarrow \mathbf{Aut}_A \longrightarrow 1.$$

De même, la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mu_{n,S} \longrightarrow \mathbf{SL}_{n,S} \longrightarrow \mathbf{PGL}_{n,S} \longrightarrow 1$$

donne après torsion

$$1 \longrightarrow \mu_{n,S} \longrightarrow \mathbf{SU}_{A,\nu} \longrightarrow \mathbf{Aut}_{A,\nu} \longrightarrow \mathbf{Aut}_{Z(A),\nu} \longrightarrow 1$$

ou dans le cas intérieur

$$1 \longrightarrow \mu_{n,S} \longrightarrow \mathbf{SL}_A \longrightarrow \mathbf{Aut}_A \longrightarrow 1$$

et la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathbf{SL}_{n,S} \longrightarrow \mathbf{GL}_{n,S} \longrightarrow \mathbf{G}_{m,S} \longrightarrow 1$$

donne

$$1 \longrightarrow \mathbf{SU}_{A,\nu} \longrightarrow \mathbf{U}_{A,\nu} \longrightarrow \mathbf{G}_{m,S} \longrightarrow 1.$$

ou dans le cas intérieur

$$1 \longrightarrow \mathbf{SL}_A \longrightarrow \mathbf{GL}_A \longrightarrow \mathbf{G}_{m,S} \longrightarrow 1.$$

3.6. Suites exactes longues de cohomologie. — Détaillons quelques suites exactes longues de cohomologie associées à des groupes de type A_n , en termes de torseurs et de groupes de Brauer d'algèbres d'Azumaya.

3.6.1. Gerbes liées par μ_n et \mathbf{G}_m à la Brauer. — Commençons par rappeler quelques faits bien connus à propos du groupe de Brauer. Nous distinguerons le groupe de Brauer-Azumaya, défini en termes de classes d'algèbres d'Azumaya, du groupe de Brauer cohomologique, défini en termes de cohomologie étale.

Définition 3.6.1.1. — Le *Groupe de Brauer-Azumaya* $\mathrm{Br}(S)$ est l'ensemble des algèbres d'Azumaya sur S , quotienté par la relation $A \sim B$ s'il existe deux \mathbf{O}_S -modules localement libres de type fini M et N un isomorphisme de \mathbf{O}_S -algèbres $A \otimes_{\mathbf{O}_S} \mathbf{End}_M \simeq B \otimes_{\mathbf{O}_S} \mathbf{End}_N$ et muni de la loi de groupe induite par le produit tensoriel. On note $[A]$ la classe de A dans $\mathrm{Br}(S)$.

L'élément neutre du groupe est la classe de \mathbf{O}_S elle-même, et l'inverse de $[A]$ est $[A^{\mathrm{op}}]$ la classe de l'algèbre opposée. Dans le cas d'une base S sur laquelle tout les \mathbf{O}_S -modules localement libres sont libres, par exemple un anneau local, voire un corps, on retrouve la relation d'équivalence plus connue, pour laquelle $A \sim B$ s'il existe $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et un isomorphisme $\mathbf{M}_m(A) \simeq \mathbf{M}_n(B)$.

Le groupe de Brauer cohomologique est $H_{\mathrm{ét}}^2(S, \mathbf{G}_m)$, qui coïncide avec $H_{\mathrm{fppf}}^2(S, \mathbf{G}_m)$ car \mathbf{G}_m est lisse, par 2.3.5.15.

La construction suivante est une légère généralisation de [Gi71, Ch. V, § 4.2]. Étant donnée une \mathbf{O}_S -algèbre d'Azumaya A fixée, pour toute \mathbf{O}_S -algèbre d'Azumaya B , on considère la structure des *A-banalizations* de B , notée $\mathbf{A}\text{-ban}(B)$. Un objet en cette structure est une paire (M, ϕ) où M est un A -module localement libre de type fini (comme A -module) et $\phi : \mathbf{End}_M^{A\text{-mod}} \simeq B$

BrauerAzumaya_defi

est un isomorphisme de \mathbf{O}_S -algèbres. Un morphisme $(M, \phi) \rightarrow (N, \psi)$ est un isomorphisme $f : M \rightarrow N$ de A -modules tel que $\text{int}_f \circ \phi = \psi$. **Est-ce que cette construction de banalisation est générale, si on a un objet qui sert de point de base, et qu'on ne regarde que les formes de cet objet ? J'en ai bien l'impression.**

On considère la catégorie fibrée dont la fibre au dessus de T est la catégorie des A -banalisations de B_T . Une algèbre d'Azumaya étant localement triviale pour les topologies étales ou fppf, cette catégorie fibrée est une gerbe. De plus, le morphisme de faisceaux $\mathbf{G}_m \rightarrow \mathbf{Aut}_{M, \phi}^{A\text{-ban}(B)}$ envoyant un scalaire sur l'homothétie correspondante de M est un isomorphisme, par l'exemple 2.6.3.5, on en déduit que cette gerbe est liée par \mathbf{G}_m .

banalisation_defi

Définition 3.6.1.2. — On appelle *gerbe des A -banalisations de B* la gerbe ci-dessus. On la note $A\text{-GerBan}(B)$.

Proposition 3.6.1.3. — *Vérifier que cette gerbe est bien isomorphe à la gerbe des relèvements qui est à priori celle qui donne le bord dans $H_{\text{ét}}^2$.*

BrauerInject_defi

Proposition 3.6.1.4. — *L'application qui à une algèbre d'Azumaya B associe la gerbe $A\text{-GerBan}(B)$ passe aux classes d'équivalences, et définit un morphisme injectif*

$$\text{Br}(S) \longrightarrow H_{\text{ét}}^2(S, \mathbf{G}_m).$$

Démonstration. — L'injectivité vient du fait qu'une gerbe est neutre si et seulement si sa fibre sur S est non vide. Pour le passage aux classes, voir [Gi71, Lemme 4.3]. \square

Le morphisme précédent est en fait un morphisme de groupes, voir *loc. cit.*.

Remarque 3.6.1.5. — **Cas d'égalité sous hypothèses, contre-exemple hors de ces hypothèses.**

Définissons maintenant un analogue du groupe de Brauer-Azumaya lorsqu'on remplace \mathbf{G}_m par μ_n .

La partie spécifiquement μ_2 et les modules déterminants sont renvoyés dans les groupes de nature quadratique, s'il y a quelque chose de spécial à dire dessus, mais ce n'est même pas sûr.

3.6.2. Suites exactes. — Signalons enfin quelques identifications dans les suites exactes longues en cohomologie étale associées à certaines suites exactes courtes rappelées à la fin de la section 2.3. La suite exacte de faisceaux

$$1 \longrightarrow \mathbf{G}_{m,S} \longrightarrow \mathbf{GL}_{1,A} \longrightarrow \mathbf{PGL}_A \longrightarrow 1$$

fournit une suite exacte longue

$$\begin{aligned} 1 \longrightarrow \Gamma(S)^\times \longrightarrow A(S)^\times \longrightarrow \text{Aut}_A(S) \\ \longrightarrow H_{\text{ét}}^1(S, \mathbf{G}_m) \longrightarrow H_{\text{ét}}^1(S, \mathbf{GL}_{1,A}) \longrightarrow H_{\text{ét}}^1(S, \mathbf{PGL}_A) \\ \longrightarrow H_{\text{ét}}^2(S, \mathbf{G}_m) \end{aligned}$$

dans laquelle $H_{\text{ét}}^1(S, \mathbf{G}_m)$ et $H_{\text{ét}}^1(S, \mathbf{GL}_{1,A})$ s'identifient par la proposition 2.5.3.1 respectivement à $\text{Pic}(S)$ et à l'ensemble des classes d'isomorphismes de A^{op} -modules localement libres de rang 1. De même, $H_{\text{ét}}^1(S, \mathbf{PGL}_A)$ s'identifie aux classes d'isomorphismes d'algèbres d'Azumaya (pointé par la classe de A). Modulo ces identifications, il est facile de comprendre les foncteurs entre champs qui induisent les flèches de cette suite exacte : l'homomorphisme de connexion $\text{Aut}_A(S) \rightarrow \text{Pic}(S)$ est donné par le foncteur qui envoie un automorphisme σ sur le fibré en droites L_σ tel que $L_\sigma(T) = \{a \in A(T), a_T m = \sigma(m)a_T, \forall m \in A(T'), \forall T' \rightarrow T\}$. On vérifie immédiatement que c'est un fibré en droite en utilisant que localement, σ est intérieur.

Le morphisme $H_{\text{ét}}^1(S, \mathbf{G}_m) \rightarrow H_{\text{ét}}^1(S, \mathbf{GL}_{1,A})$ est induit par le foncteur $\mathcal{V}ec_1 \rightarrow 1\text{-}\mathcal{V}ec_{A^{\text{op}}}$ qui envoie un fibré en droites L sur $L \otimes A_d$, vu comme A^{op} -module par l'action à droite de A sur A_d .

Le morphisme $H_{\text{ét}}^1(S, \mathbf{GL}_{1,A}) \rightarrow H_{\text{ét}}^1(S, \mathbf{PGL}_A)$ est induit par le foncteur End , décrit juste avant après la proposition 2.6.3.11.

Enfin, le morphisme $H_{\text{ét}}^1(S, \mathbf{PGL}_A) \rightarrow H_{\text{ét}}^2(S, \mathbf{G}_m)$ est induit par le foncteur “gerbe des relèvements”, défini en 2.3.5.10. On obtient donc qu'une \mathbf{O}_S -algèbre d'Azumaya B est envoyée sur la gerbe dont la fibre en T est constituée des relèvements (M, ϕ) , où M est un A^{op} -module, et $\phi : \mathbf{End}_M^{A^{\text{op-mod}}} \xrightarrow{\sim} B$ est un isomorphisme de \mathbf{O}_S -algèbres d'Azumaya. On reconnaît donc la gerbe $A^{\text{op}}\text{-GerBan}(B)$ des A^{op} -banalisations de B définie en 3.6.1.2.

Revoir cette fin de partie à la lumière des champs, et faire le cas \mathbf{SL}_A .
Passons maintenant à la suite exacte courte

$$1 \longrightarrow \mathbf{SL}_n \longrightarrow \mathbf{GL}_n \longrightarrow \mathbf{G}_m \longrightarrow 1$$

qui donne la suite exacte longue

$$\begin{aligned} 1 \longrightarrow \mathbf{SL}_n(\Gamma(S)) \longrightarrow \mathbf{GL}_n(\Gamma(S)) \longrightarrow \Gamma(S)^\times \\ \longrightarrow H_{\text{ét}}^1(S, \mathbf{SL}_n) \longrightarrow H_{\text{ét}}^1(S, \mathbf{GL}_n) \longrightarrow H_{\text{ét}}^1(S, \mathbf{G}_m) \end{aligned}$$

Outre les précédentes identifications, on peut également voir $H_{\text{ét}}^1(S, \mathbf{SL}_n)$ comme l'ensemble des classes d'isomorphismes de couples (M, d) où M est un fibré de rang n et $d : \Delta_M \rightarrow \mathbf{O}_S$ est un isomorphisme. L'homomorphisme de connexion envoie alors un élément $d \in \Gamma(S)^\times$ sur le couple $(\mathbf{O}_S^{\oplus n}, d)$. Le morphisme suivant oublie d , et le dernier envoie un fibré sur son déterminant.

4. Groupes de nature quadratique

Introduisons maintenant un certain nombre de groupes classiques en rapport avec les modules quadratiques, comme le groupe orthogonal, le groupe spin, etc. et essayons de donner une description concrète des torseurs sous ces groupes. Les questions de lissité sont laissées de côté pour le moment, et seront traitées dans les parties de classification **les citer**. La topologie de Grothendieck considérée est, sauf mention contraire, la topologie étale.

4.1. Groupe orthogonal. — **Traiter peut-être l'invariant de Arf, quelque part etc.**

Bien traiter du rang pair et impair ici.

Soit (M, q) un module quadratique (voir partie 2.7). Rappelons en particulier que M est un \mathbf{O}_S -module localement libre de type fini, et qu'on l'oublie souvent dans la notation.

Soit $Quad$ la catégorie fibrée telle que $Quad_T$ soit la catégorie des \mathbf{O}_T -modules quadratiques. C'est un champ par la proposition 2.2.3.6.

Oqrepr_prop

Proposition 4.1.0.1. — *Le foncteur de points $\mathbf{Aut}_{M,q}$ est représentable par un sous-schéma en groupes fermé de \mathbf{GL}_M , donc de type fini sur S . Lorsque $S = \text{Spec}(R)$ et que (M, q) est le \mathbf{O}_S -module quadratique associé à un R -module quadratique (M_R, q_R) , on a*

$$\mathbf{Aut}_q(S) = \mathbf{O}(q_R) = \{\alpha \in \text{GL}(M_R), q_R \circ \alpha = q_R\}.$$

Démonstration. — On voit q comme un élément de $\mathbb{S}^2(M^\vee)$ **Rappeler que c'est possible dans la partie sur les formes quadratiques** et on vérifie que \mathbf{Aut}_q est l'image inverse de \mathbf{Stab}_q par le morphisme $\mathbf{GL}_M \rightarrow \mathbf{GL}_{\mathbb{S}^2(M^\vee)}$ qui à $\alpha : M \rightarrow M$ associe l'automorphisme de $\mathbb{S}^2(M^\vee)$ induit par α^\vee . Il est donc représentable par la proposition 2.5.4.4 et la remarque 2.4.0.18, comme un sous-schéma fermé de \mathbf{GL}_M , qui est de type fini sur S . Il est donc également de type fini sur S . Dans le cas affine, on identifie $\mathbf{GL}_M(S) = \text{GL}(M_R)$ grâce au lemme 2.5.1.6. \square

Définition 4.1.0.2. — On note \mathbf{O}_q le schéma en groupes défini par la proposition précédente.

Remarque 4.1.0.3. — La proposition 4.1.0.1 garantit que lorsque la base est un corps, le schéma en groupes défini ci-dessus est bien le schéma en groupes classique, utilisé par exemple dans [Bo91] ou [KMRT98].

mesmodulesquad_prop

Proposition 4.1.0.4. — *Le foncteur qui à un module quadratique q associe le torseur $\mathbf{Iso}_{q_{2n}^h, q}$ (resp. $\mathbf{Iso}_{q_{2n+1}^h, q}$) définit une équivalence de catégories fibrées*

- du champ $\text{Formes}(q_{2n}^h)$ vers le champ $\text{Tors}(\mathbf{O}_{q_{2n}^h})$;
- du champ $\text{Formes}(q_{2n+1}^h)$ vers le champ $\text{Tors}(\mathbf{O}_{q_{2n+1}^h})$.

Ceci est valable pour la topologie étale ou fppf.

Démonstration. — C'est une application immédiate de 2.3.4.5. \square

Soit q_0 un module quadratique. Considérons le foncteur fibré $Quad \rightarrow Quad$ qui à un module quadratique q associe le module quadratique $q \perp q_0$. Étant donné une forme q , ce foncteur induit donc l'inclusion $\mathbf{O}_q \rightarrow \mathbf{O}_{q \perp q_0}$ prolongeant un automorphisme par l'identité sur le sous-espace correspondant à q_0 .

`Osousforme_lemm`

Lemme 4.1.0.5. — Si q' est une forme de q , correspondant à un torseur sous \mathbf{O}_q , alors le morphisme $\mathbf{O}_q \rightarrow \mathbf{O}_{q \perp q_0}$ se tord par la procédure de la proposition 2.3.4.9 en le morphisme $\mathbf{O}_{q'} \rightarrow \mathbf{O}_{q' \perp q_0}$.

Démonstration. — C'est une application directe de la proposition 2.3.4.9. \square

4.2. Algèbres de Clifford. — Rappelons maintenant la construction et quelques propriétés de l'algèbre de Clifford d'un module quadratique (M, q) , toujours supposé localement libre de type fini. Par le corollaire 2.5.1.4, on peut considérer que $M = \mathbf{W}(\mathcal{M})$ et que la structure de module quadratique sur M provient d'une structure de même nature sur \mathcal{M} , également notée q .

On considère l'algèbre tensorielle $\bigoplus_i \mathcal{M}^{\otimes i}$, construite à l'aide du produit tensoriel des \mathcal{O}_S -modules. **Renvoyer à un nouveau paragraphe sur le produit tensoriel pour les \mathbf{O}_S -module de type fini.** On considère alors le quotient, en tant que préfaisceau, de ce produit tensoriel par l'idéal bilatère engendré par les sections de la forme $m^{\otimes 2} - q(m)1$, puis on le faisceautise (Zariski). On applique \mathbf{W} au faisceau en \mathcal{O}_S -algèbres obtenu, qui hérite d'une $\mathbb{Z}/2$ -gradation de l'algèbre tensorielle.

`algCliff_defi`

Définition 4.2.0.6. — Pour tout module quadratique (M, q) sur la base S , on note $\mathbf{C}_{M,q}$ ou même \mathbf{C}_q le faisceau en \mathbf{O}_S -algèbres $\mathbb{Z}/2$ -graduées construit ci-dessus. On l'appelle *algèbre de Clifford* de (M, q) . On note $\mathbf{C}_{0,q}$ et $\mathbf{C}_{1,q}$ ses parties respectivement paire et impaire.

Dans le cas affine, le \mathcal{O}_S -module \mathcal{M} étant cohérent, **préciser le raisonnement.** on a :

Proposition 4.2.0.7. — Si $T = \text{Spec}(R')$, alors $\mathbf{C}_{M,q}(R') = C(M(R'), q_{R'})$, où ce dernier est l'algèbre de Clifford usuelle d'un module quadratique sur un anneau (voir [Knus91, Ch. IV, § 1]).

`chgmtBaseCliff_prop`

Proposition 4.2.0.8. — Pour tout morphisme $T \rightarrow S$, on a $\mathbf{C}_{q_T} \simeq (\mathbf{C}_q)_T$.

Démonstration. — Voir [Knus91, Ch. IV, Prop. 1.2.3] pour le cas affine, avant d'appliquer le foncteur \mathbf{W} , qui commute au changement de base par la proposition 2.5.1.1. Ce raisonnement s'adapte directement au cas général (non affine)

ou bien, au choix, on utilise le cas affine et la naturalité de l'isomorphisme pour globaliser le morphisme et vérifier que c'est un isomorphisme. \square

L'algèbre de Clifford d'un module quadratique (M, q) satisfait à la propriété universelle suivante. C'est l'objet initial de la catégorie des paires (A, j) où A est une \mathbf{O}_S -algèbre localement libre de type fini, et où $j : M \rightarrow A$ est un morphisme de \mathbf{O}_S -module, qui satisfait à $j(m)^2 = q(m) \cdot 1$ dans l'algèbre A (ce qui peut s'exprimer comme un diagramme). **Ces algèbres forment un champ, par structure sur un champ ?** Vérifier cette propriété universelle revient à construire un morphisme, évident sur le préfaisceau, puis qu'on faisceautise. Cela permet par exemple de construire deux involutions : soit $\sigma_q : \mathbf{C}_q \rightarrow \mathbf{C}_q^{\text{op}}$ l'unique morphisme de \mathbf{O}_S -algèbres qui vérifie $\sigma_q(m) = m$ (resp. $\sigma_q(m) = -m$) pour tout $m \in M(T)$. Il est automatiquement d'ordre 2 ($\sigma^2 = \text{id}$) par la propriété universelle.

Définition 4.2.0.9 (involutions). — L'involution σ_q de \mathbf{C}_q telle que $(\sigma_q)|_M = \text{id}_M$ est appelée l'involution canonique. Celle telle que $(\sigma_q)|_M = -\text{id}_M$ est appelée l'involution standard.

PBW_theo

Théorème 4.2.0.10 (Poincaré-Birkoff-Witt). — Si le module sous-jacent M est libre de type fini de base e_1, \dots, e_n dans $M(S)$, l'algèbre de Clifford de q (resp. sa partie paire, sa partie impaire) est libre de type fini et admet pour base les produits de e_i différents entre eux (resp. en nombre pair, en nombre impair). En particulier, comme M est supposé localement libre de type fini, il en est de même de $\mathbf{C}_{M,q}$. **Donner une référence.**

Considérons la forme hyperbolique q_M^h sur le module $M \oplus M^\vee$ (avec la notation de 2.7.0.16), et soit $\Lambda^* M = \bigoplus_i \Lambda^i M$. On définit une application $j : M \oplus M^\vee \rightarrow \mathbf{End}_{\Lambda^* M}$ sur les points en envoyant $m \in M(T)$ sur l'endomorphisme $m \wedge (-)$ et $f \in M^\vee(T)$ sur $d_f : m_1 \wedge \dots \wedge m_r \mapsto \sum_{i=1}^r (-1)^{i-1} f(m_i) m_1 \wedge \dots \wedge \check{m}_i \wedge \dots \wedge m_r$. On vérifie qu'elle satisfait bien à $j(m)^2 = q(m) \cdot \text{Id}_{\Lambda^* M_T}$ (voir par exemple [Knus91, Ch. IV, Prop. 2.1.1]). Cela induit donc par propriété universelle un morphisme

$$\mathbf{C}_{q_M^h} \longrightarrow \mathbf{End}_{\Lambda^* M}.$$

CliffHypPaire_prop

Proposition 4.2.0.11. — Le morphisme ci-dessus est un isomorphisme.

Démonstration. — Cela se vérifie localement, auquel cas voir [Knus91, Ch. IV, Prop. 2.1.1]. \square

Puisque $\mathbf{End}_{\Lambda^* M}$ est une \mathbf{O}_S -algèbre d'Azumaya, il en est de même pour \mathbf{C}_q pour toute forme q de q_{2n}^h par 4.2.0.8. En particulier, le centre de \mathbf{C}_q est alors \mathbf{O}_S . On obtient donc un foncteur de catégories fibrées :

$$C : \mathcal{Formes}(q_{2n}^h) \longrightarrow \mathcal{Azumaya}_{2n}.$$

Considérons maintenant le module hyperbolique de rang impair q_{2n+1}^h et soit e un vecteur de base du module sous-jacent à $\langle 1 \rangle$ tel que $q(e) = 1$.

Théorème 4.2.0.12 (structure des algèbres de Clifford en dimension impaire, cas déployé)

CliffordSplit_theo

centreCliffhyp_item

actionpardet_item

COimpair_item

multCliff_item

1. Le centre de $\mathbf{C}_{q_{2n+1}^h}$, noté ici Z , est une \mathbf{O}_S -algèbre $\mathbb{Z}/2$ -graduée de degré 2 telle que $Z_1 = \mathbf{O}_S$ (comme \mathbf{O}_S -algèbre) et $Z_1 \simeq \mathbf{O}_S$ (comme \mathbf{O}_S -module) avec pour multiplication $Z_1 \otimes Z_1 \rightarrow Z_0$ donné par la multiplication usuelle de $\mathbf{O}_S \otimes \mathbf{O}_S \rightarrow \mathbf{O}_S$ (qui est donc un isomorphisme).
2. L'action d'un élément $f \in \mathbf{O}_{q_{2n+1}^h}(S)$ par $C(f)$ sur $\mathbf{C}_{q_{2n+1}^h}$ se restreint à Z_1 et agit dessus par le déterminant de f .
3. L'inclusion $i : q_{2n}^h \rightarrow q_{2n+1}^h$ induit par la décomposition $q_{2n+1}^h = q_{2n}^h \perp \langle 1 \rangle$ induit un isomorphisme $\mathbf{C}_{q_{2n}^h} \simeq \mathbf{C}_{0, q_{2n+1}^h}$ qui envoie un élément (m, g) de $\mathbf{O}_S^n \oplus (\mathbf{O}_S^n)^\vee$ sur $i(m, -g) \cdot e$.
4. La multiplication induit un isomorphisme $Z \otimes \mathbf{C}_{0, q_{2n+1}^h} \rightarrow \mathbf{C}_{q_{2n+1}^h}$ d'algèbres graduées.

Démonstration. — Tout les points peuvent se tester localement pour la topologie Zariski. **Eventuellement mieux expliquer pourquoi.** On se ramène donc au cas où la base S est affine. Pour les points 1, 3 et 4, voir alors [Knus91, Ch. IV, Prop. 3.2.2]. Pour prouver le point 2, notons que (3.2.3) p. 210 de *loc. cit.* fournit un générateur de Z_1 , de la forme $w = xe$ où e est comme ci-dessus et x est un élément de $i(\mathbf{C}_{0, q_{2n}^h})$. En particulier, $ex = xe$. On a de plus $w^2 = e^2 x^2 = 1$. Toute réflexion orthogonale τ_v par rapport à un vecteur v tel que $q(v)$ est inversible est de déterminant (-1) par 2.7.1.15 et agit bien par son déterminant, car $C(\tau_v) = -\text{int}_v$ et w est central. L'affirmation est donc vraie pour les produits de réflexions. On peut par ailleurs se ramener au cas du spectre d'un anneau local, qui est une limite de voisinages Zariski, puisque tout élément vit à un niveau fini dans la limite. Malheureusement, même sur un anneau local, tout élément de $\mathbf{O}_{q_{2n+1}^h}(S)$ n'est pas un produit de réflexions (voir 2.7.1.18). Soit F l'espace sous-jacent à la sous-forme q_{2n}^h , qui est régulière. Un élément $f \in \mathbf{O}_{q_{2n+1}^h}(S)$ envoie le plan F sur son image $f(F)$, et par le théorème de Kneser 2.7.1.16, on peut donc trouver un produit de réflexions g qui coïncide avec f sur F . L'élément $f \circ g^{-1}$ est donc l'identité sur F , et préserve donc son orthogonal, qui est engendré par e . On a donc $f \circ g^{-1}(e) = \lambda e$ pour un certain $\lambda \in \mu_2(S)$, et $C(f \circ g^{-1})(x) = x$, d'où $C(f \circ g^{-1})(w) = \lambda w$. Ainsi, $f \circ g^{-1}$ agit bien par son déterminant λ et comme g est un produit de réflexions, l'affirmation est vraie pour f . \square

Théorème 4.2.0.13 (Structure des algèbres de Clifford en dimension impaire, cas général)

Soit (M, q) une forme fppf de q_{2n+1}^h .

1. Le centre de \mathbf{C}_q , noté ici Z , est une \mathbf{O}_S -algèbre $\mathbb{Z}/2$ -graduée de degré 2 telle que $Z_1 = \mathbf{O}_S$ (comme \mathbf{O}_S -algèbre) et $Z_1 \simeq \Delta_M$ (comme \mathbf{O}_S -module) par un isomorphisme canonique.
2. La multiplication $Z_1 \otimes Z_1 \rightarrow Z_0$, canoniquement isomorphe à $\Delta_M \otimes \Delta_M \rightarrow \mathbf{O}_S$, est un isomorphisme.
3. Un élément $f \in \mathbf{O}_q(S)$ agit par son déterminant sur Z_1 .
4. Lorsque $q = q_M^h \perp \langle 1 \rangle$, alors l'inclusion $i : q_M^h \rightarrow q$ induit un isomorphisme de \mathbf{O}_S -algèbres $\mathbf{C}_{q_M^h} \simeq \mathbf{C}_{0,q}$ en envoyant un élément (m, g) de $M \oplus M^\vee$ vers $(m, -g)e$. En particulier, $\mathbf{C}_{0,q}$ est une \mathbf{O}_S -algèbre d'Azumaya.
5. La multiplication induit un isomorphisme $Z \otimes \mathbf{C}_{0,q} \rightarrow \mathbf{C}_q$ d'algèbres graduées, autrement dit, $\mathbf{C}_{1,q} \simeq \mathbf{C}_{0,q} \otimes \Delta_M$ comme $\mathbf{C}_{0,q}$ -module et la multiplication $\mathbf{C}_{1,q}^{\otimes 2} \rightarrow \mathbf{C}_{0,q}$ est induite par celle sur $Z_1 \otimes Z_1 \rightarrow \mathbf{O}_S$.

Démonstration. — Toutes ces affirmations se prouvent localement pour la topologie fppf, on est donc ramené à la proposition précédente, à l'exception de l'identification de $Z_1 \simeq \Delta_M$. Pour cela, on utilise que tout morphisme dans $\mathcal{F}ormes(q_{2n+1}^h)$ agit par le foncteur C en préservant le centre et la graduation, donc en préservant Z_1 , et définit donc un foncteur fibré $\mathcal{F}ormes(q_{2n+1}^h) \rightarrow \mathcal{V}ec_1$. Par le point 2 de la proposition 4.2.0.12, ce foncteur induit le morphisme déterminant $\mathbf{O}_{q_{2n+1}^h} = \mathbf{Aut}_{q_{2n+1}^h} \rightarrow \mathbf{Aut}_{\mathbf{O}_S} = \mathbf{G}_m$. Par la proposition 2.3.4.11, il est donc canoniquement isomorphe au foncteur déterminant $\mathcal{F}ormes(q_{2n+1}^h) \rightarrow \mathcal{V}ec_1$, qui envoie le module (q, M) sur le fibré en droites déterminant Δ_M de M . \square

Remarque 4.2.0.14. — En particulier, lorsque $q = q_M^h \perp \langle 1 \rangle$, alors $\mathbf{C}_{0,q} \simeq \mathbf{End}_{\mathbb{A}^1 M}$ comme \mathbf{O}_S -algèbre et $\mathbf{C}_{1,q} \simeq \mathbf{End}_{\mathbb{A}^1 M}$ comme $\mathbf{C}_{0,q}$ -module.

Décrire les involutions ?

Définition 4.2.0.15. — Le foncteur fibré *demi-déterminant*

$$\frac{1}{2}D : \mathcal{F}ormes(q_{2n+1}^h) \longrightarrow \mathcal{M}od\mathcal{D}et$$

associe à un module quadratique q le module déterminant $(\Delta_M, \Delta_M \otimes \Delta_M \xrightarrow{\sim} \mathbf{O}_S)$ défini par le point 2 de la proposition 4.2.0.13. La définition du foncteur sur les morphismes est induit par la fonctorialité de l'algèbre de Clifford.

La composée des deux foncteurs fibrés

$$\mathcal{F}ormes(q_{2n+1}^h) \longrightarrow \mathcal{M}od\mathcal{D}et \longrightarrow \mathcal{V}ec_1$$

est donc par construction canoniquement isomorphe au foncteur oubli $\mathcal{F}ormes(q_{2n+1}^h) \rightarrow \mathcal{V}ec_{2n+1}$ suivi du déterminant $\Delta : \mathcal{V}ec_{2n+1} \rightarrow \mathcal{V}ec_1$.

Remarque 4.2.0.16. — La notion de demi-déterminant est due à Kneser, dans le cadre des modules quadratiques quelconques sur un anneau. **Compléter la coïncidence.**

4.3. Groupe spécial orthogonal. — Considérons maintenant les S-foncteurs fibrés (pour la topologie étale ou fppf) définis en 2.7.1.10 et 4.2.0.15

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}ormes(q_{2n}^h) & \xrightarrow{\quad D \quad} & \mathcal{M}od\mathcal{D}et \\ q & \mapsto & D_q \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{F}ormes(q_{2n+1}^h) & \xrightarrow{\quad \frac{1}{2}D \quad} & \mathcal{M}od\mathcal{D}et \\ q & \mapsto & \frac{1}{2}D_q. \end{array}$$

Définissons maintenant le groupe spécial orthogonal. Les carrés commutatifs de foncteurs fibrés⁽⁷⁾

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}ormes(q_{2n}^h) & \xrightarrow{\quad D \quad} & \mathcal{M}od\mathcal{D}et \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{V}ec_{2n} & \xrightarrow{\quad \Delta \quad} & \mathcal{V}ec_1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{F}ormes(q_{2n+1}^h) & \xrightarrow{\quad \frac{1}{2}D \quad} & \mathcal{M}od\mathcal{D}et \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{V}ec_{2n+1} & \xrightarrow{\quad \Delta \quad} & \mathcal{V}ec_1 \end{array}$$

où les foncteurs verticaux ne conservent que le module sous-jacent, induisent sur les automorphismes de q_{2n}^h (resp. q_{2n+1}^h) et de ses images par les différents foncteurs les carrés commutatifs de morphismes de faisceaux⁽⁸⁾

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{O}_{q_{2n}^h} & \xrightarrow{\quad \text{dét} \quad} & \mu_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{GL}_{2n} & \xrightarrow{\quad \text{dét} \quad} & \mathbf{G}_m \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{O}_{q_{2n+1}^h} & \xrightarrow{\quad \text{dét} \quad} & \mu_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{GL}_{2n+1} & \xrightarrow{\quad \text{dét} \quad} & \mathbf{G}_m \end{array}$$

La proposition 2.3.4.9 donne alors immédiatement :

det0q_lemm

Lemme 4.3.0.17. — Soit h l'un des modules quadratiques q_{2n}^h ou q_{2n+1}^h et soit q une forme étale (resp. fppf) de h , obtenue en tordant h par le \mathbf{O}_h -torseur $\mathbf{Iso}_{h,q}$. Alors si M est le module sous-jacent à q , les carrés commutatifs ci-dessus se tordent par $\mathbf{Iso}_{h,q}$ et ses poussés $\mathbf{Iso}_{\mathbf{O}_S^{2n},M}$ (resp. $\mathbf{Iso}_{\mathbf{O}_S^{2n+1},M}$),

7. Le carré de droite n'est commutatif qu'à un isomorphisme canonique près, comme expliqué après la définition 4.2.0.15.

8. Cette fois-ci le carré de droite est bien strictement commutatif.

\mathbf{Iso}_{D_h, D_q} (resp. $\mathbf{Iso}_{\frac{1}{2}D_h, \frac{1}{2}D_q}$) et $\mathbf{Iso}_{\mathbf{O}_S, \Delta_M}$ en

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{O}_q & \xrightarrow{\det} & \mu_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{GL}_M & \xrightarrow{\det} & \mathbf{G}_m. \end{array}$$

Soit $\mathbf{SO}_{M,q}$ le noyau du morphisme déterminant $\mathbf{O}_{M,q} \rightarrow \mu_2$. Ses points sont donc donnés par

$$\mathbf{SO}_{M,q}(S) = \mathbf{SO}(q_R)$$

lorsque $S = \text{Spec}(R)$ et (M, q) est le \mathbf{O}_S -module quadratique associé à un R -module quadratique (M_R, q_R) . Le faisceau en groupes $\mathbf{SO}_{M,q}$ est un sous-groupe fermé de $\mathbf{O}_{M,q}$ représenté par un schéma affine de type fini sur \mathbf{O}_S par le lemme 2.4.0.17.

SO_defi

Définition 4.3.0.18. — On note $\mathbf{SO}_{M,q}$, ou même simplement \mathbf{SO}_q , le schéma en groupes ainsi obtenu.

Remarque 4.3.0.19. — Si $s \in \Gamma(S)^\times$, on a les isomorphismes canoniques $\mathbf{O}_{M,sq} \simeq \mathbf{O}_{M,q}$ et $\mathbf{SO}_{M,sq} \simeq \mathbf{SO}_{M,q}$ comme sous-groupes de \mathbf{GL}_M .

seS00impair_prop

Proposition 4.3.0.20. — La suite

$$1 \longrightarrow \mathbf{SO}_{q_{2n+1}^h} \longrightarrow \mathbf{O}_{q_{2n+1}^h} \xrightarrow{\det} \mu_2 \longrightarrow 1$$

est une suite exacte de faisceaux étales. Soit q une forme (étale ou fppf) de q_{2n+1}^h , et soit P le torseur sous \mathbf{O}_h par lequel on tord h pour obtenir q . La suite exacte précédente se tord par P en

$$1 \longrightarrow \mathbf{SO}_q \longrightarrow \mathbf{O}_q \xrightarrow{\det} \mu_2 \longrightarrow 1$$

qui est donc également une suite exacte de faisceaux étales ou fppf.

Démonstration. — Pour avoir l'exactitude de la première suite, il suffit, par définition de \mathbf{SO}_h , de montrer que le morphisme déterminant est surjectif. Or la suite est trivialement scindée en rang impair. La suite exacte tordue est alors une conséquence directe du lemme précédent et de la proposition 2.3.4.14. \square

cartanDieudonne_prop

Proposition 4.3.0.21. — Lorsque la base S est le spectre d'un anneau local, et lorsque q est de la forme $q = \langle 1 \rangle \perp q'$ avec q' régulière (en particulier q est une forme fppf de q_{2n+1}^h), alors tout élément de $\mathbf{SO}_q(S)$ est un produit de réflexions orthogonales.

Démonstration. — Par le même argument que dans la fin de la preuve du théorème 4.2.0.12, en utilisant le théorème de Kneser 2.7.1.16, on voit que tout élément de \mathbf{O}_q est un produit de réflexions orthogonales et d'une application, notée ici u , envoyant e (base du sous-module sous-jacent à $\langle 1 \rangle$) sur λe , $\lambda \in \mu_2$ et se restreignant à l'identité sur le sous-module F sous-jacent à q' . Or le déterminant d'un tel produit étant $\lambda \cdot (-1)^n$, il ne sera dans \mathbf{SO}_q que si $\lambda = \pm 1$. Si $\lambda = 1$, alors $u = \text{Id}$, et on peut la supprimer du produit, et si $\lambda = -1$, alors u est la réflexion par rapport au vecteur e . \square

Il est probable que ça passe plus généralement avec toute forme de q_{2n+1}^h avec le raisonnement suivant : on ne change pas les réflexions orthogonales ni le groupe spécial en multipliant q par un scalaire. De plus, toute forme diagonalise en blocs de 2 et en une constante sur le sous-espace de dimension 1 qui reste (c'est à vérifier). On peut donc se ramener au cas particulier énoncé.

En rang pair, la situation est un peu différente. En effet, le déterminant $\mathbf{O}_{q_{2n+1}^h} \rightarrow \mu_2$ n'est pas surjectif, ce n'est même pas un épimorphisme de faisceaux en général, comme nous allons le voir. Considérons le morphisme du faisceau (localement) constant $\mathbb{Z}/2$ vers μ_2 , qui sur les points, envoie 0 sur 1 et 1 sur -1 . C'est bien entendu un morphisme de faisceaux en groupes abéliens. Son image sera notée provisoirement $\text{Im}(\mathbb{Z}/2)$. Remarquons que si la base est un corps de caractéristique 2, cette image est le faisceau en groupes trivial.

seS00pair_prop

Proposition 4.3.0.22. — Supposons $n > 2$. Le déterminant $\mathbf{O}_{q_{2n}^h} \rightarrow \mu_2$ a pour image $\text{Im}(\mathbb{Z}/2) \subseteq \mu_2$ et on a donc une suite exacte de faisceaux (étales ou fppf)

$$1 \longrightarrow \mathbf{SO}_{q_{2n}^h} \longrightarrow \mathbf{O}_{q_{2n}^h} \xrightarrow{\det} \text{Im}(\mathbb{Z}/2) \longrightarrow 1.$$

Soit q une forme (étale ou fppf) de q_{2n}^h , $n > 2$, et soit P le torseur sous \mathbf{O}_h par lequel on tord h pour obtenir q . La suite exacte précédente se tord par P en

$$1 \longrightarrow \mathbf{SO}_q \longrightarrow \mathbf{O}_q \xrightarrow{\det} \text{Im}(\mathbb{Z}/2) \longrightarrow 1$$

qui est donc également une suite exacte de faisceaux étales ou fppf.

Démonstration. — On peut vérifier la factorisation du déterminant localement pour la topologie de Zariski. Par un argument de limite, on peut donc supposer l'anneau local. Alors, par le théorème 2.7.1.17, tout élément de \mathbf{O}_{2n} est un produit de réflexions, et a donc un déterminant égal à 1 ou -1 , par 2.7.1.15. De plus, -1 est atteint par n'importe quelle réflexion orthogonale, et il y a bien des vecteurs v tels que $q(v)$ est inversible, par exemple le vecteur $(1, 1, 0, \dots, 0)$. On obtient donc bien une surjection sur les points, et donc un épimorphisme de faisceaux $\det : \mathbf{O}_{q_{2n}^h} \rightarrow \text{Im}(\mathbb{Z}/2)$.

La suite tordue s'obtient alors par la proposition 2.3.4.14, après identification du tordu de \mathbf{O}_{2n} avec \mathbf{O}_q par la proposition 2.3.4.7. Notons que $\mathrm{Im}(\mathbb{Z}/2)$ n'est pas tordu parce qu'il est abélien et toute action par automorphismes intérieurs est donc triviale.. \square

Le cas $n \leq 2$ peut sans-doute se traiter si on a le temps, mais n'est pas nécessaire pour la partie classification car on tombe sur $D_1 = A_1$ ou $D_2 = A_2$.

Donnons maintenant une description concrète des toreseurs sous $\mathbf{SO}_{q_{2n+1}^h}$. Considérons le foncteurs fibré $\frac{1}{2}D : \mathcal{F}ormes(q_{2n+1}^h) \rightarrow \mathcal{M}od\mathcal{D}et$ ainsi que le foncteur fibré $\mathcal{F}inal \rightarrow \mathcal{M}od\mathcal{D}et$ qui envoie l'unique objet sur le module déterminant trivial ($\mathbf{O}_S, \mathbf{O}_S \otimes \mathbf{O}_S \simeq \mathbf{O}_S$). Formons alors le produit fibré de champs $Quad\mathcal{D}etTriv_h = \mathcal{F}ormes(q_{2n+1}^h) \times_{\mathcal{M}od\mathcal{D}et} \mathcal{F}inal$. Explicitement, les objets de sa fibre sur T sont donc des paires : (q, ϕ) où q est une forme de q_{2n+1}^h et où ϕ est un isomorphisme du module demi-déterminant de q vers le module déterminant trivial, autrement dit, M étant le \mathbf{O}_S -module sous-jacent à q , c'est un isomorphisme $\phi : \Lambda M \simeq \mathbf{O}_S$ tel que $\phi^{\otimes 2} = \frac{1}{2}d_q$. L'objet trivial est $(q_{2n+1}^h, \mathrm{id}_{\mathbf{O}_S})$.

orseursimpairs_prop

Proposition 4.3.0.23. — *Le foncteur fibré qui envoie un objet (q, ϕ) de $Quad\mathcal{D}etTriv_{q_{2n+1}^h}$ sur $\mathbf{Iso}_{(q_{2n+1}^h, \mathrm{id}_{\mathbf{O}_S}), (q, \phi)}$ définit une équivalence de champs*

$$Quad\mathcal{D}etTriv_{q_{2n+1}^h} \simeq Tors(\mathbf{SO}_{q_{2n+1}^h}).$$

Démonstration. — On applique la proposition 2.3.4.6 : Par définition, le groupe $\mathbf{SO}_{q_{2n+1}^h}$ est le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{SO}_{q_{2n+1}^h} & \longrightarrow & \mathbf{1} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathbf{O}_{q_{2n+1}^h} & \xrightarrow{\det} & \mu_2 \end{array}$$

et le déterminant $\mathbf{O}_{q_{2n+1}^h} \rightarrow \mu_2$ est surjectif sur les points (donc bien entendu un épimorphisme de faisceaux) par 4.3.0.20. \square

Faire le cas de rang pair quand ce sera nécessaire.

Attention, ici, pour le rang pair, on a défini le module déterminant de la manière classique, sans signe, ce qui fait que le module hyperbolique a un module déterminant trivial avec un signe. Si à la place, on le définissait avec une sorte d'invariant d'Arf, pour coller au cas impair, on aurait probablement déjà le signe dedans, et on trouvera le module déterminant trivial (sans signe) pour le module hyperbolique. Il faut revenir là-dessus après avoir bien compris ce dont on a besoin pour le cas pair.

4.4. Groupes de Clifford et groupe spin. — Soit (M, q) un module quadratique, M toujours supposé localement libre. Le foncteur fibré algèbre de Clifford C induit un morphisme de faisceaux en groupes $\mathbf{O}_q \rightarrow \mathbf{Aut}_{C_q}$. Ce morphisme est injectif, car C_q contient M comme sous-module et il est par définition préservé par tout $C(f)$ avec $f \in \mathbf{O}_q$.

groupeClifford_defi

Définition 4.4.0.24. — Le faisceau en groupes de Clifford Γ_q est défini comme le produit fibré Corriger, c'est inexact, il faut prendre seulement les automorphismes localement homogènes. Cela influe sur la partie sur les torsseurs sous Γ en rang pair, mais on n'en a pas forcément besoin. La partie sur le groupe de Clifford spécial qui suit est par contre correcte. Si on ne veut pas faire du zèle, on peut essayer de ne mentionner que le groupe de Clifford spécial.

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_q & \longrightarrow & \mathbf{GL}_{1, C_q} \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ \mathbf{O}_q & \xhookrightarrow{C} & \mathbf{Aut}_{C_q} \end{array}$$

où la flèche verticale de droite est l'action par conjugaison.

Étant donné T sur S , $g \in \mathbf{GL}_{1, C_q}(T)$ et $f \in \mathbf{O}_q(T)$, tels que $C(f) = \text{int}_g$, on a alors que int_g préserve $M(T)$ dans $C_q(T)$. Par ailleurs, si $g \in \mathbf{GL}_{1, C_q}(T)$ est tel que int_g préserve $M(T)$, alors $q(gmg^{-1}) = (gmg^{-1})^2 = gm^2g^{-1} = gq(m)g^{-1} = q(m)$. Explicitement, sur les points, on a donc

$$\Gamma_q(S) = \{\alpha \in \mathbf{GL}_{1, C_q}(S) \text{ t.q. } \alpha_T \cdot m \cdot \alpha_T^{-1} \in M(T) \ \forall T \text{ sur } S \text{ et } \forall m \in M(T)\}.$$

peCliffordpair_defi

Définition 4.4.0.25. — Le faisceau en groupes de Clifford pair $\mathbf{S}\Gamma_q$ est défini comme l'intersection de $\mathbf{S}\Gamma_q$ et de $\mathbf{GL}_{1, C_{0,q}}$ dans \mathbf{GL}_{1, C_q} .

Notons que Γ_q et $\mathbf{S}\Gamma_q$ sont tout deux représentables par le Lemme 2.4.0.17.

Proposition 4.4.0.26. — Lorsque q est une forme étale ou fppf de q_{2n}^h , on a les suites exactes de faisceaux en groupes suivantes, pour les topologies de Zariski, étale, ou fppf :

$$(5) \quad 1 \longrightarrow \mathbf{G}_m \longrightarrow \Gamma_q \longrightarrow \mathbf{O}_q \longrightarrow 1$$

qui induit

$$(6) \quad 1 \longrightarrow \mathbf{G}_m \longrightarrow \mathbf{S}\Gamma_q \longrightarrow \mathbf{SO}_q \longrightarrow 1.$$

Le faisceau en groupes $\mathbf{S}\Gamma_q$ s'identifie donc au produit fibré

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{S}\Gamma_q & \longrightarrow & \Gamma_q \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathbf{S}\mathbf{O}_q & \hookrightarrow & \mathbf{O}_q. \end{array}$$

Démonstration. — On peut raisonner Zariski localement sur S , et donc supposer S affine. Cela découle alors de [Knus91, Ch. IV, (6.2.2) et (6.2.3)], car toute classe dans le groupe de Picard est localement nulle pour la topologie de Zariski. \square

Pour le cas impair avec seulement le groupe de Clifford spécial, voir la partie sur les suite exactes de cohomologie.

Décrivons maintenant les torseurs sous le groupe de Clifford $\Gamma_{q_{2n}^h}$ de la forme hyperbolique de rang pair $2n$. Soit $\text{End} : (\text{Vec}_k)_{\simeq} \rightarrow \mathcal{A}zumaya_{k^2}$ le foncteur fibré “Endomorphismes”, qui à un objet N associe \mathbf{End}_N et à un isomorphisme $f : N \rightarrow N'$ associe $\text{int}_f : \mathbf{End}_N \rightarrow \mathbf{End}_{N'}$. Soit $\mathcal{DeplCliff}_{2n}$ le produit fibré de champs

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{DeplCliff}_{2n} & \longrightarrow & \text{Vec}_{2n} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathcal{Formes}(q_{2n}^h) & \xrightarrow{C} & \mathcal{A}zumaya_{2n}. \end{array}$$

Explicitement, un objet de $(\mathcal{DeplCliff}_{2n})_T$ est donc un triplet (q, N, ϕ) où q est une forme de $(q_{2n}^h)_T$, N est un \mathbf{O}_T -module localement libre de rang 2^n , et $\phi : \mathbf{End}_N \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}_q$ est un isomorphisme de \mathbf{O}_T -algèbres. Nous avons donné en 4.2.0.11 un isomorphisme d'algèbres $\mathbf{C}_{q_{2n}^h} \simeq \mathbf{End}_{\Lambda^* \mathbf{O}_S^n}$, où $\Lambda^* \mathbf{O}_S^n \simeq \mathbf{O}_S^{2^n}$. Notons-le ϕ_h . Cela fournit donc un objet $(q_{2n}^h, \Lambda^* \mathbf{O}_S^n, \phi_h)$ de $(\mathcal{DeplCliff}_{2n})_S$. Un automorphisme de $(q_{2n}^h, \Lambda^* \mathbf{O}_S^n, \phi_h)_T$ est une paire (f, g) où $f \in \mathbf{O}_{q_{2n}^h}(T)$, $g \in \mathbf{GL}_{\Lambda^* \mathbf{O}_S^n}(T)$ et $C(f) = \text{int}_g$. D'où $\mathbf{Aut}_{(q_{2n}^h, \Lambda^* \mathbf{O}_S^n, \phi_h)} = \Gamma_{q_{2n}^h}$. Puisque $\mathbf{GL}_{\Lambda^* \mathbf{O}_S^n} \rightarrow \mathbf{Aut}_{\mathbf{End}_{\Lambda^* \mathbf{O}_S^n}}$ est un épimorphisme de faisceaux (Skolem-Noether dans le cas local [AusGol60, th. 3.6]), la proposition 2.3.4.6 donne :

Proposition 4.4.0.27. — *Le foncteur fibré qui envoie un objet (q, N, ϕ) sur $\mathbf{Iso}_{(q_{2n}^h, \Lambda^* \mathbf{O}_S^n, \phi_h), (q, N, \phi)}$ définit une équivalence de champs*

$$\mathcal{DeplCliff}_{2n} \simeq \text{Tors}(\Gamma_{q_{2n}^h})$$

(pour les topologies étales ou fppf).

Faire les $\mathbf{S}\Gamma$ torseurs, en prenant le noyau vers $\mathbf{S}\mathbf{O}$. Mais il faut justifier du fait que c'est bien ce noyau, alors qu'a priori, c'est défini comme l'intersection avec l'algèbre de Clifford paire.

En rang impair, nous obtenons directement les \mathbf{ST} -torseurs. Notons q_{2n+1}^h la forme $q_{2n}^h \perp \langle 1 \rangle$. On définit le champ $GrAzumaya$ dont les objets sont des \mathbf{O}_S -algèbres $\mathbb{Z}/2$ -graduées, de la forme $Z \otimes A$ où A est une \mathbf{O}_S -algèbre d’Azumaya, et Z est une algèbre graduée de degré 2, avec $Z_0 = \mathbf{O}_S$ comme \mathbf{O}_S -algèbre, Z_1 localement libre comme \mathbf{O}_S -module et la multiplication $Z_1 \otimes Z_1 \rightarrow Z_0 = \mathbf{O}_S$ étant un isomorphisme de \mathbf{O}_S -module. La graduation n’est fournie que par Z , et A est homogène de degré 0. Les morphismes sont les morphismes de \mathbf{O}_S -algèbre $\mathbb{Z}/2$ -graduée. Il n’est pas difficile de vérifier que c’est un champ (pour la topologie étale ou fppf), par la proposition 2.2.3.6 puis par descente des propriétés comme “localement libre”. Par le point 4 du théorème 4.2.0.12, on peut voir le foncteur C comme $Formes(q_{2n+1}^h) \rightarrow GrAzumaya$. De plus, on peut définir un foncteur fibré $(Vec_{2n})_{\simeq} \rightarrow GrAzumaya$ en envoyant un \mathbf{O}_S -module localement libre N sur l’algèbre $\mathbb{Z}/2$ -graduée donnée par $Z^{triv} \otimes \mathbf{End}_N$, où Z^{triv} est telle que $Z_1^{triv} = \mathbf{O}_S$ avec la multiplication usuelle $\mathbf{O}_S \otimes \mathbf{O}_S \rightarrow \mathbf{O}_S$; un isomorphisme de N s’envoie sur la conjugaison par cet isomorphisme sur \mathbf{End}_N . On considère alors le champ $DeplCliff_{2n+1}$ défini comme le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} DeplCliff_{2n+1} & \longrightarrow & (Vec_{2n})_{\simeq} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ Formes(q_{2n+1}^h) & \xrightarrow{C} & GrAzumaya. \end{array}$$

Explicitement, un objet de $(DeplCliff_{2n+1})_T$ est donc un triplet (q, N, ϕ) où q est une forme de $(q_{2n+1}^h)_T$, N est un \mathbf{O}_T -module localement libre de rang 2^n , et $\phi : Z^{triv} \otimes \mathbf{End}_N \xrightarrow{\sim} C_q$ est un isomorphisme de \mathbf{O}_T -algèbres graduées. Par la remarque 4.2.0.14, on obtient un isomorphisme de \mathbf{O}_S -algèbres $\phi_h : C_{q_{2n+1}^h} \simeq Z^{triv} \otimes \mathbf{End}_{\Lambda^* \mathbf{O}_S^n}$ qui fournit donc un objet $(q_{2n+1}^h, \Lambda^* \mathbf{O}_S^n, \phi_h)$ de $(DeplCliff_{2n+1})_S$, dont on vérifie immédiatement que les automorphismes sont $\mathbf{ST}_{q_{2n+1}^h}$. On obtient donc encore une fois par la proposition 2.3.4.6 :

Proposition 4.4.0.28. — *Le foncteur fibré qui envoie un objet (q, N, ϕ) sur $\mathbf{Iso}_{(q_{2n+1}^h, \Lambda^* \mathbf{O}_S^n, \phi_h), (q, N, \phi)}$ définit une équivalence de champs*

$$DeplCliff_{2n+1} \simeq Tors(\mathbf{ST}_{q_{2n+1}^h})$$

(pour les topologies étales ou fppf).

Démonstration. — La seule chose à vérifier est la condition de surjectivité de la proposition 2.3.4.6. Lorsque $N = \Lambda^* \mathbf{O}_S^n$ tout automorphisme de la \mathbf{O}_S -algèbre $\mathbb{Z}/2$ -graduée $Z^{triv} \otimes \mathbf{End}_N$ peut se décomposer (par son action sur le centre) en un automorphisme d’algèbre de \mathbf{End}_N et un automorphisme de \mathbf{O}_S -module $Z_1 = \mathbf{O}_S$ de carré trivial (car il doit être compatible à la multiplication $Z_1 \otimes Z_1 \rightarrow Z_0$), donc un élément de μ_2 . Or, Zariski localement,

tout automorphisme de \mathbf{End}_N est intérieur (Skolem-Noether, voir [AusGol60, th. 3.6]). De plus, si $\lambda \in \mu_2(T)$, l'automorphisme $e \mapsto \lambda e$ et l'identité sur le sous-espace sous-jacent au sous-module q_{2n}^h est bien dans $\mathbf{Aut}_{q_{2n+1}^h}$ et induit λ sur Z_1 , par la description du générateur de Z_1 fourni dans la preuve du théorème 4.2.0.12. Donc, tout automorphisme de $Z^{triv} \otimes \mathbf{End}_N$ provient bien localement de $\mathbf{Aut}_{\mathbb{A}\mathbf{O}_S^g} \times \mathbf{Aut}_{q_{2n+1}^h}$. \square

Remarquons que la preuve de la proposition précédente est un cas d'application de la proposition 2.3.4.6 où aucun des deux foncteurs définissant le produit fibré n'induit individuellement un épimorphisme de faisceaux sur les automorphismes, il faut utiliser la condition plus générale portant sur les deux simultanément.

Passons maintenant à la définition du groupe Spin, et à une description de ses toseurs. Pour cela nous aurons besoin de la norme spinorielle.

On considère l'involution standard σ_q du faisceau en algèbres de Clifford \mathbf{C}_q d'un module quadratique q , forme (étale ou fppf) de q_{2n}^h ou q_{2n+1}^h . Alors l'application $\Gamma_q \rightarrow \mathbf{GL}_{1, \mathbf{C}_q}$ définie sur les points par $x \mapsto \sigma(x)x$ arrive en fait dans $\mathbf{G}_m \subset \mathbf{GL}_{1, \mathbf{C}_q}$, et définit un morphisme de faisceaux en groupes. Toutes ces affirmations peuvent se vérifier localement, et sont prouvées dans [Knus91, Ch. IV, Lemme 6.1.1] (on vérifie en fait que l'image est dans le centre de \mathbf{C}_q ainsi que dans $\mathbf{C}_{0,q}$).

sn_defi

Définition 4.4.0.29. — Le morphisme $\mathrm{sn} : \Gamma_q \rightarrow \mathbf{G}_m$ défini ci-dessus est appelé *norme spinorielle*.

snsurj_rema

Remarque 4.4.0.30. — Pour les formes q_{2n}^h et q_{2n+1}^h , avec $n \geq 1$, la norme spinorielle est surjective sur les points (donc évidemment un épimorphisme de faisceaux Zariski, étale, fppf). En effet, un élément $m \in M(T) \subset \mathbf{C}_q(T)$ est dans $\Gamma_q(T)$ si et seulement si $q(m)$ est inversible, et auquel cas $\mathrm{sn}(m) = -q(m)$. Les formes q_{2n}^h et q_{2n+1}^h représentant trivialement tout élément de $\Gamma(T)^*$, on a le résultat. De plus, la restriction de sn à $\mathbf{S}\Gamma$ est également surjective : on utilise la classe de $m_1 \otimes m_2$ avec $q(m_1) = 1$ et $q(m_2)$ l'élément recherché.

Utilisons le foncteur fibré $\mathbf{End} : (\mathcal{V}ec_n)_{\simeq} \rightarrow \mathcal{A}zumaya_n$ pour construire le produit fibré $(\mathcal{V}ec_n)_{\simeq} \times_{\mathcal{A}zumaya_n} (\mathcal{V}ec_n)_{\simeq}$ du champ $(\mathcal{V}ec_n)_{\simeq}$ avec lui-même. On définit un foncteur fibré

$$(\mathcal{V}ec_n)_{\simeq} \times_{\mathcal{A}zumaya_n} (\mathcal{V}ec_n)_{\simeq} \longrightarrow (\mathcal{V}ec_n)_{\simeq} \times (\mathcal{V}ec_1)_{\simeq}$$

en envoyant un triplet $(F, G, \psi : \mathbf{End}_F \xrightarrow{\sim} \mathbf{End}_G)$ sur $(G, G^\vee \otimes_{\mathbf{End}_F} F)$, où \mathbf{End}_F agit à gauche sur G par ψ , et donc à droite sur G^\vee . Au niveau des morphismes, cela envoie un couple (a, b) tel que $\phi \circ \mathrm{int}_a = \mathrm{int}_b \circ \phi$, i.e. $\mathrm{int}_{\phi(a)} = \mathrm{int}_b$, i.e. $b^{-1} \circ \phi(a)$ central, sur $(b, (b^{-1})^\vee \otimes a)$, ce dernier étant bien défini car $b^{-1}\phi(a)$ est central. Dans l'autre sens, on définit également

un foncteur fibré en envoyant un objet (G, L) sur l'objet $(G \otimes L, G, \phi)$ où $\phi : \mathbf{End}_F \simeq \mathbf{End}_{F \otimes L}$ est l'isomorphisme canonique $f \mapsto f \otimes \text{id}$.

endendeq_lemm

Lemme 4.4.0.31. — *Ces deux foncteurs sont des équivalences de catégories inverses l'une de l'autre.*

Démonstration. — Laissant de côté la partie de l'objet qui ne bouge pas (le G), il suffit d'utiliser les isomorphismes canoniques de Morita $G^\vee \otimes_{\mathbf{End}_G} G \simeq \mathbf{O}_S$ et $G \otimes G^\vee \simeq \mathbf{End}_G$ qui peuvent d'ailleurs se vérifier localement lorsque $F = \mathbf{O}_S^n$. \square

GLGLGLGm_lemm

Lemme 4.4.0.32. — *Pour tout triplet $(F, G, \phi : \mathbf{End}_F \xrightarrow{\sim} G)$, l'équivalence de catégories précédente induit sur les groupes d'automorphismes un isomorphisme*

$$\mathbf{GL}_F \times_{\mathbf{PGL}_{\mathbf{End}_F}} \mathbf{GL}_G \xrightarrow{\sim} \mathbf{GL}_G \times \mathbf{G}_m.$$

Sur les points, il se décrit ainsi : il envoie un couple (a, b) tel que $\phi \circ \text{int}_a = \text{int}_b \circ \phi$, i.e. $\text{int}_{\phi(a)} = \text{int}_b$, i.e. $b^{-1} \circ \phi(a)$ central, sur le couple $(b, b^{-1} \circ \phi(a))$.

Démonstration. — Tout d'abord, le morphisme $\mathbf{GL}_F \rightarrow \mathbf{PGL}_{\mathbf{End}_F}$ est bien un épimorphisme de faisceaux par 3.2.0.40, donc $\mathbf{Aut}_{(F, G, \phi)} = \mathbf{GL}_F \times_{\mathbf{PGL}_{\mathbf{End}_F}} \mathbf{GL}_G$. Ensuite, il suffit de suivre la manière l'équivalence de catégories sur les morphismes. \square

Définissons un foncteur fibré

$$\mathcal{DeplCliff}_{2n+1} \longrightarrow \mathcal{Vec}_{2^{2n}} \times_{\mathcal{Azumaya}_{2n}} \mathcal{Vec}_{2^{2n}}$$

par

$$(q, N, \phi : \mathbf{C}_q \simeq \mathbf{Z} \otimes \mathbf{End}_N) \mapsto (N^{\otimes 2}, \mathbf{C}_{0,q}, \psi : \mathbf{End}_{N^{\otimes 2}} \simeq \mathbf{End}_{\mathbf{C}_{0,q}}),$$

où ψ est donné par la composition $\mathbf{End}_{N^{\otimes 2}} \simeq \mathbf{End}_N^{\otimes 2} \simeq \mathbf{C}_{0,q}^{\otimes 2} \simeq \mathbf{End}_{\mathbf{C}_{0,q}}$, le dernier isomorphisme étant induit par l'involution standard σ_q : il envoie $a \otimes b$ sur $x \mapsto a \cdot x \cdot \sigma_q(b)$. Considérons alors le foncteur fibré

$$\text{Sn} : \mathcal{DeplCliff}_{2n+1} \longrightarrow \mathcal{Vec}_1$$

obtenu comme

$$\mathcal{DeplCliff}_{2n+1} \longrightarrow (\mathcal{Vec}_{2n})_{\simeq} \times_{\mathcal{Azumaya}_{2n}} (\mathcal{Vec}_{2n})_{\simeq} \simeq (\mathcal{Vec}_n)_{\simeq} \times (\mathcal{Vec}_1)_{\simeq} \longrightarrow \mathcal{Vec}_1$$

i.e. le précédent, suivi de l'équivalence du lemme 4.4.0.31 et de la projection sur le facteur \mathcal{Vec}_1 . Explicitement, $\text{Sn}(q, N, \phi)$ est donc un fibré en droites L tel que $N^{\otimes 2} \simeq \mathbf{C}_{0,q} \otimes L$, et ce fibré est unique à isomorphisme près. L'objet trivial $(q_{2n+1}^h, \Lambda^* \mathbf{O}_S^n, \phi_h : \mathbf{C}_{q_{2n+1}^h} \simeq \mathbf{Z}^{triv} \otimes \mathbf{End}_{\Lambda^* \mathbf{O}_S^n})$ est donc envoyé sur le fibré trivial \mathbf{O}_S . Le foncteur fibré Sn induit alors un morphisme de faisceaux en groupes

$$\mathbf{S}\Gamma_{q_{2n+1}^h} = \mathbf{Aut}_{(q_{2n+1}^h, \Lambda^* \mathbf{O}_S^n, \phi_h)} \longrightarrow \mathbf{Aut}_{\mathbf{O}_S} = \mathbf{G}_m.$$

normeSpinId_prop

Proposition 4.4.0.33. — Ce morphisme est la norme spinorielle $\text{sn} : \mathbf{S}\Gamma_{q_{2n+1}^h} \rightarrow \mathbf{G}_m$ définie en 4.4.0.29.

Démonstration. — On part d'un point de $\mathbf{S}\Gamma_{q_{2n+1}^h}(\mathbf{T})$, qu'on peut décrire comme une paire (f, g) avec $f \in \mathbf{O}_q(\mathbf{T})$ et $g \in \mathbf{GL}_{\mathbf{A}^* \mathbf{O}_S^n}(\mathbf{T})$ tels que $C_0(f) = \phi_h \circ \text{int}_g \circ \phi_h^{-1} = \text{int}_{\phi_h^{-1}(g)}$. Sa norme spinorielle est par définition $\sigma_h(\phi_h^{-1}(g))\phi_h^{-1}(g)$ où σ_h est l'involution standard. Par le premier foncteur, on obtient la paire $(g^{\otimes 2}, C_0(f))$. Si $\psi : \mathbf{End}_{\mathbf{N}^{\otimes 2}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{End}_{C_0, q}$ est obtenu à partir de ϕ_h comme ci-dessus, alors pour obtenir l'élément de \mathbf{G}_m recherché, on doit par le lemme 4.4.0.32 calculer $C_0(f)^{-1} \circ \psi(g^{\otimes 2})$. Or $\psi(g^{\otimes 2}) = (x \mapsto \phi^{-1}(g) \cdot x \cdot \sigma_h(\phi^{-1}(g)))$. En composant par $C_0(f)^{-1} = \text{int}_{\phi^{-1}(g^{-1})}$, on obtient donc

$$x \mapsto \phi^{-1}(g^{-1}) \cdot \phi^{-1}(g) \cdot x \cdot \sigma_h(\phi^{-1}(g)) \cdot \phi^{-1}(g) = x \cdot \sigma_h(\phi^{-1}(g)) \cdot \phi^{-1}(g)$$

ce qui est bien la multiplication par la norme spinorielle. \square

PinSpin_defi

Définition 4.4.0.34. — Soit q une forme (étale ou fppf) de q_{2n}^h ou q_{2n+1}^h . Le groupe \mathbf{Pin}_q est le noyau de la norme spinorielle $\Gamma_q \rightarrow \mathbf{G}_m$ et le groupe \mathbf{Spin}_q est le noyau de la norme spinorielle $\mathbf{S}\Gamma_q \rightarrow \mathbf{G}_m$. Donc, $\mathbf{Spin}_q = \mathbf{Pin}_q \cap \mathbf{S}\Gamma_q$.

Les points de \mathbf{Spin}_q sont donc donnés, pour tout S-schéma \mathbf{T} , par

$$\mathbf{Spin}_q(\mathbf{T}) = \{\alpha \in \mathbf{S}\Gamma_q(\mathbf{T}) \text{ t.q. } \text{sn}(\alpha) = 1\}.$$

De plus \mathbf{Spin}_q est représentable par le lemme 2.4.0.17.

Torseurs sous le groupe Spin pair.

Les toseurs sous le groupe $\mathbf{S}\Gamma_{q_{2n+1}^h}$ étant compris, ainsi que la norme spinorielle, on obtient facilement une description des toseurs sous le groupe $\mathbf{Spin}_{q_{2n+1}^h}$. Considérons le champ $\mathcal{DeplCliffSn}_{2n+1}$ défini comme le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{DeplCliffSn}_{2n+1} & \longrightarrow & \mathcal{Final} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{DeplCliff}_{2n+1} & \xrightarrow{\text{Sn}} & \mathcal{Vec}_1 \end{array}$$

où le foncteur $\mathcal{Final} \rightarrow \mathcal{Vec}_1$ qui envoie l'unique objet de chaque fibre sur le fibré trivial \mathbf{O}_S . Explicitement, un objet de $(\mathcal{DeplCliffSn}_{2n+1})_{\mathbf{T}}$ est donc de la forme $(q, \mathbf{N}, \phi, \psi)$ où

- q est un $\mathbf{O}_{\mathbf{T}}$ -module quadratique, forme de q_{2n+1}^h ,
- \mathbf{N} est un $\mathbf{O}_{\mathbf{T}}$ -module localement libre de rang constant 2^n ,
- $\phi : C_q \xrightarrow{\sim} Z^{\text{triv}} \otimes \mathbf{End}_{\mathbf{N}}$ est un isomorphisme de \mathbf{O}_S -algèbres graduées
- $\psi : L \xrightarrow{\sim} \mathbf{O}_S$ est un isomorphisme de \mathbf{O}_S -modules, où $L = \text{Sn}(q, \mathbf{N}, \phi) = C_{0,q}^{\vee} \otimes \mathbf{End}_{\mathbf{N}^{\otimes 2}} \mathbf{N}^{\otimes 2}$ est un fibré en droites, qui satisfait à $\mathbf{N}^{\otimes 2} \simeq C_{0,q} \otimes L$.

Notons que les autres données étant fixées la donnée de ψ équivaut à la donnée d'un isomorphisme $N^{\otimes 2} \simeq \mathbf{C}_{0,q}$. **Ou encore à un isomorphisme $N \simeq N^\vee$, mais vérifier et détailler.** Le foncteur Sn induit sur la norme spinorielle sur les groupes d'automorphismes des objets triviaux par la proposition 4.4.0.33, et elle est de plus surjective pour ces objets par la remarque 4.4.0.30. **Détailler l'objet trivial, qu'on notera $(q_{2n+1}^h, \Lambda^* \mathbf{O}_S^n, \phi_h, \psi_h)$** Par la proposition 2.3.4.6, on obtient :

Proposition 4.4.0.35. — *Le foncteur fibré qui envoie un objet (q, N, ϕ, ψ) sur $\mathrm{Iso}_{(q_{2n+1}^h, \Lambda^* \mathbf{O}_S^n, \phi_h, \psi_h), (q, N, \phi, \psi)}$ définit une équivalence de champs*

$$\mathrm{DeplCliff} \mathrm{Sn}_{2n+1} \simeq \mathrm{Tors}(\mathbf{Spin}_{q_{2n+1}^h})$$

(pour les topologies étales ou fppf).

4.5. Suites exactes longues de cohomologie. — **Faire les différentes suites exactes courtes puis longues dont on a besoin.**

Notons que le foncteur $\mathrm{DeplCliff}_{2n+1} \rightarrow \mathrm{Formes}(q_{2n+1}^h)$ qui oublie tout sauf le module quadratique se factorise par un foncteur $\mathrm{DeplCliff}_{2n+1} \rightarrow \mathrm{QuadDetTriv}_{2n+1}$, en conservant l'isomorphisme entre la partie impaire Z_1 du centre de son algèbre de Clifford (canoniquement isomorphe à Δ_M par 4.2.0.13, point 1) et \mathbf{O}_S . En d'autres termes, le morphisme naturel $\mathbf{S}\Gamma_{q_{2n+1}^h} \rightarrow \mathbf{O}_{q_{2n+1}^h}$ se factorise par $\mathbf{S}\mathbf{O}_{q_{2n+1}^h}$, et donc par torsion (Proposition 2.3.4.9) on obtient de même une factorisation du morphisme $\mathbf{S}\Gamma_q \rightarrow \mathbf{O}_q$ par $\mathbf{S}\mathbf{O}_q$ pour tout q , forme fppf de q_{2n+1}^h .

secSpinSO_prop

Proposition 4.5.0.36. — *Pour toute forme q de q_{2n+1}^h , on a le diagramme commutatif de faisceaux fppf aux lignes et aux colonnes exactes*

$$(7) \quad \begin{array}{ccccccc} & & 1 & & 1 & & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & \mu_2 & \longrightarrow & \mathbf{Spin}_q & \longrightarrow & \mathbf{SO}_q \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & \mathbf{G}_m & \longrightarrow & \mathbf{S}\Gamma_q & \longrightarrow & \mathbf{SO}_q \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow (-)^2 & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & \mathbf{G}_m & \xlongequal{\quad} & \mathbf{G}_m & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 1 & & 1 & & \end{array}$$

où les deux morphismes horizontaux vers \mathbf{SO} sont ceux définis juste au-dessus. De plus, le diagramme pour une forme q est obtenu par torsion par la procédure de la proposition 2.3.4.9 à partir de celui pour $q = q_{2n+1}^h$.

Démonstration. — On montre d'abord le diagramme quand $q = q_{2n+1}^h$. La première colonne est exacte car tout élément de $\Gamma(S)^\times$ est localement un carré pour la topologie fppf. La deuxième colonne est exacte par la remarque 4.4.0.30. La deuxième ligne est exacte à gauche. En effet, tout élément de $\mathbf{S}\Gamma$ qui induit l'identité par conjugaison sur M est central dans \mathbf{C}_0 , et est donc un élément de \mathbf{G}_m par 4.2.0.13. Sa norme spinorielle est alors son carré, ce qui explique la commutativité du carré en bas à gauche, ainsi que l'exactitude à gauche de la première ligne. Il ne reste qu'à montrer que le morphisme $\mathbf{Spin} \rightarrow \mathbf{SO}$ est un épimorphisme, puisque cela implique bien entendu la même chose pour $\mathbf{S}\Gamma \rightarrow \mathbf{SO}$. Remarquons tout d'abord que localement, pour la topologie Zariski, la proposition 4.3.0.21 assure que tout élément f de $\mathbf{SO}_q(S)$ se décompose en produit de réflexions orthogonales $f = \tau_{v_1} \circ \cdots \circ \tau_{v_n}$ par rapport aux vecteurs v_1, \dots, v_m tels que les $q(v_i)$ sont tous inversibles. Puisque $\tau_v = \tau_{\lambda v}$ pour tout $\lambda \in \mathbf{G}_m(S)$, par extension fppf, on peut supposer que tous les v_i sont tels que $q(v_i) = -1$. Alors la norme spinorielle de la classe de l'élément $v_1 \otimes \cdots \otimes v_m$ est bien 1 et il s'envoie bien sur $(-\tau_{v_1} \circ \cdots \circ (-\tau_{v_m})) = (-1)^m f$. Soit m est pair, soit m est impair, et puisque $1 = \det(f) = (-1)^m$ par le Lemme 2.7.1.15, c'est donc que $1 = -1$ dans $\mathbf{O}_S(S)$. Dans les deux cas, $v_1 \otimes \cdots \otimes v_m$ s'envoie donc sur f .

Enfin, le cas d'un module quadratique général s'obtient par torsion du précédent, en appliquant la proposition 2.3.4.9 à chaque morphisme du diagramme. Notons que ce sont bien des morphismes entre groupes d'automorphismes, induits par des foncteur fibrés, cela a été montré pour chacun d'eux précédemment. \square

Ne pas oublier de mentionner quelque part pourquoi on fait fppf quand il faut, et mentionner que c'est pareil que étale pour les groupes lisses (voir 2.3.5.15).

5. Groupes semi-simples de type B_n

adjointBn_sec

5.1. Groupe déployé adjoint. — Avoir défini le radical quadratique dans la partie quadratique et y renvoyer ou bien le faire ici. Attention : sur un anneau, ni le radical polaire, ni le radical quadratique ne commutent à l'extension des scalaires, au sens que $\text{grad}(q) \otimes R'$ peut-être strictement contenu dans $\text{grad}(q_{R'})$. Il suffit de prendre l'exemple des formes $\langle 1 \rangle$ et $\langle 2 \rangle$ sur \mathbb{Z} puis sur les corps de car. 2 ou pas, pour avoir tous les cas possibles. Le radical polaire commute aux extensions plates de la base, car c'est le noyau

de $M \rightarrow M^\vee$ et donc en particulier, sur un corps de base, comme tout est plat, il y a commutation à l'extension des scalaires. Par contre, le radical quadratique ne commute même pas à ces extensions plate : sur un corps k de caractéristique 2, on peut prendre $R' = k[t]/t^2$ (qui est plate). Mais la forme quasi-linéaire de dimension 2 donnée par $0.x^2 + y^2$ vérifie $\text{grad} = \langle e_1 \rangle$ et pourtant $\text{grad}(q_{R'}) = \langle e_1 \rangle + t \langle e_2 \rangle$. On doit tout de même pouvoir calculer la dimension d'un truc sur un corps à partir de cela par la réduction ci-dessous, mais je ne vois plus la bonne raison, parce que les termes extrêmes ne sont pas représentables, à priori. Bien regarder dans Borel comment est vraiment définie la dimension et voir si ça coïncide avec la dimension schématique. Peut-être que la correspondance est faite dans Waterhouse. Sinon sauter et faire le cas régulier et semi-régulier, mais c'est dommage.

Lemme 5.1.0.37. — Soit (V, q) un module quadratique de dimension n sur un corps k . Alors \mathbf{O}_q est connexe et sa dimension est $n(n-1)/2 + r(r+1)/2$ où r est la dimension de $\text{grad}(q)$.

Démonstration. — Comme $\text{grad}(q)$ est préservé par tout élément de \mathbf{O}_q , on a une suite exacte de groupes algébriques sur k Les termes extrêmes sont seulement des foncteurs de points, non représentables, car en car. 2, le radical quadratique n'est pas localement libre.

$$0 \longrightarrow \mathbf{Hom}(V/\text{grad}(q), \text{grad}(q)) \longrightarrow \mathbf{O}_q \longrightarrow \mathbf{GL}_{\text{grad}(q)} \times \mathbf{O}_{\bar{q}} \longrightarrow 1$$

où le morphisme de gauche envoie un morphisme u sur $id + p \circ u$ avec p la projection $V \rightarrow V/\text{grad}(q)$ et où \bar{q} est le module quadratique induit par q sur $V/\text{grad}(q)$. Par descente plate, on peut supposer le corps algébriquement clos. Alors $\text{grad}(q)$ est de codimension 0 ou 1 dans $\text{rad}(q)$, sinon par passage au quotient on aurait une équation homogène à au moins deux variables sans solution non triviale. En sommant les dimensions des termes extrêmes dans la suite exacte ci-dessus, on se ramène donc au cas où $\text{rad}(q)$ est de dimension 0 ou 1. Hors la caractéristique 2, puisque $\text{rad}(q) = \text{grad}(q)$, on est en fait ramené au cas régulier, qui est bien connu. En caractéristique 2, voir [Bo91, § 23.6]. Dans les deux cas, on trouve que lorsque b_q est non dégénérée ou de radical de dimension 1, et que l'espace vectoriel sous-jacent est de dimension n , alors \mathbf{O}_q est connexe et $\dim \mathbf{O}_q = n(n-1)/2$. \square

Jusqu'à la fin de la partie 5, posons maintenant $h = q_{2n+1}^h$, c'est-à-dire que sur une base affine $\text{Spec}(R)$, le module sous-jacent à h est R^{2n+1} et la structure quadratique est donné par l'équation

$$h(x_0, x_1, \dots, x_{2n}) = x_0^2 + x_1x_2 + \dots + x_{2n-1}x_{2n}.$$

Calculons maintenant l'algèbre de Lie de \mathbf{O}_h comme une sous-algèbre de $\mathbf{Lie}_{\mathbf{GL}_{2n+1}}$, conformément au lemme 2.8.0.24. En considérant la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbf{Lie}_{\mathbf{O}_h}(\mathbf{S}) \longrightarrow \mathbf{O}_h(\mathbf{I}_{\mathbf{S}}) \xrightarrow{p} \mathbf{O}_h(\mathbf{S}) \longrightarrow 1$$

dont chacun des termes s'inclue dans le terme correspondant de la suite (4) de \mathbf{GL}_{2n+1} , on s'aperçoit que $\mathbf{Lie}_{\mathbf{O}_h}(\mathbf{S})$ est constituée des éléments de la forme $1 + ft$ avec $f \in \mathbf{M}_{2n+1}(\Gamma(\mathbf{S}))$ satisfaisant $(b_h)_T(f_T(v), v) = 0$ pour tout S-schéma T et tout $v \in \Gamma(T)^{2n+1}$. Ceci est équivalent à dire que le module bilinéaire $b_{h,f} : \mathbf{O}_{\mathbf{S}}^{2n+1} \times \mathbf{O}_{\mathbf{S}}^{2n+1} \rightarrow \mathbf{O}_{\mathbf{S}}$ donné par $b_{h,f}(x, y) = b_h(f(x), y)$ est alterné.

Pour calculer la dimension des fibres géométriques de cette algèbre de Lie, on peut localiser et donc supposer \mathbf{S} affine égal à $\text{Spec}(\mathbf{R})$ avec \mathbf{R} local. Notons Soit \mathbf{B} la matrice de $f_{\mathbf{R}}$ sur la base canonique de $\mathbf{O}_{\mathbf{S}}^{2n+1}$ (resp. \mathbf{C} celle de $b_{q_{\mathbf{R}}, f_{\mathbf{R}}}$).

On a alors, pour tout $j = 0, \dots, 2n$, les égalités $\mathbf{C}_{0j} = 2\mathbf{B}_{0j}$, $\mathbf{C}_{2i-1,j} = \mathbf{B}_{2i,j}$ et $\mathbf{C}_{2i,j} = \mathbf{B}_{2i-1,j}$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Il est clair que \mathbf{C} est alternée si et seulement si $\mathbf{C}_{ii} = 0$ et $\mathbf{C}_{ij} = -\mathbf{C}_{ji}$ pour tous $i \neq j$. On obtient finalement les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} 2\mathbf{B}_{00} = \mathbf{B}_{2i,2i-1} = \mathbf{B}_{2i-1,2i} = 0 & \text{pour tout } i = 1, \dots, n \\ 2\mathbf{B}_{0,2j} = -\mathbf{B}_{2j-1,0} & \text{pour tout } j = 1, \dots, n \\ 2\mathbf{B}_{0,2j-1} = -\mathbf{B}_{2j,0} & \text{pour tout } j = 1, \dots, n \\ \mathbf{B}_{2i-1,2j} = -\mathbf{B}_{2j-1,2i} & \text{pour tout } 1 \leq i < j \leq n \\ \mathbf{B}_{2i,2j} = -\mathbf{B}_{2j-1,2i-1} & \text{pour tout } i, j = 1, \dots, n \\ \mathbf{B}_{2i,2j-1} = -\mathbf{B}_{2j,2i-1} & \text{pour tout } 1 \leq i < j \leq n. \end{array} \right.$$

Si \mathbf{R} est un algèbre sur un corps k de caractéristique différente de 2, la dimension de $\mathbf{Lie}_{\mathbf{O}_h}(\mathbf{R})$ est ainsi $(2n+1)^2 - (2n^2 + 3n + 1) = (2n+1) \cdot n$. Elle est égale à la dimension du groupe algébrique $(\mathbf{O}_h)_k$ qui est par conséquent lisse par la proposition 2.9.0.28. Par contre, si \mathbf{R} est sur un corps k de caractéristique 2, on voit qu'on a seulement $2n^2 + 3n$ équations linéairement indépendantes. L'algèbre de Lie $\mathbf{Lie}_{\mathbf{O}_h}(\mathbf{R})$ est ainsi de dimension strictement supérieure à la dimension de $(\mathbf{O}_h)_k$. On peut donc en conclure que \mathbf{O}_h n'est pas lisse sur \mathbb{Z} puisque ses fibres géométriques ne sont pas toutes lisses.

Si par contre on se restreint au noyau du déterminant, la lissité s'améliore.

L'algèbre de Lie $\mathbf{Lie}_{\mathbf{SO}_h}$ est la sous-algèbre de $\mathbf{Lie}_{\mathbf{O}_h}$ des matrices de trace nulle. On obtient ainsi une description de l'algèbre de Lie de $\mathbf{SO}_h(\mathbf{R})$ pour tout anneau \mathbf{R} comme étant la sous-algèbre de $\mathbf{M}_{2n+1}(\mathbf{R})$ des matrices \mathbf{B}_{ij}

satisfaisant les relations

$$\left\{ \begin{array}{ll} B_{00} = B_{2i,2i-1} = B_{2i-1,2i} = 0 & \text{pour tout } i = 1, \dots, n \\ 2B_{0,2j} = -B_{2j-1,0} & \text{pour tout } j = 1, \dots, n \\ 2B_{0,2j-1} = -B_{2j,0} & \text{pour tout } j = 1, \dots, n \\ B_{2i-1,2j} = -B_{2j-1,2i} & \text{pour tout } 1 \leq i < j \leq n \\ B_{2i,2j} = -B_{2j-1,2i-1} & \text{pour tout } i, j = 1, \dots, n \\ B_{2i,2j-1} = -B_{2j,2i-1} & \text{pour tout } 1 \leq i < j \leq n. \end{array} \right.$$

On trouve alors une base $\mathbf{Lies}_{\mathbf{SO}_h}(\mathbb{R})$ donnée par les matrices

$$\left\{ \begin{array}{ll} e_{0,2i} - 2e_{2i-1,0} & \text{pour tout } i = 1, \dots, n \\ e_{0,2i-1} - 2e_{2i,0} & \text{pour tout } i = 1, \dots, n \\ e_{2i-1,2j-1} - e_{2j,2i} & \text{pour } i, j = 1, \dots, n \\ e_{2i-1,2j} - e_{2j-1,2i} & \text{pour } 1 \leq i < j \leq n \\ e_{2i,2j-1} - e_{2j,2i-1} & \text{pour } 1 \leq i < j \leq n. \end{array} \right.$$

où $e_{i,j}$ est toujours la matrice élémentaire avec un 1 en ligne i colonne j et zéro ailleurs

Oplus_ss_prop

Proposition 5.1.0.38. — *Le groupe \mathbf{SO}_h est semi-simple sur $\text{Spec } \mathbb{Z}$.*

Démonstration. — On vérifie tout d'abord que \mathbf{SO}_h est lisse. Au vu de la proposition 2.9.0.29, il suffit de vérifier que les fibres sont lisses, de dimension constante et connexes. Les deux premiers points sont clairs par la description de l'algèbre de Lie et le calcul de la dimension des fibres ci-dessus. Il reste donc à vérifier que les fibres sont connexes, ce qui suit de [Bo91, ??]. Pour conclure, on remarque que les fibres géométriques de \mathbf{SO}_h sont simples par par [KMRT98, Theorem 25.10]. \square

Il faut en déduire que pour une forme q qui est étale localement h , ce groupe est également semi-simple. Le faire dans la partie sur les formes tordues? Oui, car il faut identifier le tordu de \mathbf{SO} avec \mathbf{SO} de la forme tordue.

Pour trouver un tore maximal de \mathbf{SO}_h , on constate que le morphisme définit sur les points par $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto (1, \alpha_1, \alpha_1^{-1}, \alpha_2, \alpha_2^{-1}, \dots, \alpha_n, \alpha_n^{-1})$ de \mathbf{G}_m^n vers \mathbf{Diag}_{2n+1} a pour image un sous-tore fermé \mathbf{Diag}_{2n+1} isomorphe à \mathbf{G}_m^n et est en fait dans le sous-groupe fermé \mathbf{SO}_h de \mathbf{GL}_{2n+1} . On note \mathbf{DiagSO}_h ce sous-groupe de \mathbf{SO}_h . Par définition, \mathbf{DiagSO}_h est un tore déployé de rang n et il est maximal puisque il est maximal sur les fibres géométriques par [Bo91, § 23.6]. Considérons la base de caractères $\{t_i | i = 1, \dots, n\}$ de ce tore donnés par

$$t_i(1, \alpha_1, \alpha_1^{-1}, \alpha_2, \alpha_2^{-1}, \dots, \alpha_n, \alpha_n^{-1}) = \alpha_i$$

pour $i = 1, \dots, n$.

Les données d'une base de l'algèbre de Lie comme sous-algèbre de \mathbf{M}_{2n+1} et du tore maximal comme un sous-tore du tore maximal usuel de \mathbf{GL}_{2n+1} permettent de calculer les racines de \mathbf{SO}_h . Pour ce faire, rappelons tout d'abord

la proposition 3.1.0.36 qui montre que le tore des matrices diagonales dans \mathbf{GL}_{2n+1} agit sur l'algèbre de Lie via

$$Te_{ij}T^{-1} = t_i(T)t_j^{-1}(T)e_{ij}.$$

Les espaces propres de la représentation adjointe (et les racines) sont donc les suivants :

1. Le sous-module de l'algèbre de Lie du tore (les matrices diagonales dans l'algèbre de Lie) de poids trivial.
2. Le module libre de rang 1 de base $(e_{0,2i} - 2e_{2i-1,0})$ de poids t_i pour $1 \leq i \leq n$.
3. Le module libre de rang 1 de base $(e_{0,2i-1} - 2e_{2i,0})$ de poids $-t_i$ pour $1 \leq i \leq n$.
4. Le module libre de rang 1 de base $(e_{2i-1,2j-1} - e_{2j,2i})$ de poids $t_i - t_j$ pour tout $i, j = 1, \dots, n$ avec $i \neq j$.
5. Le module libre de rang 1 de base $(e_{2i-1,2j} - e_{2j-1,2i})$ de poids $t_i + t_j$ pour tout $1 \leq i < j \leq n$.
6. Le module libre de rang 1 de base $(e_{2i,2j-1} - e_{2j,2i-1})$ de poids $-t_i - t_j$ pour tout $1 \leq i < j \leq n$.

On explicite maintenant pour toute racine α non triviale l'unique morphisme \mathbf{DiagSO}_h -équivariant de groupes algébriques

$$\exp_\alpha : \mathbf{G}_a \longrightarrow \mathbf{SO}_h$$

induisant l'inclusion canonique de l'espace propre associé à α dans son algèbre de Lie ([SGA3, Exp. XXII, théorème 1.1]). On trouve :

1. Le morphisme \exp_{t_i} défini par $\lambda \mapsto \text{Id} + \lambda(e_{0,2i} - 2e_{2i-1,0} - \lambda e_{2i-1,2i})$. **Le dernier λ est-il correct ?**
2. Le morphisme \exp_{-t_i} défini par $\lambda \mapsto \text{Id} + \lambda(e_{0,2i-1} - 2e_{2i,0} - \lambda e_{2i,2i-1})$. **Le dernier λ est-il correct ?**
3. Le morphisme $\exp_{t_i-t_j}$ défini par $\lambda \mapsto \text{Id} + \lambda(e_{2i-1,2j-1} - e_{2j,2i})$.
4. Le morphisme $\exp_{t_i+t_j}$ défini par $\lambda \mapsto \text{Id} + \lambda(e_{2i-1,2j} - e_{2j-1,2i})$.
5. Le morphisme $\exp_{-t_i-t_j}$ défini par $\lambda \mapsto \text{Id} + \lambda(e_{2i,2j-1} - e_{2j,2i-1})$.

Étant donnés les racines et les morphismes exponentiels, on calcule les coracines. Associant à chaque racine dans la liste ci-dessus, on trouve dans l'ordre :

1. Les coracines $2t_i^\vee$ pour tout $1 \leq i \leq n$.
2. Les coracines $-2t_i^\vee$ pour tout $1 \leq i \leq n$.
3. Les coracines $t_i^\vee - t_j^\vee$ pour tout $i, j = 1, \dots, n$ avec $i \neq j$.

4. Les coracines $t_i^\vee + t_j^\vee$ pour tout $1 \leq i < j \leq n$.

racines_-item

5. Les coracines $-t_i^\vee - t_j^\vee$ pour tout $1 \leq i < j \leq n$.

Les accouplements sont $(X, Y) \mapsto -XY$ dans le cas 5. ci-dessus, et $(X, Y) \mapsto XY$ dans tout les autres cas. **Véifier.**

Nous pouvons ainsi énoncer la proposition suivante :

radicielle0plus_prop

Proposition 5.1.0.39. — La donnée radicielle de \mathbf{SO}_h relativement au tore maximal déployé \mathbf{DiagSO}_h est

- Le \mathbb{Z} -module libre $N \simeq \mathbb{Z}^n$ des caractères de \mathbf{DiagSO}_h (dont t_1, \dots, t_n forment une base) ;
- Le sous-ensemble fini de celui-ci formé des racines $\pm t_i$ pour $1 \leq i \leq n$ et $\pm t_i \pm t_j$ pour $1 \leq j < i \leq n$;
- Le \mathbb{Z} -module libre $N^\vee \simeq \mathbb{Z}^n$ des cocaractères (de base duale $t_1^\vee, \dots, t_n^\vee$) ;
- Le sous-ensemble fini de celui-ci formé des coracines $\pm 2t_i^\vee$ pour $i = 1 \leq i \leq n$ et $\pm t_i^\vee \pm t_j^\vee$ pour $1 \leq j < i \leq n$.

Finalement, on déduit le résultat suivant des calculs précédents :

Théorème 5.1.0.40. — Pour tout $n \geq 1$, le groupe \mathbf{SO}_h est déployé, semi-simple et adjoint de type B_n .

Démonstration. — Le groupe est semi-simple par la proposition 5.1.0.38 et adjoint puisque ses racines engendrent les caractères du tore. On voit que les racines $\{t_1 - t_2, t_2 - t_3, \dots, t_{n-1} - t_n, t_n\}$ forment un système de racines simples, et il est facile de vérifier que son diagramme de Dynkin associé est de type B_n . \square

bn_sconnexe

5.2. Groupe déployé simplement connexe. — Pour tout module quadratique (M, q) sur une base S , on considère le schéma en groupes $\mathbf{GL}_{1, \mathbf{C}_{0,q}}$ des éléments inversibles de son algèbre de Clifford (voir déf. 4.2.0.6). Ce groupe est bien représentable par 4.2.0.10 et 2.5.2.1. Son action par conjugaison sur \mathbf{C}_q fournit une représentation

$$\rho : \mathbf{GL}_{1, \mathbf{C}_q} \longrightarrow \mathbf{GL}_{\mathbf{C}_q}$$

Soit $\mathbf{Norm}_{\rho, M}$ le normalisateur du sous-module M facteur direct de \mathbf{C}_q , donc défini pour tout anneau R par

$$\mathbf{Norm}_{\rho, M}(R) = \{\alpha \in \mathbf{GL}(\mathbf{C}_{qR}) \mid \alpha(M_R) = M_R\}.$$

(il est bien représentable par la proposition 2.5.4.5).

SGamma

Définition 5.2.0.41. — On définit le groupe de Clifford $\mathbf{\Gamma}_{M,q}$ comme $\mathbf{Norm}_{\rho, M}$ ci-dessus. De même, on définit le groupe de Clifford spécial $\mathbf{S\Gamma}_{M,q}$ comme l'intersection de $\mathbf{\Gamma}_{M,q}$ et de $\mathbf{C}_{0,q}$.

Explicitement, sur un anneau R , on a

$$\Gamma(M, q)(R) = \{g \in C_{qR}^\times \mid g(M_R)g^{-1} = M_R\}.$$

et

$$\mathbf{S}\Gamma(M, q)(R) = \{g \in C_{0, qR}^\times \mid g(M_R)g^{-1} = M_R\}.$$

Rappelons qu'il existe une involution canonique σ sur $C(M_R, q_R)$ donnée par

$$\sigma(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_{m-1}} \otimes e_{i_m}) = e_{i_m} \otimes e_{i_{m-1}} \otimes \dots \otimes e_{i_2} \otimes e_{i_1}$$

et que la norme spinorielle

$$S_n : \Gamma(M, q) \longrightarrow \mathbf{G}_m$$

est définie par $S_n(a) = a \cdot \sigma(a)$.

Le groupe spinoriel $\mathbf{Spin}(M, q)$ est défini comme étant le noyau de la norme spinorielle. Il s'ensuit que pour tout anneau R on a

$$\mathbf{Spin}(M, q)(R) = \{g \in C_0(M_R, q_R)^\times \mid g(M_R)g^{-1} = M_R \text{ et } g \cdot \sigma(g) = 1\}.$$

Il suit immédiatement du lemme 2.4.0.17 que $\mathbf{Spin}(M, q)$ est représentable par une algèbre de type fini sur \mathbb{Z} . Pour tout point $s \in \mathbb{Z}$, le groupe $\mathbf{Spin}(M, q)_s$ est connexe de dimension $n \cdot (2n + 1)$ ([Bo91, § 23.3]). On calcule maintenant son algèbre de Lie. Pour ce faire, on considère la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{Spin}(M, q))(R) \longrightarrow \mathbf{Spin}(M, q)(R[\epsilon]) \xrightarrow{p} \mathbf{Spin}(M, q)(R) \longrightarrow 1$$

pour tout anneau R . Un élément de la forme $1 + \epsilon a$ avec $a \in C_0(M_R, q_R)$ est dans $\mathbf{Spin}(M, q)(R[\epsilon])$ si et seulement si $am - ma \in M$ pour tout $m \in M$ et $a + \sigma(a) = 0$. La première condition donne $a = b + \sum_{0 \leq i < j \leq 2n} a_{ij} e_i \otimes e_j$ pour des éléments $b, a_{ij} \in R$, et la seconde condition donne $2b + \sum_{i=1}^n a_{2i-1, 2i} = 0$. Une base de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}(\mathbf{Spin}(M, q))(R)$ est ainsi donnée par les éléments suivants :

1. $1 - 2e_{2n-1} \otimes e_{2n}$
2. $e_{2i-1} \otimes e_{2i} - e_{2n-1} \otimes e_{2n}$ pour tout $1 \leq i \leq n - 1$.
3. $e_i \otimes e_j$ pour tout $0 \leq i < j \leq 2n$ avec $(i, j) \neq (2r-1, 2r)$ pour $r = 1, \dots, n$.

Cela montre que l'algèbre de Lie est le groupe vectoriel associé à un module libre de rang $n(2n + 1)$. On en déduit :

Spin_ss_prop

Proposition 5.2.0.42. — *Le groupe $\mathbf{Spin}(M, q)$ est semi-simple sur $\text{spec } \mathbb{Z}$.*

Démonstration. — On sait que les fibres sont connexes, de dimension constante et semi-simples. Il suffit donc de montrer qu'elles sont lisses pour terminer. Pour ce faire, on utilise les propositions 2.9.0.28 et 2.9.0.29 pour conclure. \square

Pour déterminer un tore maximal de $\mathbf{Spin}(M, q)$, on considère tout d'abord le morphisme de groupes

$$\chi : \Gamma(M, q) \longrightarrow \mathbf{O}^+(M, q)$$

défini pour tout anneau R et pour tout $\alpha \in \Gamma(M, q)(R)$ par $\chi(\alpha) = \text{Int}(\alpha)|_{M_R}$. Il est clair que α est dans le noyau de χ si et seulement s'il commute avec tout élément de M_R . Il s'ensuit qu'on a une suite exacte de groupes

$$1 \longrightarrow \mathbf{G}_m \longrightarrow \Gamma(M, q) \xrightarrow{\chi} \mathbf{O}^+(M, q).$$

Lemme 5.2.0.43. — *La suite ci-dessus est aussi exacte à droite.*

Démonstration. — [Faire la preuve](#) □

Cette suite nous permet facilement de trouver un tore maximal de $\Gamma(M, q)$. En effet, soit $\mathbf{Diag}\Gamma^+(M, q)$ la préimage de $\mathbf{Diag}\mathbf{O}^+(M, q)$ sous le morphisme χ . Une extension de tores étant un tore, on voit que $\mathbf{Diag}\Gamma^+(M, q)$ est un tore, qui est maximal puisque $\mathbf{Diag}\mathbf{O}^+(M, q)$ l'est. On peut expliciter les caractères de $\mathbf{Diag}\Gamma^+(M, q)$, mais on ne se servira que des cocaractères qui décrivent explicitement le tore. On trouve les cocaractères suivants :

$$s_0^\vee : \mathbf{G}_m \longrightarrow \mathbf{Diag}\Gamma^+(M, q)$$

défini pour tout anneau R et tout $\alpha_0 \in R^\times$ par $s_0^\vee(\alpha_0) = \alpha_0$,

$$s_1^\vee : \mathbf{G}_m \longrightarrow \mathbf{Diag}\Gamma^+(M, q)$$

défini par $s_1^\vee(\alpha_1) = \alpha_1 e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1$, ainsi que pour tout $i = 2, \dots, n$ les morphismes

$$t_i^\vee : \mathbf{G}_m \longrightarrow \mathbf{Spin}(M, q)$$

donnés par

$$t_i^\vee(\alpha_i) = \alpha_i e_1 \otimes e_2 \otimes e_{2i-1} \otimes e_{2i} + e_1 \otimes e_2 \otimes e_{2i} \otimes e_{2i-1} + e_2 \otimes e_1 \otimes e_{2i-1} \otimes e_{2i} + \alpha_i^{-1} e_2 \otimes e_1 \otimes e_{2i} \otimes e_{2i-1}.$$

Considérons maintenant la suite exacte de groupes

$$1 \longrightarrow \mathbf{Spin}(M, q) \longrightarrow \Gamma(M, q) \xrightarrow{S_n} \mathbf{G}_m \longrightarrow 1$$

définissant $\mathbf{Spin}(M, q)$. Le noyau de la restriction $S_n : \mathbf{Diag}\Gamma^+(M, q) \rightarrow \mathbf{G}_m$ de la norme spinorielle au tore maximal de $\Gamma(M, q)$ donne immédiatement un tore maximal de $\mathbf{Spin}(M, q)$. On le note $\mathbf{DiagSpin}(M, q)$. On a $S_n(s_0^\vee(\alpha_0)) = \alpha_0^2$, $S_n(s_1^\vee(\alpha_1)) = \alpha_1$ et $S_n(t_i^\vee(\alpha_i)) = 1$ pour tout $i = 2, \dots, n$. Il s'ensuit que le cocaractère $t_1^\vee = 2s_1^\vee - s_0^\vee$ (donné par $t_1^\vee(\alpha_1) = \alpha_1 e_1 \otimes e_2 + \alpha_1^{-1} e_2 \otimes e_1$) et les cocaractères t_i^\vee ($i = 2, \dots, n$) déterminent $\mathbf{DiagSpin}(M, q)$.

Les caractères de ce tore sont donnés par $t_i(t_j^\vee(\alpha_j)) = \delta_{ij} \alpha_j$ pour tout $i, j = 1, \dots, n$.

On calcule maintenant les racines de $\mathbf{Spin}(M, q)$ par rapport au tore maximal $\mathbf{DiagSpin}(M, q)$ et les espaces propres dans la représentation adjointe. On trouve pour tout anneau R :

1. L'algèbre de Lie du tore engendré par $R \cdot (1 - 2e_{2n-1} \otimes e_{2n})$ et par les $R \cdot (e_{2i-1} \otimes e_{2i} - e_{2n-1} \otimes e_{2n})$ pour tout $i = 2, \dots, n$.
2. Le sous-module $R \cdot (e_0 \otimes e_1)$ de poids $2t_1 + t_2 + \dots + t_n$.

3. Le sous-module $R \cdot (e_0 \otimes e_2)$ de poids $-2t_1 - t_2 - \dots - t_n$.
4. Le sous-module $R \cdot (e_0 \otimes e_{2i-1})$ de poids t_i pour tout $i = 2, \dots, n$.
5. Le sous-module $R \cdot (e_0 \otimes e_{2i})$ de poids $-t_i$ pour tout $i = 2, \dots, n$.
6. Le sous-module $R \cdot (e_1 \otimes e_{2i-1})$ de poids $2t_1 + 2t_i + \sum_{j=2, j \neq i}^n t_j$ pour tout $i = 2, \dots, n$.
7. Le sous-module $R \cdot (e_2 \otimes e_{2i})$ de poids $-2t_1 - 2t_i - (\sum_{j=2, j \neq i}^n t_j)$ pour tout $i = 2, \dots, n$.
8. Le sous-module $R \cdot (e_{2i-1} \otimes e_{2j-1})$ de poids $t_i + t_j$ pour tout $2 \leq i < j \leq n$.
9. Le sous-module $R \cdot (e_{2i} \otimes e_{2j})$ de poids $-t_i - t_j$ pour tout $2 \leq i < j \leq n$.
10. Le sous-module $R \cdot (e_1 \otimes e_{2i})$ de poids $2t_1 + \sum_{j=2, j \neq i}^n t_j$ pour tout $i = 2, \dots, n$.
11. Le sous-module $R \cdot (e_2 \otimes e_{2i-1})$ de poids $-2t_1 - (\sum_{j=2, j \neq i}^n t_j)$ pour tout $i = 2, \dots, n$.
12. Le sous-module $R \cdot (e_{2i-1} \otimes e_{2j})$ de poids $t_i - t_j$ pour tout $2 \leq i < j \leq n$.
13. Le sous-module $R \cdot (e_{2i} \otimes e_{2j-1})$ de poids $t_j - t_i$ pour tout $2 \leq i < j \leq n$.

Les morphismes exponentiels sont donnés pour tout les espaces propres par $\lambda \mapsto 1 + \lambda(e_i \otimes e_j)$ avec $i < j$. Etant donnés les racines et les morphismes exponentiels, il est facile de calculer les coracines. Associant à chaque racine dans la liste ci-dessus, on trouve dans l'ordre :

2. La coracine t_1^\vee .
3. La coracine $-t_1^\vee$.
4. Les coracines $2t_i^\vee - t_1^\vee$ pour tout $i = 2, \dots, n$.
5. Les coracines $t_1^\vee - 2t_i^\vee$ pour tout $i = 2, \dots, n$.
6. Les coracines t_i^\vee pour tout $i = 2, \dots, n$.
7. Les coracines $-t_i^\vee$ pour tout $i = 2, \dots, n$.
8. Les coracines $t_i^\vee + t_j^\vee - t_1^\vee$ pour tout $2 \leq i < j \leq n$.
9. Les coracines $t_1^\vee - t_i^\vee - t_j^\vee$ pour tout $2 \leq i < j \leq n$.
10. Les coracines $t_1^\vee - t_i^\vee$ pour tout $i = 2, \dots, n$.
11. Les coracines $t_i^\vee - t_1^\vee$ pour tout $i = 2, \dots, n$.
12. Les coracines $t_i^\vee - t_j^\vee$ pour tout $2 \leq i < j \leq n$.
13. Les coracines $t_i^\vee - t_j^\vee$ pour tout $2 \leq i < j \leq n$.

Les accouplements sont $(X, Y) \mapsto XY$ dans les cas 2. à 9. et $(X, Y) \mapsto -XY$ dans les cas 10. à 13. Les longues listes données ci-dessus permettent de trouver la donnée radicielle de **Spin**(M, q).

radicielleSpin_prop

Proposition 5.2.0.44. — La donnée radicielle de **Spin**(M, q) par rapport au tore déployé **DiagSpin**(M, q) est

- Le \mathbb{Z} -module libre $N \simeq \mathbb{Z}^n$ des caractères de **DiagSpin**(M, q) (dont t_1, \dots, t_n forment une base);
- Le sous-ensemble fini de celui-ci formé des racines $\pm t_i$ pour $2 \leq i \leq n$, $\pm t_i \pm t_j$ pour $2 \leq j < i \leq n$, $\pm(2t_1 + t_2 + \dots + t_n)$, $\pm(2t_1 + t_2 + \dots + t_{i-1} +$

- $2t_i + t_{i+1} + \dots + t_n$ pour $i = 2, \dots, n$ et $\pm(2t_1 + t_2 + \dots + t_{i-1} + t_{i+1} + \dots + t_n)$ pour $i = 2, \dots, n$;
- Le \mathbb{Z} -module libre $N^\vee \simeq \mathbb{Z}^n$ des cocaractères (de base duale $t_1^\vee, \dots, t_n^\vee$) ;
- Le sous-ensemble fini de celui-ci formé des coracines $\pm t_i^\vee$ pour $i = 1, \dots, n$, $\pm(2t_i^\vee - t_1^\vee)$ pour $i = 2, \dots, n$, $\pm(t_i^\vee + t_j^\vee - t_1^\vee)$ pour $2 \leq i < j \leq n$ et $\pm(t_i^\vee - t_j^\vee)$ pour $1 \leq i < j \leq n$.

Au vu des calculs obtenus, nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Théorème 5.2.0.45. — *Le groupe $\mathbf{Spin}(M, q)$ est déployé, semi-simple et simplement connexe de type B_n .*

Démonstration. — Il reste à voir qu'il est simplement connexe de type B_n . Le premier point est clair puisque les coracines engendrent les cocaractères. L'ensemble de racines simples $\{2t_1 + \sum_{i=3}^n t_i, t_2 - t_3, t_3 - t_4, \dots, t_{n-1} - t_n, t_n\}$ montre que le diagramme de Dynkin associé est de type B_n . \square

On cherche maintenant le centre de $\mathbf{Spin}(M, q)$. Pour ce faire, on se rappelle qu'on dispose d'un morphisme de groupes $\chi : \mathbf{\Gamma}(M, q) \rightarrow \mathbf{O}^+(M, q)$. La restriction de χ à $\mathbf{Spin}(M, q)$ induit un morphisme

$$\chi : \mathbf{Spin}(M, q) \longrightarrow \mathbf{O}^+(M, q)$$

et un morphisme sur les tores déployés

$$\chi : \mathbf{DiagSpin}(M, q) \longrightarrow \mathbf{DiagO}^+(M, q)$$

dont le noyau est précisément le centre de $\mathbf{Spin}(M, q)$. Utilisant les descriptions explicites ci-dessus, on trouve $\chi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1^2, \alpha_2 \alpha_1^2, \dots, \alpha_n \alpha_1^2)$.

Proposition 5.2.0.46. — *Le morphisme de groupes algébriques*

$$\zeta : \mu_2 \longrightarrow \mathbf{Z}(\mathbf{Spin}(M, q))$$

défini pour tout anneau R et tout $\alpha \in \mu_2(R)$ par $\zeta(\alpha) = \alpha$ est un isomorphisme.

5.3. Automorphismes. — Puisque le diagramme de Dynkin n'a pas d'automorphisme non trivial, tout automorphisme est intérieur. En d'autres termes, $\mathbf{Aut}_{\mathbf{Spin}_h}^{\text{gr}} = \mathbf{Aut}_{\mathbf{SO}_h}^{\text{gr}} = \mathbf{SO}_h$.

5.4. Groupes tordus. —

Théorème 5.4.0.47. — *À isomorphisme près, les S -schémas en groupes réductifs de donnée radicielle déployée identique à celle de $\mathbf{SO}_{q_{2n+1}^h}$ ($n \geq 1$), c'est-à-dire de type déployé semi-simple adjoint B_n , sont les groupes \mathbf{SO}_q où q est un \mathbf{O}_S -module quadratique localement isomorphe à q_{2n+1}^h pour la topologie étale et de module demi-déterminant trivial de parité de n (c'est-à-dire isomorphe à celui de la forme hyperbolique). Toutes les formes sont intérieures et même fortement intérieures puisque le groupe est adjoint.*

Démonstration. — Nous aurons besoin du résultat suivant :

dettrivSO_lemm

Lemme 5.4.0.48. — *Par l'équivalence de la proposition 4.1.0.4 entre $\mathbf{O}_{q_{2n+1}^h}$ -torseurs et formes étales de q_{2n+1}^h , les toreseurs provenant de $\mathbf{SO}_{q_{2n+1}^h}$ correspondent aux modules quadratiques de module demi-déterminant trivial de parité de n .*

Démonstration. — C'est une quasi-tautologie : L'inclusion de $\mathbf{SO}_{q_{2n+1}^h}$ dans $\mathbf{O}_{q_{2n+1}^h}$ est induite par le foncteur fibré $\text{QuadDetTriv}_{q_{2n+1}^h} \rightarrow \text{Formes}(q_{2n+1}^h)$. Un objet (q, ϕ) , où ϕ trivialise le demi-déterminant de q , s'envoie sur q qui est donc de demi-déterminant trivial. Réciproquement, si q est de demi-déterminant trivial, c'est qu'il existe une trivialisation ϕ , et donc q provient de (q, ϕ) . \square

Le théorème 5.4.0.47 découle alors de la proposition 4.5.0.36. \square

Remarque 5.4.0.49. — Pour une caractérisation de telles formes étales voir rajouter. Ce sont normalement les modules de rang constant, semi-régulier et de demi-déterminant (fait à la main) trivial (i.e. égal à l'hyperbolique). Etant donné qu'on ne change pas le groupe en multipliant la forme par un scalaire ou un fibré en droites de carré trivial, on obtient peut-être tout les groupes en considérant les formes réellement de la forme $1 \perp q$ ou q est régulière, mais je ne suis pas sûr.

quelconque_rema

Remarque 5.4.0.50. — On n'obtiendrait pas plus de groupes, à isomorphisme près, en tordant $\mathbf{SO}_{q_{2n+1}^h}$ par tout les toreseurs sous $\mathbf{O}_{q_{2n+1}^h}$, plutôt que ceux provenant de $\mathbf{SO}_{q_{2n+1}^h}$. En effet, ces groupes seraient les \mathbf{SO}_q avec q forme étale quelconque de q_{2n+1}^h . Or si (q, M) n'a pas un module demi-déterminant trivial, on a tout de même l'isomorphisme $\frac{1}{2}d \cdot \Delta_M^{\otimes 2} \simeq \mathbf{O}_S$, par construction du module demi-déterminant. Du coup, si on pose $M' = M \otimes \Delta_M$ et $q' : M \otimes \Delta_M \rightarrow \mathbf{O}_S$ en envoyant $m \otimes l$ sur $q(m) \frac{1}{2}d_q(l)$, on obtient un nouveau module quadratique (q', M') . De plus, $\Delta_{M'} \simeq \Delta_M \otimes \Delta_M^{\otimes 2n+1}$, donc $\Delta_{M'} \simeq \mathbf{O}_S$ par $\frac{1}{2}d_q^{n+1}$, ce qui trivialise son module demi-déterminant. Par ailleurs, $\mathbf{O}_{q'} \simeq \mathbf{O}_q$, en envoyant f sur $f \otimes \det(f)$. Cela induit un isomorphisme $\mathbf{SO}_{q'} \simeq \mathbf{SO}_q$.

Afin de pouvoir énoncer le théorème sur les formes du groupe simplement connexe, nous devons introduire un invariant supplémentaire. En fait, c'est maintenant plus ou moins déjà fait avant dans la partie quadratique, alors modifier ce qui suit, et faire référence.

Lemme 5.4.0.51. — *Soient P et Q deux \mathbf{O}_S -modules localement libres de rang constant n . Alors si les \mathbf{O}_S -algèbres d'Azumaya \mathbf{End}_P et \mathbf{End}_Q sont isomorphes, alors $L \otimes_{\mathbf{O}_S} P \simeq Q$ pour un fibré en droites L (\mathbf{O}_S -module localement*

libre de rang 1) et par conséquent les classes de leurs déterminants Δ_P et Δ_Q sont égales dans $\text{Pic}(S)/n$.

Démonstration. — A travers l'isomorphisme de \mathbf{O}_S -algèbres, $\mathbf{End}_P \simeq \mathbf{End}_Q$, on fait de Q un \mathbf{End}_P -module. On prend alors $L = \mathbf{Hom}_{\mathbf{End}_P\text{-alg}}(P, Q)$ et on vérifie localement, quand P et Q sont \mathbf{O}_S^n , que l'évaluation $\mathbf{Hom}_{\mathbf{End}_P\text{-alg}}(P, Q) \otimes_{\mathbf{O}_S} P \rightarrow Q$ est bien un isomorphisme. La conséquence sur les déterminants est alors immédiate, puisqu'on a un isomorphisme $L^{\otimes n} \otimes \Delta_P \simeq \Delta_Q$. \square

Rajouter H2 dans les suites exactes longues en cohomologie.

Supposons maintenant qu'un \mathbf{O}_S -module quadratique (M, q) de rang impair a son algèbre de Clifford paire a-t-on introduit l'algèbre de Clifford paire? triviale dans le groupe de Brauer. Alors cette algèbre de Clifford est de la forme \mathbf{End}_P pour un certain \mathbf{O}_S -module localement libre P . Attention, à priori, c'est seulement stablement. Voir Brauer 1 pe 3. Mais peut-être que c'est en fait vrai strictement pour le neutre. A un tel module quadratique, on peut donc associer la classe de Δ_P dans $\text{Pic}(S)/2$, et cela ne dépend pas du choix de P par le lemme précédent.

Lemme 5.4.0.52. — *coincidence entre cette description concrète et une description cohomologique.*

Introduire ici l'invariant plus fin sur les formes dont l'algèbre de Clifford est triviale? Il faut bien vérifier qu'un truc nul dans le groupe de Brauer est bien de la forme $\text{End}(P)$ pour que tout marche : c'est le 2 de la proposition 1.4 dans Brauer I.

Théorème 5.4.0.53. — *À isomorphisme près, les S -schémas en groupes réductifs de donnée radicielle déployée identique à celle de $\mathbf{Spin}_{q_{2n+1}^h}$ ($n \geq 1$), c'est-à-dire de type déployé semi-simple simplement connexe B_n , sont les groupes \mathbf{Spin}_q où q est un \mathbf{O}_S -module quadratique localement isomorphe à q_{2n+1}^h pour la topologie étale. Toutes les formes sont intérieures, et les formes fortement intérieures sont les groupes \mathbf{Spin}_q avec q d'algèbre de Clifford triviale dans le groupe de Brauer, et dont l'invariant Rajouter est trivial. Ne parler que du groupe de Brauer usuel, il s'injecte dans le cohomologique de toutes manières, alors pour les qui ont une classe triviale, ça ne change rien.*

Remarque 5.4.0.54. — De même que dans la remarque 5.4.0.50, on n'obtiendrait pas plus de groupes en considérant des modules quadratiques quelconques, formes étales de q_{2n+1}^h , car en définissant q' de la même manière, on aurait $\mathbf{C}_{0,q'} \simeq \mathbf{C}_{0,q}$ et $\mathbf{Spin}_{q'} \simeq \mathbf{Spin}_q$.

Remarque 5.4.0.55. — Il n'y a pas d'autre groupe semi-simple de type déployé semi-simple B_n que ceux mentionnés dans les deux théorèmes de cette

section, car il n'y a pas d'autre groupe déployé entre **Spin** et **SO**, le centre du premier étant μ_2 , qui est aussi petit que possible sans être trivial.

6. Groupes semi-simples de type C_n

6.1. Groupe déployé adjoint. — Considérons la forme bilinéaire alternée b_n sur \mathbb{Z}^{2n} donnée par la matrice

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ -\text{Id} & 0 \end{pmatrix}.$$

On définit une involution σ sur M_{2n} par $\sigma(B) = H^{-1}B^tH$ pour tout anneau R et tout $B \in M_{2n}(R)$, et on considère la représentation adjointe

$$\rho : \mathbf{GL}_{M_{2n}(\mathbb{Z})} \longrightarrow \mathbf{GL}_{\text{End}_{\mathbb{Z}}(M_{2n}(\mathbb{Z}))}$$

donnée par $\rho(a)(b) = aba^{-1}$ pour tout anneau R , tout $a \in \mathbf{GL}(M_{2n}(R))$ et tout $b \in \mathbf{GL}(\text{End}_R(M_{2n}(R)))$. On considère la préimage sous ρ de $\mathbf{Stab}(\sigma)$, qui est un sous-groupe fermé représentable de $\mathbf{GL}_{M_{2n}(\mathbb{Z})}$ par les lemmes 2.4.0.17 et ???. Considérons encore le sous-groupe $\mathbf{Aut}_{M_{2n}}$ de $\mathbf{GL}_{M_{2n}(\mathbb{Z})}$ défini par

$$\mathbf{Aut}_{M_{2n}}(R) := \text{Aut}_{R\text{-alg}}(M_{2n}(R)).$$

Ce sous-groupe est fermé et représentable par la proposition 2.5.4.1. Finalement, on définit le *groupe symplectique projectif* $\mathbf{PGSp}(b_n)$ comme étant l'intersection des sous-groupes $\rho^{-1}\mathbf{Stab}(\sigma)$ et $\mathbf{Aut}_{M_{2n}}$. Il suit à nouveau du lemme 2.4.0.17 que $\mathbf{PGSp}(b_n)$ est représentable par une algèbre de type fini sur \mathbb{Z} . Explicitement,

$$\mathbf{PGSp}(b_n)(R) := \{\alpha \in \text{Aut}_{R\text{-alg}}(M_{2n}(R)) \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}$$

pour tout anneau R . Pour tout point $s \in \text{spec } \mathbb{Z}$, le groupe $\mathbf{PGSp}(b_n)_s$ est connexe de dimension $n(2n+1)$ par [KMRT98, VI, § 23.4].

Utilisant la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathfrak{L}(\mathbf{PGSp}(b_n))(R) \longrightarrow \mathbf{PGSp}(b_n)(R[\epsilon]) \xrightarrow{p} \mathbf{PGSp}(b_n)(R) \longrightarrow 1$$

on voit facilement que l'algèbre de Lie de $\mathbf{PGSp}(b_n)$ est donnée pour tout anneau R par le R -module libre

$$\mathfrak{L}(\mathbf{PGSp}(b_n))(R) := \{\alpha \in M_{2n}(R) \mid \alpha + \sigma(\alpha) \in R \cdot \text{Id}\} / R \cdot \text{Id}.$$

Ecrivant $M = (M_{ij})$ pour $1 \leq i, j \leq 2$ avec $M_{ij} \in M_n(R)$, on obtient les égalités

$$\begin{cases} M_{22} = \lambda \text{Id} - M_{11}^t \\ M_{12} = M_{12}^t \\ M_{21} = M_{21}^t. \end{cases}$$

Ceci donne une base de l'algèbre de Lie de la forme

$$\left\{ \begin{array}{ll} E_{ii} & \text{pour tout } i = 1 \dots, n, \\ E_{ij} - E_{j+n, i+n} & \text{pour tout } i, j = 1, \dots, n \text{ avec } i \neq j, \\ E_{i, n+j} + E_{j, n+i} & \text{pour tout } 1 \leq i < j \leq n, \\ E_{n+i, j} + E_{n+j, i} & \text{pour tout } 1 \leq i < j \leq n, \\ E_{i, n+i} & \text{pour tout } 1 \leq i \leq n, \\ E_{n+i, i} & \text{pour tout } 1 \leq i \leq n. \end{array} \right.$$

et celle-ci est bien de dimension $n(2n+1)$. En conséquence :

PGSp_ss_prop

Proposition 6.1.0.56. — Pour tout $n \geq 1$, le groupe $\mathbf{PGSp}(b_n)$ est semi-simple sur $\text{spec } \mathbb{Z}$.

Démonstration. — La lissité de $\mathbf{PGSp}(b_n)$ découle immédiatement des propositions 2.9.0.28 et 2.9.0.29. Le groupe est semi-simple sur les fibres géométriques par [KMRT98, VI, théorème 25.11]. Il est par conséquent semi-simple. \square

Pour trouver un tore maximal de $\mathbf{PGSp}(b_n)$, on considère le tore des matrices diagonales dans $\mathbf{GL}_{M_{2n}(\mathbb{Z})}$ et on calcule son intersection avec $\mathbf{PGSp}(b_n)$. Soit donc $N \in \mathbf{GL}(M_{2n}(\mathbb{R}))$ une matrice diagonale. On suppose que N est donnée par $N(E_{ij}) = \alpha_{ij} E_{ij}$ pour tout $1 \leq i, j \leq 2n$. Exprimant les conditions pour que cette matrice soit dans $\mathbf{PGSp}(b_n)(\mathbb{R})$, on voit que $\alpha_{ij} = \alpha_{1i}^{-1} \cdot \alpha_{1j}$ pour tout $1 \leq i, j \leq 2n$ et que $\alpha_{1, i+n} = \alpha_{1, n+1} \cdot \alpha_{1, i}^{-1}$. Il s'ensuit que l'automorphisme N est uniquement déterminé par les $\alpha_{1, i}$ avec $i = 2, \dots, n+1$. On obtient ainsi un homomorphisme injectif de groupes $(\mathbb{R}^\times)^n \rightarrow \mathbf{PGSp}(b_n)(\mathbb{R})$ en associant à $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ l'automorphisme de $M_{2n}(\mathbb{Z})$ défini par $\alpha_{1j} = \lambda_{j-1}$ pour tout $j = 2, \dots, n+1$ et les relations ci-dessus. On obtient ainsi un morphisme de groupes $\mathbf{G}_m^n \rightarrow \mathbf{PGSp}(b_n)$ qui est une immersion fermée par [SGA3, Exp. IX, corollaire 2.5]. On note $\mathbf{DiagPGSp}(b_n)$ l'image de \mathbf{G}_m^n dans $\mathbf{PGSp}(b_n)$. C'est évidemment un tore déployé, et on s'aperçoit qu'il est maximal puisque maximal sur les fibres géométriques [Une ref, ou le faire](#). Les caractères de ce tore sont donnés par $t_i((\alpha_{ij})) = \alpha_{1, i+1}$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

Un calcul immédiat donne les racines de $\mathbf{PGSp}(b_n)$ par rapport au tore $\mathbf{DiagPGSp}(b_n)$ pour tout anneau R :

1. Le sous-module de l'algèbre de Lie du tore de poids trivial.
2. Le sous-module $R \cdot (E_{ij} - E_{j+n, i+n})$ de poids $t_{i-1} - t_{j-1}$ pour tout $2 \leq i, j \leq n$ avec $i \neq j$.
3. Le sous-module $R \cdot (E_{i1} - E_{n+1, i})$ de poids t_{i-1} pour tout $i = 2, \dots, n$.
4. Le sous-module $R \cdot (E_{1i} - E_{i+n, 1})$ de poids $-t_{i-1}$ pour tout $i = 2, \dots, n$.
5. Le sous-module $R \cdot (E_{i, n+j} + E_{j, n+i})$ de poids $t_{i-1} + t_{j-1} - t_n$ pour tout $2 \leq i < j \leq n$.

6. Le sous-module $R \cdot (E_{n+i,j} + E_{n+j,i})$ de poids $t_n - t_{i-1} - t_{j-1}$ pour tout $2 \leq i < j \leq n$.
7. Le sous-module $R \cdot (E_{1,n+i} + E_{i,n+1})$ de poids $t_{i-1} - t_n$ pour tout $i = 2, \dots, n$.
8. Le sous-module $R \cdot (E_{n+1,i} + E_{n+i,1})$ de poids $t_n - t_{i-1}$ pour tout $i = 2, \dots, n$.
9. Le sous-module $R \cdot E_{i,n+i}$ de poids $2t_{i-1} - t_n$ pour tout $i = 2, \dots, n$.
10. Le sous-module $R \cdot E_{n+i,i}$ de poids $t_n - 2t_{i-1}$ pour tout $i = 2, \dots, n$.
11. Le sous-module $R \cdot E_{n+1,1}$ de poids t_n .
12. Le sous-module $R \cdot E_{1,n+1}$ de poids $-t_n$.

Pour décrire les morphismes exponentiels $\exp : \mathbf{G}_a \rightarrow \mathbf{PGSp}(b_n)$ on donne de façon fonctorielle pour tout anneau R et tout $\lambda \in R$ une matrice $A(\lambda)$ et on définit $\exp(\lambda)$ comme étant la conjugaison par $A(\lambda)$. On trouve :

2. Le morphisme $\exp_{t_{i-1}-t_{j-1}} : R \cdot (E_{ij} - E_{j+n,i+n}) \rightarrow \mathbf{PGSp}(b_n)(R)$ défini par

$$\lambda \mapsto \text{Id} + \lambda(E_{ij} - E_{j+n,i+n}).$$

3. Le morphisme $\exp_{t_{i-1}} : R \cdot (E_{i1} - E_{n+1,i}) \rightarrow \mathbf{PGSp}(b_n)(R)$ défini par

$$\lambda \mapsto \text{Id} + \lambda(E_{i1} - E_{n+1,i}).$$

4. Le morphisme $\exp_{-t_{i-1}} : R \cdot (E_{1i} - E_{i+n,1}) \rightarrow \mathbf{PGSp}(b_n)(R)$ défini par

$$\lambda \mapsto \text{Id} + \lambda(E_{1i} - E_{i+n,1}).$$

5. Le morphisme $\exp_{t_{i-1}+t_{j-1}-t_n} : R \cdot (E_{i,n+j} + E_{j,n+i}) \rightarrow \mathbf{PGSp}(b_n)(R)$ défini par

$$\lambda \mapsto \text{Id} + \lambda(E_{i,n+j} + E_{j,n+i}).$$

6. Le morphisme $\exp_{t_n-t_{i-1}-t_{j-1}} : R \cdot (E_{n+i,j} + E_{n+j,i}) \rightarrow \mathbf{PGSp}(b_n)(R)$ défini par

$$\lambda \mapsto \text{Id} + \lambda(E_{n+i,j} + E_{n+j,i}).$$

7. Le morphisme $\exp_{t_{i-1}-t_n} : R \cdot (E_{1,n+i} + E_{i,n+1}) \rightarrow \mathbf{PGSp}(b_n)(R)$ défini par

$$\lambda \mapsto \text{Id} + \lambda(E_{1,n+i} + E_{i,n+1}).$$

8. Le morphisme $\exp_{t_n-t_{i-1}} : R \cdot (E_{n+1,i} + E_{n+i,1}) \rightarrow \mathbf{PGSp}(b_n)(R)$ défini par

$$\lambda \mapsto \text{Id} + \lambda(E_{n+1,i} + E_{n+i,1}).$$

9. Le morphisme $\exp_{2t_{i-1}-t_n} : R \cdot E_{i,n+i} \rightarrow \mathbf{PGSp}(b_n)(R)$ défini par

$$\lambda \mapsto \text{Id} + \lambda E_{i,n+i}.$$

10. Le morphisme $\exp_{t_n-2t_{i-1}} : R \cdot E_{n+i,i} \rightarrow \mathbf{PGSp}(b_n)(R)$ défini par

$$\lambda \mapsto \text{Id} + \lambda E_{n+i,i}.$$

11. Le morphisme $\exp_{t_n} : \mathbf{R} \cdot \mathbf{E}_{n+1,1} \rightarrow \mathbf{PGSp}(b_n)(\mathbf{R})$ défini par

$$\lambda \mapsto \text{Id} + \lambda \mathbf{E}_{n+1,1}.$$

12. Le morphisme $\exp_{-t_n} : \mathbf{R} \cdot \mathbf{E}_{1,n+1} \rightarrow \mathbf{PGSp}(b_n)(\mathbf{R})$ défini par

$$\lambda \mapsto \text{Id} + \lambda \mathbf{E}_{1,n+1}.$$

Ces données permettent de trouver immédiatement les coracines, selon la liste suivante :

2. Les coracines $t_{i-1}^\vee - t_{j-1}^\vee$ pour tout $2 \leq i, j \leq n$ avec $i \neq j$.
3. Les coracines $2t_n^\vee + 2t_{i-1}^\vee + \sum_{j=2, j \neq i}^n t_{j-1}^\vee$ pour tout $i = 2, \dots, n$.
4. Les coracines $-2t_n^\vee - 2t_{i-1}^\vee - \sum_{j=2, j \neq i}^n t_{j-1}^\vee$ pour tout $i = 2, \dots, n$.
5. Les coracines $t_{i-1}^\vee + t_{j-1}^\vee$ pour tout $2 \leq i < j \leq n$.
6. Les coracines $-t_{i-1}^\vee - t_{j-1}^\vee$ pour tout $2 \leq i < j \leq n$.
7. Les coracines $-2t_n^\vee - \sum_{j=2, j \neq i}^n t_{j-1}^\vee$ pour tout $i = 2, \dots, n$.
8. Les coracines $2t_n^\vee + \sum_{j=2, j \neq i}^n t_{j-1}^\vee$ pour tout $i = 2, \dots, n$.
9. Les coracines t_{i-1}^\vee pour tout $i = 2, \dots, n$.
10. Les coracines $-t_{i-1}^\vee$ pour tout $i = 2, \dots, n$.
11. La coracine $2t_n^\vee + \sum_{j=1}^{n-1} t_j^\vee$.
12. La coracine $-2t_n^\vee - \sum_{j=1}^{n-1} t_j^\vee$.

Le résultat suivant est donc démontré :

radiciellePGSp_prop

Proposition 6.1.0.57. — La donnée radicielle de $\mathbf{PGSp}(b_n)$ relativement au tore maximal déployé $\mathbf{DiagPGSp}(b_n)$ est

- Le \mathbb{Z} -module libre $N \simeq \mathbb{Z}^n$ des caractères de $\mathbf{PGSp}(b_n)$ (dont t_1, \dots, t_n forment une base) ;
- Le sous-ensemble fini de celui-ci formé des racines $\pm(t_{i-1} - t_{j-1})$ et des racines $\pm(t_{i-1} + t_{j-1} - t_n)$ pour $2 \leq i < j \leq n$, ainsi que $\pm(t_{i-1} - t_n)$ et $\pm(2t_{i-1} - t_n)$ pour $i = 2, \dots, n$ et $\pm t_i$ pour $i = 1, \dots, n$;
- Le \mathbb{Z} -module libre $N^\vee \simeq \mathbb{Z}^n$ des cocaractères (de base duale $t_1^\vee, \dots, t_n^\vee$) ;
- Le sous-ensemble fini de celui-ci formé des coracines $\pm t_{i-1}^\vee \pm t_{j-1}^\vee$ pour $2 \leq j < i \leq n$, ainsi que pour tout $i = 2, \dots, n$ les coracines $\pm t_{i-1}^\vee$, $\pm(2t_n^\vee + 2t_{i-1}^\vee + \sum_{j=2, j \neq i}^n t_{j-1}^\vee)$ et $\pm(2t_n^\vee + \sum_{j=2, j \neq i}^n t_{j-1}^\vee)$, et finalement les coracines $\pm(2t_n^\vee + \sum_{j=1}^{n-1} t_j^\vee)$.

Théorème 6.1.0.58. — Pour tout $n \geq 1$, le groupe $\mathbf{PGSp}(b_n)$ est déployé, semi-simple et adjoint de type C_n .

Démonstration. — Le groupe est semi-simple par la proposition 6.1.0.56 et déployé. Il est adjoint puisque ses racines engendrent les caractères du tore. Enfin, le système de racines simples $\{t_1 - t_2, t_2 - t_3, \dots, t_{n-1} - t_n, t_n\}$ montre que le diagramme de Dynkin associé est de type C_n . \square

6.2. Groupe déployé simplement connexe. — Rappelons que la forme bilinéaire alternée b_n sur \mathbb{Z}^{2n} donnée par la matrice

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ -\text{Id} & 0 \end{pmatrix}$$

induit une involution σ sur \mathbf{M}_{2n} par $\sigma(M) = H^{-1}M^tH$ pour tout $M \in \mathbf{M}_{2n}(\mathbf{R})$ et tout anneau \mathbf{R} . On définit une représentation

$$\rho : \mathbf{GL}_{2n} \longrightarrow \mathbf{GL}_{\mathbf{M}_{2n}(\mathbb{Z})}$$

par $\rho(M)(A) = \sigma(M) \cdot A \cdot M$. On définit finalement $\mathbf{Sp}(b_n)$ comme étant la préimage sous ρ du stabilisateur de Id dans $\mathbf{GL}_{\mathbf{M}_{2n}(\mathbb{Z})}$. Le lemme 2.4.0.17 montre que $\mathbf{Sp}(b_n)$ est représentable par une algèbre de type fini sur \mathbb{Z} et qu'il est un sous-groupe fermé de \mathbf{GL}_{2n} . Concrètement, le faisceau est donné par

$$\mathbf{Sp}(b)(\mathbf{R}) = \{M \in \mathbf{GL}_{2n}(\mathbf{R}) \mid M^t H M = H\}.$$

Pour tout point $s \in \text{Spec } \mathbb{Z}$, le groupe $\mathbf{Sp}(b_n)_s$ est connexe de dimension $n \cdot (2n+1)$ ([Bo91, § 23.3]). On détermine maintenant son algèbre de Lie comme sous-algèbre de Lie de $\mathcal{L}(\mathbf{GL}(\mathbf{M}_{2n}(\mathbb{Z})))$ en accord avec le lemme 2.8.0.24. La suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{Sp}(b_n))(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{Sp}(b_n)(\mathbf{R}[\epsilon]) \longrightarrow \mathbf{Sp}(b_n)(\mathbf{R}) \longrightarrow 1$$

montre que $1 + \epsilon M \in \mathcal{L}(\mathbf{Sp}(b_n))(\mathbf{R})$ si et seulement si $M^t H + H M = 0$. Ecrivant $M = (M_{ij})$ pour $1 \leq i, j \leq 2$ avec $M_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$, on obtient les égalités

$$\begin{cases} M_{22} = -M_{11}^t \\ M_{12} = M_{12}^t \\ M_{21} = M_{21}^t \end{cases}$$

Il s'ensuit que $\mathcal{L}(\mathbf{Sp}(b_n))$ est libre de dimension $n^2 + n(n+1)/2 + n(n+1)/2 = n(2n+1)$ sur \mathbf{R} avec une base donnée par les matrices

$$\begin{cases} E_{ij} - E_{j+n, i+n} & \text{pour tout } 1 \leq i, j \leq n, \\ E_{i, n+j} + E_{j, n+i} & \text{pour tout } 1 \leq i < j \leq n, \\ E_{n+i, j} + E_{n+j, i} & \text{pour tout } 1 \leq i < j \leq n, \\ E_{i, n+i} & \text{pour tout } 1 \leq i \leq n, \\ E_{n+i, i} & \text{pour tout } 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

En conséquence :

Sp_ss_prop

Proposition 6.2.0.59. — *Le groupe $\mathbf{Sp}(b_n)$ est semi-simple sur $\text{Spec } \mathbb{Z}$.*

Démonstration. — Il suit des propositions 2.9.0.28 et 2.9.0.29 que le groupe est lisse. Ses fibres géométriques sont simples par [Bo91, § 23.3]. \square

Pour trouver un tore maximal de $\mathbf{Sp}(b_n)$, on considère le tore $\mathbf{DiagSp}(b_n)$ donné par les matrices de la forme $\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_n^{-1})$. C'est un tore maximal puisqu'il est maximal sur les fibres géométriques ([Bo91, § 23.3]). Les caractères du tore sont donnés par $t_i(\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_n^{-1})) = \alpha_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Le fait que $\mathbf{Sp}(b_n)$ soit un sous-groupe de \mathbf{GL}_{2n} et que $\mathbf{DiagSp}(b_n)$ soit un sous tore du tore maximal des matrices diagonales dans \mathbf{GL}_{2n} donne facilement les racines $\mathbf{Sp}(b_n)$. On trouve pour tout anneau R la liste suivante :

1. Le sous-module de l'algèbre de Lie du tore de poids trivial.
2. Le sous-module $R \cdot (E_{ij} - E_{j+n, i+n})$ de poids $t_i - t_j$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$ avec $i \neq j$.
3. Le sous-module $R \cdot (E_{i, n+j} + E_{j, n+i})$ de poids $t_i + t_j$ pour tout $1 \leq i < j \leq n$.
4. Le sous-module $R \cdot (E_{n+i, j} + E_{n+j, i})$ de poids $-t_i - t_j$ pour tout $1 \leq i < j \leq n$.
5. Le sous-module $R \cdot E_{i, n+i}$ de poids $2t_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.
6. Le sous-module $R \cdot E_{n+i, i}$ de poids $-2t_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Pour toute racine α , l'unique morphisme de groupes algébriques

$$\exp_\alpha : \mathbf{G}_a \longrightarrow \mathbf{Sp}(b_n)$$

induisant l'inclusion canonique de l'espace propre associé à α dans son algèbre de Lie ([SGA3, Exp. XXII, théorème 1.1]) est comme ci-dessous :

1. Le morphisme $\exp_{t_i - t_j} : R \cdot (E_{ij} - E_{j+n, i+n}) \rightarrow \mathbf{Sp}(b_n)(R)$ défini par

$$\lambda \mapsto \text{Id} + \lambda(E_{ij} - E_{j+n, i+n}).$$

2. Le morphisme $\exp_{t_i + t_j} : R \cdot (E_{i, n+j} + E_{j, n+i}) \rightarrow \mathbf{Sp}(b_n)(R)$ défini par

$$\lambda \mapsto \text{Id} + \lambda(E_{i, n+j} + E_{j, n+i}).$$

3. Le morphisme $\exp_{-t_i - t_j} : R \cdot (E_{n+i, j} + E_{n+j, i}) \rightarrow \mathbf{Sp}(b_n)(R)$ défini par

$$\lambda \mapsto \text{Id} + \lambda(E_{n+i, j} + E_{n+j, i}).$$

4. Le morphisme $\exp_{2t_i} : R \cdot E_{i, n+i} \rightarrow \mathbf{Sp}(b_n)(R)$ défini par

$$\lambda \mapsto \text{Id} + \lambda E_{i, n+i}.$$

5. Le morphisme $\exp_{-2t_i} : R \cdot E_{n+i, i} \rightarrow \mathbf{Sp}(b_n)(R)$ défini par

$$\lambda \mapsto \text{Id} + \lambda E_{n+i, i}.$$

Ces données nous permettent de calculer facilement les coracines. Dans tout les cas ci-dessous, l'accouplement prévu par [ajouter une ref a la section sur les accouplements](#) est donné par $(X, Y) \mapsto -XY$. Les coracines associées aux racines décrites ci-dessus sont dans l'ordre :

2. Les coracines $t_i^\vee - t_j^\vee$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$ avec $i \neq j$.
3. Les coracines $t_i^\vee + t_j^\vee$ pour tout $1 \leq i < j \leq n$.

4. Les coracines $-t_i^\vee - t_j^\vee$ pour tout $1 \leq i < j \leq n$.
5. Les coracines t_i^\vee pour tout $1 \leq i \leq n$.
6. Les coracines $-t_i^\vee$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

En résumé la donnée radicielle de $\mathbf{Sp}(b_n)$ est la suivante :

eradicelleSp_prop

Proposition 6.2.0.60. — La donnée radicielle de $\mathbf{Sp}(b_n)$ relativement au tore maximal déployé $\mathbf{DiagSp}(b_n)$ est

- Le \mathbb{Z} -module libre $N \simeq \mathbb{Z}^n$ des caractères de $\mathbf{Sp}(b_n)$ (dont t_1, \dots, t_n forment une base) ;
- Le sous-ensemble fini de celui-ci formé des racines $\pm 2t_i$ pour $1 \leq i \leq n$ et $\pm t_i \pm t_j$ pour $1 \leq j < i \leq n$;
- Le \mathbb{Z} -module libre $N^\vee \simeq \mathbb{Z}^n$ des cocaractères (de base duale $t_1^\vee, \dots, t_n^\vee$) ;
- Le sous-ensemble fini de celui-ci formé des coracines $\pm t_i^\vee$ pour $i = 1 \leq i \leq n$ et $\pm t_i^\vee \pm t_j^\vee$ pour $1 \leq j < i \leq n$.

Le résultat suivant découle immédiatement de cette proposition :

Théorème 6.2.0.61. — Pour tout $n \geq 1$, le groupe $\mathbf{Sp}(b_n)$ est déployé, semi-simple et simplement connexe de type C_n .

Démonstration. — La proposition 6.2.0.59 montre déjà que le groupe est semi-simple. Il est simplement connexe puisque la proposition ci-dessus montre que les coracines engendrent les cocaractères. Il est de type C_n puisque les racines simples $\{t_1 - t_2, t_2 - t_3, \dots, t_{n-1} - t_n, 2t_n\}$ donnent un diagramme de Dynkin de ce type. \square

Pour calculer le centre de $\mathbf{Sp}(b_n)$, on définit un morphisme de groupes $\chi : \mathbf{Sp}(b_n) \rightarrow \mathbf{PGSp}(b_n)$ en associant à $M \in \mathbf{Sp}(b_n)(R)$ l'automorphisme intérieur Int_M de $M_{2n}(R)$ pour tout anneau R . Ce morphisme induit un morphisme $\chi : \mathbf{DiagSp}(b_n) \rightarrow \mathbf{DiagPGSp}(b_n)$ dont le noyau est le centre de $\mathbf{Sp}(b_n)$ par [citer qqch](#). Explicitement, on trouve

$$\chi(\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_n^{-1})) = (\alpha_{ij})$$

avec $\alpha_{1i} = \alpha_1 \cdot \alpha_i^{-1}$ pour $i = 2, \dots, n$ et $\alpha_{1,n+1} = \alpha_1^2$. Au niveau des caractères des tores $\mathbf{DiagSp}(b_n)$ et $\mathbf{DiagPGSp}(b_n)$, on obtient $t_i \mapsto t_1 - t_{i+1}$ pour $i = 1, \dots, n-1$ et $t_n \mapsto 2t_1$. On en déduit que le centre de $\mathbf{Sp}(b_n)$ est le groupe multiplicatif associé au groupe $\mathbb{Z}/2$. Ainsi :

Proposition 6.2.0.62. — Le morphisme de groupes algébriques

$$\zeta : \mu_2 \longrightarrow Z(\mathbf{Sp}(b_n))$$

est défini pour tout anneau R et tout $\alpha \in \mu_2(R)$ par $\zeta(\alpha) = \text{diag}(\alpha, \dots, \alpha)$ est un isomorphisme.

6.3. Automorphismes. — Rien à faire puisque tout automorphisme est intérieur.

6.4. Groupes tordus. — **A faire.**

7. Groupes semi-simples de type D_n

dn_adjoint

7.1. Groupe déployé adjoint. — Soit $n \geq 3$ et $M = \mathbb{Z}^{2n}$ de base e_1, \dots, e_{2n} . On considère le module quadratique $q : M \rightarrow \mathbb{Z}$ défini par

$$q(x_1, \dots, x_{2n}) = x_1 x_2 + \dots + x_{2n-1} x_{2n}.$$

La forme bilinéaire associée à q , appelée forme polaire, est $b : M \times M \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par $b(x, y) = q(x + y) - q(x) - q(y)$ pour tout $x, y \in M$. Munissant $M^\vee := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$ de la base duale, on voit que la matrice de b est de la forme

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \ddots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \ddots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comprend-on cette matrice? Etant donné les scalaires à tout anneau R , on obtient une involution σ sur $M_{2n}(R)$ par $A \mapsto H^{-1} A^t H$ et ainsi une involution σ sur le faisceau en algèbres \mathbf{M}_{2n} .

Pour tout anneau R , on pose $\text{Sym}(M_{2n}(R), \sigma) = \{A \in M_{2n}(R) \mid \sigma(A) = A\}$. Il est clair que $\text{Sym}(M_{2n}(R), \sigma)$ est un sous-module de $M_{2n}(R)$. Utilisant la description explicite de la matrice H , on s'aperçoit que $\text{Sym}(M_{2n}(R), \sigma)$ est un sous-module libre de base donnée par les éléments suivants :

1. $E_{2i-1, 2i}$ pour tout $i = 1, \dots, n$.
2. $E_{2i, 2i-1}$ pour tout $i = 1, \dots, n$.
3. $E_{2i-1, 2j} + E_{2j-1, 2i}$ pour tout $1 \leq i < j \leq n$.
4. $E_{2i-1, 2j-1} + E_{2j, 2i}$ pour tout $1 \leq i \leq j \leq n$.
5. $E_{2i, 2j} + E_{2j-1, 2i-1}$ pour tout $1 \leq i < j \leq n$.
6. $E_{2i, 2j-1} + E_{2j, 2i-1}$ pour tout $1 \leq i < j \leq n$.

Ceci nous permet de définir un homomorphisme

$$f : \text{Sym}(M_{2n}(R), \sigma) \longrightarrow R$$

par $f(E_{2i-1, 2i-1} + E_{2i, 2i}) = 1$ pour tout $i = 1, \dots, n$ et $f = 0$ sur les autres éléments de la base. Soit

$$\psi : \mathbf{Aut}_{\mathbf{M}_{2n}, \sigma} \longrightarrow \mathbf{GL}_{\text{Sym}(M_{2n}(\mathbb{Z}), \sigma)^\vee}$$

la représentation définie par $\psi(\alpha)(g) = g \circ \alpha$ pour tout anneau R , tout automorphisme de $M_{2n}(R)$ respectant σ et tout homomorphisme R -linéaire $g : \text{Sym}(M_{2n}(\mathbb{Z}), \sigma) \rightarrow R$. On définit $\mathbf{PGO}(M, q)$ comme étant la préimage du sous-groupe $\mathbf{Stab}(f)$ de $\mathbf{GL}_{\text{Sym}(M_{2n}(\mathbb{Z}), \sigma)^\vee}$. Explicitement,

$$\mathbf{PGO}(M, q)(R) = \{\alpha \in \text{Aut}_{R\text{-alg}}(M_{2n}(R)) \mid \alpha \circ \sigma = \sigma \circ \alpha \text{ et } f \circ \alpha = f\}.$$

Il découle immédiatement du lemme ?? et du fait que $\mathbf{Aut}_{M_{2n}, \sigma}$ est représentable (section ??) que $\mathbf{PGO}(M, q)$ est représentable. On reviendra sur le groupe $\mathbf{PGO}(M, q)$ plus tard dans la section 7.3, mais on s'intéresse pour l'instant à un sous groupe de $\mathbf{PGO}(M, q)$. Pour le définir, on considère pour tout anneau R l'homomorphisme

$$\varphi : M_R \otimes_R M_R \longrightarrow M_{2n}(R)$$

défini par $\varphi(m \otimes m')(n) = m \cdot b(m', n)$ pour tout $m, m', n \in M_R$. C'est un isomorphisme par [KMRT98, Theorem 5.1, p. 54]. On considère l'endomorphisme τ de $M_R \otimes_R M_R$ donné sur les tenseurs simples par $\tau(m \otimes m') = m' \otimes m$, et on vérifie facilement que $\varphi \circ \tau = \sigma \circ \varphi$. On en tire que le sous-module des éléments fixés par τ est en bijection avec $\text{Sym}(M_{2n}(R), \sigma)$. Si $\alpha \in \mathbf{PGO}(M, q)(R)$, $\varphi^{-1}\alpha\varphi$ est un automorphisme de $M_R \otimes_R M_R$ préservant τ .

Considérons l'algèbre tensorielle $T(M_R \otimes_R M_R)$ et les idéaux $I_1(q)$ engendré par les $m \otimes m - q_R(m)$ pour tout $m \in M_R$ et $I_2(q)$ engendré par les tenseurs de la forme $u \otimes m \otimes m \otimes v - q_R(m)u \otimes v$ pour tout $u, v, m \in M_R$. On vérifie que l'homomorphisme R -linéaire $\pi : M_R \otimes_R M_R \rightarrow C_0(M_R, q_R)$ associant à $m \otimes m'$ sa classe dans $C_0(M_R, q_R)$ induit un homomorphisme de R -algèbres

$$\pi : T(M_R \otimes_R M_R)/(I_1(q) + I_2(q)) \longrightarrow C_0(M_R, q_R)$$

qui est en fait un isomorphisme par [KMRT98, Lemma 8.1, p. 87].

Si $\alpha \in \mathbf{PGO}(M, q)(R)$, alors $\varphi\alpha\varphi^{-1}$ induit un automorphisme μ_α de $T(M_R \otimes_R M_R)$. On vérifie que μ_α préserve l'idéal $(I_1(q) + I_2(q))$ (exercice ; voir aussi la démonstration du lemme 7.1.0.65). On obtient donc un morphisme de groupes

$$\mathbf{PGO}(M, q) \longrightarrow \mathbf{Aut}_{C_0(M, q)}.$$

Pour tout anneau R , le centre de $C_0(M_R, q_R)$ est une algèbre étale de degré 2 sur R . Restreignant tout automorphisme de $C_0(M_R, q_R)$ à son centre, on obtient un morphisme de groupes $\mathbf{Aut}_{C_0(M, q)} \rightarrow \mathbf{Aut}_{Z(C_0(M, q))}$. Puisque le centre $Z(C_0(M_R, q_R))$ est une algèbre étale, on voit qu'on a un isomorphisme $\mathbf{Aut}_{Z(C_0(M, q))} \simeq \mathbb{Z}/2$. Finalement, on définit l'invariant de Dickson, simplement noté D , comme la composition des morphismes

$$\mathbf{PGO}(M, q) \longrightarrow \mathbf{Aut}_{C_0(M, q)} \longrightarrow \mathbf{Aut}_{Z(C_0(M, q))} = \mathbb{Z}/2.$$

Le noyau de D est le groupe $\mathbf{PGO}^+(M, q)$. Il est évidemment représentable.

compo_connexe_lemm

Lemme 7.1.0.63. — *La suite*

$$1 \longrightarrow \mathbf{PGO}^+(\mathbf{M}, q) \longrightarrow \mathbf{PGO}(\mathbf{M}, q) \xrightarrow{\mathbf{D}} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0$$

est exacte.

Démonstration. — Par définition de $\mathbf{PGO}^+(\mathbf{M}, q)$, il suffit de démontrer l'exactitude à droite.

Soit \mathbf{R} un anneau local et $a = E_{12} + E_{21} + \sum_{i=3}^{2n} E_{ii} \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbf{R})$. On vérifie facilement que la conjugaison μ_a par a est un automorphisme de $\mathbf{M}_{2n}(\mathbf{R})$ préservant l'involution σ et l'homomorphisme f . Ainsi $\mu_a \in \mathbf{PGO}(\mathbf{M}, q)(\mathbf{R})$. Utilisant φ , on voit que l'automorphisme de $\mathbf{M}_{\mathbf{R}} \otimes \mathbf{M}_{\mathbf{R}}$ induit par μ_a est induit par l'automorphisme g de $\mathbf{M}_{\mathbf{R}}$ permutant e_1 et e_2 . Plus précisément, on a $\varphi^{-1}\mu_a\varphi = g \otimes g$. Pour trouver le centre de $\mathbf{C}_0(\mathbf{M}_{\mathbf{R}}, q_{\mathbf{R}})$ on utilise [Knus91, § (2.3), p. 203]. Pour tout $j = 1, \dots, n$, soit $s_j(x_1, \dots, x_n)$ la fonction symétrique de degré j en les x_1, \dots, x_n . On pose

$$z = \sum_{j=1}^n (-2)^{j-1} s_j(e_1 \otimes e_2, \dots, e_{2n-1} \otimes e_{2n}).$$

C'est un générateur du centre de $\mathbf{C}_0(\mathbf{M}_{\mathbf{R}}, q_{\mathbf{R}})$ par [Knus91, (2.3.1), p. 204] tel que $z^2 = z$. On trouve $(g \otimes g)(z) = 1 - z$ et ainsi l'automorphisme de $\mathbf{C}_0(\mathbf{M}_{\mathbf{R}}, q_{\mathbf{R}})$ induit par $g \otimes g$ permute les idempotents z et $1 - z$. On a donc $\mathbf{D}(\mu_a) = 1 \in \mathbb{Z}/2(\mathbf{R})$. \square

Si s est un point géométrique de $\mathrm{spec}(\mathbb{Z})$, il suit de [KMRT98, § 23.B., p.351] que $\mathbf{PGO}^+(\mathbf{M}, q)_s$ est lisse, connexe de dimension $n(2n - 1)$.

Pour calculer l'algèbre de Lie de $\mathbf{PGO}^+(\mathbf{M}, q)$, on prend le chemin des écoliers. Considérons le morphisme de conjugaison

$$\rho : \mathbf{GL}_{2n} \longrightarrow \mathbf{Aut}_{\mathbf{M}_{2n}}.$$

On définit $\mathbf{GO}(\mathbf{M}, q)$ comme étant la préimage sous ρ de $\mathbf{PGO}(\mathbf{M}, q)$. Il est clair que $\mathbf{GO}(\mathbf{M}, q)$ est représentable (lemme 2.4.0.17). Ecrivant μ_A pour la conjugaison par une matrice A , une description explicite de $\mathbf{GO}(\mathbf{M}, q)$ est donnée par

$$\mathbf{GO}(\mathbf{M}, q)(\mathbf{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbf{R}) \mid \sigma \circ \mu_A = \mu_A \circ \sigma, f(A^{-1}BA) = f(B) \forall B \in \mathrm{Sym}(\mathbf{M}_{2n}(\mathbf{R}), \sigma)\}.$$

La condition $\sigma \circ \mu_A = \mu_A \circ \sigma$ s'exprime par

$$\mathbf{H}^{-1}(A^{-1}BA)^t \mathbf{H} = A^{-1} \mathbf{H}^{-1} B^t \mathbf{H} A$$

pour tout $B \in \mathbf{M}_{2n}(\mathbf{R})$. Le centre de $\mathbf{M}_{2n}(\mathbf{R})$ étant constitué des matrices scalaires, on en déduit que $\sigma \circ \mu_A = \mu_A \circ \sigma$ si et seulement si $(A^{-1})^t \mathbf{H} A^{-1} \mathbf{H}^{-1}$ est

une matrice scalaire. Ceci nous permet de calculer l'algèbre de Lie $\mathfrak{L}(\mathbf{GO}(M, q))$. Utilisant la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathfrak{L}(\mathbf{GO}(M, q))(R) \longrightarrow \mathbf{GO}(M, q)(R[\epsilon]) \xrightarrow{p} \mathbf{GO}(M, q)(R) \longrightarrow 1,$$

on voit que pour tout $B \in M_{2n}(R)$ on a $\text{Id} + \epsilon B \in \mathfrak{L}(\mathbf{GO}(M, q))(R)$ si et seulement si $B + \sigma(B) \in R \cdot \text{Id}$ et $f(CB - BC) = 0$ pour tout élément symétrique $C \in \text{Sym}(M_{2n}(R), \sigma)$. La première condition donne pour $B = (b_{ij})$ les relations

1. $b_{2j, 2i} = -b_{2i-1, 2j-1}$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$ avec $i \neq j$.
2. $b_{2j-1, 2i} = -b_{2i, 2j-1}$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$.
3. $b_{2j, 2i-1} = -b_{2i, 2j-1}$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$.
4. $b_{2i-1, 2i-1} + b_{2i, 2i} = b_{11} + b_{22}$ pour tout $2 \leq i \leq n$.

Utilisant la base de $\text{Sym}(M_{2n}(R), \sigma)$ du début de la section, on trouve que la seconde condition donne les relations supplémentaires

5. $b_{2i, 2i-1} = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$.
6. $b_{2i-1, 2i} = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Ceci montre que $\mathfrak{L}(\mathbf{GO}(M, q))(R)$ est le R -module libre dont une base est donnée par les éléments suivants :

1. $E_{2i-1, 2j-1} - E_{2j, 2i}$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$ avec $i \neq j$.
2. $E_{2i-1, 2j} - E_{2j-1, 2i}$ pour tout $1 \leq i < j \leq n$.
3. $E_{2i, 2j-1} - E_{2j, 2i-1}$ pour tout $1 \leq i < j \leq n$.
4. $E_{2i-1, 2i-1} - E_{2i, 2i}$ pour tout $2 \leq i \leq n$.
5. $E_{11} + \sum_{i=2}^n E_{2i, 2i}$.
6. $E_{22} + \sum_{i=2}^n E_{2i, 2i}$.

Par définition, ρ induit un morphisme de groupes $\rho : \mathbf{GO}(M, q) \rightarrow \mathbf{PGO}(M, q)$ dont le noyau est \mathbf{G}_m . Il suit immédiatement de la proposition 3.2.0.40 que la suite

$$1 \longrightarrow \mathbf{G}_m \longrightarrow \mathbf{GO}(M, q) \xrightarrow{\rho} \mathbf{PGO}(M, q) \longrightarrow 1$$

est exacte. On en déduit que $\mathfrak{L}(\mathbf{PGO}(M, q))$ est le quotient de $\mathfrak{L}(\mathbf{GO}(M, q))$ par $\mathfrak{L}(\mathbf{G}_m) = \mathbf{G}_a$. On trouve ainsi une base de $\mathfrak{L}(\mathbf{PGO}(M, q))(R)$ pour tout anneau R formée des éléments (seul le point 4. diffère de la liste ci-dessus) :

1. $E_{2i-1, 2j-1} - E_{2j, 2i}$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$ avec $i \neq j$.
2. $E_{2i-1, 2j} - E_{2j-1, 2i}$ pour tout $1 \leq i < j \leq n$.
3. $E_{2i, 2j-1} - E_{2j, 2i-1}$ pour tout $1 \leq i < j \leq n$.
4. $E_{2i-1, 2i-1} - E_{2i, 2i}$ pour tout $2 \leq i \leq n-1$.
5. $E_{11} + \sum_{i=2}^n E_{2i, 2i}$.
6. $E_{22} + \sum_{i=2}^n E_{2i, 2i}$.

Par ailleurs, le lemme 7.1.0.63 montre que $\mathbf{PGO}^+(M, q)$ a la même algèbre de Lie que $\mathbf{PGO}(M, q)$. On en déduit immédiatement le résultat suivant :

PGOplus_ss_prop

Proposition 7.1.0.64. — *Le groupe $\mathbf{PGO}^+(M, q)$ est semi-simple sur $\text{spec}(\mathbb{Z})$.*

Démonstration. — Il suit des propositions 2.9.0.28 et 2.9.0.29 que le groupe est lisse. Ses fibres géométriques sont simples par [KMRT98, Theorem 25.12, p. 359]. \square

Pour trouver un tore maximal de $\mathbf{PGO}^+(\mathbf{M}, q)$, on remarque d'abord qu'un tore est connexe et qu'il suffit par conséquent de trouver un tore maximal de $\mathbf{PGO}(\mathbf{M}, q)$ pour arriver à nos fins. Pour ce faire, on utilise à nouveau la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathbf{G}_m \longrightarrow \mathbf{GO}(\mathbf{M}, q) \xrightarrow{\rho} \mathbf{PGO}(\mathbf{M}, q) \longrightarrow 1.$$

Si T est un tore maximal de $\mathbf{GO}(\mathbf{M}, q)$ contenant le centre \mathbf{G}_m de $\mathbf{GO}(\mathbf{M}, q)$, alors le quotient est un tore maximal de $\mathbf{PGO}(\mathbf{M}, q)$. On considère le morphisme

$$\tau : \mathbf{G}_m^{n+1} \longrightarrow \mathbf{GO}(\mathbf{M}, q)$$

défini pour tout anneau R et tout $\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in R^\times$ par

$$\tau(\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \text{diag}(\beta\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \beta\alpha_2, \alpha_2^{-1}, \dots, \beta\alpha_n, \alpha_n^{-1}).$$

Il est clair que τ est un morphisme de groupes et une immersion fermée par [SGA3, Exp. IX, corollaire 2.5]. On note $\mathbf{DiagGO}(\mathbf{M}, q)$ ce tore.

mal_dn_adjoint_lemm

Lemme 7.1.0.65. — *Le tore $\mathbf{DiagGO}(\mathbf{M}, q)$ est maximal.*

Démonstration. — On définit un morphisme de groupes $\eta : \mathbf{GO}(\mathbf{M}, q) \rightarrow \mathbf{G}_m$ par $\eta(A) = A\sigma(A)$ pour tout $A \in \mathbf{GO}(\mathbf{M}, q)(R)$ (on observe ici que le produit $A\sigma(A) = AH^{-1}A^tH$ est une matrice scalaire pour tout $A \in \mathbf{GO}(\mathbf{M}, q)(R)$). Un calcul direct montre que $\eta\tau(\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \beta$ et le morphisme η est donc surjectif. On détermine maintenant son noyau.

Soit R un anneau quelconque et $A \in \text{GL}_{2n}(R)$ tel que $A\sigma(A) = \text{Id}$. La conjugaison par A induit un automorphisme (d'algèbres) de $M_{2n}(R)$. Rappelons qu'on dispose d'un isomorphisme

$$\varphi : R^{2n} \otimes R^{2n} \longrightarrow M_{2n}(R)$$

défini par $\varphi(x \otimes y)(z) = x \cdot b(y, z)$ pour tout $x, y, z \in R^{2n}$. De la relation $A\sigma(A) = AH^{-1}A^tH = \text{Id}$, on tire que $A^tH = HA^{-1}$ et on en déduit que $\varphi^{-1}\mu_A\varphi(x \otimes y) = (A^{-1}(x)) \otimes (A^{-1}(y))$ pour tout $x, y \in R^{2n}$. Rappelons encore que f induit un isomorphisme entre $\text{Sym}(M_{2n}, \sigma)$ et les éléments de $R^{2n} \otimes R^{2n}$ symétriques par rapport à la permutation des facteurs. Un calcul direct montre que $f\varphi(x \otimes x) = q(x)$ pour tout $x \in R^{2n}$ et que cette relation détermine f .

Supposons maintenant que $f(A^{-1}BA) = f(B)$ pour tout $B \in \text{Sym}(M_{2n}(R), \sigma)$. Si $B = \varphi(x \otimes x)$, on obtient que $f(\mu_A\varphi(x \otimes x)) = f(\varphi(x \otimes x)) = q(x)$. Or on sait que $\mu_A\varphi(x \otimes x) = \varphi(A^{-1}(x) \otimes A^{-1}(x))$, d'où $q(A^{-1}(x)) = q(x)$ et donc $A^{-1} \in \mathbf{O}(\mathbf{M}, q)(R)$. Inversément, pour tout $A \in \mathbf{O}(\mathbf{M}, q)(R)$ on a $\mu_{A^{-1}} \in \mathbf{GO}(\mathbf{M}, q)$ et $\eta(\mu_{A^{-1}}) = 1$.

Ainsi $\mathbf{O}(M, q) \subset \mathbf{GO}(M, q)$ et on obtient une suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathbf{O}(M, q) \longrightarrow \mathbf{GO}(M, q) \xrightarrow{\eta} \mathbf{G}_m \longrightarrow 1$$

qui induit une suite exacte de tores

$$1 \longrightarrow T \longrightarrow \mathbf{DiagGO}(M, q) \xrightarrow{\eta} \mathbf{G}_m \longrightarrow 1,$$

où T est le tore des matrices de la forme $\text{diag}(\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \alpha_2, \alpha_2^{-1}, \dots, \alpha_n, \alpha_n^{-1})$. Ce tore étant maximal par [Bo91, § 23.6], on voit que $\mathbf{DiagGO}(M, q)$ est lui-aussi maximal. \square

On trouve finalement un tore maximal de $\mathbf{PGO}^+(M, q)$ en considérant le quotient $\mathbf{DiagPGO}^+(M, q)$ de $\mathbf{DiagGO}(M, q)$ par le centre \mathbf{G}_m . Explicitement, $\mathbf{DiagPGO}^+(M, q)(R)$ est l'ensemble des conjugaisons par les matrices de la forme $\text{diag}(\alpha_0 \alpha_1, \alpha_1^{-1}, \alpha_0 \alpha_2, \alpha_2^{-1}, \dots, \alpha_0 \alpha_{n-1}, \alpha_{n-1}^{-1}, \alpha_0, 1)$ avec $\alpha_i \in R^\times$. Les caractères de ce tore sont donnés par

$$t_i(\text{diag}(\alpha_0 \alpha_1, \alpha_1^{-1}, \alpha_0 \alpha_2, \alpha_2^{-1}, \dots, \alpha_0 \alpha_{n-1}, \alpha_{n-1}^{-1}, \alpha_0, 1)) = \alpha_i$$

pour tout $i = 0, \dots, n-1$. Un calcul direct donne la liste suivante de racines de $\mathbf{PGO}^+(M, q)$ pour tout anneau R :

1. L'algèbre de Lie du tore engendrée par les éléments $E_{11} + \sum_{i=2}^n E_{2i, 2i}$, $E_{22} + \sum_{i=2}^n E_{2i, 2i}$ et $E_{2i-1, 2i-1} - E_{2i, 2i}$ pour tout $2 \leq i \leq n-1$.
2. Le sous-module $R \cdot (E_{2i-1, 2j-1} - E_{2j, 2i})$ de poids $t_i - t_j$ pour tout $1 \leq i, j \leq n-1$ avec $i \neq j$.
3. Le sous-module $R \cdot (E_{2i-1, 2n-1} - E_{2n, 2i})$ de poids t_i pour tout $i = 1, \dots, n-1$.
4. Le sous-module $R \cdot (E_{2n-1, 2i-1} - E_{2i, 2n})$ de poids $-t_i$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$.
5. Le sous-module $R \cdot (E_{2i-1, 2j} - E_{2j-1, 2i})$ de poids $t_0 + t_i + t_j$ pour tout $1 \leq i < j \leq n-1$.
6. Le sous-module $R \cdot (E_{2i, 2j-1} - E_{2j, 2i-1})$ de poids $-t_0 - t_i - t_j$ pour tout $1 \leq i < j \leq n-1$.
7. Le sous-module $R \cdot (E_{2i-1, 2n} - E_{2n-1, 2i})$ de poids $t_0 + t_i$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$.
8. Le sous-module $R \cdot (E_{2i, 2n-1} - E_{2n, 2i-1})$ de poids $-t_0 - t_i$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$.

Les morphismes exponentiels

$$\exp_\alpha : \mathbf{G}_a \longrightarrow \mathbf{PGO}^+(M, q)$$

induisant l'inclusion canonique de l'espace propre associé à α dans son algèbre de Lie ([SGA3, Exp. XXII, théorème 1.1]) sont comme ci-dessous :

2. Le morphisme $\exp_{t_i - t_j} : R \cdot (E_{2i-1,2j-1} - E_{2j,2i}) \rightarrow \mathbf{PGO}^+(M, q)$ défini par

$$\lambda \mapsto \text{Id} + \lambda(E_{2i-1,2j-1} - E_{2j,2i}).$$

3. Le morphisme $\exp_{t_i} : R \cdot (E_{2i-1,2n-1} - E_{2n,2i}) \rightarrow \mathbf{PGO}^+(M, q)$ défini par

$$\lambda \mapsto \text{Id} + \lambda(E_{2i-1,2n-1} - E_{2n,2i}).$$

4. Le morphisme $\exp_{-t_i} : R \cdot (E_{2n-1,2i-1} - E_{2i,2n}) \rightarrow \mathbf{PGO}^+(M, q)$ défini par

$$\lambda \mapsto \text{Id} + \lambda(E_{2n-1,2i-1} - E_{2i,2n}).$$

5. Le morphisme $\exp_{t_0+t_i+t_j} : R \cdot (E_{2i-1,2j} - E_{2j-1,2i}) \rightarrow \mathbf{PGO}^+(M, q)$ défini par

$$\lambda \mapsto \text{Id} + \lambda(E_{2i-1,2j} - E_{2j-1,2i}).$$

6. Le morphisme $\exp_{-t_0-t_i-t_j} : R \cdot (E_{2i,2j-1} - E_{2j,2i-1}) \rightarrow \mathbf{PGO}^+(M, q)$ défini par

$$\lambda \mapsto \text{Id} + \lambda(E_{2i,2j-1} - E_{2j,2i-1}).$$

7. Le morphisme $\exp_{t_0+t_i} : R \cdot (E_{2i-1,2n} - E_{2n-1,2i}) \rightarrow \mathbf{PGO}^+(M, q)$ défini par

$$\lambda \mapsto \text{Id} + \lambda(E_{2i-1,2n} - E_{2n-1,2i}).$$

8. Le morphisme $\exp_{-t_0-t_i} : R \cdot (E_{2i,2n-1} - E_{2n,2i-1}) \rightarrow \mathbf{PGO}^+(M, q)$ défini par

$$\lambda \mapsto \text{Id} + \lambda(E_{2i,2n-1} - E_{2n,2i-1}).$$

Utilisant ces morphismes, on trouve facilement la liste de coracines suivante :

2. Les coracines $t_i^\vee - t_j^\vee$ pour tout $1 \leq i, j \leq n-1$ avec $i \neq j$.
3. Les coracines $2t_i^\vee - 2t_0^\vee + \sum_{j=1, j \neq i}^{n-1} t_j^\vee$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$.
4. Les coracines $2t_0^\vee - 2t_i^\vee - \sum_{j=1, j \neq i}^{n-1} t_j^\vee$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$.
5. Les coracines $t_i^\vee + t_j^\vee$ pour tout $1 \leq i < j \leq n-1$.
6. Les coracines $-t_i^\vee - t_j^\vee$ pour tout $1 \leq i < j \leq n-1$.
7. Les coracines $2t_0^\vee - \sum_{j=1, j \neq i}^{n-1} t_j^\vee$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$.
8. Les coracines $-2t_0^\vee + \sum_{j=1, j \neq i}^{n-1} t_j^\vee$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$.

Les accouplements de la section [mettre la section](#) sont donnés dans les cas

2. à 4. par $(X, Y) \mapsto -XY$ et dans les cas 5. à 8. par $(X, Y) \mapsto XY$.

Nous avons ainsi démontré le résultat suivant :

Proposition 7.1.0.66. — *La donnée radicielle de $\mathbf{PGO}^+(M, q)$ par rapport au tore maximal déployé $\mathbf{DiagPGO}^+(M, q)$ est*

- *Le \mathbb{Z} -module libre $N \simeq \mathbb{Z}^n$ des caractères de $\mathbf{PGO}^+(M, q)$ (dont t_0, \dots, t_{n-1} forment une base) ;*
- *Le sous-ensemble fini de celui-ci formé des racines $t_i - t_j$ pour $1 \leq i, j \leq n-1$ avec $i \neq j$, $\pm t_i$ pour $i = 1, \dots, n-1$, $\pm(t_0 + t_i + t_j)$ pour $1 \leq i < j \leq n-1$ et $\pm(t_0 + t_i)$ pour $i = 1, \dots, n-1$;*

- Le \mathbb{Z} -module libre $N^\vee \simeq \mathbb{Z}^n$ des cocaractères (de base duale $t_0^\vee, \dots, t_{n-1}^\vee$);
- Le sous-ensemble fini de celui-ci formé des coracines $t_i^\vee - t_j^\vee$ pour $1 \leq i, j \leq n-1$ avec $i \neq j$, $\pm(2t_i^\vee - 2t_0^\vee + \sum_{j=1, j \neq i}^{n-1} t_j^\vee)$ pour $i = 1, \dots, n-1$, $\pm(t_i^\vee + t_j^\vee)$ pour $1 \leq i < j \leq n-1$ et $\pm(2t_0^\vee - \sum_{j=1, j \neq i}^{n-1} t_j^\vee)$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$.

Théorème 7.1.0.67. — Pour tout $n \geq 3$, le groupe $\mathbf{PGO}^+(M, q)$ est déployé, semi-simple et adjoint de type D_n .

Démonstration. — Le groupe est semi-simple par la proposition 7.1.0.64 et déployé. Il est adjoint puisque ses racines engendrent les caractères du tore. Enfin, il est de type D_n comme le montre le système de racines simples $\{t_0 + t_{n-1}, t_1 - t_2, t_2 - t_3, \dots, t_{n-2} - t_{n-1}, t_{n-1}\}$. \square

7.2. Groupe déployé simplement connexe. — Ce cas est très similaire au cas traité dans la section 5.2. On entrera donc moins dans les détails que dans les autres sections.

On considère de nouveau le module $M = \mathbb{Z}^{2n}$ de base e_1, \dots, e_{2n} et le module quadratique q sur M donné par

$$q(x_1, \dots, x_{2n}) = x_1 x_2 + \dots + x_{2n-1} x_{2n}.$$

Soit $C(M, q)$ l'algèbre de Clifford de (M, q) et sa sous-algèbre $C_0(M, q)$. Faisant agir pour tout anneau R le groupe $C_0(M_R, q_R)^\times$ sur $C(M_R, q_R)$ par conjugaison, on obtient une représentation

$$\rho : \mathbf{GL}_{1, C_0(M, q)} \longrightarrow \mathbf{GL}_{C(M, q)}$$

Le groupe $\mathbf{\Gamma}(M, q)$, qui est représentable, est défini comme étant la préimage sous ρ de $\mathbf{Norm}(M)$.

Rappelons encore qu'il existe une involution canonique σ sur $C(M_R, q_R)$ donnée par

$$\sigma(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_{m-1}} \otimes e_{i_m}) = e_{i_m} \otimes e_{i_{m-1}} \otimes \dots \otimes e_{i_2} \otimes e_{i_1}$$

et que la norme spinorielle

$$Sn : \mathbf{\Gamma}(M, q) \longrightarrow \mathbf{G}_m$$

est définie par $Sn(a) = a \cdot \sigma(a)$.

Le groupe spinoriel $\mathbf{Spin}(M, q)$ est défini comme étant le noyau de la norme spinorielle. Il s'ensuit que pour tout anneau R on a

$$\mathbf{Spin}(M, q)(R) = \{g \in C_0(M_R, q_R)^\times \mid g(M \otimes R)g^{-1} = M \otimes R \text{ et } g \cdot \sigma(g) = 1\}.$$

Ce groupe est représentable par une algèbre de type fini sur \mathbb{Z} . Pour tout point $s \in \mathbb{Z}$, le groupe $\mathbf{Spin}(M, q)_s$ est connexe de dimension $n \cdot (2n - 1)$ ([Bo91, § 23.3]).

Le calcul de la section 5.2 montre que pour tout anneau R , l'algèbre de Lie $\mathfrak{L}(\mathbf{Spin}(M, q))$ est le R -module libre engendré par les éléments

1. $1 - 2e_{2n-1} \otimes e_{2n}$
 2. $e_{2i-1} \otimes e_{2i} - e_{2n-1} \otimes e_{2n}$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$.
 3. $e_i \otimes e_j$ pour tout $1 \leq i < j \leq 2n$ avec $(i, j) \neq (2r-1, 2r)$ pour $r = 1, \dots, n$.
- On a donc :

dn_Spin_ss_prop

Proposition 7.2.0.68. — *Le groupe $\mathbf{Spin}(M, q)$ est semi-simple sur $\text{spec } \mathbb{Z}$.*

Démonstration. — On sait que les fibres sont connexes, de dimension constante et semi-simples. On utilise les propositions 2.9.0.28 et 2.9.0.29 pour montrer que ce groupe est lisse. \square

Pour trouver un tore maximal de $\mathbf{Spin}(M, q)$, on considère les cocaractères

$$t_1^\vee : \mathbf{G}_m \longrightarrow \mathbf{Spin}(M, q)$$

défini pour tout anneau R et tout $\alpha_0 \in R^\times$ par $t_1^\vee(\alpha_1) = \alpha_1 e_1 \otimes e_2 + \alpha_1^{-1} e_2 \otimes e_1$, ainsi que pour tout $i = 2, \dots, n$

$$t_i^\vee : \mathbf{G}_m \longrightarrow \mathbf{Spin}(M, q)$$

donnés par

$$t_i^\vee(\alpha_i) = \alpha_i e_1 \otimes e_2 \otimes e_{2i-1} \otimes e_{2i} + e_1 \otimes e_2 \otimes e_{2i} \otimes e_{2i-1} + e_2 \otimes e_1 \otimes e_{2i-1} \otimes e_{2i} + \alpha_i^{-1} e_2 \otimes e_1 \otimes e_{2i} \otimes e_{2i-1}.$$

Le sous-groupe de $\mathbf{Spin}(M, q)$ est un tore, qui est maximal par les mêmes arguments que dans la section 5.2. On le note $\mathbf{DiagSpin}(M, q)$. Les caractères de ce tore sont donnés par $t_i(t_j^\vee(\alpha_j)) = \delta_{ij} \alpha_j$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$.

Les racines sont données pour tout anneau R par la liste suivante :

1. L'algèbre de Lie du tore engendré par $R \cdot (1 - 2e_{2n-1} \otimes e_{2n})$ et par les $R \cdot (e_{2i-1} \otimes e_{2i} - e_{2n-1} \otimes e_{2n})$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$.
2. Le sous-module $R \cdot (e_1 \otimes e_{2i-1})$ de poids $2t_1 + 2t_i + \sum_{j=2, j \neq i}^n t_j$ pour tout $i = 2, \dots, n$.
3. Le sous-module $R \cdot (e_2 \otimes e_{2i})$ de poids $-2t_1 - 2t_i - \sum_{j=2, j \neq i}^n t_j$ pour tout $i = 2, \dots, n$.
4. Le sous-module $R \cdot (e_1 \otimes e_{2i})$ de poids $2t_1 + \sum_{j=2, j \neq i}^n t_j$ pour tout $i = 2, \dots, n$.
5. Le sous-module $R \cdot (e_2 \otimes e_{2i-1})$ de poids $-2t_1 - \sum_{j=2, j \neq i}^n t_j$ pour tout $i = 2, \dots, n$.
6. Le sous-module $R \cdot (e_{2i-1} \otimes e_{2j-1})$ de poids $t_i + t_j$ pour tout $2 \leq i < j \leq n$.
7. Le sous-module $R \cdot (e_{2i} \otimes e_{2j})$ de poids $-t_i - t_j$ pour tout $2 \leq i < j \leq n$.
8. Le sous-module $R \cdot (e_{2i-1} \otimes e_{2j})$ de poids $t_i - t_j$ pour tout $2 \leq i < j \leq n$.
9. Le sous-module $R \cdot (e_{2i} \otimes e_{2j-1})$ de poids $t_j - t_i$ pour tout $2 \leq i < j \leq n$.

On vérifie immédiatement que les morphismes exponentiels $\mathbf{G}_a \rightarrow \mathbf{Spin}(M, q)$ prévus par [SGA3, Exp. XXII, théorème 1.1] sont dans tout les cas de la forme

$\lambda \mapsto 1 + \lambda e_i \otimes e_j$. Ceci nous permet de calculer les coracines. On trouve pour tout anneau R les coracines énumérées ci-dessous :

2. Les coracines t_i^\vee pour tout $i = 2, \dots, n$.
3. Les coracines $-t_i^\vee$ pour tout $i = 2, \dots, n$.
4. Les coracines $t_1^\vee - t_i^\vee$ pour tout $i = 2, \dots, n$.
5. Les coracines $t_i^\vee - t_1^\vee$ pour tout $i = 2, \dots, n$.
6. Les coracines $t_i^\vee + t_j^\vee - t_1^\vee$ pour tout $2 \leq i < j \leq n$.
7. Les coracines $t_1^\vee - t_i^\vee - t_j^\vee$ pour tout $2 \leq i < j \leq n$.
8. Les coracines $t_i^\vee - t_j^\vee$ pour tout $2 \leq i < j \leq n$.
9. Les coracines $t_j^\vee - t_i^\vee$ pour tout $2 \leq i < j \leq n$.

Dans tout les cas, les accouplements prévus par [section accouplements](#) sont donnés par $(X, Y) \mapsto XY$. Finalement :

radicielleSpindn_prop

Proposition 7.2.0.69. — La donnée radicielle de $\mathbf{Spin}(M, q)$ par rapport au tore maximal déployé $\mathbf{DiagSpin}(M, q)$ est

- Le \mathbb{Z} -module libre $N \simeq \mathbb{Z}^n$ des caractères de $\mathbf{PGO}^+(M, q)$ (dont t_1, \dots, t_n forment une base) ;
- Le sous-ensemble fini de celui-ci formé des racines $\pm(2t_1 + 2t_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n t_j)$ pour $i = 2, \dots, n$, $\pm(2t_1 + \sum_{j=1, j \neq i}^n t_j)$ pour $i = 2, \dots, n$ et $\pm t_i \pm t_j$ pour $2 \leq i < j \leq n$;
- Le \mathbb{Z} -module libre $N^\vee \simeq \mathbb{Z}^n$ des cocaractères (de base duale $t_1^\vee, \dots, t_n^\vee$) ;
- Le sous-ensemble fini de celui-ci formé des coracines $\pm t_i$ pour $i = 2, \dots, n$, $\pm(t_1^\vee - t_i^\vee)$ pour $i = 2, \dots, n$, $\pm(t_i^\vee + t_j^\vee - t_1^\vee)$ pour $2 \leq i < j \leq n$ et $\pm(t_i^\vee - t_j^\vee)$ pour $2 \leq i < j \leq n$.

Théorème 7.2.0.70. — Pour tout $n \geq 3$, le groupe $\mathbf{Spin}(M, q)$ est déployé, semi-simple et simplement connexe de type D_n .

Démonstration. — Le groupe est semi-simple par la proposition 7.2.0.68 et déployé. Il est semi-simple puisque ses racines engendrent les caractères du tore. Enfin, il est de type D_n comme on s'en convainc en contemplant le système de racines simples $\{2t_1 + \sum_{i=3}^n t_i, t_2 - t_3, t_3 - t_4, \dots, t_{n-1} - t_n, t_{n-1} + t_n\}$. \square

On calcule maintenant le centre de $\mathbf{Spin}(M, q)$. Pour ce faire, rappelons qu'on dispose d'un morphisme de groupes

$$\chi : \mathbf{Spin}(M, q) \longrightarrow \mathbf{O}(M, q)$$

défini par $\chi(\alpha) = \text{Int}(\alpha)|_{M_R}$ (section 5.2), et d'un morphisme de groupes

$$\rho : \mathbf{GO}(M, q) \longrightarrow \mathbf{PGO}(M, q)$$

défini par $\rho(A) = \mu_A$ où μ_A est la conjugaison par A . Par ailleurs, $\mathbf{O}(M, q)$ est un sous-groupe de $\mathbf{GO}(M, q)$ (preuve du lemme 7.1.0.65). Composant ces deux morphismes, on obtient un morphisme $\mathbf{Spin}(M, q) \rightarrow \mathbf{PGO}(M, q)$ qui

factorise par $\mathbf{PGO}^+(\mathbf{M}, q)$ (puisque $\mathbf{Spin}(\mathbf{M}, q)$ est connexe). On dispose ainsi d'un morphisme

$$\chi' : \mathbf{Spin}(\mathbf{M}, q) \longrightarrow \mathbf{PGO}^+(\mathbf{M}, q)$$

qui induit une bijection entre ensembles de racines et de coracines, ainsi qu'un morphisme de tores $\chi' : \mathbf{DiagSpin}(\mathbf{M}, q) \rightarrow \mathbf{DiagPGO}^+(\mathbf{M}, q)$ dont le noyau est le centre de $\mathbf{Spin}(\mathbf{M}, q)$. Identifiant les tores à \mathbf{G}_m^n au moyen des cocaractères, on trouve

$$\chi'(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\alpha_n^2, \alpha_1^2 \cdot \prod_{i=2}^{n-1} \alpha_i, \alpha_2 \alpha_n^{-1}, \alpha_3 \alpha_n^{-1}, \dots, \alpha_{n-1} \alpha_n^{-1}).$$

Ainsi $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \ker \chi'$ si et seulement si $\alpha_i = \alpha_n$ pour tout $i = 2, \dots, n-1$, $\alpha_n^2 = 1$ et $\alpha_1^2 \alpha_n^{n-2} = 1$.

Proposition 7.2.0.71. — Soit $\mathbf{M} = \mathbb{Z}^{2n}$ et q le module quadratique considéré dans cette section. Si n est pair, le centre de $\mathbf{Spin}(\mathbf{M}, q)$ est isomorphe à $\mu_2 \times \mu_2$. Si n est impair, alors le centre est isomorphe à μ_4 .

automorphismes_dn

7.3. Automorphismes. — On calcule maintenant les automorphismes du groupe adjoint de type D_n $\mathbf{PGO}^+(\mathbf{M}, q)$. On suppose pour commencer que $n \neq 4$.

Pour commencer, remarquons que le groupe $\mathbf{PGO}(\mathbf{M}, q)$ agit sur $\mathbf{PGO}^+(\mathbf{M}, q)$ par conjugaison puisque on a une suite exacte (lemme 7.1.0.63)

$$1 \longrightarrow \mathbf{PGO}^+(\mathbf{M}, q) \longrightarrow \mathbf{PGO}(\mathbf{M}, q) \xrightarrow{D} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0$$

où D est l'homomorphisme de Dickson. On note $\phi : \mathbf{PGO}(\mathbf{M}, q) \rightarrow \mathbf{Aut}_{\mathbf{PGO}^+(\mathbf{M}, q)}$ le morphisme de groupe induit par la conjugaison.

Théorème 7.3.0.72. — Pour $n \neq 4$, on a un isomorphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbf{PGO}^+(\mathbf{M}, q) & \longrightarrow & \mathbf{PGO}(\mathbf{M}, q) & \xrightarrow{D} & \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \phi \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ 1 & \longrightarrow & \mathbf{PGO}^+(\mathbf{M}, q) & \longrightarrow & \mathbf{Aut}_{\mathbf{PGO}^+(\mathbf{M}, q)} & \longrightarrow & \mathbf{AutExt}_{\mathbf{PGO}^+(\mathbf{M}, q)} \longrightarrow 1 \end{array}$$

Démonstration. — Il suffit de remarquer que pour tout anneau R , l'élément $\mu_a \in \mathbf{PGO}(\mathbf{M}, q)(R)$ défini dans le lemme 7.1.0.63 permute les racines simples de $\mathbf{PGO}^+(\mathbf{M}, q)$. C'est un calcul immédiat. \square

7.4. Groupes tordus. — A faire.

TABLE 1. Groupes de Chevalley (sur \mathbb{Z}) simples simplement connexes ou adjoints par type de Dynkin

type	simplement connexe	adjoint	centre du groupe s.c.
A_n	$\mathrm{SL}_{n,\mathbb{Z}}$ (déf. 3.3.0.48)	$\mathrm{PGL}_{n,\mathbb{Z}}$ (déf. 3.2.0.38)	μ_n (prop. 3.3.0.54)
B_n			
C_n			
D_n			

GroupesChevalley_table

TABLE 2. Automorphismes des groupes de Chevalley simples adjoints

type	groupe d’automorphismes
A_n	$\mathbf{Aut}_{\mathbf{M}_{n,\mathbb{Z}} \times \mathbf{M}_{n,\mathbb{Z}}, \tau}$ (th. 3.4.0.61)
B_n	
C_n	
D_n	

GroupesChevalley_table

TABLE 3. Groupes tordus de type déployé simple simplement connexe ou adjoint

type	simplement connexe	adjoint	centre du groupe s.c.
A_n	$\mathbf{SU}_{A,\nu}$ (th. 3.5.0.77)	$\ker(\mathbf{Aut}_{A,\nu} \rightarrow \mathbf{Aut}_{Z(A),\nu})$ (prop. 3.5.0.65)	μ_n
B_n			
C_n			
D_n			

GroupesTordus_table

TABLE 4. Groupes tordus intérieurs de type déployé simple simplement connexe ou adjoint

type	simplement connexe	adjoint	centre du groupe s.c.
A_n	$\mathbf{SL}_{1,A}$ (th. 3.5.0.77)	\mathbf{PGL}_A (prop. 3.5.0.65)	
B_n			
C_n			
D_n			

GroupesInterieurs_table

8. Tables

Faire une table avec les tordus intérieurs, ou alors l’intégrer à la table sur les tordus.

TABLE 5. Automorphismes de tordus de type déployé simple adjoint ou simplement connexe.

type	groupe d'automorphismes
A_n	Aut _{A,σ} (c'est avant la prop. 3.5.0.65)
B_n	
C_n	
D_n	

phismesTordus_table

Sans-doute mieux préciser la topologie (étale ou fppf) dans la table ci-dessous.

TABLE 6. Champ équivalent au champ $Tors(G)$ des toseurs sous un groupe G

G	Champ	Topologie	
μ_n	n-Triv	fppf	2.5.3.7
μ_2	2-Triv = ModDet	fppf	2.7.1.4
O_h	Formes(h)	ét ou fppf	4.1.0.4
$SO_{q_{2n+1}^h}$	QuadDetTriv _{q_{2n+1}^h}	ét ou fppf	4.3.0.23

phismesTordus_table

Références

ausgol

borelag

boreltits

lie1

lie2

lie4

lie7

chevold

chevbou

[AusGol60]

[Bo91]

[BoTi65]

[Bou1]

[Bou2]

[Bou3]

[Bou4]

[Chev60]

[Chev61]

M. Auslander, O. Goldman, *The Brauer group of a commutative ring*, Trans. Amer. Math. Soc. **97** (1960), 367–409.

A. Borel, *Linear algebraic groups* (2nd ed.) Springer-Verlag, Berlin, 1991.

A. Borel, J. Tits, *Groupes réductifs*, Publ. Math. IHES **27** (1965), 55–151.

N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie* (Ch. 1), Springer-Verlag, Berlin, 2007.

N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie* (Ch. 2–3), Springer-Verlag, Berlin, 2006.

N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie* (Ch. 4–6), Springer-Verlag, Berlin, 2006.

N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie* (Ch. 7–8), Springer-Verlag, Berlin, 2007.

C. Chevalley, *Une démonstration d'un théorème sur les groupes algébriques*, J. Mathématiques Pures et Appliquées, **39**(1960), 307–317.

C. Chevalley, *Certain schémas de groupes semi-simples*, Sem. Bourbaki **219**, 1960/61, 219–234.

- bible** [BIBLE] C. Chevalley, *Classification des groupes algébriques semi-simples* (with Cartier, Grothendieck, Lazard), Collected Works, volume 3, Springer-Verlag, 2005.
- D** [D65] M. Demazure, *Schémas en groupes réductifs*, Bull. Soc. Math. France **93** (1965), 369–413.
- D77** [D77] M. Demazure, *Automorphismes et déformations des variétés de Borel*, Invent. Math. **39** (2) (1977), 179–186.
- dg** [DG70] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes algébriques*, Masson, Paris, 1970.
- sga3** [SGA3] M. Demazure, A. Grothendieck, *Schémas en groupes* I, II, III, Lecture Notes in Math **151**, **152**, **153**, Springer-Verlag, New York (1970) et réédition : Documents Mathématiques **7**, **8**, Société Mathématique de France (2003).
- gir** [Gi71] J. Giraud, *Cohomologie non abélienne*, Springer-Verlag, Berlin, 1971, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 179.
- ega** [EGA] A. Grothendieck, *Éléments de Géométrie Algébrique* (rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné, Publ. Math. IHES **4**, **8**, **11**, **17**, **20**, **24**, **28**, **32**, 1960–7.
- sga1** [SGA1] A. Grothendieck, *Séminaire de géométrie algébrique I*, LNM 224, Springer-Verlag, 1971, et réédition : Documents Mathématiques **3**, Société Mathématique de France (2011).
- brauer1** [BrI] A. Grothendieck, “Algèbres d’Azumaya et interprétations diverses” in *Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas*, North-Holland, Amsterdam, 1968.
- brauer2** [BrII] A. Grothendieck, “Le groupe de Brauer II : Théories cohomologiques” in *Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas*, North-Holland, Amsterdam, 1968.
- brauer3** [BrIII] A. Grothendieck, “Le groupe de Brauer III : exemples et compléments” in *Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas*, North-Holland, Amsterdam, 1968.
- Kneser02** [Knes02] M. Kneser. *Quadratische Formen*, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- knus** [Knus91] M.-A. Knus, *Quadratic and hermitian forms over rings*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **294**, Springer-Verlag, New York, 1991.
- kn-oj** [KnusOj74] M.-A. Knus, M. Ojanguren, *Théorie de la descente et algèbres d’Azumaya*, Lecture Notes in Math. **389**, Springer-Verlag, Berlin, 1974.
- bookinv** [KMRT98] M.-A. Knus, A. Merkurjev, M. Rost, J.-P. Tignol, *The book of involutions*, AMS Colloq. Publ. **44**, Providence, 1998.

5 juillet 2013

BAPTISTE CALMÈS ET JEAN FASEL