

Simulation de systèmes de spin à l'aide de dispositifs quantiques à variables continues

Baptiste Chevalier, Octave Mestoudjian, Johan-Luca Rossi

April 2022

Table des matières

1	Paradigme des Variables Continues	3
1.1	Généralisation du modèle discret	3
1.1.1	Le modèle usuel : Qubits	3
1.1.2	Modèle des Qudits	3
1.2	Le modèle à variables continues	4
1.2.1	Le modèle des Qumodes	4
1.2.2	Opérations sur les qumodes	5
1.2.3	Ensemble universel	6
2	Modèle d'Ising	7
2.1	Définition	7
2.2	Motivations	8
2.2.1	Systèmes physiques concernés	8
2.2.2	Formulation d'Ising de problèmes NP :	9
3	Encodage bosonique	12
4	Implémentation de l'évolution temporelle avec les qumodes	16
4.1	Pré-requis pour la décomposition	16
4.2	Décomposition en portes quantiques	17

Introduction

La simulation de systèmes quantiques est connue pour être un problème difficile, à cause du nombre exponentiel de ressources nécessaires. Feynman en 1982 propose l'utilisation d'ordinateurs quantiques afin de pallier à ce problème.

L'information quantique depuis sa conception a su établir un modèle classique pour traiter les problèmes, basé sur les qubits et sur un ensemble de portes unitaires universelles. En parallèle, d'autres modèles ont pu être conceptualisés comme le modèle des qudits ou celui des qumodes. Dans le modèle à variables continues(CV)/qumodes l'information est encodée dans des observables à spectre continu appelées quadratures en référence aux observables de position et d'impulsion.

Le modèle d'Ising, introduit en physique dans les années 1930, permet la simulation de systèmes de spins, l'un des problèmes majeurs. Ce modèle est beaucoup utilisé pour étudier les gaz sur réseaux ainsi que le système de verre de spin. La simulation d'un tel problème est considérée comme NP-Complet, d'où l'importance de savoir le résoudre rapidement à l'aide d'un appareil quantique.

Le papier [1] dont nous faisons l'étude dans ce projet a pour but de proposer un protocole pour la simulation d'un tel système de spins à l'aide du modèle CV. A partir de l'Hamiltonien d'Ising, nous verrons comment encoder l'information en degrés de liberté bosoniques puis dans les quadratures afin de simuler l'évolution temporelle du système.

Ce projet a plusieurs objectifs : dans un premier temps, étudier le modèle des variables continues pour l'information quantique. Les différences que ce modèle présente avec le modèle classique ainsi que les similitudes. Puis, nous en apprendrons plus sur le modèle d'Ising et l'intérêt qu'apporte la résolution de ce problème par un ordinateur quantique. Enfin, nous verrons l'implémentation proposée dans le papier [1] pour la simulation de systèmes de spins à l'aide du modèle à variables continues.

Chapitre 1

Paradigme des Variables Continues

1.1 Généralisation du modèle discret

1.1.1 Le modèle usuel : Qubits

Dans le modèle usuel utilisé en information quantique, nous disposons d'une base calculatoire discrète à deux états $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. La base conjuguée constituée des états $|+\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$ et $|-\rangle = \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$ est reliée à la base calculatoire par la porte de Hadamard comme suit :

$$H|0\rangle = |+\rangle \quad (1.1)$$

$$H|1\rangle = |-\rangle \quad (1.2)$$

Le groupe de Pauli constitué des matrices $\{X, Y, Z\}$ est un générateur de l'ensemble des qubits. Les matrices X et Z agissent comme suivent :

$$X|j\rangle = |j \oplus 1\rangle \quad (1.3)$$

$$Z|j\rangle = (-1)^j |j\rangle \quad (1.4)$$

$$X|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle \quad (1.5)$$

$$Z|\pm\rangle = |\mp\rangle \quad (1.6)$$

On dispose également d'ensembles universels d'opérations unitaires pouvant réaliser n'importe quelles opérations sur les qubits. Un exemple d'ensemble universel est l'ensemble des rotations dans la Bloch sphère avec le phase shift et le CNOT $\{R_X(\theta), R_Y(\theta), R_Z(\theta), P(\varphi), CNOT\}$.

1.1.2 Modèle des Qudits

Le modèle des qudits est une généralisation du modèle des qubits sur d états [2]. La base calculatoire devient ainsi : $\{|j\rangle\}_{j=1\dots d}$. La base conjuguée elle est la base des $\{|\tilde{j}\rangle\}$ et est accessible via la transformée de fourrier discrète :

$$F = \sum_{j,k=1}^n \omega^{jk} |j\rangle \langle k| \quad (1.7)$$

Ainsi $|\tilde{j}\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=1}^d e^{\frac{2i\pi}{d} j \tilde{j}}$.

Le groupe générateur est le groupe de Pauli généralisé constitué des portes de Heisenberg-Weyl définies comme :

$$X_d |j\rangle = |j+1(\text{mod } d)\rangle \quad (1.8)$$

$$Z_d |j\rangle = e^{\frac{2i\pi}{d} j} |j\rangle \quad (1.9)$$

$$X_d |\tilde{j}\rangle = e^{\frac{-2i\pi}{d} \tilde{j}} |\tilde{j}\rangle \quad (1.10)$$

$$Z_d |\tilde{j}\rangle = |\tilde{j}-1(\text{mod } d)\rangle \quad (1.11)$$

Ces opérateurs unitaires peuvent également être écrits en représentation exponentielle comme suit :

$$X_d = e^{\frac{-2i\pi}{d} \hat{p}} \quad (1.12)$$

$$Z_d = e^{\frac{2i\pi}{d} \hat{q}} \quad (1.13)$$

avec \hat{q} et \hat{p} que l'on peut voir comme les opérateurs de quadratures discrets pour faire un parallèle avec la suite. Ils sont définis comme $\hat{q}|j\rangle = j|j\rangle$ et $\hat{p}|\tilde{j}\rangle = \tilde{j}|\tilde{j}\rangle$.

On peut s'intéresser à la représentation de nos états dans l'espace des phases. On peut définir l'opérateur de déplacement $\hat{D}(l, m) = Z^l X^m e^{-i\pi lm/d}$. Cet opérateur a pour effet de déplacer un état $|j\rangle$ vers un état $|j+m\rangle$ et un état $|\tilde{j}\rangle$ vers l'état $|\tilde{j}-l\rangle$. On s'aperçoit que l'espace des phases est cyclique dans les deux directions et peut être ainsi assimilé à une maille sur la surface d'un tore. En passant à la limite continue, l'espace des phases devient ainsi rectangulaire.

1.2 Le modèle à variables continues

1.2.1 Le modèle des Qumodes

Le modèle à variables continues pour l'information quantique est une généralisation des qudits dans le cas d'un espace de Hilbert de dimension infinie. Il se base sur les opérateurs de quadrature \hat{q} et \hat{p} ayant un spectre continu.

$$\hat{q}|s\rangle_q = s|s\rangle_q, \hat{p}|s\rangle_p = s|s\rangle_p \quad (1.14)$$

La base calculatoire est générée par les états $|s\rangle_q$ continus et orthogonaux : ${}_q\langle r|s\rangle_q = \delta(r-s)$. La base des $\{|s\rangle_p\}$ est la base conjuguée. Elles sont connectées par la transformée de Fourier :

$$|s\rangle_p = F|s\rangle_q = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dr e^{irs} |r\rangle_q \quad (1.15)$$

$$|s\rangle_q = F^\dagger |s\rangle_p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dr e^{-irs} |r\rangle_p \quad (1.16)$$

Le groupe de Heisenberg-Weyl est l'analogue continu du groupe de Pauli. Les équivalents des opérateurs X et Z sont les opérateurs de déplacement

$$X(s) = e^{-is\hat{p}}, Z(s) = e^{is\hat{q}} \quad (1.17)$$

Il agissent sur les états des deux bases selon les relations suivantes :

$$X(r) |s\rangle_q = |s+r\rangle_q \quad (1.18)$$

$$Z(r) |s\rangle_q = e^{isr} |s\rangle_q \quad (1.19)$$

$$X(r) |s\rangle_p = e^{-irs} |s\rangle_p \quad (1.20)$$

$$Z(r) |s\rangle_p = |s+r\rangle_p \quad (1.21)$$

Ces actions peuvent être vérifiées en utilisant la transformée de Fourier 1.15.

1.2.2 Opérations sur les qumodes

Les interactions les plus facilement réalisables expérimentalement en optique correspondent à des Hamiltoniens quadratiques en \hat{q} et \hat{p} . De telles opérations transforment des états Gaussiens en d'autres états Gaussiens. Nous allons introduire le formalisme symplectique [3] pour les variables continues qui permet de travailler avec des opérations linéaires unitaires pour de telles transformations. Pour cela, les n qumodes sont rangés dans un vecteur de taille $2n$

$$\hat{r} = (\hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots, \hat{q}_n, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n)^T \quad (1.22)$$

Ainsi une transformation Gaussienne quelconque \hat{U} agit sur \hat{v} comme suit :

$$\hat{U}^\dagger \hat{r} \hat{U} = M\hat{r} + \vec{c} \quad (1.23)$$

avec M une matrice symplectique ($\text{Det}(L) = 1$) de taille $2n \times 2n$ et \vec{c} un vecteur de $2n$ constantes représentant les déplacements. Les matrices symplectiques M respectent la propriété suivante : $M^T \Omega M = \Omega$ avec :

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

Ainsi en reprenant le cas de l'opérateur de déplacement $Z(s) = e^{is\hat{q}}$ vu précédemment qui déplace la phase de la valeur s en quantité de mouvement, son action dans le formalisme symplectique est la suivante :

$$\begin{bmatrix} \hat{q} \\ \hat{p} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \hat{q} \\ \hat{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

Pour donner un autre exemple, une rotation d'angle θ dans le plan de l'espace des phases correspond à la transformation $R(\theta) = e^{i\theta(\hat{q}^2 + \hat{p}^2)}$. D'une façon générale, la représentation de n'importe quel unitaire généré à partir d'un Hamiltonien quadratique $\hat{H} = \frac{1}{2} r^T H r$ peut être associé à la matrice symplectique M suivante :

$$M = e^{-\Omega H} \quad (1.26)$$

L'unitaire de rotation est généré par l'hamiltonien $\hat{H} \propto \theta(\hat{q}^2 + \hat{p}^2)$ et peut s'écrire comme :

$$R(\theta) = e^{\frac{i}{2}[\hat{q} \quad \hat{p}]\begin{bmatrix}\theta & 0 \\ 0 & \theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{q} \\ \hat{p}\end{bmatrix}} \quad (1.27)$$

Sa représentation dans le formalisme symplectique est donc :

$$\begin{bmatrix}\hat{q} \\ \hat{p}\end{bmatrix} \longrightarrow \exp\left(-\begin{bmatrix}0 & -I \\ I & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta & 0 \\ 0 & \theta\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\hat{q} \\ \hat{p}\end{bmatrix} \quad (1.28)$$

$$\begin{bmatrix}\hat{q} \\ \hat{p}\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{q} \\ \hat{p}\end{bmatrix} \quad (1.29)$$

Pour la valeur $\theta = \pi/2$, on a une rotation dans le sens indirect correspondant à la transformation de Fourier $R(\pi/2) = F$ puisque $F^\dagger \hat{q} F = -\hat{p}$ et $F^\dagger \hat{p} F = \hat{q}$ ou dans le formalisme symplectique :

$$\begin{bmatrix}\hat{q} \\ \hat{p}\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{q} \\ \hat{p}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\hat{p} \\ \hat{q}\end{bmatrix} \quad (1.30)$$

En partant de l'égalité suivante : $R(\pi/2)^\dagger \hat{p} R(\pi/2) |s\rangle_q = \hat{q} |s\rangle_q = s |s\rangle_q$, on en déduit que $\hat{p} R(\pi/2) |s\rangle_q = s R(\pi/2) |s\rangle_q$. Ainsi le vecteur $R(\pi/2) |s\rangle_q$ est vecteur propre de \hat{p} associé à la valeur s , c'est donc le vecteur $|s\rangle_p$. Au final, $R(\pi/2) |s\rangle_q = |s\rangle_p$ et on retrouve bien le comportement de la transformée de Fourier.

1.2.3 Ensemble universel

De la même façon qu'avec les qubits, il est possible de définir un ensemble universel d'opérations pour les qumodes. Un ensemble conventionnel est celui composé des opérateurs $D_{\hat{q},k}(s) = e^{is\hat{q}^k/k}$ pour les valeurs $k = 1, 2, 3$, ainsi que la transformée de Fourier $F = e^{i\frac{\pi}{2}(\hat{q}^2 + \hat{p}^2)}$ et la porte $C_z = e^{i\hat{q}_1 \otimes \hat{q}_2}$.

L'opérateur D est l'opérateur de déplacement $Z(s)$ pour $k = 1$, l'opérateur de cisaillement (*shear*) pour $k = 2$ et l'opérateur de phase cubique pour $k = 3$. L'opérateur C_z intrique deux qumodes selon : $C_z |s\rangle_{q1} |r\rangle_{p2} = |s\rangle_{q1} |r + s\rangle_{p2}$

Tous ces opérateurs forment un ensemble universel réalisant toutes les opérations sur plusieurs qumodes. Tout cela pris en compte, le modèle des qumodes, d'un point de vue théorique, semble équivalent à celui des qubits. [4]

Chapitre 2

Modèle d'Ising

Nommé d'après le physicien Ernest Ising, le modèle d'Ising est un modèle du ferromagnétisme en mécanique statistique. Ce chapitre a pour objectif d'en faire une description succincte pour définir les notions clés et exposer son intérêt dans le cadre de problème d'informatique théorique.

2.1 Définition

Représentation schématique : On considère un treillis (lattice) de dimension d et de taille l ou chacun des $N = l^d$ emplacements/sites σ_i peut se trouver dans un des deux états : $+1$ ou -1 . Dans le cas d'un modèle de spins (cas considéré dans la suite), on peut les représenter par la notation usuelle \uparrow et \downarrow (cf. Figure 2.1). Chaque état pouvant interagir/influencer ses voisins proches ($2d$ voisins proches pour chaque état) et pouvant subir l'action d'un champ extérieur.

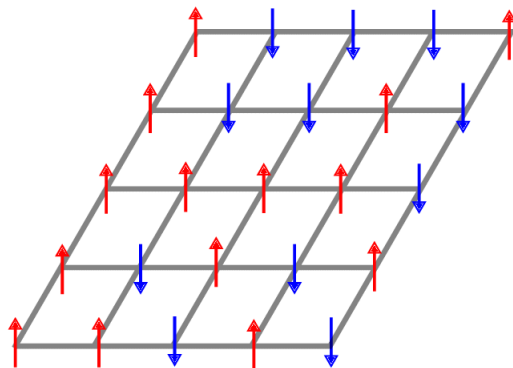


FIGURE 2.1 – Représentation possible d'un treillis du modèle d'Ising pour le spin. Avec ici $d = 2$ et $l = 5$

Représentation de l'Hamiltonien : Pour représenter le comportement de chaque spin, et donc obtenir l'énergie correspondant à chaque configuration possible, il est nécessaire de

définir l'Hamiltonien en question. Celui-ci se décompose en deux types d'interactions :

En considérant l'action d'un **champ magnétique extérieur** $\vec{B} = B_0 \hat{\alpha}$ on obtient un premier terme :

$$H_{champ} = -B_0 \sum_{i=1}^N \hat{s}_i^\alpha \quad (2.1)$$

où $\alpha = x, y, z$ défini la direction de spin considérée, \hat{s}_i^α est l'opérateur de spin agissant sur ième site de valeurs propres $+1$ (d'état propre $|\uparrow\rangle$) et -1 (d'état propre $|\downarrow\rangle$).

Chaque spin possédant son propre moment magnétique influençant ses voisins proches, on obtient donc un terme **d'interaction entre voisins proches** :

$$H_{int} = - \sum_{\langle j,k \rangle} J_{jk}^\alpha \hat{s}_j^\alpha \hat{s}_k^\alpha \quad (2.2)$$

avec $\langle j, k \rangle$ représentant les indices des voisins proches par simplicité, J_{jk}^α le terme de couplage (sans dimension) indiquant à quel point les spins sont couplés : si $J_{jk}^\alpha > 0$ (resp $J_{jk}^\alpha < 0$) l'interaction est appelée ferromagnétique (resp anti-ferromagnétique) et si $J_{jk}^\alpha = 0$, les spins n'interagissent pas.

On obtient alors l'Hamiltonien d'Ising suivant :

$$H_{Ising} = H_{champ} + H_{int} = -B_0 \sum_i \hat{s}_i^\alpha - \sum_{\langle j,k \rangle} J_{jk}^\alpha \hat{s}_j^\alpha \hat{s}_k^\alpha \quad (2.3)$$

2.2 Motivations

De part son universalité et sa simplicité, le Modèle d'Ising a toujours suscité l'intérêt profond de la communauté scientifique, en particulier pour sa capacité à décrire des comportements liés aux transitions de phases. De plus, de part la nature NP-Complete de certains problèmes liés à l'étude du modèle d'Ising, il se révèle alors comme un atout potentiellement important dans la résolution de problèmes d'optimisation combinatoire.

2.2.1 Systèmes physiques concernés

Pour illustrer la définition de ce modèle, on peut citer quelques exemples de systèmes physiques concernés par le modèle d'Ising :

Aimant : En reprenant directement la définition de la section précédente, si chaque site représente le spin d'une des composantes d'un système, chaque spin agit comme un "mini aimant" avec son propre moment magnétique. Dans le cas où ceux-ci sont tous alignés (ferromagnétisme), le treillis représente alors un aimant avec son moment magnétique macroscopique.

Gaz sur réseau : Dans ce cas chaque site représente un emplacement possible pour une particule du gaz, celui-ci pouvant être occupé (+1) ou non-occupé (−1) et donc étudier les comportements critiques de ce type de système. En effet, les différentes phases de la matière sont représentées par différents niveaux de symétrie et le modèle d’Ising présente une évolution des symétries adaptée à la description des transitions de phases.

Verre de spin : En physique de la matière condensée, le verre de spin représente un état magnétique caractérisé par son aspect aléatoire. Dans les solides ferromagnétiques (comme dans le cas de l’aimant), les spins s’alignent tous dans la même direction. Le verre de spin contrairement aux solides ferromagnétiques est défini comme un état magnétique désordonné, ou les spins sont alignés de manière aléatoire ou avec un motif irrégulier, les terme de couplage suivent aussi ce désordre. Physiquement on peut les représenter comme des alliages métalliques comportant un petit nombre d’impuretés magnétiques disposées au hasard dans l’alliage.

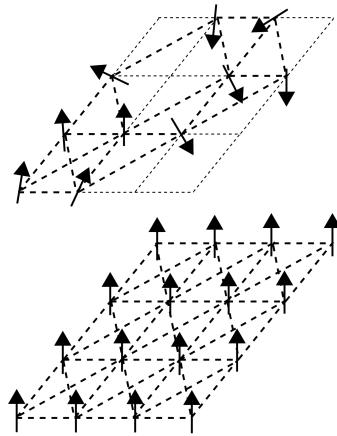


FIGURE 2.2 – Représentation schématique d’une structure aléatoire d’un verre de spins (haut) et d’un état ferromagnétique (bas).

2.2.2 Formulation d’Ising de problèmes NP :

Trouver l’état fondamental du modèle d’Ising pour le verre de spin s’avère être un problème NP-Difficile pour des ordinateurs classiques, il semble alors naturel de suspecter des connections intimes entre celui-ci et d’autres problèmes NP. En outre, la version décisionnelle de ce problème s’avère être NP-Complexe (ex : l’état fondamental est-il d’énergie $E \leq 0$, oui ou non ?), rendant alors possible la réduction en temps polynomial de n’importe quel problème NP-Complexe au problème du modèle d’Ising pour le verre de spin.

Optimisation quantique adiabatique : Depuis maintenant un certain temps, l’utilisation d’optimisation quantique adiabatique (QAO) pour résoudre des problèmes NP-Difficile et NP-Complexe a soulevé un grand intérêt. Décrivons le principe de cette méthode basée

sur [5] [6] :

Tout les systèmes quantiques évoluent dans le temps selon l'équation de Shrodinger, d'où découlent la description d'un état $|\phi(t)\rangle$ et d'un hamiltonien $H(t)$ dépendant du temps. Supposons maintenant que nous avons défini un hamiltonien H_p tel que son état fondamental $|\phi_g^p\rangle$ représente la solution au problème qui nous intéresse. On définit aussi un hamiltonien H_0 pour lequel il est facile de trouver l'état fondamental $|\phi_g^0\rangle$. Enfin, en préparant un système quantique dans l'état $|\phi(0)\rangle = |\phi_g^0\rangle$ et en changeant adiabatiquement l'hamiltonien pendant un temps T selon

$$H(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) H_0 + \frac{t}{T} H_p \quad (2.4)$$

alors si T est suffisamment grand et que H_p et H_0 ne commute pas, on obtient ainsi l'état fondamental $|\phi(T)\rangle = |\phi_g^p\rangle$ de H_p , solution de notre problème.

Cela est rendu possible grâce au *théorème adiabatique*[7]. Au temps $t = 0$, $H(0) = H_0$, l'état de notre système est alors $|\phi(0)\rangle$, le *théorème adiabatique* nous dit alors que si $H(t)$ évolue suffisamment lentement, alors l'évolution de l'état $|\phi(t)\rangle$ va rester suffisamment près de l'état fondamental $|\phi_g(t)\rangle$.

Pour un problème de taille N , on trouve typiquement

$$T = \mathcal{O} [\exp (\alpha N^\beta)] \quad (2.5)$$

pour que le système reste dans l'état fondamental, pour des coefficients positifs α, β , quand $N \rightarrow \infty$. Alors qu'il est peu probable que des problèmes NP-Complet puissent être résolus en un temps polynomial par QAO, les coefficients α et β peuvent être plus petits que pour des algorithmes classiques connus, et donc laisser la possibilité qu'un algorithme QAO soit plus efficace qu'un algorithme classique.

Pour revenir au cas du verre de spin, l'Hamiltonien H_p peut être écrit comme une version quantique de celui du modèle d'Ising pour le verre de spin, on retrouve alors la formulation 2.3. En posant $\alpha = z$, on retrouve alors

$$H_P = -B_0 \sum_i \hat{s}_i^z - \sum_{\langle j,k \rangle} J_{jk}^z \hat{s}_j^z \hat{s}_k^z \quad (2.6)$$

On choisit ensuite H_0 comme étant constitué d'un champ magnétique transversal $\vec{B}' = B'_0 \cdot \hat{x}$

$$H_0 = -B'_0 \sum_i \hat{s}_i^x \quad (2.7)$$

de cette manière l'état fondamental de H_0 est une équi-superposition de tous les états possibles dans la base de H_p , et donc permet d'éviter tout croisement (les bases propres de H_0 et H_P étant très différentes).

Le problème de partition La notion de transition de phases dans les problèmes de combinatoire aléatoire [8], permet d’aborder d’une nouvelle manière des problèmes d’informatique théorique. Nous allons voir dans cette partie comment il est possible de traiter le problème de partition des nombre en déterminant l’état fondamental d’un Hamiltonien du modèle d’Ising d’un verre de spin, et donc de profiter de la méthode définie ci-dessus.

Le problème de partition des nombre se formule de la manière suivante : Sachant un ensemble $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, de nombres positifs, trouver une partition, i.e. un sous-ensemble $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$, tel que le résidu

$$E = \left| \sum_{a_j \in \mathcal{A}'} a_j - \sum_{a_j \notin \mathcal{A}'} a_j \right| \quad (2.8)$$

soit minimal. Une partition ou $E = 0$ est dite *parfaite*. La version décisionnelle de ce problème, i.e. de trouver si une telle partition existe, est NP-Complet.

On peut encoder une partition en prenant les nombres $s_j = \pm 1$: $s_j = +1$ si $a_j \in \mathcal{A}'$, $s_j = -1$ sinon. On peut réécrire le résidu

$$E = \left| \sum_{j=1}^N a_j s_j \right| \quad (2.9)$$

s_j pouvant alors représenter les valeurs propres d’opérateur de spin \hat{s}_j^z , on retrouve l’Hamiltonien correspondant

$$H_{part} = \sum_{i,j=1}^N a_i a_j \hat{s}_i^z \hat{s}_j^z \quad (2.10)$$

On retrouve alors une formulation similaire à 2.6. Il s’agit d’une gamme infinie de modèles de spins pour le verre de spin avec les termes de couplage $J_{ij} = -a_i a_j$. Trouver la solution revient alors à trouver l’état fondamental de cet Hamiltonien. Une démonstration de l’implémentation de ce problème avec un système basé sur un verre de spin d’ions piégés a été réalisée dans [9]. Ce type de système présente des interactions spin-spin à longue distance, amenant a des modèles de spins hautement connectés comme certains modèles de verre de spin [10]. Cela menant alors à un modèle antiferromagnétique directement connecté au problème NP-Complet de partition des nombres. Sa solution pouvant alors être trouvée via recuit quantique (recuit quantique dans le cas des D-Wave systems[11]), i.e. via optimisation quantique adiabatique d’un champ magnétique transversal, brièvement présenté précédemment.

Chapitre 3

Encodage bosonique

NB : Les opérateurs de quadratures nommés \hat{q} et \hat{p} dans la partie 1.2 sont maintenant respectivement nommés \hat{X} et \hat{P} .

Dans cette partie, on cherche à réécrire l'Hamiltonien d'Ising obtenu précédemment en terme d'opérateurs bosoniques et en particulier en terme d'opérateurs photoniques de création et d'annihilation.

Lorsqu'il n'existe en chaque emplacement que deux valeurs de spin possibles, et donc notamment dans le modèle d'Ising, les opérateurs de spin s'écrivent

$$\hat{s}_i^\alpha = \frac{\hbar}{2} \sigma_\alpha \quad (3.1)$$

où $\alpha = x, y, z$ et les σ_α sont les matrices de Pauli. Dans la suite on considérera (qu'à une constante près)

$$\hat{s}_i^\alpha = \frac{\sigma_\alpha}{2} \quad (3.2)$$

Considérons maintenant deux paires d'opérateurs de création et d'annihilation $a_\uparrow^\dagger, a_\uparrow$ et $a_\downarrow^\dagger, a_\downarrow$ associés à deux oscillateurs harmoniques et vérifiant les relations bosoniques suivantes :

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{i,j}, \quad [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0, \quad [a_i, a_j] = 0 \quad (3.3)$$

L'application de Jordan-Schwinger permet d'obtenir le résultat suivant :

Si nous disposons d'une représentation d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} par N matrices $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_N$ de taille n et de n paires d'opérateurs de création et d'annihilation $a_1^\dagger, a_1, \dots, a_n^\dagger, a_n$ vérifiant les relations 3.3 alors les opérateurs

$$\hat{A}_k = \sum_{i,j} a_i^\dagger (\mathbb{A}_k)_{i,j} a_j \quad (3.4)$$

forment une représentation de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} sur l'espace de Fock et l'application précédente induit une bijection entre les \mathbb{A}_k et les A_k .

Dans le cas qui nous intéresse ce résultat nous permet d'obtenir à partir de la représentation fondamentale de l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ des moments angulaires 3.2 et des opérateurs $a_{\uparrow}^{\dagger}, a_{\downarrow}^{\dagger}, a_{\uparrow}, a_{\downarrow}$, la représentation de $\mathfrak{su}(2)$ sur l'espace de Fock suivante :

$$\hat{S}_{\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_i^{\dagger} (\sigma^{\alpha})_{i,j} a_j \quad (3.5)$$

c'est à dire

$$\hat{S}_x = \frac{1}{2} (a_{\downarrow}^{\dagger} a_{\uparrow} + a_{\uparrow}^{\dagger} a_{\downarrow}) \quad (3.6)$$

$$\hat{S}_y = \frac{i}{2} (a_{\downarrow}^{\dagger} a_{\uparrow} - a_{\uparrow}^{\dagger} a_{\downarrow}) \quad (3.7)$$

$$\hat{S}_z = \frac{1}{2} (a_{\uparrow}^{\dagger} a_{\uparrow} - a_{\downarrow}^{\dagger} a_{\downarrow}) \quad (3.8)$$

On peut alors écrire les opérateurs mixtes suivants

$$\hat{S}_+ = \hat{S}_x + i\hat{S}_y = a_{\uparrow}^{\dagger} a_{\downarrow} \quad (3.9)$$

$$\hat{S}_- = \hat{S}_x - i\hat{S}_y = a_{\downarrow}^{\dagger} a_{\uparrow} \quad (3.10)$$

$$\hat{S}_z = \frac{1}{2} (\mathbf{n}_{\uparrow} - \mathbf{n}_{\downarrow}) \quad (3.11)$$

où

$$\mathbf{n}_{\uparrow} = a_{\uparrow}^{\dagger} a_{\uparrow} \quad \text{et} \quad \mathbf{n}_{\downarrow} = a_{\downarrow}^{\dagger} a_{\downarrow} \quad (3.12)$$

On obtient notamment les relations de réécriture suivantes

$$\hat{S}_x = \frac{1}{2} (\hat{S}_+ + \hat{S}_-) \quad \hat{S}_y = \frac{-i}{2} (\hat{S}_+ - \hat{S}_-) \quad (3.13)$$

On remarque que les opérateurs S_+ et S_- sont des opérateurs d'inversion de spin, en effet S_+ détruit un spin \downarrow puis créé un spin \uparrow et S_- agit symétriquement. Ces nouveaux opérateurs vérifient les relations suivantes

$$[\hat{S}_+, \hat{S}_-] = [a_{\uparrow}^{\dagger} a_{\downarrow}, a_{\downarrow}^{\dagger} a_{\uparrow}] \quad (3.14)$$

$$= a_{\uparrow}^{\dagger} a_{\uparrow} - a_{\downarrow}^{\dagger} a_{\downarrow} \quad (3.15)$$

$$= \mathbf{n}_{\uparrow} - \mathbf{n}_{\downarrow} \quad (3.16)$$

$$= 2\hat{S}_z \quad (3.17)$$

$$[\hat{S}_z, \hat{S}_+] = \frac{1}{2}(\mathbf{n}_\uparrow - \mathbf{n}_\downarrow)a_\uparrow^\dagger a_\downarrow - a_\uparrow^\dagger a_\downarrow \frac{1}{2}(\mathbf{n}_\uparrow - \mathbf{n}_\downarrow) \quad (3.18)$$

$$= \frac{1}{2}([\mathbf{n}_\uparrow, a_\uparrow^\dagger]a_\downarrow - [\mathbf{n}_\downarrow, a_\downarrow]a_\uparrow^\dagger) \quad (3.19)$$

$$= \frac{1}{2}(a_\uparrow^\dagger a_\downarrow + a_\downarrow a_\uparrow^\dagger) \quad (3.20)$$

$$= \hat{S}_+ \quad (3.21)$$

Et de même $[\hat{S}_z, \hat{S}_-] = -\hat{S}_-$.

$$\{\hat{S}_+, \hat{S}_-\} = a_\uparrow^\dagger a_\downarrow a_\downarrow^\dagger a_\uparrow + a_\downarrow^\dagger a_\uparrow a_\uparrow^\dagger a_\downarrow \quad (3.22)$$

$$= a_\uparrow^\dagger a_\uparrow (1 + a_\downarrow^\dagger a_\downarrow) + a_\downarrow^\dagger a_\downarrow (1 + a_\uparrow^\dagger a_\uparrow) \quad (3.23)$$

$$= \mathbf{n}_\uparrow + \mathbf{n}_\downarrow + 2\mathbf{n}_\uparrow \mathbf{n}_\downarrow \quad (3.24)$$

Puis, comme dans le modèle d'Ising, chaque emplacement du treillis est occupé soit par un spin \uparrow soit par un spin \downarrow , $\mathbf{n}_\uparrow + \mathbf{n}_\downarrow = 1$ et $\mathbf{n}_\uparrow \mathbf{n}_\downarrow = 0$ et finalement :

$$\{\hat{S}_+, \hat{S}_-\} = \mathbb{1} \quad (3.25)$$

On peut alors réécrire l'hamiltonien d'Ising en fonction des opérateurs $\hat{S}_+, \hat{S}_-, \hat{S}_z$ (grâce à l'application de Jordan-Schwinger et aux relations 3.13) puis des opérateurs de création et d'annihilation $a_1^\dagger, a_1, \dots, a_n^\dagger, a_n$

$$H_{Ising} = - \sum_{k,l=1,k < l}^N (J_x^{kl} \hat{S}_x^k \hat{S}_x^l + J_y^{kl} \hat{S}_y^k \hat{S}_y^l + J_z^{kl} \hat{S}_z^k \hat{S}_z^l) - B_0 \sum_{k=1}^N \hat{S}_z^k \quad (3.26)$$

$$= - \sum_{k,l=1,k < l}^N \left(\frac{J_x^{kl}}{4} (\hat{S}_+^k \hat{S}_+^l + \hat{S}_+^k \hat{S}_-^l + \hat{S}_-^k \hat{S}_+^l + \hat{S}_-^k \hat{S}_-^l) - \frac{J_y^{kl}}{4} (\hat{S}_+^k \hat{S}_+^l - \hat{S}_+^k \hat{S}_-^l - \hat{S}_-^k \hat{S}_+^l + \hat{S}_-^k \hat{S}_-^l) \right. \quad (3.27)$$

$$\left. + J_z^{kl} \hat{S}_z^k \hat{S}_z^l \right) - B_0 \sum_{k=1}^N \hat{S}_z^k$$

$$= - \sum_{k,l=1,k < l}^N \frac{J_x^{kl} - J_y^{kl}}{4} (\hat{S}_+^k \hat{S}_+^l + \hat{S}_-^k \hat{S}_-^l) + \frac{J_x^{kl} + J_y^{kl}}{4} (\hat{S}_+^k \hat{S}_-^l + \hat{S}_-^k \hat{S}_+^l) + J_z^{kl} \hat{S}_z^k \hat{S}_z^l - B_0 \sum_{k=1}^N \hat{S}_z^k \quad (3.28)$$

$$= - \sum_{k,l=1,k < l}^N \frac{J_x^{kl} - J_y^{kl}}{4} (a_\uparrow^{k\dagger} a_\downarrow^k a_\uparrow^{l\dagger} a_\downarrow^l + h.c.) + \frac{J_x^{kl} + J_y^{kl}}{4} (a_\uparrow^{k\dagger} a_\downarrow^k a_\downarrow^{l\dagger} a_\uparrow^l + h.c.) \quad (3.29)$$

$$+ \frac{J_z^{kl}}{4} (\mathbf{n}_\uparrow^k \mathbf{n}_\uparrow^l - \mathbf{n}_\uparrow^k \mathbf{n}_\downarrow^l - \mathbf{n}_\downarrow^k \mathbf{n}_\uparrow^l + \mathbf{n}_\downarrow^k \mathbf{n}_\downarrow^l) - \frac{B_0}{2} \sum_{k=1}^N (\mathbf{n}_\uparrow^k - \mathbf{n}_\downarrow^k)$$

où *h.c.* est le conjugué hermitien du terme précédent. On exprime enfin les opérateurs de création et d'annihilation en fonction des opérateurs de quadrature X et P (vérifiant $[X, P] = \frac{i}{2}$) :

$$a = \hat{X} + i\hat{P} \quad a^\dagger = \hat{X} - i\hat{P} \quad \mathbf{n} = \hat{X}^2 + \hat{P}^2 - \frac{\mathbb{1}}{2} \quad (3.30)$$

et on obtient

$$\begin{aligned} H_{\text{Insing}} = - \sum_{k,l=1, k < l}^N & \left[\frac{J_x^{kl} - J_y^{kl}}{4} \sum_{\hat{q}, \hat{r}, \hat{s}, \hat{t} \in \{X, P\}} C_{\hat{q}, \hat{r}, \hat{s}, \hat{t}}(\hat{q}_{k_1} \hat{r}_{k_2} \hat{s}_{l_1} \hat{t}_{l_2}) + \right. \\ & \frac{J_x^{kl} + J_y^{kl}}{4} \sum_{\hat{q}, \hat{r}, \hat{s}, \hat{t} \in \{X, P\}} F_{\hat{q}, \hat{r}, \hat{s}, \hat{t}}(\hat{q}_{k_1} \hat{r}_{k_2} \hat{s}_{l_1} \hat{t}_{l_2}) + \\ & \frac{J_z^{kl}}{4} \left(\sum_{\hat{q}, \hat{r} \in \{X, P\}} \hat{q}_{k_1} \hat{r}_{l_1} - \sum_{\hat{q}, \hat{r} \in \{X, P\}} \hat{q}_{k_1} \hat{q}_{l_2} - \sum_{\hat{q}, \hat{r} \in \{X, P\}} \hat{q}_{k_2} \hat{q}_{l_1} + \sum_{\hat{q}_j, \hat{r} \in \{X, P\}} \hat{q}_{k_2} \hat{q}_{l_2} \right) \\ & \left. + \frac{B_0}{2} \sum_{k=1}^N \hat{X}_{k_1}^2 - \hat{X}_{k_2}^2 + \hat{P}_{k_1}^2 - \hat{P}_{k_2}^2 \right] \end{aligned} \quad (3.31)$$

où k_1 correspond aux indices (k, \uparrow) , k_2 à (k, \downarrow) , l_1 à (l, \uparrow) , l_2 à (l, \downarrow) . Et où les coefficients $C_{\hat{q}, \hat{r}, \hat{s}, \hat{t}}$ et $F_{\hat{q}, \hat{r}, \hat{s}, \hat{t}}$ sont nuls sauf dans les huit cas où \hat{P} apparaît un nombre pair de fois et valent alors ± 1 . (En effet, pour les termes où \hat{P} apparaît un nombre impair de fois dans le développement de $(\hat{X} - i\hat{P})_{k_1}(\hat{X} + i\hat{P})_{k_2}(\hat{X} - i\hat{P})_{l_1}(\hat{X} + i\hat{P})_{l_2}$, son opposé apparaît dans le développement du terme conjugué $(\hat{X} + i\hat{P})_{k_1}(\hat{X} - i\hat{P})_{k_2}(\hat{X} + i\hat{P})_{l_1}(\hat{X} - i\hat{P})_{l_2}$ (les opérateurs sur différents registres commutent)).

Chapitre 4

Implémentation de l'évolution temporelle avec les qumodes

NB : Dans cette section, les opérateurs \hat{q} désignent l'une des deux quadratures \hat{X} ou \hat{P} .

4.1 Pré-requis pour la décomposition

Afin de simuler l'évolution temporelle $e^{i\hat{H}}$, ou $\hat{H} = \sum_j \hat{H}_j$ est une somme d'opérateurs quadratiques et quartiques, nous pouvons utiliser la trotterization et réécrire l'évolution temporelle sous la forme :

$$e^{i\hat{H}} \approx \left[\prod_{j < l} \prod_{\hat{q} \in \hat{X}, \hat{P}} \left(e^{i \frac{t g_{kl}}{2K}} (\hat{q}_{k_1} \hat{q}_{k_2} \hat{q}_{l_1} \hat{q}_{l_2}) \times e^{i \frac{t J_{kl}^z}{K}} (\hat{q}_{k_1}^2 \hat{q}_{l_1}^2 + \hat{q}_{k_2}^2 \hat{q}_{l_1}^2 - \hat{q}_{k_1}^2 \hat{q}_{l_2}^2 - \hat{q}_{k_2}^2 \hat{q}_{l_1}^2) \times e^{i \frac{B_0 t}{K}} \hat{q}_k^2 \right) \right]^K \quad (4.1)$$

avec $g_{kl} = \frac{1}{2}(C_{kl}(J_{kl}^x + J_{kl}^y) + F_{kl}(J_{kl}^x - J_{kl}^y))$.

Nous allons maintenant utiliser l'ensemble de portes universelles défini au début de la partie 1.2.3. A partir de cet ensemble, nous définissons deux nouvelles portes qui vont nous servir à décomposer l'opérateur d'évolution temporel :

$$Q_k(\alpha) = e^{i\alpha \hat{X}_k^4} \quad (4.2)$$

$$T_k(A) = e^{i\alpha \hat{P}_k A} \quad (4.3)$$

La porte 4.3 translate une fonction de la quadrature \hat{X} par le paramètre A de la façon suivante : $T_k(A)f(\hat{X}_k)T_k(A)^\dagger = f(\hat{X}_k + A)$. La porte 4.2 est appelée quartique et, en utilisant la relation $x_2^4 = (x_1 + x_2)^2 - x_1^2 - 2x_1x_2^2$, se décompose de la façon suivante :

$$\begin{aligned} Q_2(\alpha) &= e^{i\alpha \hat{X}_2^4} \\ &= e^{i\hat{P}_1 \hat{X}_2^2} e^{i\alpha \hat{X}_1^2} e^{-i\alpha \hat{P}_1 \hat{X}_2^2} e^{-i\alpha \hat{X}_1^2} e^{-2i\alpha \hat{X}_1 \hat{X}_2^2} \\ &= T_1(\hat{X}_2^2) D_{1,2}(\alpha) T_1^\dagger(\hat{X}_2^2) D_{1,2}(-\alpha) F_1 T_1(-\alpha \hat{X}_2^2) F_1^\dagger \end{aligned}$$

On peut également décomposer la porte de translation comme dans les articles [12] et [13] :

$$\begin{aligned}
e^{i\hat{P}_1\hat{X}_2} &= F_1 C_z F_1^\dagger \\
e^{i3\alpha^2\hat{P}_1\hat{X}_2^2} &= F D_{\hat{X},3} F^\dagger C_z(-\alpha) F^\dagger D_{\hat{X},3}^\dagger F C_z(-2\alpha) F D_{\hat{X},3} F^\dagger \\
&\quad \times C_z(\alpha) F^\dagger D_{\hat{X},3}^\dagger F C_z(2\alpha) D_{\hat{X},3} \left(\frac{3}{4}\alpha^3\right)
\end{aligned}$$

Dans notre cas, nous n'aurons pas besoin des termes d'ordre supérieur au second, bien qu'une forme générale existe.

4.2 Décomposition en portes quantiques

Nous pouvons maintenant commencer à décomposer notre opérateur d'évolution temporel en portes. Nous allons considérer chaque terme et montrer leur décomposition.

Terme quartique à 4 modes Considérons dans un premier temps les deux premiers termes de l'hamiltonien qui sont de la forme $\hat{q}_{k_1}\hat{q}_{k_2}\hat{q}_{l_1}\hat{q}_{l_2}$ et contiennent ainsi des produits de quatre modes et des sous-termes d'ordre 4. Afin de réécrire nos termes en fonction de portes quartiques, on peut utiliser l'identité suivante :

$$\begin{aligned}
\hat{q}_{k_1}\hat{q}_{k_2}\hat{q}_{l_1}\hat{q}_{l_2} &= \frac{1}{192} [(\hat{q}_{k_1} + \hat{q}_{k_2} + \hat{q}_{l_1} + \hat{q}_{l_2})^4 \\
&\quad + (\hat{q}_{k_1} - \hat{q}_{k_2} - \hat{q}_{l_1} - \hat{q}_{l_2})^4 \\
&\quad - (\hat{q}_{k_1} - \hat{q}_{k_2} + \hat{q}_{l_1} + \hat{q}_{l_2})^4 \\
&\quad - (\hat{q}_{k_1} + \hat{q}_{k_2} - \hat{q}_{l_1} + \hat{q}_{l_2})^4 \\
&\quad - (\hat{q}_{k_1} + \hat{q}_{k_2} + \hat{q}_{l_1} - \hat{q}_{l_2})^4 \\
&\quad + (\hat{q}_{k_1} - \hat{q}_{k_2} - \hat{q}_{l_1} + \hat{q}_{l_2})^4 \\
&\quad + (\hat{q}_{k_1} - \hat{q}_{k_2} + \hat{q}_{l_1} - \hat{q}_{l_2})^4 \\
&\quad + (\hat{q}_{k_1} + \hat{q}_{k_2} - \hat{q}_{l_1} - \hat{q}_{l_2})^4]
\end{aligned}$$

On remarque que chacun des termes quartiques de la somme s'écrit comme un produit de quatre \hat{q} . On peut donc les obtenir en partant de la porte $\hat{q}_{k_1}^4$ et en translatant en trois fois comme suit :

$$e^{i\alpha(\hat{q}_{k_1} + \hat{q}_{k_2} + \hat{q}_{l_1} + \hat{q}_{l_2})^4} = T_1(\hat{q}_{k_2}) T_1(\hat{q}_{k_3}) T_1(\hat{q}_{k_4}) e^{i\alpha\hat{q}_{k_1}^4} T_1(\hat{q}_{k_2})^\dagger T_1(\hat{q}_{k_3})^\dagger T_1(\hat{q}_{k_4})^\dagger \quad (4.4)$$

En utilisant la même méthode, nous pouvons obtenir tous les termes de l'identité précédente et ainsi décomposer entièrement les deux premiers termes de l'opérateur d'évolution. Jusqu'à maintenant, on rappelle que les opérateurs \hat{q} désignaient l'un des deux quadratures \hat{X} ou \hat{P} , on part du principe que les opérateurs \hat{X} peuvent être convertis en \hat{P} en utilisant

la transformée de Fourier $f(\hat{P}) = Ff(\hat{X})F^\dagger$. La décomposition finale des deux premiers termes est donc :

$$e^{i\alpha(\hat{X}_i\hat{X}_j\hat{X}_\mu\hat{X}_\nu)} = \prod_{\vec{s}} S_{\vec{s}} \left[T_i(\hat{X}_\nu) T_i(\hat{X}_\mu) T_i(\hat{X}_j) e^{-i\frac{\alpha}{192}\hat{X}^4} T_i(\hat{X}_j)^\dagger T_i(\hat{X}_\mu)^\dagger T_i(\hat{X}_\nu)^\dagger \right] \quad (4.5)$$

Termes quartiques de deux modes Le troisième terme est également quartique mais est uniquement un produit composé de deux modes $\hat{q}_i^2\hat{q}_j^2$. En utilisant la relation suivante :

$$\hat{q}_i^2\hat{q}_j^2 = \frac{1}{12}[(\hat{q}_i + \hat{q}_j)^4 + (\hat{q}_i - \hat{q}_j)^4 - 2\hat{q}_i^2 - 2\hat{q}_j^2] \quad (4.6)$$

On peut écrire la décomposition comme :

$$\begin{aligned} e^{i\alpha(\hat{X}_l^2\hat{X}_m^2)} &= T_l(\hat{X}_m) e^{i\frac{\alpha}{12}\hat{X}_l^4} T_l(\hat{X}_m)^\dagger \\ &\times T_l(-\hat{X}_m) e^{i\frac{\alpha}{12}\hat{X}_l^4} T_l(-\hat{X}_m)^\dagger \\ &\times e^{-2i\alpha\hat{X}_l^2} \times e^{-2i\alpha\hat{X}_m^2} \end{aligned}$$

Termes quadratiques mono-mode Le dernier terme est \hat{q}^2 et peut être implémenté simplement en utilisant la porte Gaussienne $D_{\hat{X},2} = e^{i\alpha\hat{X}^2}$

En utilisant les décompositions précédentes, tous les termes peuvent être implémentés en utilisant l'ensemble universel 1.2.3.

Conclusion

La simulation du système en utilisant la décomposition présentée précédemment requière de disposer d'un ordinateur quantique CV résistant aux erreurs. De tel appareils ne sont pas utilisables ni actuellement ni dans un futur proche. Toutefois l'utilisation d'appareils NISQ (Noisy Intermediate-Scale Quantum) est possible en utilisant des algorithmes hybrides classique-quantique de type VQA. Ce type d'algorithmes représente la meilleure façon d'utiliser les appareils actuellement à notre disposition. L'utilisation de tels algorithmes est discutée à la fin du papier [1] bien que nous ne nous attarderons pas dessus ici.

Nous avons donc vu à travers ce projet que la simulation de modèle de spins à l'aide d'un ordinateur quantique CV était possible, que celui soit tolérant aux erreurs dans un possible futur ou bien même sur les appareils NISQ actuels. La résolution de ce problème NP-Complet nous montre ainsi qu'il est possible en théorie de résoudre des problèmes NP plus efficacement qu'avec l'utilisation d'un ordinateur classique.

Bibliographie

- [1] Razieh ANNABESTANI. « Towards quantum simulation of spin systems using continuous variable quantum devices ». In : (sept. 2020). URL : <https://arxiv.org/abs/2009.09455>.
- [2] Nicolas FABRE. « Quantum information in time-frequency continuous variables ». Avr. 2021. URL : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-03191301/file/Fabre_Nicolas_va2.pdf.
- [3] Mile Gu Christian Weedbrook Nicolas C. Menicucci Timothy C. RALPH et Peter van LOOCK. « Quantum Computing with Continuous-Variable Clusters ». In : (mars 2009). URL : <https://arxiv.org/abs/0903.3233>.
- [4] Olivier PFISTER. « Continuous-variable quantum computing in the quantum optical frequency comb ». In : (2020). URL : <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6455/ab526f>.
- [5] Edward Farhi Jeffrey Goldstone Sam Gutmann Joshua Lapan Andrew Lundgren Daniel PREDA. « A Quantum Adiabatic Evolution Algorithm Applied to Random Instance of an NP-Complete Problem ». In : (avr. 2001). URL : <https://arxiv.org/pdf/quant-ph/0104129.pdf>.
- [6] Andrew LUCAS. « Ising formulation of many NP problems ». In : (jan. 2014). URL : <https://arxiv.org/abs/1302.5843>.
- [7] S. Bachmann W. De Roeck M. FRAAS. « Adiabatic theorem for quantum spin systems ». In : (sept. 2017). URL : <https://arxiv.org/pdf/1612.01505.pdf>.
- [8] Stephan MERTENS. « Phase Transition in the Number Partitioning Problem ». In : (sept. 1998). URL : <https://arxiv.org/pdf/cond-mat/9807077.pdf>.
- [9] Tobias GraB David Raventos Bruno Julia-Diaz Christian Gogolin Maciej LEWENSTEIN. « Quantum annealing for the number-partitioning problem using a tunable spin glass of ions ». In : (mai 2016). URL : <https://www.nature.com/articles/ncomms11524.pdf>.
- [10] David Sherrington Scott KIRKPATRICK. « Solvable Model of a Spin Glass ». In : (déc. 1975). URL : <https://journals.aps.org/prl/pdf/10.1103/PhysRevLett.35.1792>.

- [11] *What is Quantum Annealing?* https://docs.dwavesys.com/docs/latest/c_gs_2.html. Accessed : 2022-05-05.
- [12] Timjan KALAJDZIEVSKI et Juan Miguel ARRAZOLA. « Exact gate decompositions for photonic quantum computing ». In : (oct. 2018). URL : <https://arxiv.org/abs/1811.10651>.
- [13] Timjan Kalajdzievski Christian WEEDBROOK et Patrick REBENTROST. « Continuous-variable gate decomposition for the Bose-Hubbard model ». In : (mars 2020). URL : <https://arxiv.org/abs/1801.06565>.