



Étude des corrélations locales, quantiques et supra-quantiques par leur influence sur le traitement de l'information

Nicolas Laurent-Puig
Baptiste Chevalier
Léo Hallégot
Johan-Luca Rossi

Théorie de Shannon classique et quantique

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Introduction | 4 |
| 1 Réalisme Local | 5 |
| 1.1 La nécessité d'un support | 5 |
| 1.1.1 Le <i>CHSH game</i> | 5 |
| 1.1.2 La boîte corrélée bipartite | 6 |
| 1.2 Le contexte local | 6 |
| 1.2.1 Mécanismes locaux pour les corrélations | 6 |
| 1.2.2 Les stratégies pré-établies ("Variables locales") | 7 |
| 1.3 Stratégie locale pour le CHSH et inégalité de Bell | 7 |
| 1.3.1 La stratégie | 7 |
| 1.3.2 Borne locale du <i>CHSH game</i> | 9 |
| 1.3.3 Un premier mot sur les inégalités de Bell | 9 |
| 2 Non-Localité | 11 |
| 2.1 Violation de l'inégalité de Bell | 11 |
| 2.1.1 Expérience type Stern-Garlach | 11 |
| 2.1.2 Inégalité de Bell en fonction de l'entropie | 12 |
| 2.1.3 Statistique quantique et inégalité de Bell | 12 |
| 2.2 Borne de Tsirelson | 13 |
| 2.2.1 L'inégalité de Bell-CHSH | 13 |
| 2.2.2 Application de l'inégalité pour un système quantique | 15 |
| 2.2.3 Borne quantique du <i>CHSH game</i> | 15 |
| 3 No-Signaling | 19 |
| 3.1 Définition et Structure du NS | 19 |
| 3.1.1 La PR-BOX | 19 |
| 3.1.2 Définition | 19 |
| 3.1.3 Structure | 20 |
| 3.2 Caractérisation du réalisme locale en tant que sous-espace du No-Signaling | 20 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3.2.1 | Polytope local | 20 |
| 3.2.2 | Faces du polytope local | 21 |
| 3.3 | Caractérisation du sous-ensemble quantique : <i>Information Causality</i> | 22 |
| 3.3.1 | En quoi l'ensemble quantique est différents du polytope NS ? | 22 |
| 3.3.2 | Random Access Code | 23 |
| 3.3.3 | Information Causality | 23 |
| 3.3.4 | Calcul de la borne de Tsirelson | 24 |
| 4 | Simulation CHSH | 26 |
| 4.1 | Protocole | 26 |
| 4.1.1 | Localité | 26 |
| 4.1.2 | Quantique | 27 |
| 4.1.3 | PR-Box | 28 |
| 4.2 | Présentation des résultats | 28 |
| 4.2.1 | Problème et Graphiques | 28 |
| 4.2.2 | Analyse des résultats | 30 |
| | Conclusion | 31 |
| | Bibliographie | 32 |

Introduction

Pendant longtemps, il semblait raisonnable d'attendre des phénomènes observables de notre univers d'être régi par des corrélations locales. Cependant, les expériences d'Alain Aspect de 1982, introduisent un aspect non-local des phénomènes qui nous entourent par le biais de la physique quantique. Ainsi, il est naturel de se demander quels mécanismes régissent les corrélations de notre univers ?

Ce projet bibliographique a pour but de répondre à cette question en étudiant comment définir ces corrélations. Pour cela, nous les étudierons selon leur contexte local/non-local et analyserons leurs limites. Enfin, nous verrons comment formaliser, dans le contexte le plus générale, les limites qu'impose notre univers d'un point de vue du traitement de l'information.

Nous définirons les notions essentielles pour comprendre chacun des contextes considérés et les concepts qui en découlent. Nous verrons comment caractériser ces limites, avec les inégalités de Bell (Entropique et Bell-CHSH) et la borne de Tsirelson, et comment, à travers les notions de *no-signaling* et de causalité de l'information, il est possible de redéfinir ces limites et de proposer une description globale de celles-ci. Ces réflexions seront illustrées grâce à la mise en place d'un test/jeu permettant de définir un cadre d'étude et un fil conducteur pour ce projet (*CHSH game*). Nous vous proposerons, en dernière partie, une simulation de ce jeu pour illustrer plus directement chaque étape, et éventuellement éclaircir certaines notions à l'aide d'exemples concrets.

Chapitre 1

Réalisme Local

L'essence du réalisme local réside dans le fait que des objets distants ne peuvent avoir d'influence directe l'un sur l'autre (limiter le lien de cause à effet à la vitesse de la lumière). En d'autres termes, les corrélations entre ces objets, sont dites locales, provenant d'une cause commune, locale, commune car cette cause provient d'un passé commun, et locale, car tout se déroule localement, continûment, de proche en proche [4].

1.1 La nécessité d'un support

Pour introduire cette partie et illustrer les réflexions de ce projet en général, il nous est nécessaire d'introduire un cadre à travers lequel le projet va évoluer. Pour cela il nous faut présenter un test/jeu et son support associé.

1.1.1 Le *CHSH game*

On considère deux partis, Alice et Bob qui jouent à un jeu coopératif, appelé le *CHSH game*[6], qui possède les règles suivantes :

- Alice et Bob sont isolés dans 2 endroits différents et ne peuvent pas communiquer entre eux. Il y a un arbitre R qui peut communiquer avec les deux.
- Alice reçoit un bit aléatoire uniformément distribué $x \in \{0, 1\}$ de l'arbitre et Bob reçoit un bit aléatoire uniformément distribué $y \in \{0, 1\}$. Alice renvoie à l'arbitre un bit a et Bob renvoie à l'arbitre un bit b .
- Alice et Bob gagnent la partie ssi $a \oplus b = x \wedge y$, qui peut être vérifié par l'arbitre.

Nous ne discuterons pas spécifiquement de la façon dont nous isolons Alice et Bob, mais cela peut être fait, par exemple en les mettant dans des cages de Faraday. Cela garantit que la réponse d'Alice est indépendante de y et que la réponse de Bob est indépendante de x .

1.1.2 La boîte corrélée bipartite

Pour jouer à ce jeu, Alice et Bob vont avoir accès à ce qu'on va appeler à ce stade une *boîte corrélée bipartite* [8].

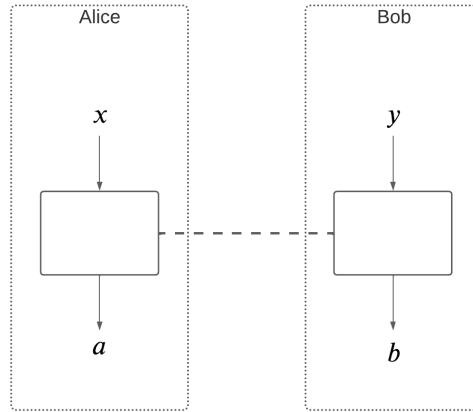


FIGURE 1.1 – La représentation d’une boîte corrélée bipartite. La ligne en pointillés ne représente pas une connexion matérielle, mais est présente pour rappeler l’existence de corrélations.

Définition : Une boîte corrélée bipartite (Figure 1.1) est un dispositif à deux extrémités, dont l’une est possédée par Alice et l’autre par Bob. Chaque extrémité a le comportement d’entrée-sortie suivant : étant donné l’entrée x du côté d’Alice (resp y du côté de Bob), la boîte produira a (resp b) selon une distribution de probabilité $P(a, b|x, y)$ où $x, y, a, b \in \{0, 1\}$.

Cette description très générale pour l’instant va évoluer en fonction du contexte considéré au fil des chapitres.

Un point important est que les deux extrémités de la boîte ne peuvent communiquer (en les plaçant dans des cages de Faraday comme proposé précédemment), et ainsi respecter les règles imposées par le *CHSH game*.

1.2 Le contexte local

Pour définir le réalisme local et comprendre quels liens il tisse avec le *CHSH game*, une étude des limites qu’il impose est nécessaire.

1.2.1 Mécanismes locaux pour les corrélations

Nous avons introduit au début de cette partie la notion de corrélation et nous l’avons associée à des causes locales, il est donc nécessaire d’introduire les mécanismes locaux (ou classiques) pour distribuer ces corrélations entre l’extrémité de Bob et celle d’Alice. On en distingue deux :

La communication : De manière évidente, si l'extrémité d'Alice informe l'extrémité de Bob de sa valeur de sortie et que celle-ci peut prendre la même valeur, les deux résultats seront corrélés. Cependant, ce mécanisme est proscrit dans le CHSH game, Alice et Bob n'ont de toute manière aucun moyen de communiquer.

Les stratégies pré-établies : Le second mécanisme, moins évident, est qu'avant que chaque extrémité de la boîte ne soit distribuée à Alice et Bob, ceux-ci aient défini une stratégie à réaliser en fonction du bit qu'ils récupèrent. Nous allons voir dans la section suivante une explication détaillée de ce concept.

1.2.2 Les stratégies pré-établies ("Variables locales")

Par définition, une stratégie pré-établie correspond à une information λ que les deux partis partagent, et cela, avant leur isolation, cette information est souvent appelée "*variable locale*". Chaque parti est supposé prendre en compte cette information pour produire leur résultat (i.e le bit que produit chaque extrémité de la boîte dépend de cette information). Donc pour un certain, λ le comportement de chaque extrémité est indépendant : $P_{x,y}(a, b|\lambda) = P_x(a|\lambda)P_y(b|\lambda)$. Il nous faut maintenant énoncer un théorème très important[11] :

$P_{x,y}(a, b)$ peut être obtenue à partir de stratégies locales pré-établies ssi elle peut être écrite comme une somme convexe de *stratégies déterministes locales*, en notant $\rho(\lambda)$ la distribution de probabilité de λ on a alors :

$$P_{x,y}(a, b) = \int d\lambda \rho(\lambda) P_x(a|\lambda) P_y(b|\lambda) \quad (1.1)$$

Une *stratégie déterministe locale* est définie par $P_x(a|\lambda) = \delta_{a=f(x,\lambda)}$ et $P_y(b|\lambda) = \delta_{b=g(y,\lambda)}$, ici f et g *déterminent* ce que chaque extrémité va produire et dépendent donc de l'entrée x pour Alice (resp. y pour Bob) et de leur paramètre commun λ défini à travers leur stratégie pré-établie.

1.3 Stratégie locale pour le CHSH et inégalité de Bell

Maintenant que le contexte des corrélations locales a été défini, il est temps de s'intéresser à l'utilisation de ces stratégies locales pour le *CHSH game*. Dans un premier temps, redéfinissons la boîte corrélée bipartite définie ci-dessus (Figure 1.1) dans ce contexte de réalisme local.

1.3.1 La stratégie

Considérons la stratégie suivante pour Alice et Bob pour le *CHSH game*. Pour ne pas perdre en généralité, cette stratégie peut être "*aléatorisée*". En d'autres termes, la stratégie

d'Alice (resp Bob) peut être décrite de la manière suivante : elle génère une séquence de bits aléatoire r_A (resp r_B) et retourne $a = f(x, r_A)$ (resp $b = g(y, r_B)$) pour une fonction f (resp g).

Note : L'aléatoire ici est pour faciliter la généralisation de la stratégie qui va suivre. Mais sachant que tout processus aléatoire classique peut être mathématiquement décomposé en une somme convexe de processus déterministes[11], et pour reprendre les raisonnements de la partie précédente, r_A et r_B peuvent dépendre de l'information commune λ , on pourra alors les noter $r_A(\lambda)$ et $r_B(\lambda)$ lorsqu'une stratégie déterministe locale est explicitée. On retrouve alors la boîte corrélée bipartite *déterministe locale* suivante (Figure 1.2)

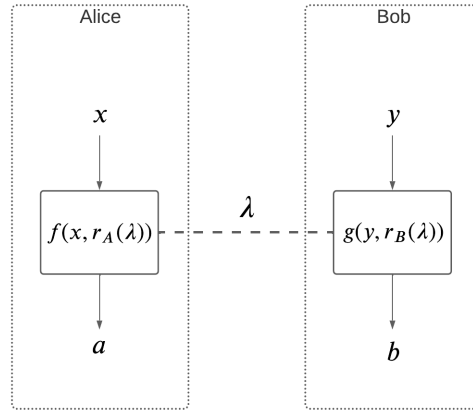


FIGURE 1.2 – Dans ce cas déterministe local, la seule corrélation (pointillé) est due à l'information λ définie par une stratégie pré-établie.

En notant $P = Pr[\text{Alice et bob gagne au CHSH}]$ on a alors :

$$P = \mathbb{E}_{r_A, r_B} \left[\frac{1}{4} \sum_{x, y \in \{0, 1\}} ((f(x, r_A) \oplus g(y, r_B)) == x \wedge y) \right] \quad (1.2)$$

où $((f(x, r_A) \oplus g(y, r_B)) == x \wedge y)$ est égal à 1 si $(f(x, r_A) \oplus g(y, r_B)) = x \wedge y$ et 0 sinon. L'espérance de leur probabilité de gagner dépend alors de la valeur de r_A et r_B "classiquement aléatoire" pour Alice et Bob. Remarquons alors que

$$P \leq \max_{r_A, r_B} \left[\frac{1}{4} \sum_{x, y \in \{0, 1\}} ((f(x, r_A) \oplus g(y, r_B)) == x \wedge y) \right] \quad (1.3)$$

Cela implique donc qu'il existe pour une information commune optimale (pas forcément unique) λ_{max} , $\widetilde{r}_A = r_A(\lambda_{max})$ et $\widetilde{r}_B = r_B(\lambda_{max})$. **Il existe donc une stratégie déterministe locale optimale** qui sature l'inégalité (1.3). Définissons \widetilde{f} et \widetilde{g} t.q $\widetilde{f}(x) = f(x, \widetilde{r}_A)$ et $\widetilde{g}(y) = g(y, \widetilde{r}_B)$. On peut alors écrire

$$P \leq \frac{1}{4} \left[\sum_{x,y \in \{0,1\}} ((\widetilde{f(x)} \oplus \widetilde{g(y)}) == x \wedge y) \right] \quad (1.4)$$

1.3.2 Borne locale du *CHSH game*

Maintenant que nous avons théoriquement défini la probabilité maximale avec laquelle Bob et Alice peuvent gagner au jeu CHSH avec une stratégie déterministe locale, il est temps de borner numériquement cette probabilité. Il nous faut donc énoncer la proposition suivante : *Pour toute stratégie classique (locale), Alice et Bob peuvent gagner au CHSH avec une probabilité au plus de $\frac{3}{4}$.* Pour prouver cela, assumons par contradiction que pour chaque $x, y \in \{0, 1\}$, $\widetilde{f(x)} \oplus \widetilde{g(y)} == x \wedge y$. On aurait alors :

$$\begin{aligned} \widetilde{f(0)} \oplus \widetilde{g(0)} &== 0 \\ \widetilde{f(0)} \oplus \widetilde{g(1)} &== 0 \\ \widetilde{f(1)} \oplus \widetilde{g(0)} &== 0 \\ \widetilde{f(1)} \oplus \widetilde{g(1)} &== 1 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Or si l'on somme modulo 2 ces 4 équations on tombe sur $0 = 1$ qui est une **contradiction**. Il existe donc $x, y \in \{0, 1\}$ t.q $\widetilde{f(x)} \oplus \widetilde{g(y)} \neq x \wedge y$. On peut donc conclure que

$$P = Pr[\text{Alice et Bob gagne au CHSH}] \leq \frac{3}{4} \quad (1.6)$$

et cela pour toute stratégie locale. Cette borne représente ce qu'on peut appeler une inégalité de Bell.

1.3.3 Un premier mot sur les inégalités de Bell

Ayant mentionné la notion d'inégalité de Bell, il est nécessaire de réaliser une courte introduction à ce sujet avant le chapitre suivant.

L'essence des inégalités de Bell [1] est intimement liée à la notion de *réalisme* d'Albert Einstein [3] : un objet a une propriété objective, qu'il soit mesuré ou non. Les inégalités de Bell, dans leur forme la plus simple, reflètent les contraintes sur les statistiques de trois propriétés locales d'une collection d'objets. Ces contraintes doivent être respectées si les trois propriétés peuvent être connues indépendamment pour chaque objet.

Pour illustrer cela, considérons un ensemble d'objet, tous caractérisés par trois propriétés

dichotomiques a,b et c. En groupant les objets en une fonction de deux des trois propriétés. Il est simple de construire une inégalité rapportant le nombre d'objets dans chaque groupe (noté $n()$) défini par différentes paires de propriétés, on peut écrire de cette manière :

$$n(a, non(b)) \leq n(a, non(c)) + n(non(b), c) \quad (1.7)$$

Même si cette inégalité renvoi uniquement à la spécification simultanée de chaque pair de propriétés, son respect dépend de l'existence d'une distribution de probabilité pour les trois. L'inéquation 1.7 est toujours respectée tant qu'il existe une description *objective* de chaque objets avec les trois propriétés, de cette manière l'inéquation 1.7 nous propose une manière de tester le "*réalisme local*".

Des raisonnements similaires à ceux présentés ci-dessus sont utilisés pour en déduire les inégalités de Bell.

On verra dans le chapitre suivant que ce type d'inéquation peut être violé par la mécanique quantique.

Chapitre 2

Non-Localité

L'un des principaux objectifs de la théorie quantique de l'information est de comprendre la relation entre l'intrication et la non-localité de l'information. La non-localité de l'information quantique permet à la mesure jointe d'un système quantique composite de révéler plus d'information à propos de l'état que les opérations locales et les communications classiques sur l'état.

2.1 Violation de l'inégalité de Bell

2.1.1 Expérience type Stern-Garlach

Dans la partie précédente, nous avons vu ce qu'est l'inégalité de Bell et ce qu'elle implique dans un cas classique, nous allons maintenant la développer dans le cas d'un système quantique. Pour cela nous utiliserons plusieurs propriétés admises d'un système quantique notamment que son entropie peut être négative ainsi que les valeurs propres de sa matrice densité peuvent être supérieures à 1. On considère un cas quantique : deux systèmes complètement séparés et intriqués et plus précisément deux particules de spin S provenant de la même particule de spin total 0.

Dans la suite de l'expérience, on imagine qu'un observateur peut agir indépendamment sur les particules du système et mesurer leurs spins. Le premier observateur Alice va mesurer le spin d'une particule et son orientation. Deux observables seront alors possibles selon la direction du spin : A et A' . Il en va de même pour la deuxième particule et le deuxième observateur Bob. On notera ces observables B et B' . On peut typiquement réaliser une mesure de ces spins via une expérience de type "Stern-Garlach". Ainsi les différentes observables peuvent prendre $2S+1$ valeurs définies par le nombre quantique m compris dans $[-s, -s+1, \dots, s-1, s]$. On note les états quantiques $|sm\rangle_{\text{Alice/Bob}}$.

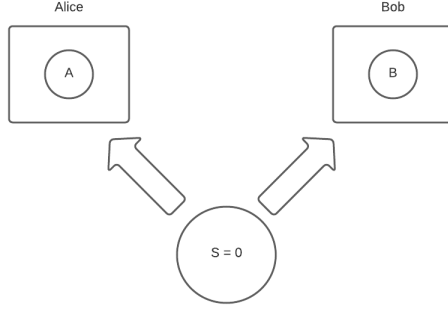


FIGURE 2.1 – Schéma simplifié de l'expérience.

2.1.2 Inégalité de Bell en fonction de l'entropie

Avant de continuer sur notre expérience, nous devons exprimer l'inégalité de Bell avec des entropies. Il est important de rappeler certaines propriétés des entropies de Shannon notamment que :

$$H(A) = - \sum_a p(a) \log_2 p(a) \quad (2.1)$$

$$H(A | B) \leq H(A) \leq H(A, B) \quad (2.2)$$

On peut ainsi développer la formule 2.2 en prenant compte des 4 observables

$$H(A, B) \leq H(A, B', A', B) = H(A | B', A', B) + H(B' | A', B) + H(A' | B) + H(B) \quad (2.3)$$

Ainsi décrite l'inégalité entropique de Bell tel que [2] :

$$H(A | B) \leq H(A | B') + H(B' | A') + H(A' | B) \quad (2.4)$$

2.1.3 Statistique quantique et inégalité de Bell

On définit l'état quantique de spin [9] :

$$|\Psi\rangle = (2s + 1)^{-1/2} \sum_{m=-s}^s (-1)^{s-m} |sm\rangle_A \otimes |s - m\rangle_B \quad (2.5)$$

On formule la probabilité d'obtenir une valeur particulière de spin.

$$p(a = m_1, b = m_2) = |{}_{A,a} \langle sm_1 | \otimes {}_{B,b} \langle sm_2 | \phi \rangle|^2 = (2s + 1)^{-1} |D_{m_1 - m_2}(R_n(\theta))|^2. \quad (2.6)$$

Cette probabilité dépend de l'angle entre les vecteurs de spin \mathbf{a}/\mathbf{a}' et \mathbf{b}/\mathbf{b}' . On introduit la matrice pour une rotation R_n .

$$D_{m_1-m_2}(R_n(\theta)) \equiv_{A,a} \langle sm_1 | e^{-i\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_A} | sm_2 \rangle_{B,e} \quad (2.7)$$

Enfin, on en déduit l'entropie quantique avec $H^{\text{QM}}(\theta) = H(A|B)^{\text{QM}} = H(B|A)^{\text{QM}}$

$$H^{\text{QM}}(\theta) = -\frac{1}{2s+1} \sum_{m_1, m_2} |D_{m_1-m_2}(R_n(\theta))|^2 \log |D_{m_1-m_2}(R_n(\theta))|^2 \quad (2.8)$$

On considère plus simplement que les vecteurs de spin $\mathbf{a}, \mathbf{b}', \mathbf{a}', \mathbf{b}$ sont coplanaires et séparés d'un angle de $\theta/3$ successivement.

Par définition, l'inégalité de Bell est violée si $H(A|B') + H(B'|A') + H(A'|B) - H(A|B) \leq 0$. Soit en utilisant l'entropie quantique : $3H^{\text{QM}}(\theta/3) - H^{\text{QM}}(\theta) \leq 0$.

Pour des petits angles θ

$$\begin{aligned} & \sum_{m_1, m_2} | \langle sm_1 | e^{-i\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_A} | sm_2 \rangle |^2 \\ & \propto \theta^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ce qui implique que $H^{\text{QM}}(\theta) \propto -\theta^2 \log(\theta^2)$. L'inégalité de Bell est totalement violée. Ce résultat est généralisable pour n'importe quel θ à condition d'avoir N particule dans le système.

2.2 Borne de Tsirelson

On a réussi à démontrer que les inégalités de Bell sont violées pour un système quantique, mais les inégalités de Bell sont un argument pour le réalisme local par l'existence d'une probabilité jointe entre les variables du système. En principe, l'inégalité entropique de Bell ne fournit qu'une condition nécessaire et non suffisante pour décrire la non-localité du système. C'est pourquoi il est important de démontrer le résultat du CHSH pour un cas quantique.

2.2.1 L'inégalité de Bell-CHSH

Reprenons l'exemple de la première partie, mais cette fois-ci la stratégie déterministe local λ est une liste de valeurs $(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}')$ qui comme dans notre précédent exemple représente les valeurs de sortie de deux observateurs, Alice et Bob. Selon la direction du spin de

nos particules, chaque variable peut valoir 1 ou -1. On définit l'espérance de nos variables telle que :

$$E(ab) = \int_{\Lambda} (E(ab) | \lambda) dP(\lambda) \quad (2.10)$$

Traduisant les corrélations entre les différents spins de notre système. On peut retrouver L'inégalité de Bell-CHSH[5]travers plusieurs propriétés de notre système :

La localité : On suppose que l'on peut écrire l'espérance de deux variables comme le produit de leur espérance :

$$(E(ab) | \lambda) = (E(a | \lambda)(E(b | \lambda) \quad (2.11)$$

La délimitation : Cette propriété permet de définir une limite à nos espérances. Elle découle du fait que la variable d'une espérance peut dépasser la valeur de la variable elle-même.

$$E(\mathbf{x} | \lambda) \leq 1 \quad (2.12)$$

Propriétés algébriques :

On utilise 2 formules algébriques importantes pour la suite :

$$|E(\mathbf{x} | \lambda) + E(\mathbf{y} | \lambda)| + |E(\mathbf{x} | \lambda) - E(\mathbf{y} | \lambda)| \leq 2 \quad (2.13)$$

et l'inégalité triangulaire :

$$|E(\mathbf{x} | \lambda) + E(\mathbf{y} | \lambda)| + |E(\mathbf{x} | \lambda) - E(\mathbf{y} | \lambda)| \geq |E(\mathbf{x} | \lambda) + E(\mathbf{y} | \lambda) + E(\mathbf{x} | \lambda) - E(\mathbf{y} | \lambda)| \quad (2.14)$$

On peut finalement en déduire

$$\begin{aligned} & |E(\mathbf{ab}) + E(\mathbf{a'})| + |E(\mathbf{a'b}) - E(\mathbf{a'b'})| \\ &= |E(\mathbf{a})| (|E(\mathbf{b}) + E(\mathbf{b'})|) + |E(\mathbf{a'})| (|E(\mathbf{b}) - E(\mathbf{b'})|) \\ &\leq |E(\mathbf{b}) + E(\mathbf{b'})| + |E(\mathbf{b}) - E(\mathbf{b'})| \leq 2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

On en déduit l'inégalité de Bell-CHSH

$$|E(\mathbf{ab}) + E(\mathbf{a'b'}) + E(\mathbf{a'b}) - E(\mathbf{a'b'})| \leq 2 \quad (2.16)$$

2.2.2 Application de l'inégalité pour un système quantique

Appliquons maintenant ces inégalités à notre système quantique. La mesure d'un système quantique à deux sorties possible ce traduit par l'opérateur $E(\mathbf{ab})$:

$$E_{AB} \rightarrow \langle A \otimes B \rangle \quad (2.17)$$

On définit l'opérateur CHSH [11] :

$$S = A \otimes B + A' \otimes B + A \otimes B' - A' \otimes B' \quad (2.18)$$

La borne supérieure de l'espérance de S est égale à sa valeur propre la plus élevée. En effet, la valeur propre maximale est égale à la moyenne la plus élevée sur l'ensemble des états quantique possible. On peut très facilement démontrer l'existence d'une borne maximale dans cette situation. Chaque opérateur A,A',B,B' vaut 1 ou -1 on en déduit : $A^2 = A'^2 = B^2 = B'^2 = 1$

$$S = A \otimes B + A' \otimes B + A \otimes B' - A' \otimes B'$$

$$\begin{aligned} S^2 &= (A \otimes B + A' \otimes B + A \otimes B' - A' \otimes B')^2 \\ &= (A \otimes B)^2 + (A \otimes B)(A' \otimes B) + (A \otimes B)(A \otimes B') \\ &\quad - (A \otimes B)(A' \otimes B') + (A' \otimes B)^2 + (A' \otimes B)(A \otimes B) + (A' \otimes B)(A \otimes B') \\ &\quad - (A' \otimes B)(A' \otimes B') + (A \otimes B')(A \otimes B) + (A \otimes B')(A' \otimes B) + (A \otimes B')^2 \\ &\quad - (A \otimes B')(A' \otimes B') - (A' \otimes B')(A \otimes B) - (A' \otimes B')(A' \otimes B) - (A' \otimes B')(A \otimes B') + (A' \otimes B')^2 \end{aligned} \quad (2.19)$$

On factorise :

$$S^2 = 4(1 \otimes 1) + [A'A] \otimes [B'B] \quad (2.20)$$

La valeur propre maximale de $[A'A]$ ne peut pas excéder 2. La borne maximale de S^2 est égale à 8 soit $|\langle S \rangle| \leq 2\sqrt{2}$.

L'inégalité de Bell-CHSH est bien violée. Les particules sont donc intriquées, la mesure de l'une influence sur l'autre. Le réalisme local est brisé, c'est la non-localité.

2.2.3 Borne quantique du *CHSH game*

La mécanique quantique nous permet donc d'avoir accès à des corrélations *non locales*. Il nous faut maintenant nous intéresser à l'utilisation de celles-ci pour le *CHSH game*.

Pour commencer, il nous faut énoncer le théorème suivant : *Il existe une stratégie intriquée qui permet à Alice et Bob de gagner au CHSH avec une probabilité $\cos^2 \frac{\pi}{8} \approx 85,35\%$. Cette limite qui correspond à la stratégie quantique optimale, est appelée **Borne de Tsirelson**.* Pour démontrer ce théorème, considérons la stratégie suivante :

Assumons qu'Alice et Bob partagent l'état intriqué suivant :

$$|\Phi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B) \quad (2.21)$$

Les indices A et B représentent à qui appartient chaque qubit (A pour Alice et B pour Bob). On définit les états suivants :

$$\begin{aligned} |v\rangle &= \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) |0\rangle + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) |1\rangle \\ |v^\perp\rangle &= \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) |0\rangle - \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) |1\rangle \\ |w\rangle &= \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) |0\rangle - \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) |1\rangle \\ |w^\perp\rangle &= \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) |0\rangle + \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) |1\rangle \end{aligned} \quad (2.22)$$

Remarquons que $|v\rangle \perp |v^\perp\rangle$ et $|w\rangle \perp |w^\perp\rangle$. On considère aussi trois unitaires C , D et H définis comme suit :

$$\begin{aligned} C|0\rangle &= |v\rangle & D|v\rangle &= |w\rangle & H|0\rangle &= 1/\sqrt{2}(|0\rangle + |1\rangle) \\ C|1\rangle &= |v^\perp\rangle & D|v^\perp\rangle &= |w^\perp\rangle & H|1\rangle &= 1/\sqrt{2}(|0\rangle - |1\rangle) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Le contexte maintenant défini, ils réalisent la stratégie suivante :

Alice applique H^x sur son qubit et le mesure ensuite, obtenant a , Bob applique C , puis D^y sur son qubit et le mesure aussi, obtenant b . On retrouve alors la boîte corrélée bipartie *quantique* suivante (Figure 2.2)

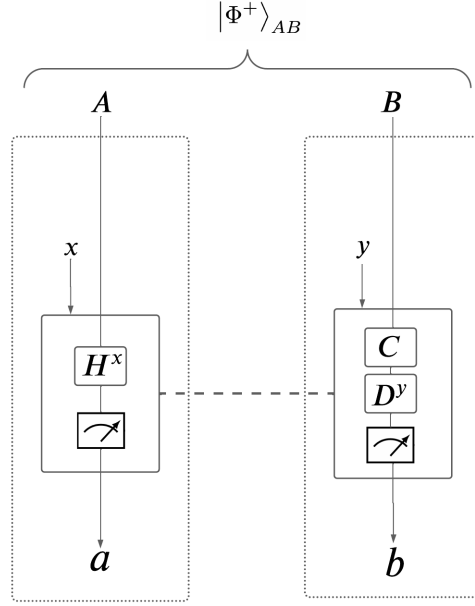


FIGURE 2.2 – Dans ce cas quantique, la ligne en pointillé représente la corrélation non locale due à l'intrication.

Soit $|\psi_{xy}\rangle$ l'état qu'Alice et Bob partagent avant leur mesure finale. On a

1. Si $x = y = 0$, on a

$$|\psi_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle |v\rangle + |1\rangle |v^\perp\rangle)$$

et en remplaçant avec 2.22

$$Pr[(a, b) = 00] = Pr[(a, b) = 11] = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{8}}{2} \implies Pr[a \oplus b = 0] = \cos^2 \frac{\pi}{8}$$

2. Si $x = 0$ et $y = 1$, on a

$$|\psi_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle |w\rangle + |1\rangle |w^\perp\rangle)$$

et

$$Pr[(a, b) = 00] = Pr[(a, b) = 11] = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{8}}{2} \implies Pr[a \oplus b = 0] = \cos^2 \frac{\pi}{8}$$

3. Si $x = 1$ et $y = 0$, on a en notant $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ et $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$

$$|\psi_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle |v\rangle + |-\rangle |v^\perp\rangle)$$

et

$$Pr[(a, b) = 00] = Pr[(a, b) = 11] = \frac{(\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8})^2}{4} = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{8}}{2} \implies Pr[a \oplus b = 0] = \cos^2 \frac{\pi}{8}$$

4. Si $x = 1$ et $y = 1$, on a

$$|\psi_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle |w\rangle + |-\rangle |w^\perp\rangle)$$

et

$$Pr[(a, b) = 01] = Pr[(a, b) = 10] = \frac{(\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8})^2}{4} = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{8}}{2} \implies Pr[a \oplus b = 1] = \cos^2 \frac{\pi}{8}$$

On retrouve bien $Pr[\text{Alice et Bob gagne}] \leq \cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$ la borne de Tsirelson.

Nous venons de voir que les corrélations non locales nous permettent de définir une nouvelle borne pour le *CHSH game*, il est donc naturel de se demander pourquoi cette borne et en quoi des corrélations *supra-quantique* nous permettrait de gagner à 100% au *CHSH game*.

Chapitre 3

No-Signaling

3.1 Définition et Structure du NS

Nous avons vu dans la partie précédente que des corrélations purement quantiques, donc non locales, permettent de dépasser la limite de Bell des 75% de victoires au CHSH mais ne permettent pas de gagner avec une probabilité supérieure à 85% la borne de Tsirelson. En découle la question suivante : *Existe-t-il un type de corrélation permettant de gagner le CHSH avec probabilité 1 et quelles conditions minimales décrivent une telle théorie ?*

3.1.1 La PR-BOX

Popescu et Rohrlich proposent une ressource sous forme de boîte noire dont la distribution de probabilité serait la suivante :

$$\mathbb{P}(a, b|x, y) = \frac{1}{2} \delta_{a \oplus b = xy} \quad (3.1)$$

Étudions la probabilité de gagner au CHSH en disposant d'une telle ressource : $p_{CHSH} = \frac{1}{4} \sum_{x,y=0}^1 \mathbb{P}_{PR}(a \oplus b = xy|x, y) = 1$ par définition, la PR-Box gagne au CHSH avec probabilité 1. On souhaiterait donc connaître les propriétés d'un ensemble minimal contenant la PR-Box : il s'agit de l'ensemble *No-Signaling*.

3.1.2 Définition

Une théorie **No-Signaling** (No-communication) désigne une théorie où un parti possédant une ressource ne peut pas transmettre directement d'information au second parti sans utiliser de communication classique.

La distribution de probabilité d'une telle théorie est décrite par la propriété suivante :

$$\forall y, \mathbb{P}(a|x, y) = \mathbb{P}(a|x) \quad (3.2)$$

Une telle théorie semble à première vue inclure nos théories quantiques et locales ainsi que la PR-Box définie précédemment.

3.1.3 Structure

On s'intéresse ici à la structure décrite dans [11] formée par l'ensemble des points de probabilité :

$$\mathcal{P} = \{\mathbb{P}(a, b|x, y) | x, y, a, b \in \{0, 1\}\} \quad (3.3)$$

La dimension de cet espace est à première vue 16, mais peut être réduit à 8 en utilisant :

1. La normalisation des \mathbb{P}_{xy}
2. La définition du *No-signaling* $\mathbb{P}(a|x, y) = \mathbb{P}(a|x)$

Ainsi, l'espace est décrit par les 8 paramètres suivants : $\mathbb{P}_x(a = 0)$ pour $x \in \{0, 1\}$, $\mathbb{P}_y(b = 0)$ pour $y \in \{0, 1\}$ et $\mathbb{P}_{xy}(a = 0, b = 0)$ pour $x, y \in \{0, 1\}$.

Un point de l'espace est donc décrit par le vecteur

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbb{P}_{x=0}(a = 0) \\ \mathbb{P}_{x=1}(a = 0) \\ \mathbb{P}_{y=0}(b = 0) \\ \mathbb{P}_{y=1}(b = 0) \\ \mathbb{P}_{00}(00) \\ \mathbb{P}_{01}(00) \\ \mathbb{P}_{10}(00) \\ \mathbb{P}_{11}(00) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

L'ensemble des points correspondants au *No-Signaling* forment alors un espace convexe avec un nombre fini d'extremum : un polytope. Certains de ces extremum sont non-locaux comme les PR-Box.

3.2 Caractérisation du réalisme locale en tant que sous-espace du No-Signaling

Dans cette partie, nous allons donner une définition du réalisme locale en se basant sur le *No-Signaling* (NS).

3.2.1 Polytope local

Nous avons vu précédemment que le réalisme local peut être décrit par une combinaison convexe de stratégies déterministes c'est-à-dire par les distributions de probabilités de la forme : $\mathbb{P}(a, b|x, y) = \delta_{a=f(x)}\delta_{b=g(y)}$ Il est alors trivial de dire que le déterminisme local est un sous-ensemble convexe du NS.

De plus, on sait que le nombre de fonctions sur 1 bit est de 4 : $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 1$, $f_3(x) = x$, $f_4(x) = x \oplus 1$. Ainsi il existe seulement 16 stratégies locales déterministes, on

les notera $D_{xy}^{i,j}(a,b) = \delta_{a=f_i(x)}\delta_{b=f_j(y)}$. Ces 16 stratégies définissent 16 points, nommés \mathbf{D}^{ij} , dans \mathcal{P} . Ces 16 points sont des extremum, l'ensemble correspondant au réalisme local est donc un polytope !

3.2.2 Faces du polytope local

Nous savons également que l'ensemble local est caractérisé par les inégalités de Bell. Or il est montré dans [11] que ces inégalités peuvent se réécrire en fonction des paramètres décrivant \mathcal{P} .

$$-1 \leq \mathbb{P}_{00}(00) + \mathbb{P}_{01}(00) + \mathbb{P}_{10}(00) - \mathbb{P}_{11}(00) - \mathbb{P}_{x=0}(a=0) - \mathbb{P}_{y=0}(b=0) \leq 0 \quad (3.5)$$

Qu'on peut réécrire sous notation vectorielle comme :

$$\mathbf{T}_{CH} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$-1 \leq \mathbf{T}_{CH} \cdot \mathbf{P} \leq 0 \quad (3.7)$$

Cette inégalité décrit l'ensemble des points appartenant au polytope local.

Les faces de ce polytope de dimension 8 sont des hyperplans de dimension 7. On remarque que : $\mathbf{T}_{CH} \cdot \mathbf{D}^{ij} = 0$ pour les valeurs 11, 13, 22, 24, 31, 34, 42 et 43 de i et j. Ainsi il est simple de vérifier que ces points forment un hyperplan et le point "le moins local au-dessus" de cette face est la PR-Box définie en 3.1. De même, les 8 autres points donnent $\mathbf{T}_{CH} \cdot \mathbf{D}^{ij} = -1$ et forment l'hyperplan opposé associé à la PR-Box définie pour le CHSH $a \oplus b = xy \oplus 1$. On trouve ainsi par symétrie 8 hyperplans associés à chaque PR-Box pour chaque version du CHSH. Toutes les faces étant équivalentes à une transformation triviale près, on peut dire qu'il existe une unique Inégalité de Bell qui borne le polytope local.

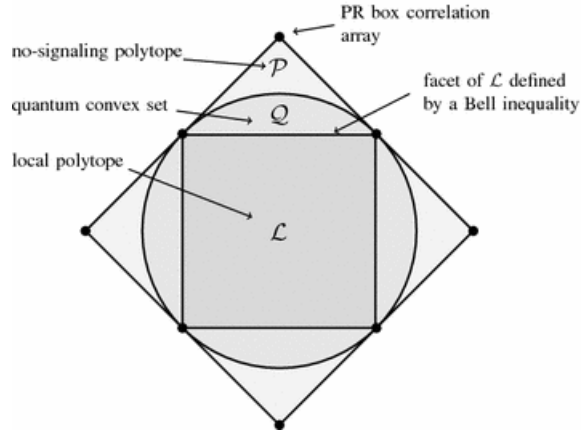


FIGURE 3.1 – Représentation réductrice en 2 dimensions du polytope NS et de ses sous-ensembles.

3.3 Caractérisation du sous-ensemble quantique : *Information Causality*

Nous voudrions maintenant de la même manière caractériser l'ensemble des corrélations quantiques de la même façon que pour le polytope local. Cependant, l'ensemble correspondant au quantique, bien que convexe possède une infinité d'extremum et n'est donc pas un polytope. Le but de cette partie est de trouver une série d'inégalités qui permettent de définir le sous-ensemble quantique à l'aide du *No-Signaling*, de la même manière que les inégalités de Bell définissent le polytope local dans le polytope NS.

3.3.1 En quoi l'ensemble quantique est différents du polytope NS ?

Afin d'essayer de délimiter l'ensemble quantique, il semble important de se demander en quoi est-il différent du polytope NS.

Supposons le scénario suivant : Alice dispose de deux bits d'information nommés x_0, x_1 et Bob souhaite récupérer l'information de l'un des deux bits mais Alice ne sait pas lequel. Les deux parties ne peuvent communiquer mais disposent d'une PR-Box tel que si Alice input x , et Bob y , et ont pour output a (resp. b) : $a \oplus b = xy$. Ainsi si $y = 0 \implies b = a$ sinon si $y = 1 \implies b = a \oplus x$.

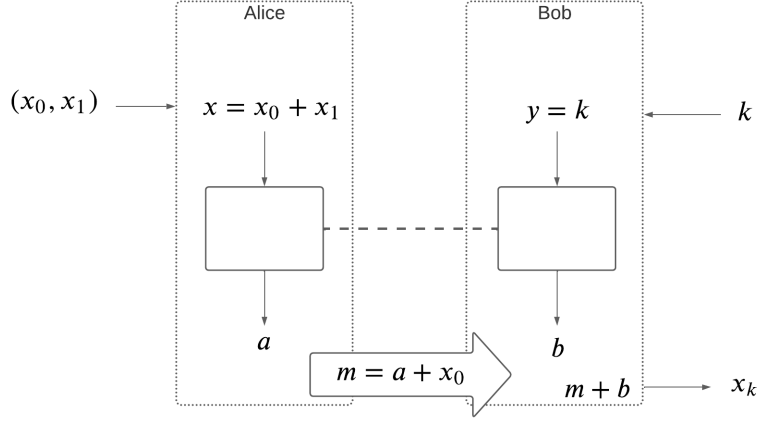


FIGURE 3.2 – Protocole NS 1

On suit le protocole présenté dans [10] visible figure 3.2. On voit qu'une fois le message m de 1 bit reçu, bob peut récupérer x_k avec probabilité 1. Car si $k = 0 \implies a = b$ donc $m + b = a \oplus x_0 \oplus a = x_0$ et si $k = 1 \implies a = b \oplus x$ alors $m + b = a \oplus x_0 \oplus a \oplus x_0 \oplus x_1 = x_1$. Ainsi en quelque sorte, bien qu'un seul bit ait été transmis par Alice, Bob dispose des deux bits de son côté (bien que la lecture de l'un détruira l'autre). Ce genre de propriétés ne devrait pas arriver dans le cas d'une corrélation quantique (ou classique)! Et pour cause, cela permettrait de résoudre des problèmes de n'importe quel complexité par l'échange d'un unique bit. Nous nous baserons donc sur cette observation pour définir nos inégalités.

3.3.2 Random Access Code

Un Random Access Code (RAC) est en quelque sorte une généralisation du problème précédent. Alice dispose de N bits et veut les encoder dans un message de M bits dont Bob pourra décoder n'importe quel bit avec une probabilité dans le pire cas p . On appelle un tel code un $\text{RAC}(N, M, p)$, le code présenté dans la partie précédente étant un $\text{RAC}(2, 1, 1)$. Une chose importante à remarquer est que trouver une borne supérieure à la probabilité succès d'un code RAC est équivalent à trouver une borne supérieure de la probabilité de gagner au CHSH.

3.3.3 Information Causality

Le principe d'*Information Causality (IC)* se base sur le critère relevé dans la partie 3.3.1. Il stipule que dans un code $\text{RAC}(N, M, p)$, la quantité d'information accessible à Bob ne peut dépasser la quantité d'information envoyée par Alice : M la capacité du canal.

Plus formellement :

$$\sum_{i=1}^N I(x_i : \beta_i) \leq M \quad (3.8)$$

Il nous reste à montrer que cette inégalité nous permet bien de retrouver la borne de Tsirelson.

3.3.4 Calcul de la borne de Tsirelson

Il est possible de mettre en place un $\text{RAC}(2,1,p)$ pour un certain p , en utilisant un état intriqué et en imitant le protocole de la partie 3.3.1. Considérons maintenant le protocole suivant : Alice et Bob disposent de paires de boîtes corrélées à base d'états intriqués et souhaitent mettre en place un $\text{RAC}(2^n,1,\mathbb{P}_n)$. Ils peuvent alors chaîner les boîtes comme cela est présenté figure 3.3.

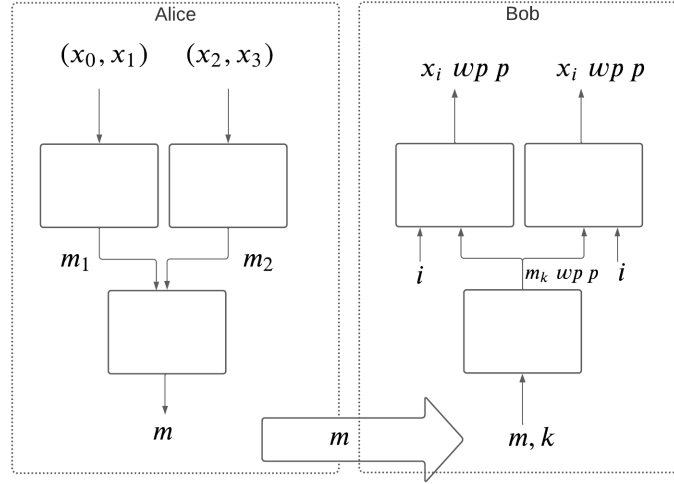


FIGURE 3.3 – Alice met deux bits dans chaque boîte et récupère les messages pour les mettre dans la troisième. Bob peut alors décoder le message en suivant l'ordre des boîtes.

Ainsi $2^n - 1$ boîtes permettent de coder 2^n bits. La probabilité pour Bob d'obtenir le bit voulu est alors pour $n=2$:

$$\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\beta_k = x_k) \quad (3.9)$$

$$= \mathbb{P}(\beta_k = x_k | m = m_k) \mathbb{P}(m = m_k) + \mathbb{P}(\beta_k = x_k | m = \bar{m}_k) \mathbb{P}(m = \bar{m}_k) \quad (3.10)$$

$$= p^2 + (1 - p)^2 \quad (3.11)$$

En généralisant pour n quelconque, on voit que : $\mathbb{P}_n = p\mathbb{P}_{n-1} + (1 - p)\mathbb{P}_{n-1}$. Ainsi si on

pose $p = \frac{1+E}{2}$ on peut montrer par récurrence :

$$\mathbb{P}_n = \frac{1 + E^n}{2} \quad (3.12)$$

La quantité d'information accessible à Bob est alors : $I(x_i : \beta_i) = 1 - h(\mathbb{P}_n)$ qui par développement vaut $\approx E^{2n}$. Comme **un seul bit d'information** à été échangé, en utilisant l'équation 3.8 on trouve :

$$1 \geq \sum_{i=1}^{2^n} I(x_i : \beta_i) \geq (2E^2)^n \quad (3.13)$$

Ainsi $1 \geq 2E$ et donc $E \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ et finalement :

$$p \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad (3.14)$$

On retrouve bien la borne de Tsirelson !

Chapitre 4

Simulation CHSH

4.1 Protocole

Le but de cette section est de simuler informatiquement plusieurs parties du jeu du CHSH dans les différents cadres vu précédemment à savoir : Réalisme Locale, Quantique et les PR-Box (No-Signaling). Dans chaque cas, le jeu est joué en utilisant différentes stratégies (classiques ou non) et la probabilité de victoire est associée à la distribution de probabilité $\mathbb{P}(a, b|x, y)$ représentant un unique point dans notre hyper-espace de dimension 8. Pour chacun de ces points, on s'intéressera au nombre moyen de victoires sur 10000 parties du jeu.

La simulation est réalisée en python et le notebook est disponible. [7]

4.1.1 Localité

Dans le cadre d'une stratégie locale, on rappelle que l'ensemble des stratégies possible est la somme convexe des stratégies déterministes. Pour simuler l'ensemble des stratégies existante, il nous suffit donc de programmer l'ensemble des fonctions sur 1 bit

```
def oneBitFunction(x,i):  
    if i==0:  
        return 0  
    elif i==1:  
        return 1  
    elif i==2:  
        return x  
    else:  
        return 1-x
```

Puis pour chaque partie de sélectionner la fonction à exécuter selon un paramètre λ suivant une loi de probabilité choisit aléatoirement avant la première partie.

```
#Strategie aleatoire locale
res = []
L = generateLoiProba()
for n in range(10000):
    x,y = np.random.randint(2,size=2)
    lamb = followProba(L)
    a = oneBitFunction(x,lamb)
    b = oneBitFunction(y,lamb)
    res.append((a+b)%2 == x*y)
np.average(res)
```

Ainsi lorsque la loi du paramètre λ varie, on parcourt un sous-ensemble de l'espace formé par les points $\mathbb{P}(a, b|x, y)$ et les probabilités de victoire varie entre 0 et 0.75.

4.1.2 Quantique

Nous nous intéressons ici à un ensemble de stratégies quantique : Alice et Bob partagent le qubit $|\phi^-\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}$ et reçoivent chacun leur bit x,y. Chacun effectue une rotation sur son qubit d'angle θ_x^A pour Alice et d'angle θ_y^B pour Bob. L'état global obtenu est donc : $\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(\theta_x^A + \theta_y^B)(|00\rangle - |11\rangle) + \sin(\theta_x^A + \theta_y^B)(|01\rangle + |10\rangle))$ Les valeurs de a et b sont obtenues en mesurant cet état dans la base calculatoire.

Ainsi nous disposons de 4 angles à faire varier pour parcourir un sous-ensemble de l'espace formé par les points $\mathbb{P}(a, b|x, y)$.

```
#Strategie Quantique aleatoire

def measure(x,y,thetas):
    r = np.random.uniform(0,1)
    if r <= 0.5*np.cos(thetas[x]+thetas[y+2])**2:
        return [0,0]
    elif 0.5*np.cos(thetas[x]+thetas[y+2])**2 < r <= \
        np.cos(thetas[x]+thetas[y+2])**2:
        return [1,1]
    elif np.cos(thetas[x]+thetas[y+2])**2 < r <= \
        np.cos(thetas[x]+thetas[y+2])**2 + 0.5*np.sin(thetas[x]+thetas[y+2])**2:
        return [0,1]
    else:
        return [1,0]
```

```

res = []
thetas = np.random.uniform(0,2*np.pi,size=4)
for n in range(10000):
    x,y = np.random.randint(2,size=2)
    a,b = measure(x,y,thetas)
    res.append((a+b)%2 == x*y)
np.average(res)

```

4.1.3 PR-Box

Enfin nous simulons les PR-Box pour avoir au moins un point non-Local et non-Quantique à titre de comparaison. Rappelons que la PR-Box est définie par $P(a \oplus b = xy) = 1$. Ainsi pour b une transformation quelconque de y , a vaudra b si $y = 0$ ou $b \oplus x$ si $y = 1$.

```

def PR(x,y):
    b = oneBitFunction(y,np.random.randint(4))
    if y == 0:
        a = b
    else:
        a = (x+b)%2
    return [a,b]

```

4.2 Présentation des résultats

4.2.1 Problème et Graphiques

Un problème se pose dans la présentation des résultats puisque pour chaque distribution de probabilité $\mathbb{P}(a, b|x, y)$, c'est à dire un point de dimension 8, on souhaite associer la probabilité de victoire au CHSH obtenue par la simulation. Or il n'est pas aisé de représenter en 2 dimensions un espace de dimension $8 + 1$!

Dans un premier temps nous pouvons représenter la probabilité de victoire selon chacune des composante, on obtient ainsi 8 graphiques. Ainsi aucune approximation n'est faite mais l'inconvénient étant qu'il est difficile de tirer des conclusions pour chaque graphique.

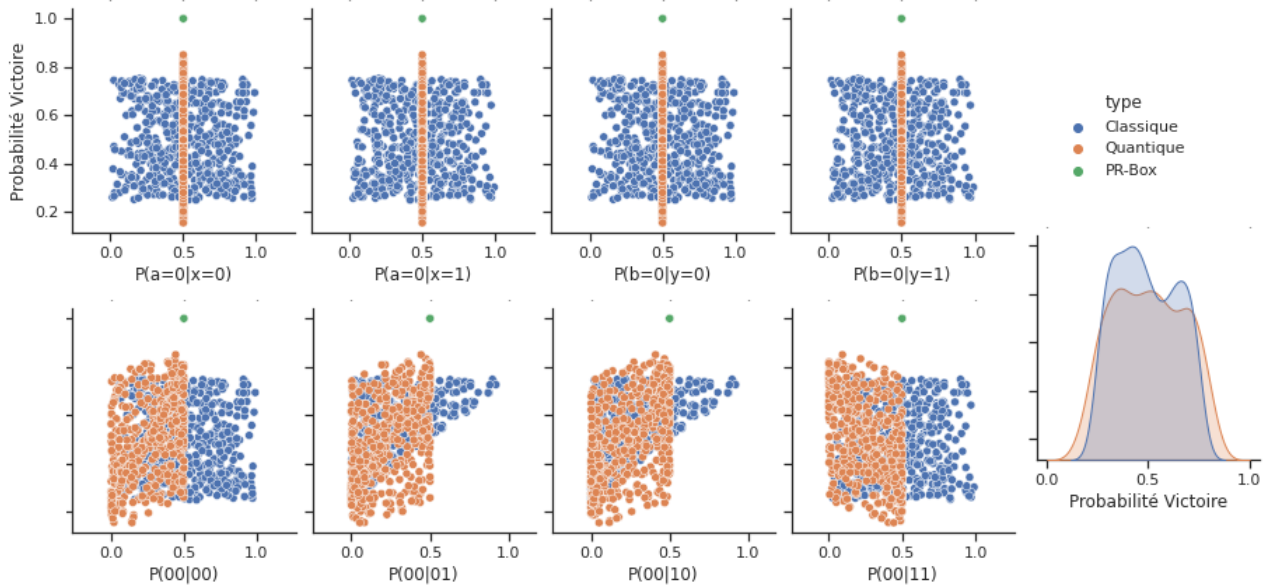


FIGURE 4.1 – Probabilité de victoire au CHSH pour chaque dimension dans les cas classique et quantique. Le graphique de droite représente une estimation par noyau de la probabilité de victoire.

Dans un second temps il peut être intéressant de réaliser une analyse par composante principale de nos points afin de réduire la dimensionnalité et d'obtenir un unique graphique en 2 ou 3 dimensions. Pour cela, on calcule la décomposition en valeurs singulière de la matrice de variance-covariance et on projette nos points dans le sous-espace formé par les 1 ou 2 vecteurs propres principaux de cette dernière. Cela permet d'avoir une vue globale au prix de certaines pertes d'informations.

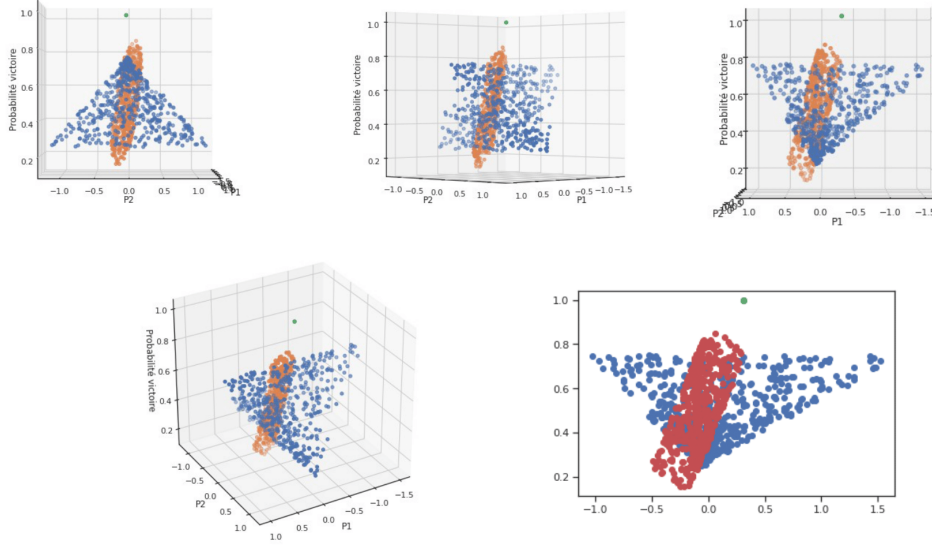


FIGURE 4.2 – Probabilité de victoire en fonction de une ou deux composantes principales

4.2.2 Analyse des résultats

Les résultats dans les 3 cas sont ceux attendus! (figure 4.1)

- Pour le cas Local : les probabilités de victoire couvrent l'ensemble des valeurs sans jamais dépasser la limite de 75%
- Pour le cas Quantique : Toutes les valeurs de probabilité de victoire sont couvertes sans jamais dépasser la borne de Tsirelson $\approx 85\%$.
- La PR-Box correspond bien à un point de probabilité victoire égale à 1.

On observe également dans la figure 4.1 de droite que la répartition des probabilités de victoire pour l'ensemble des stratégies classique et quantique est équiprobable.

Le protocole utilisé dans le cas quantique couvre uniquement un petit sous-espace de l'ensemble quantique globale. C'est pour cela qu'on observe des droites selon 4 composantes.

Dans l'analyse par composante principale (figure 4.2) les points classiques forment une surface. Si on compare notamment l'analyse à une composante au schéma présenté figure 3.1, on peut facilement assimiler le graphique à la représentation de l'une des faces du polytope (les autres faces correspondant à d'autres variantes du jeu du CHSH).

Pour aller plus loin, il serait intéressant de représenter l'ensemble des points quantiques et No-Signaling, ainsi que les autres scénarios de CHSH pour voir réapparaître la figure 3.1 entièrement.

Conclusion

Les corrélations dites locales sont délimitées par les principes que sont le réalisme ("la réalité est supposée exister en soi") et la localité ("un système n'est soumis qu'à l'influence de son environnement proche"). La mécanique quantique quant-à elle permet des corrélations non-locales, violant ainsi les inégalités de Bell.

Ces corrélations peuvent être elles aussi délimitées par l'utilisation de la théorie de l'information. Ainsi en posant des limites sur la quantité d'information accessible pour une quantité d'information échangée : *l'Information Causality* permet, en partant d'un ensemble théorique plus globale que l'ensemble dans lequel sont respectées les lois de la nature, de redéfinir l'ensemble des corrélations quantiques.

Nous avons pu entrevoir à travers ce travail l'aspect très universel de la théorie de l'information. Nous permettant de retranscrire à travers *l'Information causality* les limites de notre univers et les corrélations existantes.

Bibliographie

- [1] J.F. BELL. “On the Einstein Podolsky Rosen Paradox”. In : *Rev. Mod. Phys.* 38.447 (1966).
- [2] Samuel L. BRAUNSTEIN et Carlton M. CAVES. “Information-Theoretic Bell Inequalities”. In : *Phys. Rev. Lett.* 61 (6 août 1988), p. 662-665. DOI : 10.1103/PhysRevLett.61.662. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.61.662>.
- [3] A ; B Podolsky ; N Rosen EINSTEIN. “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete”. In : *Phys. Rev.* 47.777 (1935).
- [4] Nicolas GISIN. *L’Impensable Hasard : Non-localité, téléportation et autres merveilles quantiques*. Odile Jacob Sciences, 2012.
- [5] Carsten HELD. “Quantum-mechanical correlations and Tsirelson bound from geometric algebra”. In : *Quantum Studies : Mathematics and Foundations* 8.4 (2009), p. 411-417.
- [6] J.F. Clauser M. Horne A. Shimony R.A. HOLT. “CHSH”. In : *Phys.Rev. Lett.* 23.880 (1969).
- [7] Chevalier B. Rossi JL. *Notebook Simulation CHSH*. URL : <https://colab.research.google.com/drive/1RjXCegjpX9V1xnsveGtDojF-yGkxf0CW?usp=sharing>. (accessed : 28.03.2022).
- [8] Philippe LAMONTAGNE. *Non-Local Boxes*. Juill. 2014.
- [9] N. D. MERMIN. “Quantum mechanics vs local realism near the classical limit : A Bell inequality for spin s ”. In : *Phys. Rev. D* 22 (2 juill. 1980), p. 356-361. DOI : 10.1103/PhysRevD.22.356. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.22.356>.
- [10] Marcin PAWLOWSKI et Valerio SCARANI. “Information causality”. In : *arXiv* 1112.1142 (déc. 2011). URL : <https://arxiv.org/abs/1112.1142>.
- [11] Valerio SCARANI. “Quantum Information Primitive notions and quantum correlations”. In : *arXiv* 0910.4222 (oct. 2009).