TP Maths 2

Janvier 2025

Table des matières

1 Calcul d'intégrales le long d'un chemin

1.1 Intégration d'une fonction

Soit la fonction $f(t)$ telle que :

$$f(t) = 2 + sin(t) \tag{1}$$

On cherche la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_0^\pi (2 + sin(t))\, dt \tag{2}$$

Commencer par calculer la valeur de l'intégrale.
Ensuite, avec Python :

1. Définir la variable symbolique t.
2. Définir la fonction f.
3. Calculer l'intégrale sur l'intervalle $[0, \pi]$ en utilisant la fonction **integrate**.

1.2 Intégration le long d'un chemin

Soit C le cercle de centre 0 et de rayon 1, et γ l'arc reliant les points 1 et $0.5 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ du cercle C. Soit f la fonction de la variable complexe z :

$$f(z) = z^2 \tag{3}$$

On souhaite évaluer l'intégrale de f sur l'arc γ :

$$\int_\gamma f(z)dz \tag{4}$$

Commencer par calculer la valeur de l'intégrale. Puis, avec Python :

1. Définir la variable symbolique z.
2. Définir la fonction f.
3. Calculer l'intégrale en utilisant la fonction **integrate** et en remplaçant z par $\exp(I * t)$ grâce à la fonction **replace**.

1.3 Création d'un script et applications

Des séquences de commandes peuvent être sauvegardées dans un script (extension ".py"). Ce fichier vous servira à enregistrer les commandes qui permettent d'obtenir les réponses aux exercices qui suivent.
Dans cet exercice, vous devez créer un script Python nommé tp1_3.py permettant de calculer la valeur de l'intégrale de f le long de γ, avec :

$$f(z) = z^2 + 3z \tag{5}$$

lorsque :

1. γ est l'arc du cercle reliant les points 2 et $2i$
2. γ est composé de deux segments joignant, pour le premier, 2 et $2 + 2i$, et, pour le second, $2 + 2i$ et $2i$

Calculer les deux intégrales puis vérifier les calculs à l'aide du script tp1_3.py qui doit traduire les commandes suivantes :

Entrée : f, g, a, b ; Sortie : w
// Calcul de la différentielle de la fonction g représentant γ
// Définition de la fonction $f(g(t))$
// Calcul du produit des 2 fonctions précédentes
// Valeur finale $w =$ intégrale sur $[a, b]$ du produit
Remarque : ce fichier correspond à la fonction calculant l'intégrale de la fonction complexe f le long de la courbe paramétrée g. Noter que :
a) La fonction complexe est notée f
b) La courbe $g : [a, b] \to C$. Commenter les résultats.

2 Calcul d'intégrales le long d'un contour fermé

2.1 Premières applications

Soient f_1, f_2 et f_3 les fonctions de la variable complexe z suivantes :

$$f_1(z) = z^2 \tag{6}$$

$$f_2(z) = \frac{1}{z} \tag{7}$$

$$f_3(z) = conj(z) \tag{8}$$

Soit $g = cos(t) + isin(t)$ sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.
Calculer les trois intégrales des fonctions précédentes le long de la courbe γ définie par g. Utiliser tp1_3.py pour vérifier les calculs. Commenter les résultats obtenus.

2.2 Application du théorème des résidus

Soient deux fonctions f_1 et f_2 de la variable complexe z :

$$f_1 = \frac{1}{z(z-1)} \tag{9}$$

$$f_2 = \frac{1}{z(z-1)(z-2)} \tag{10}$$

Soit $g = cos(t) + isin(t)$ sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.
Télécharger le script theoreme_residus_cercle.py et l'utiliser pour calculer :

1. l'intégrale de f_1 le long de γ, défini (i) par $\beta \times g$ avec $0 < \beta < 1$ puis (ii) par $\beta \times g$ avec $1 < \beta$.
2. l'intégrale de f_2 le long de γ, défini (i) par $\beta \times g$ avec $0 < \beta < 1$ puis par (ii) $\beta \times g$ avec $1 < \beta < 2$ (iii) par $\beta \times g$ avec $2 < \beta$.

Commenter les résultats obtenus en calculant (à la main) les intégrales des deux questions précédentes.

Remarque : *le script theoreme_residus_cercle.py calcule l'intégrale d'une fonction f le long d'un cercle C de centre $(0, 0)$ et de rayon R en utilisant le théorème des résidus. Il prend en entrée (i) le numérateur de f, (ii) le dénominateur de f et (iii) le rayon de C.*

2.3 Intégrales de Cauchy

Soit $p(z) = e^z$ et $\gamma = e^{it}$ sur l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$.
Utiliser theoreme_residus_cercle.py pour calculer les intégrales suivantes :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{p(z)}{z}dz \tag{11}$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{p(z)}{z-\frac{1}{2}}dz \tag{12}$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{p(z)}{z-2}dz \tag{13}$$

Commenter les résultats obtenus.

3 Intégrales sur R

Soient I_1 et I_2 deux intégrales définies par :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx \tag{14}$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^3}dx \tag{15}$$

1. Calculer I_1 et I_2.
2. En utilisant la commande **integrate** de Python, calculer les intégrales précédentes. Notons que **oo** représente la valeur infinie dans la librairie SymPy.
3. Comparer les résultats des questions 1 et 2.