Baptiste Cojean & Gatien Auffret

ESIR 1 INFO

PROJ-MATH Sujet n°1

15/01/2025

Sommaire :

I - Introduction

Lors de ce TP, nous allons utiliser les différentes fonctionnalités de calcul présentes dans MATLAB. Nous allons notamment calculer les valeurs et vecteurs propres d'une matrice, visualiser des fonctions et programmer des méthodes de recherche de présence de points, de calcul d'air, etc.

II - Tests de précision de calculs numériques

Nous allons réaliser des calculs simples pour tester la précision de calculs numériques sur MATLAB : (en vert le résultat attendu)

- $2 + 3$ = 5
- 2^{10} = 1024
- $sin(2\pi)$ = 0
- $e^{\pi i} + 1$ = 0 -> identité d'Euler
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 13 \\ 22 & 29 \end{pmatrix}$
- $\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ = -26

On obtient les résultats suivants :

```
>> exercice1
2+3 = 5
2^10 = 1024
sin(2π) = -2.4493e-16
e^(πi)+1 = 0+1.2246e-16i
(1 2)(2 3)
(3 4)(4 5) =
    10    13
    22    29

|1 7|
|4 2| =
-26
```

Ces résultats semblent précis, ce qui n'est pas étonnant car les variables MATLAB sont codées sur 64 bits (double précision) et peuvent contenir jusqu'à 16 chiffres significatifs. En revanche on constate deux erreurs, $sin(2\pi)$ = 0 et $e^{\pi i} + 1$ = 0 Ces erreurs sont causées par des arrondies qui accumulent des petites erreurs.

III - Eigenvalues, eigenvectors

Nous allons utiliser les fonctions de MATLAB pour obtenir les eigenvalues et eigenvectors d'une matrice.

On définit $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 & -2 \\ 1 & \sqrt{3}-1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et on calcule $Av,\ A^2v,\ ...$

```
>> exercice2
Eigenvalues (valeurs propres) :
   0.8660 + 0.5000i
   0.8660 - 0.5000i

Eigenvectors (vecteurs propres) :
   0.8165 + 0.0000i   0.8165 + 0.0000i
   0.4082 - 0.4082i   0.4082 + 0.4082i
```

On remarque que les valeurs propres sont complexes.

On calcule $Av,\ A^2v...$, $Bv,\ B^2v...$ et $Cv,\ C^2v...$ avec les matrices suivantes :

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 & -2 \\ 1 & \sqrt{3}-1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 & -2 \\ 1 & \sqrt{3}-1 \end{pmatrix}$$

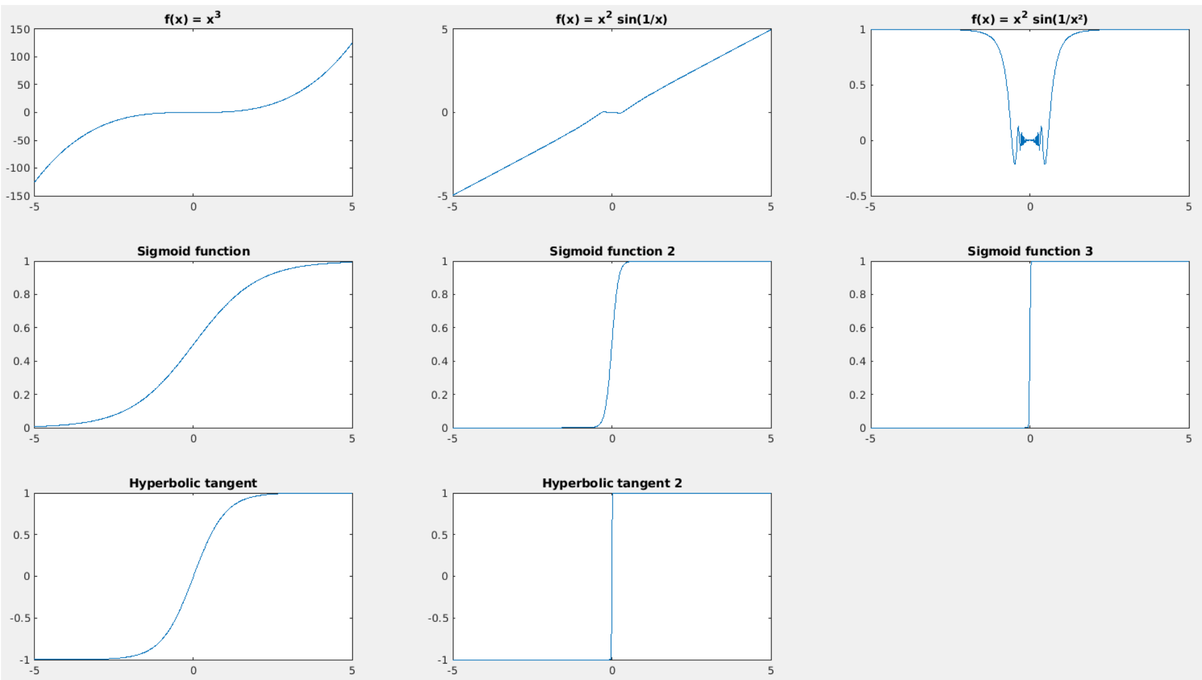
```
Av =                Bv =               Cv =
    -0.6340             -0.8966            -0.8966
     1.2321              1.7424             1.7424

A^2v =              B^2v =             C^2v =
    -2.0981             -4.1962            -4.1962
     0.1340              0.2679             0.2679

A^3v =              B^3v =             C^3v =
    -3.0000             -8.4853            -8.4853
    -1.0000             -2.8284            -2.8284
```

On observe que la matrice est la même mais le facteur qui la multiplie ne l'est pas. Ce qui explique que $A^n v$ évolue moins rapidement.

IV - Visualisation de fonctions

Nous allons visualiser et analyser les fonctions suivantes :

- $f(x) = x^3$
- $f(x) = x^2 sin(\frac{1}{x})$
- $f(x) = x^2 sin(\frac{1}{x^2})$
- $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ (sigmoid function)
- $f(x) = \frac{1}{1+e^{-10x}}$
- $f(x) = \frac{1}{1+e^{-100x}}$
- $tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (hyperbolic tangent)
- $tanh(x) = \frac{e^{100x} - e^{-100x}}{e^{100x} + e^{-100x}}$



Dans l’ordre de gauche à droite et de haut en bas :

- Figure 1 : Fonction cubique
- Figure 2 : Fonction impaire qui possède des variations au voisinage de 0 causés par sin(1/x)
- Figure 3 : Fonction paire, on observe aussi des variations au voisinage de 0 causés par sin(1/x²)
- Figure 4 : Fonction sigmoïde
- Figure 5 : Fonction sigmoïde avec coefficient plus grand donc la valeur de la pente est + élevée
- Figure 6 : Fonction sigmoïde avec coefficient encore plus grand donc la valeur de la pente est encore plus élevée

- Figure 7 : Fonction impaire de la tangente hyperbolique (ressemble à une sigmoïde)
- Figure 8 : Fonction impaire de la tangente hyperbolique avec coefficient plus grand donc la valeur de la pente est plus élevée

V - Algèbre et géométrie

Nous allons écrire des fonctions MATLAB en utilisant une tolérance 10^{-10} pour les problèmes suivants :

- Entrée : 3 points de plan (vecteurs de dimension 2).

Résultat : oui, si les 3 points sont incidents a une ligne, autrement non.

Pour déterminer si des points sont alignés, on les place dans une matrice et on calcule le déterminant. S'il est égal à 0, les points sont alignés.

- Entrée : 4 points de plan (vecteurs de dimension 2).

Résultat : oui, si les 4ème point est à l'intérieur de triangle, déterminé par les premier 3 points (retourner oui, même si le point est sur un de côtés de triangle)

Pour vérifier qu'un point est à l'intérieur d'un triangle on vérifie que la la somme des aires des trois sous triangles est égale à l'aire totale du grand triangle.

- Entrée : 4 points de plan (vecteurs de dimension 2).

Résultat : oui, si les 4ème point est à l'intérieur de triangle, qu'on obtient si on applique une rotation de π 2 , dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

On refait la même technique.

- Entrée : 3 points de plan et un vecteur normal d'une ligne, et point P.

Résultat : déterminer si la ligne (déterminée par le vecteur normal) et incident au point P à une intersection avec le triangle (déterminé par les 3 points)

On vérifie que P est incident au vecteur normal grâce au produit scalaire, puis on vérifie qu'il appartient au triangle

- Entrée : 3 points de plan.

Résultat : le surface de triangle déterminé par les 3 points.

On utilise la méthode du déterminant comme précédemment pour déterminer l'aire.

- Entrée : 4 points de plan.

Resultat : déterminer si le polygon déterminé par les 4 points soit convexe

On calcul le produit vectoriel, si tous les produits ont le même signe alors c’est convexe.

VI - Conclusion

Nous avons donc pu utiliser et comprendre plusieurs fonctionnalités de MATLAB tels que des tests de précision, des calculs numériques, des visualisations de différentes fonctions et des applications de méthodes d'algèbre et de géométrie. Ces exercices nous ont préparés en vue du projet final nécessitant ces connaissances préalables.