1. Ecuaciones diferenciales ordinarias de grado n

- Una ecuación diferencial de grado n se puede escribir

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_2(t)x' + a_1(t)x = f(t)$$

Si el coeficiente de $x^{(n)}$ no es 0 se puede dividir por el para llegar a la forma anterior. Sino, se trata de una ecuación de grado $n-1$.

- Su ecuación homogénea asociada es

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_2(t)x' + a_1(t)x = 0$$

Las soluciones de esta ecuación están en un espacio vectorial de dimensión n. Esto significa que encontrando n soluciones linealmente independientes $x_1, \ldots, x_n$ ya tenemos todas las soluciones de la ecuación homogénea que podemos escribir como la solución general

$$x_h(t) = c_1x_1(t) + \cdots + c_nx_n(t)$$

- En general, no hay un método para resolver ecuaciones en las que los coeficientes $a_1(t), \ldots, a_{n-1}(t)$ no son constantes pero algunas admiten trucos que se describen más adelante.

- En cualquier caso, la solución de una EDO (homogénea o no) de grado n siempre será

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

donde x_h es una solución general de la ecuación homogénea asociada y x_p una solución particular de la EDO original.

- Si $a_1(t), \ldots, a_{n-1}(t)$ son en realidad constantes entonces la solución de la ecuación se obtiene con el siguiente procedimiento:

  1. Solución de general de la homogénea, e.d., base de un e.v. de dimensión n. Es de la forma

  $$x_h(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t)$$

  para $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soluciones particulares linealmente independientes. Estas últimas se pueden obtener a partir de las soluciones de la ecuación característica $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_2\lambda + a_1 = 0$

     - Si todas las raíces son reales y distintas entonces la solución es de la forma

     $$x_h(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_ne^{\lambda_n t}$$

     - Si aparecen raíces λ con multiplicidad $m > n$ entonces la solución homogénea incluirá los términos

     $$c_1e^{\lambda t} + c_2te^{\lambda t} + \cdots + c_mt^{m-1}e^{\lambda t}$$

     para garantizar que el espacio de solucuiones siga teniendo dimensión n.
     - Si aparecen dos raíces λ_1, λ_2 complejas entonces también serán conjugadas. Si decimos que $\lambda_1 = a + bi$ (y por tanto $\lambda_2 = a - bi$), la solución tendrá términos de la forma

     $$c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t} = e^{at}\left(\hat{c_1}\cos bt + \hat{c_2}\sin bt\right)$$

     En este caso todas las constantes son reales (la parte imaginaria se cancela).

  2. Solución particular de la EDO:
     - Por variación de constantes utilizando el Wronskiano

     $$\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \ldots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \ldots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \ldots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}$$

     e integrando $c_i'(t)$ con respecto a t.
     - Por coeficientes indeterminados

  3. Concluir que la solución general de la EDO es $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$.

- Las constantes $c_1, \ldots, c_n$ de la solución general de la EDO original se determinan a partir de un PVI en el que aparecen n condiciones (por ejemplo de la forma $x(0) = x_0, x'(0) = x_1, \ldots, x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}$.

2. Sistemas de ecuaciones lineales

2.1. Sistemas lineales con coeficientes constantes

- Un sistema lineal de EDOs se ecribe

$$X'(t) = \mathbb{A}X(t) + B(t)$$

  donde $X(t)$ es una función vectorial de n variables, $X'(t)$ su derivada con respeco de t y B un vector de funciones en t.

- Un sistema lineal es homogéneo si $B(t)$ es nulo.

  - Las soluciones de un sistema lineal homogéneo de n EDOs es un espacio vectorial de dimensión n.
  - Se obtiene una base de este espacio a partir de la ecuación característica en λ. En el caso de los sistemas la ecuación característica es el polinomio característico de la matriz $\mathbb{A}$ igualado a 0:

$$\det(\mathbb{A} - \lambda I) = 0$$

    - Para cada λ_i autovalor de $\mathbb{A}$ con multiplicidad 1 se obtiene una solución $X_i(t) = e^{\lambda_i t}V_i$ donde V_i es el autovector asociado a λ_i.
    - Para cada λ_i autovalor de $\mathbb{A}$ con multiplicidad m se obtiene una solución de la forma $X_i(t) = e^{\lambda_i t}(V_1 + tV_2 + \cdots + t^{m-1}V_m$. Los vectores $V_1, \ldots, V_{m-1}$ se obtienen de plantear el sistema:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}e^{\lambda_i t}V_1 = \mathbb{A}V_1 \\ \frac{d}{dt}e^{\lambda_i t}(V_1 + tV_2) = \mathbb{A}(V_1 + tV_2) \\ \ldots \\ \frac{d}{dt}e^{\lambda_i t}(V_1 + tV_2 + \cdots + t^{m-1}V_m) = \mathbb{A}(V_1 + tV_2 + \cdots + t^{m-1}V_m) \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \lambda_i V_1 = \mathbb{A}V_1 \\ \lambda_i(V_1 + tV_2) = \mathbb{A}(V_1 + tV_2) \\ \ldots \\ \lambda_i(V_1 + \cdots + t^{m-1}V_m = \mathbb{A}(V_1 + \cdots + t^{m-1}V_m \end{cases}$$

    - Si λ_i es complejo
  - La solución general de un sistema lineal homogéneo puede darse por la matriz fundamental principal $e^{t\mathbb{A}}$.

2.2. Sistemas lineales con coeficientes variables

- En general no se pueden resover por el mismo procedimiento.
- Si en realidad son sistemas no ligados, sí que se pueden resolver, por ejemplo el ejercicio 12 de la hoja 4 en el que una ecuación es $y_1' = y_1$.