1. Curvas en el plano y en el espacio

1.1. Curvas en general

- Una **curva plana** es una aplicación continua $\alpha : I \subset \mathbb{R}^n$ definida por $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$.
- La **rapidez** es la derivada $\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \dots, \alpha_n'(t))$
- La **velocidad** es la norma de la rapidez $v_\alpha(t) = \|\alpha'(t)\|$
  - α es **regular** $\iff v_\alpha(t) > 0, \forall t \in I$
  - La derivada (o rapidez) normalizada es $T_\alpha(t) = \frac{\alpha'(t)}{v_\alpha(t)}$.
- La **longitud** es $l_\alpha = \int_I v_\alpha(t)dt$.
- Una **parametrización** es un difeomorfismo $\varphi : J \subset \mathbb{R} \to I \subset \mathbb{R}$
  - El **signo de una parametrización** es

$$\varepsilon(\varphi) = \begin{cases} +1 & \text{si } \varphi'(t) > 0, \forall t \in J \\ -1 & \text{si } \varphi'(t) < 0, \forall t \in J \end{cases}$$

  - Una curva está **parametrizada por longitud de arco** o p.p.a $\iff \|\alpha'(t)\| = 1, \ \forall t \in I$.
- Si para dos curvas α, β existe φ difeomorfismo tal que $\alpha = \beta \circ \varphi$ decimos que $\alpha \sim \beta$
  - $\sim$ es una relación de equivalencia
  - Dos curvas en una misma clase de equivalencia comparten la traza o imagen.
  - Se cumple

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \beta'(\varphi(t))\varphi'(t) \\ \|\alpha'(t)\| &= \end{aligned}$$

- Una curva es **birregular** $\iff$ para una parametrización α se tiene que α' y α'' son linealmente independientes.
  - En particular, $\alpha', \alpha'' \neq 0$ y por tanto α también es regular.

1.2. Curvas planas

- El **diedro de Frenet-Serret** formado por los vectores

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_\alpha(t) &= \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|} \\ \mathbf{n}_\alpha(t) &= J\mathbf{t}_\alpha(s) \text{ con } J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- La **curvatura** (con signo)

$$\begin{aligned} k_\alpha(t) &= \frac{\langle \mathbf{t}_\alpha'(t), \mathbf{n}_\alpha(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|} \\ k_\alpha(t) &= \frac{\det(\alpha'(t),\ \alpha''(t))}{\|\alpha'(t)\|^3} && \text{si } \alpha \text{ regular} \\ k_\alpha(t) &= \|\alpha''(t)\| && \text{si } \alpha \text{ está p.p.a.} \end{aligned}$$

  - El **vector curvatura** es $\mathbf{k}_\alpha(t) = k_\alpha(t)\mathbf{n}_\alpha(t)$
  - El **radio de curvatura**

$$\rho_\alpha(t) = \frac{1}{k_\alpha(t)}$$

  - El **centro de curvatura**

$$C_\alpha(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k_\alpha(t)}\mathbf{n}_\alpha(t)$$

  - El **circulo osculador** o **circunferencia osculatriz**

$$\{p \in \mathbb{R}^2 : \|p - C_\alpha(t)\| = \frac{1}{k_\alpha(t)}, \text{ para } t \in I \text{ fijado } \}$$

- Las **ecuaciones de Frenet-Serret** salen de tomar la submatriz 2×2 de las ecuaciones en el espacio.

1.3. Curvas en el espacio

- El triedro de Frenet-Serret formado por los vectores

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_\alpha(s) &= \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|} \\ \mathbf{n}_\alpha(s) &= \frac{\mathbf{t}_\alpha'(s)}{\|\mathbf{t}_\alpha'(s)\|} \\ \mathbf{b}_\alpha(s) &= \mathbf{t}_\alpha(s) \times \mathbf{n}_\alpha(s) \end{aligned}$$

- Los 3 planos del triedro de Frenet-Serret para un punto $\alpha(s)$ de la curva [afines] son:
  - El **plano osculador** $\text{span}\{\mathbf{t}_\alpha(s), \mathbf{n}_\alpha(s)\} + \alpha(s)$ cuyos puntos P cumplen $\langle P - \alpha(s), \mathbf{b}_\alpha(s) \rangle = 0$
  - El **plano normal** $\text{span}\{\mathbf{n}_\alpha(s), \mathbf{b}_\alpha(s)\} + \alpha(s)$ cuyos puntos P cumplen $\langle P - \alpha(s), \mathbf{t}_\alpha(s) \rangle = 0$
  - El **plano rectificante** $\text{span}\{\mathbf{t}_\alpha(s), \mathbf{b}_\alpha(s)\} + \alpha(s)$ cuyos puntos cumplen $\langle P - \alpha(s), \mathbf{n}_\alpha(s) \rangle = 0$
- La **curvatura** (siempre ≥ 0)

$$k_\alpha(s) = \frac{\|\mathbf{t}_\alpha'(s)\|}{\|\alpha'(s)\|}$$

$$\begin{aligned} k_\alpha(s) &= \frac{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s)\|}{\|\alpha''(s)\|^3} && \text{si } \alpha \text{ regular} \\ k_\alpha(s) &= \|\alpha''(s)\| && \text{si } \alpha \text{ p.p.a} \end{aligned}$$

- El **vector curvatura**

$$\mathbf{k}_\alpha(s) = \frac{\mathbf{t}_\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|} \text{ colineal con } \mathbf{n}_\alpha(s)$$

- La **torsión**

$$\begin{aligned} \tau_\alpha(s) &= -\frac{\langle \mathbf{b}_\alpha'(s), \mathbf{n}_\alpha(s) \rangle}{\|\alpha'(s)\|} \\ \tau_\alpha(s) &= \frac{\det(\alpha'(s),\ \alpha''(s),\ \alpha'''(s))}{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s)\|^2} \text{ si } \alpha \text{ regular} \end{aligned}$$

- Las ecuaciones de Frenet-Serret

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_\alpha' &= k_\alpha v_\alpha \mathbf{n}_\alpha \\ \mathbf{n}_\alpha' &= -k_\alpha v_\alpha \mathbf{t}_\alpha + \tau_\alpha v_\alpha \mathbf{b}_\alpha \\ \mathbf{b}_\alpha' &= -v_\alpha \tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}_\alpha' \\ \mathbf{n}_\alpha' \\ \mathbf{b}_\alpha' \end{pmatrix} = \|\alpha'(s)\| \begin{pmatrix} 0 & k_\alpha & 0 \\ -k_\alpha & 0 & \tau_\alpha \\ 0 & -\tau_\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}_\alpha \\ \mathbf{n}_\alpha \\ \mathbf{b}_\alpha \end{pmatrix}$$

2. Superficies

- Un **homeomorfismo** entre dos espacios topológicos es una aplicación biyectiva continua y con inversa continua.

  - Un **difeomorfismo** es un **homeomorfismo** diferenciable con inversa diferenciable.
  - Dos conjuntos son **homeomorfos** si existe un homeomorfismo entre ellos.

- Una **superficie regular** S es un subconjunto no vacío $S \subset \mathbb{R}^3$ tal que para todo $p \in S$ existe un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, un entorno abierto V de p en $\mathbb{R}^3$ y una **parametrización** $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to V \subset S \subset \mathbb{R}^3$ tal que

  1. $\mathbf{x}$ es diferenciable como aplicación $x : U \to \mathbb{R}^3$
  2. $\mathbf{x}$ es un homeomorfismo
  3. $\forall (u,v) \in U, (d\mathbf{x})_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva $\iff$ los vectores coordenaods son linealmente independientes $\forall (u,v) \in U$.

  - Puede ocurrir (esfera, cono. . .) que no valga con una única parametrización $\forall p \in S$. Si nos vale con una única parametrización entonces S es homeomorfa a un abierto de R^2.

- Los **vectores coordenados** en un punto $\mathbf{x}(u,v) \in S$ son

$$\mathbf{x}_u(u,v) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u,v) = (d\mathbf{x})_{(u,v)} \cdot e_1 \mathbf{x}_v(u,v) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u,v) = (d\mathbf{x})_{(u,v)} \cdot e_2$$

  - Los **campos coordenados** asociados a la parametrización $\mathbf{x}$ son dos campos $\mathbf{x}_u,\ \mathbf{x}_v$ diferenciables en el abierto $V \subset S$.

- El **plano tangente** a S en $p \in S$ es un subvespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ con dimensión 2 dado por:

$$T_pS = \{\alpha'(0) \mid \exists \varepsilon > 0, \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S \\ \wedge\ \alpha(0) = p \\ \wedge\ \alpha \text{ diferenciable } \}$$

  - Si q es la preimagen de p por $\mathbf{x}$ (es decir, $\mathbf{x}(q) = p$) entonces $T_pS = (d\mathbf{x})_q(\mathbb{R}^2)$
  - El **plano tangente (afín)** a S en $p = \mathbf{x}(u,v) \in S$

$$T_pS = p + \underbrace{\operatorname{span}\{\mathbf{x}_u(u,v), \mathbf{x}_v(u,v)\}}_{\text{plano tangente vectorial}}$$

- La **recta normal** a S en $p \in S$ es el complemento ortogonal del plano tangente $T_pS^{\perp}$.

  - Para cada $p \in S$ existen dos vectores normales unitarios (opuestos) en la recta normal.

- Una **función definida en la superficie regular** S es $f : S \to \mathbb{R}^m$.

  - f es **diferenciable** si para toda parametrización $\mathbf{x}$ de S, la función $f \circ \mathbf{x} : U \subset R^2 \to R^m$ es diferenciable. Se cumplen las propiedades habituales sobre diferenciabilidad: suma producto y cociente (siempre que tenga sentido) de funciones diferenciables es diferenciable.
  - Si f es una función definida entre dos superficies ($f : S_1 \to S_2$) entonces f es **diferenciable** $\iff$ $\forall p \in S_1$ hay una parametrización $\mathbf{x}_1 : U_1 \to S_1$ con $p \in \mathbf{x}_1(U_1)$ y una parametrización $\mathbf{x}_2 : U_2 \to S_2$ con $f(p) \in \mathbf{x}_2(U_2)$ tales que $\overline{f} := \mathbf{x}_2^{-1} \circ f \circ \mathbf{x}_1$ es diferenciable. $\overline{f}$ es la expresión en coordenadas de f.
  - La **diferencial de una función definida en una superficie regular** es

$$(df)_p : T_pS \to \mathbb{R}, \qquad (df)_p(x) := (f \circ \alpha)'(0)$$

  donde $\alpha : (-\varepsilon, +\varepsilon) \to S$ es una curva diferenciable en S tal que $\alpha(0) = p \wedge \alpha'(0) = x$. $(df)_p$ está bien definida y es independiente de la elección de α.

  - Más comodamente, si $\mathbf{x}$ es una parametrización de S tal que para ciertos u_0, v_0 se tiene que $\mathbf{x}(u_0, v_0) = p$, entonces la matrix asociada a la diferencial en la base $\{\mathbf{x}_u(u_0,v_0), \mathbf{x}_v(u_0,v_0)$ es

$$(df)_p = \begin{pmatrix} (f \circ \mathbf{x})_u(u_0,v_0) \\ (f \circ \mathbf{x})_v(u_0,v_0) \end{pmatrix}$$

    - f constante $\implies (df)_p = 0,\ \forall p \in S$. Recíprocamente, $(df)_p = 0 \forall p \in S \wedge S$ conexa $\implies f$ constante.
    - f tiene un extremo relativo en $p \implies (df)_p = 0$.

- La **primera forma fundamental** de S en p es

$$\mathrm{I}_p : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{I}_p(x,y) := \langle x, y \rangle$$

  - Es bilineal, simétrica y definida positiva (es el producto escalar restringido a cada plano tangente de S en p).
  - Dada una parametrización $\mathbf{x}$ de S tal que $\mathbf{x}(u_0,v_0) = p \in S$ la matriz de I_p respecto de la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_u(u_0,v_0), \mathbf{x}_v(u_0,v_0)\}$ es

$$(I_p)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x_u, x_u \rangle & \langle x_u, x_v \rangle \\ \langle x_v, x_u \rangle & \langle x_v, x_v \rangle \end{pmatrix}$$

  donde cada derivada parcial de $\mathbf{x}$ está evaluada en (u_0, x_0).

  - Al escribir

$$\mathrm{I}_p(x,y) = \langle x, y \rangle = (x_1, x_2)(I_p)_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

  estamos obteniendo el producto escalar de dos vectores en T_pS en función de sus coordenadas (x_1, x_2) e (y_1, y_2) respecto de la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$.

  - La **forma diferencial de la primera forma fundamental** es

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Fdv^2$$

  donde E, F y G son funciones diferenciables que evaluamos para cada $p \in S$.

    - Del criterio de Sylvester para que I_p siempre sea definida positiva se tiene que $E, G > 0$ y que $EG - F^2 > 0$.

  - La **longitud de un segmento** de una curva diferenciable $\alpha : I \to S,\ \alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ es

$$L(\alpha|_{[a,b]}) = \int_a^b \sqrt{\mathrm{I}_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))}dt = \int_a^b \sqrt{Eu'(t)^2 + 2Fu$$

  - El **área de una región** $R \subset S$ contenida en $\mathbf{x}(U)$ (bien parametrizada) es:

$$A(R) = \int_{\mathbf{x}^{-1}(R)} \|\mathbf{x}_u \times x_v\| dudv = \int_{\mathbf{x}^{-1}(R)} \sqrt{EG - F^2} dudv$$

Sea $f : S_1 \to S_2$ una aplicación diferenciable entre superficies regulares.

- f es una **aplicación conforme** si existe una aplicación diferenciable positiva $\lambda : S_1 \to R$ tal que

$$\langle (df)_p(x), (df)_p(y) \rangle = \lambda(p)\langle x, y\rangle, \qquad \forall x, y \in T_pS_1,\ \forall p \in S_1$$

  - Una **parametrización** $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2$ se dice **conforme** si cumple la definición anterior para $S_2 = \mathbb{R}^2$. Es decir, $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$ y $\forall p \in U$. Equivalentemente, $\mathbf{x}$ se dice conforme si

$$\mathrm{I}_p^{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \lambda(p) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

    es decir, si $E = G$ y $F = 0$ para todo $p = (u, v) \in U$.
  - f es conforme $\iff$ **preserva ángulos**
  - f es **equiárea** $\iff$ preserva $\det \mathrm{I}_p = EG - F^2$ entre S_1 y S_2
- f es una isometría local $\iff$ preserva la primera forma fundamenteal, es decir,

$$\langle (df)_p(x), (df)_p(y) \rangle = \langle x, y\rangle$$

  - f es una isometría local $\iff$ f es conforme con $\lambda(p) = 1$ constantemente
  - Toda isometría local de superficies es un difeomorfismo local
  - f isometría local $\iff$ f preserva longitudes, ángulos y áreas
    - Es decir f conforme y f equiárea $\iff$ f isometría local
  - Dos superficies son **localmente isométricas** si existe una isometría local f entre ellas y además f es sobre entre S_1 y S_2. *No es suficiente que f sea una isometría local.*
- Una **isometría global** entre superficies es un difeomorfismo global que además es isometría local.
  - Dos superficies son **globalmente isométricas** si existe una isometría global entre ellas.
  - isometría global $\implies$ isometría local
- La **aplicación de Gauss** $N : \mathbf{x}(U) \to \mathbb{S}^2$ definida por

$$N(\mathbf{x}(u, v)) = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}$$

  asocia a cada punto $p = \mathbf{x}(u, v) \in S$ su vector normal unitario.
  - N define un **campo normal unitario** localmente para cada entorno $\mathbf{x}(U)$ de p.
  - Si N define un campo normal globalmente para todo $p \in S$ se dice que S es orientable. Esto depende de la parametrización, por tanto S es **orientable** si existe alguna parametrización para la que N defina un campo normal unitario en toda S.
- La **segunda forma fundamental** es la aplicación

$$\mathrm{II}_p : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{II}_p(x, y) := \langle x, W_p y\rangle$$

  - II_p es bilineal y simétrica pero no tiene por qué ser definida positiva
  - La expresión matricial de II_p respecto de la base de vectores coordenados $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ se puede calcular a partir de la aplicación de Gauss mediante

$$\mathrm{II}_p \equiv \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}_{uu}, N\rangle & \langle \mathbf{x}_{uv}, N\rangle \\ \langle \mathbf{x}_{vu}, N\rangle & \langle \mathbf{x}_{vv}, N\rangle \end{pmatrix}$$

- Una **dirección asintótica** de S en p es un vector $x \in T_pS$ no nulo tal que $\mathrm{II}_p(x, x) = 0$.
  - Una **línea asintótica** de S es una curva diferenciable $\alpha : I \to S$ tal que $\alpha'(t)$ es dirección asintótica $\forall t \in I \iff \mathrm{II}(\alpha', \alpha') = 0$.
- El **operador de Weingarten** se define para cada $p \in T_pS$ como la aplicación

$$W : T_pS \to T_pS \text{ con } Wp(x) := -(dN)_p x$$

  - Es una aplicación autoadjunta: $\langle W_p x, y\rangle = \langle x, W_p y\rangle$
  - Su expresión matricial respecto de cualquier base ortonormal de T_pS es simétrica y por tanto diagonalizable. Además, las curvaturas que aparecen a continuación definidas en función de los autovalores de W_p están bien definidas y permanecen invariantes por cambios de base.
  - La relación matricial respecto de $\mathcal{B}$ entre $\mathrm{I}_p, \mathrm{II}_p$ y W es

$$(\mathrm{II}_p)_{\mathcal{B}} = (\mathrm{I}_p)_{\mathcal{B}} (W_p)_{\mathcal{B}}$$

- Las **curvaturas principales** de S en p son los autovalores $\kappa_1(p), \kappa_2(p) \in \mathbb{R}$ de W_p.
  - Las **direcciones principales** son cualquier autovector de W_p. Si $\kappa_1 \neq \kappa_2$ las direcciones principales son los múltiplos no nulos de e_1 y e_2. Si $\kappa_1 = \kappa_2$ todo vector no nulo de T_pS es dirección principal.
    - Una **línea de curvatura** es una curva diferenciable $\alpha : I \to S$ tal que $\alpha'(t)$ es dirección principal de S para todo $t \in I \iff W_{\alpha(t)}\alpha'(t) = \lambda(t)\alpha'(t)$, $\forall t \in I$ y cierta función curvatura principal $\lambda : I \to \mathbb{R}$.
  - Un **punto umbilical** es un $p \in S$ tal que $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$
  - Las **funciones de curvatura principal** se obtienen de diagonalizar para diagonalizamos para p genérico. Obtendremos funciones continuas $\kappa_1(p)$ y $\kappa_2(p)$. Si $\kappa_1 \neq \kappa_2$ entonces además son funciones diferenciables.
- La **curvatura de Gauss** de S en p es el número real

$$K(p) := \det W_p = \kappa_1(p) \cdot \kappa_2(p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

  para e, f, g, E, F, G evaluadas en p.
  - Atendiendo a la curvatura gaussiana, los puntos $p \in S$ se clasifican en:
    1. **puntos elípticos** si $K(p) > 0$
    2. **puntos parabólicos** si $K(p) = 0 \wedge W_p \neq 0$ (e.d. si solo una de las dos curvaturas principales es 0)
    3. **puntos planos** si $K(p) = 0 \wedge W_p = 0$ (e.d. si $\kappa_1(p) = \kappa_2(p) = 0$
    4. **puntos hiperbólicos** si $K(p) < 0$

- La **curvatura media** de S en p es el número real

$$H(p) := \frac{1}{2}\mathrm{tr}W_p = \frac{1}{2}(\kappa_1(p) + \kappa_2(p)) = \frac{1}{2}\frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2}$$

para e, f, g, E, F, G evaluadas en p.

  - Una **superficie minimal** es aquella que tiene $H(p) = 0, \ \forall p \in S$.