1. Curvas en el plano y en el espacio

1.1. Curvas en general

- Una **curva plana** es una aplicación continua $\alpha : I \subset \mathbb{R}^n$ definida por $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t))$.
- La **rapidez** es la derivada $\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \ldots, \alpha_n'(t))$
- La **velocidad** es la norma de la rapidez $v_\alpha(t) = \|\alpha'(t)\|$
  - α es **regular** $\iff v_\alpha(t) > 0, \forall t \in I$
  - La derivada (o rapidez) normalizada es $T_\alpha(t) = \frac{\alpha'(t)}{v_\alpha(t)}$.
- La **longitud** es $l_\alpha = \int_I v_\alpha(t)dt$.
- Una **parametrización** es un difeomorfismo $\varphi : J \subset \mathbb{R} \to I \subset \mathbb{R}$
  - El **signo de una parametrización** es

$$\varepsilon(\varphi) = \begin{cases} +1 & \text{si } \varphi'(t) > 0, \forall t \in J \\ -1 & \text{si } \varphi'(t) < 0, \forall t \in J \end{cases}$$

  - Una curva está **parametrizada por longitud de arco** o p.p.a $\iff \|\alpha'(t)\| = 1, \ \forall t \in I$.
- Si para dos curvas α, β existe φ difeomorfismo tal que $\alpha = \beta \circ \varphi$ decimos que $\alpha \sim \beta$
  - $\sim$ es una relación de equivalencia
  - Dos curvas en una misma clase de equivalencia comparten la traza o imagen.
  - Se cumple

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \beta'(\varphi(t))\varphi'(t) \\ \|\alpha'(t)\| &= \end{aligned}$$

- Una curva es **birregular** $\iff$ para una parametrización α se tiene que α' y α'' son linealmente independientes.
  - En particular, $\alpha', \alpha'' \neq 0$ y por tanto α también es regular.
- El **diedro de Frenet-Serret** formado por los vectores

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_\alpha(t) &= \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|} \\ \mathbf{n}_\alpha(t) &= J\mathbf{t}_\alpha(s) \text{ con } J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- La **curvatura** (con signo)

$$\begin{aligned} k_\alpha(t) &= \frac{\langle \mathbf{t}_\alpha'(t), \mathbf{n}_\alpha(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|} \\ k_\alpha(t) &= \frac{\det(\alpha'(t), \ \alpha''(t))}{\|\alpha'(t)\|^3} && \text{si } \alpha \text{ regular} \\ k_\alpha(t) &= \|\alpha''(t)\| && \text{si } \alpha \text{ está p.p.a.} \end{aligned}$$

  - El **vector curvatura** es $\mathbf{k}_\alpha(t) = k_\alpha(t)\mathbf{n}_\alpha(t)$
  - El **radio de curvatura**

$$\rho_\alpha(t) = \frac{1}{k_\alpha(t)}$$

  - El **centro de curvatura**

$$C_\alpha(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k_\alpha(t)}\mathbf{n}_\alpha(t)$$

  - El **circulo osculador** o **circunferencia osculatriz**

$$\{p \in \mathbb{R}^2 : \|p - C_\alpha(t)\| = \frac{1}{k_\alpha(t)}, \text{ para } t \in I \text{ fijado } \}$$

- Las **ecuaciones de Frenet-Serret** salen de tomar la submatriz 2×2 de las ecuaciones en el espacio.

1.2. Curvas en el espacio

- El triedro de Frenet-Serret formado por los vectores

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_\alpha(s) &= \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|} \\ \mathbf{n}_\alpha(s) &= \frac{\mathbf{t}_\alpha'(s)}{\|\mathbf{t}_\alpha'(s)\|} \\ \mathbf{b}_\alpha(s) &= \mathbf{t}_\alpha(s) \times \mathbf{n}_\alpha(s) \end{aligned}$$

- Los 3 planos del triedro de Frenet-Serret para un punto $\alpha(s)$ de la curva [afines] son:
  - El **plano osculador** $\text{span}\{\mathbf{t}_\alpha(s), \mathbf{n}_\alpha(s)\} + \alpha(s)$ cuyos puntos P cumplen $\langle P - \alpha(s), \mathbf{b}_\alpha(s) \rangle = 0$
  - El **plano normal** $\text{span}\{\mathbf{n}_\alpha(s), \mathbf{b}_\alpha(s)\} + \alpha(s)$ cuyos puntos P cumplen $\langle P - \alpha(s), \mathbf{t}_\alpha(s) \rangle = 0$
  - El **plano rectificante** $\text{span}\{\mathbf{t}_\alpha(s), \mathbf{b}_\alpha(s)\} + \alpha(s)$ cuyos puntos cumplen $\langle P - \alpha(s), \mathbf{n}_\alpha(s) \rangle = 0$
- La **curvatura** (siempre ≥ 0)

$$k_\alpha(s) = \frac{\|\mathbf{t}_\alpha'(s)\|}{\|\alpha'(s)\|}$$

$$\begin{aligned} k_\alpha(s) &= \frac{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s)\|}{\|\alpha''(s)\|^3} && \text{si } \alpha \text{ regular} \\ k_\alpha(s) &= \|\alpha''(s)\| && \text{si } \alpha \text{ p.p.a} \end{aligned}$$

- El **vector curvatura**

$$\mathbf{k}_\alpha(s) = \frac{\mathbf{t}_\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|} \text{ colineal con } \mathbf{n}_\alpha(s)$$

- La **torsión**

$$\begin{aligned} \tau_\alpha(s) &= -\frac{\langle \mathbf{b}_\alpha'(s), \mathbf{n}_\alpha(s) \rangle}{\|\alpha'(s)\|} \\ \tau_\alpha(s) &= \frac{\det(\alpha'(s), \ \alpha''(s), \ \alpha'''(s))}{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s)\|^2} \text{ si } \alpha \text{ regular} \end{aligned}$$

- Las ecuaciones de Frenet-Serret

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_\alpha' &= k_\alpha v_\alpha \mathbf{n}_\alpha \\ \mathbf{n}_\alpha' &= -k_\alpha v_\alpha \mathbf{t}_\alpha + \tau_\alpha v_\alpha \mathbf{b}_\alpha \\ \mathbf{b}_\alpha' &= -v_\alpha \tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}_\alpha' \\ \mathbf{n}_\alpha' \\ \mathbf{b}_\alpha' \end{pmatrix} = \|\alpha'(s)\| \begin{pmatrix} 0 & k_\alpha & 0 \\ -k_\alpha & 0 & \tau_\alpha \\ 0 & -\tau_\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}_\alpha \\ \mathbf{n}_\alpha \\ \mathbf{b}_\alpha \end{pmatrix}$$

1.3. Superficies

- Un **homeomorfismo** entre dos espacios topológicos es una aplicación biyectiva continua y con inversa continua.
  - Un **difeomorfismo** es un **homeomorfismo** diferenciable con inversa diferenciable.
  - Dos conjuntos son **homeomorfos** si existe un homeomorfismo entre ellos.
- Una **superficie regular** S es un subconjunto no vacío $S \subset \mathbb{R}^3$ tal que para todo $p \in S$ existe un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, un entorno abierto V de p en $\mathbb{R}^3$ y una **parametrización** $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to V \subset S \subset \mathbb{R}^3$ tal que
  1. $\mathbf{x}$ es diferenciable como aplicación $x : U \to \mathbb{R}^3$

2. $\mathbf{x}$ es un homeomorfismo
3. $\forall (u,v) \in U, (d\mathbf{x})_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva $\iff$ los vectores coordenaods son linealmente independientes $\forall (u,v) \in U$.

    - Puede ocurrir (esfera, cono…) que no valga con una única parametrización $\forall p \in S$. Si nos vale con una única parametrización entonces S es homeomorfa a un abierto de R^2.

- Los **vectores coordenados** en un punto $\mathbf{x}(u,v) \in S$ son

$$\mathbf{x}_u(u,v) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u,v) = (d\mathbf{x})_{(u,v)} \cdot e_1 \mathbf{x}_v(u,v) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u,v) = (d\mathbf{x})_{(u,v)} \cdot e_2$$

- El **plano tangente** a S en $p \in S$ es un subvespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ con dimensión 2 dado por:

$$\begin{aligned} T_pS = \{\alpha'(0) \mid \exists \varepsilon > 0, \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S \\ \wedge\ \alpha(0) = p \\ \wedge\ \alpha \text{ diferenciable } \} \end{aligned}$$

    - Si q es la preimagen de p por $\mathbf{x}$ (es decir, $\mathbf{x}(q) = p$) entonces $T_pS = (d\mathbf{x})_q(\mathbb{R}^2)$
    - El **plano tangente (afín)** a S en $p = \mathbf{x}(u,v) \in S$

$$T_pS = p + \underbrace{\operatorname{span}\{\mathbf{x}_u(u,v), \mathbf{x}_v(u,v)\}}_{\text{plano tangente vectorial}}$$

- La **recta normal** a S en $p \in S$ es el complemento ortogonal del plano tangente $T_pS^{\perp}$.

    - Para cada $p \in S$ existen dos vectores normales unitarios (opuestos) en la recta normal.

- La **primera forma fundamental** I

    - Es bilineal, simétrica y definida positiva.

- La **aplicación de Gauss**

- El **operador de Weingarten** se define para cada $p \in T_pS$ como la aplicación

$$W : T_pS \to T_pS \text{ con } Wp(x) := -(dN)_p x$$

    - Es una aplicación autoajunta: $\langle W_p x, y\rangle = \langle x, W_p y\rangle$