

1. Curvas en el plano y en el espacio

1.1. Curvas en general

- Una **curva plana** es una aplicación continua $\alpha : I \subset \mathbb{R}^n$ definida por $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$.
- La **rapidez** es la derivada $\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \dots, \alpha'_n(t))$
- La **velocidad** es la norma de la rapidez $v_\alpha(t) = \|\alpha'(t)\|$
 - α es **regular** $\iff v_\alpha(t) > 0, \forall t \in I$
 - La derivada (o rapidez) normalizada es $T_\alpha(t) = \frac{\alpha'(t)}{v_\alpha(t)}$.
- La **longitud** es $l_\alpha = \int_I v_\alpha(t) dt$.
- Una **parametrización** es un difeomorfismo $\varphi : J \subset \mathbb{R} \rightarrow I \subset \mathbb{R}$
 - El **signo de una parametrización** es
$$\varepsilon(\varphi) = \begin{cases} +1 & \text{si } \varphi'(t) > 0, \forall t \in J \\ -1 & \text{si } \varphi'(t) < 0, \forall t \in J \end{cases}$$
 - Una curva está **parametrizada por longitud de arco** o p.p.a $\iff \|\alpha'(t)\| = 1, \forall t \in I$.
- Si para dos curvas α, β existe φ difeomorfismo tal que $\alpha = \beta \circ \varphi$ decimos que $\alpha \sim \beta$
 - \sim es una relación de equivalencia
 - Dos curvas en una misma clase de equivalencia comparten la traza o imagen.
 - Se cumple

$$\alpha'(t) = \beta'(\varphi(t))\varphi'(t) \\ \|\alpha'(t)\| =$$

- Una curva es **birregular** \iff para una parametrización α se tiene que α' y α'' son linealmente independientes.
 - En particular, $\alpha', \alpha'' \neq 0$ y por tanto α también es regular.

- El **diedro de Frenet-Serret** formado por los vectores

$$\mathbf{t}_\alpha(t) = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|}$$

$$\mathbf{n}_\alpha(t) = J\mathbf{t}_\alpha(s) \text{ con } J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- La **curvatura** (con signo)

$$k_\alpha(t) = \frac{\langle \mathbf{t}'_\alpha(t), \mathbf{n}_\alpha(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|}$$

$$k_\alpha(t) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{\|\alpha'(t)\|^3} \quad \text{si } \alpha \text{ regular}$$

$$k_\alpha(t) = \|\alpha''(t)\| \quad \text{si } \alpha \text{ está p.p.a.}$$

- El **vector curvatura** es $\mathbf{k}_\alpha(t) = k_\alpha(t)\mathbf{n}_\alpha(t)$
- El **radio de curvatura**

$$\rho_\alpha(t) = \frac{1}{k_\alpha(t)}$$

- El **centro de curvatura**

$$C_\alpha(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k_\alpha(t)}\mathbf{n}_\alpha(t)$$

- El **circulo osculador** o **circunferencia osculatriz**

$$\{p \in \mathbb{R}^2 : \|p - C_\alpha(t)\| = \frac{1}{k_\alpha(t)}, \text{ para } t \in I \text{ fijado} \}$$

- Las **ecuaciones de Frenet-Serret** salen de tomar la submatriz 2×2 de las ecuaciones en el espacio.

1.2. Curvas en el espacio

- El triedro de Frenet-Serret formado por los vectores

$$\mathbf{t}_\alpha(s) = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|}$$

$$\mathbf{n}_\alpha(s) = \frac{\mathbf{t}'_\alpha(s)}{\|\mathbf{t}'_\alpha(s)\|}$$

$$\mathbf{b}_\alpha(s) = \mathbf{t}_\alpha(s) \times \mathbf{n}_\alpha(s)$$

- Los 3 planos del triedro de Frenet-Serret para un punto $\alpha(s)$ de la curva [afines] son:

- El **plano osculador** $\text{span}\{\mathbf{t}_\alpha(s), \mathbf{n}_\alpha(s)\} + \alpha(s)$ cuyos puntos P cumplen $\langle P - \alpha(s), \mathbf{b}_\alpha(s) \rangle = 0$
- El **plano normal** $\text{span}\{\mathbf{n}_\alpha(s), \mathbf{b}_\alpha(s)\} + \alpha(s)$ cuyos puntos P cumplen $\langle P - \alpha(s), \mathbf{t}_\alpha(s) \rangle = 0$
- El **plano rectificante** $\text{span}\{\mathbf{t}_\alpha(s), \mathbf{b}_\alpha(s)\} + \alpha(s)$ cuyos puntos cumplen $\langle P - \alpha(s), \mathbf{n}_\alpha(s) \rangle = 0$

- La **curvatura** (siempre ≥ 0)

$$k_\alpha(s) = \frac{\|\mathbf{t}'_\alpha(s)\|}{\|\alpha'(s)\|}$$

$$k_\alpha(s) = \frac{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s)\|}{\|\alpha'(s)\|^3} \quad \text{si } \alpha \text{ regular}$$

$$k_\alpha(s) = \|\alpha''(s)\| \quad \text{si } \alpha \text{ p.p.a}$$

- El **vector curvatura**

$$\mathbf{k}_\alpha(s) = \frac{\mathbf{t}'_\alpha(s)}{\|\alpha'(s)\|} \text{ colineal con } \mathbf{n}_\alpha(s)$$

- La **torsión**

$$\tau_\alpha(s) = -\frac{\langle \mathbf{b}'_\alpha(s), \mathbf{n}_\alpha(s) \rangle}{\|\alpha'(s)\|}$$

$$\tau_\alpha(s) = \frac{\det(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s))}{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s)\|^2} \text{ si } \alpha \text{ regular}$$

- Las ecuaciones de Frenet-Serret

$$\mathbf{t}'_\alpha = k_\alpha v_\alpha \mathbf{n}_\alpha$$

$$\mathbf{n}'_\alpha = -k_\alpha v_\alpha \mathbf{t}_\alpha + \tau_\alpha v_\alpha \mathbf{b}_\alpha$$

$$\mathbf{b}'_\alpha = -v_\alpha \tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}'_\alpha \\ \mathbf{n}'_\alpha \\ \mathbf{b}'_\alpha \end{pmatrix} = \|\alpha'(s)\| \begin{pmatrix} 0 & k_\alpha & 0 \\ -k_\alpha & 0 & \tau_\alpha \\ 0 & -\tau_\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}_\alpha \\ \mathbf{n}_\alpha \\ \mathbf{b}_\alpha \end{pmatrix}$$

2. Superficies

- Plano tangente (afín) a S en $p = \mathbf{X}(u, v) \in S$

$$T_p S = p + \underbrace{\text{span}\{\mathbf{X}_u(u, v), \mathbf{X}_v(u, v)\}}_{\text{plano tangente vectorial}}$$

- Plano tangente sin parametrización

$$T_p S = \{ \alpha'(0) \mid \varepsilon > 0, \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S \\ \wedge \alpha(0) = p \\ \wedge \alpha \text{ diferenciable} \}$$