תרגול 7 חשבון אינפיניטסימלי 1 שנת 2021/2

ישראל הבר

21 בנובמבר 2021

מבחני השוואה

משפט 1 (מבחן ההשוואה הראשון). *עבור 2 טורים עם סדרות חיוביות כך שלבסוף $a_n \leq b_n$ מתקיים:*

1. *אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.*
2. *אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר אזי גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.*

תרגיל 1. *האם הטור הבא מתכנס או מתבדר?*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n^2}\right)}{n^2}$$

הוכחה. נשים לב כי החל מ $n = 2$ מתקיים כי

$$\sin\left(\frac{\pi}{n^2}\right) \geq 0$$

ובנוסף מתקיים כי פונקציית סינוס חסומה על ידי 1. נשים לב כי טור מתכנס אם ורק אם הזנב שלו מתכנס ולכן אם נוכיח שמ2 והלאה מבחן ההשוואה הראשון מתקיים עבור הסדרה שלנו וסדרה נוספת נוכל להשתמש בו. לכן נשווה את הטור עם הטור של $\frac{1}{n^2}$ ונקבל שמכיוון שהטור הזה מתכנס גם שלנו יתכנס. ■

תרגיל 2. *האם הטור הבא מתכנס או מתבדר*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 + (-1)^n}{7^n}$$

הוכחה. נשים לב כי

$$\frac{5 + 3(-1)^n}{7^n} \leq \frac{8}{7^n}$$

ונשים לב כי 2 הסדרות הנ"ל חיוביות ושהטור של הסדרה מימין מתכנסת (משפט שראינו בתרגול שעבר) ולכן ממבחן ההשוואה הראשון נקבל שהטור שלנו גם מתכנס. ■

משפט 2 (מבחן ההשוואה השני). *אם יש לנו שני טורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ חיוביים וקיימים $\alpha, \beta > 0$ כך שלבסוף מתקיים*

$$\alpha < \frac{a_n}{b_n} < \beta$$

אז הטורים מתכנסים ומתבדרים יחדיו

תרגיל 3. *קבעו האם הטור הבא מתכנס או מתבדר*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$$

הוכחה. נשים לב כי אנחנו כבר יודעים כי $\sqrt[n]{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ ולכן אינטואיטיבית הטור אמור להיות פחות או יותר כמו הטור של $\frac{1}{n}$ נשים לב כי ממבחן ההשוואה ראשון לא נוכל להשוות עם שום פולינום "רציונלי" ולכן צריכים משפט אחר. אם ניקח

$$a_n := \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}, \quad b_n = \frac{1}{n}$$

נקבל כי

$$\frac{a_n}{b_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

ולכן לבסוף נקבל כי

$$\frac{1}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}$$

ומכיוון שמדובר בטורים חיוביים נול לקבל ממבחן ההשוואה השני כי הטורים מתכנסים ומתבדרים יחדיו. ידוע כי הטור השני מתבדר ולכן גם שלנו. ■

תרגיל 4. *קבעו האם הטור הבא מתכנס או מתבדר*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+3)(4n-5)}$$

הוכחה. מבחינת סדרי גודל נראה כי הטור הזה גם דומה לטור ההרמוני. לכן נשווה את הסדרות -

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{n}{(2n+3)(4n-5)}}{\frac{1}{n}} = \frac{n^2}{8n^2+2n-15} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{8}$$

נשים לב כי מהתוצאה הקודמת ניתן לקבל שלבסוף גם מתקיים

$$0 < \frac{1}{16} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{16}$$

ולכן נקבל כי ניתן להפעיל את מבחן ההשוואה השני שני הטורים מתכנסים ומתבדרים יחדיו ולכן מכיוון שהטור ההרמוני מתבדר גם הטור שלנו יתבדר. ■

תרגיל 5. *קבעו האם הטור הבא מתכנס או מתבדר*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[7]{n^{14}+20n+1}}{(1+2n)^5}$$

הוכחה. ניתן לראות שמבחינת סדר גודל המונה הוא בערך n^2 והמכנה הוא מסדר גודל של n^5 ולכן כדאי לעשות השוואה עם $\frac{1}{n^3}$. נראה מה המנה בין הסדרות -

$$\frac{\frac{\sqrt[7]{n^{14}+20n+1}}{(1+2n)^5}}{\frac{1}{n^3}} = n^3\frac{\sqrt[7]{n^{14}+20n+1}}{(1+2n)^5} = \frac{\sqrt[7]{1+\frac{20}{n^{13}}+\frac{1}{n^{14}}}}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^5} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{32}$$

הסדרות חיוביות ומהתוצאה הקודמת נקבל שלבסוף מתקיים

$$\frac{1}{64} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{64}$$

ולכן הטורים מתכנסים ומתבדרים יחדיו ומכיוון שהטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

מתכנס גם הטור שלנו יתכנס. ■

תרגיל 6. *קבעו האם הטור הבא מתכנס או לא*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+3)!}$$

הוכחה. נשים לב כי
$$\frac{n!}{(n+3)!}=\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$
ולכן מאותם שיקולים נקבל שמהשוואה עם הטור $\frac{1}{n^3}$ נקבל שגם הטור שלנו מתכנס. ■

משפט 3 (מבחן קושי)**.** *יהי טור חיובי ממש* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

- *אם מתקיים* $\limsup \sqrt[n]{a_n}<1$ *אזי הטור מתכנס*
- *אם מתקיים* $\limsup \sqrt[n]{a_n}>1$ *אזי הטור מתבדר*
- *אם מתקיים* $\limsup \sqrt[n]{a_n}=1$ *לא ניתן לקבוע אם הטור מתכנס או מתבדר.*

משפט 4 (מבחן דלמבר/מבחן המנה)**.** *יהי טור חיובי ממש* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

- *אם* $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ *אזי הטור מתכנס.*
- *אם* $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ *אזי הטור מתבדר.*

תרגיל 7. *קבעו אם הטור הבא מתכנס או מתבדר*
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{\log^n 3}$$

הוכחה. נשים לב כי
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(n+1)^3}{\log^{n+1}3}}{\frac{n^3}{\log^n 3}}=\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^3}{\log 3}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{\log 3}<1$$
ולכן ממבחן המנה נקבל כי הטור מתכנס (ניתן לעשות גם עם מבחן קושי). ■

תרגיל 8. *קבעו האם הטור הבא מתכנס או מתבדר*
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}$$

הוכחה. נשים לב כי
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2(n+2)}{(n+1)^2}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$
ולכן ממבחן דלאמבר נקבל כי הטור מתכנס. שוב ניתן לפתור את התרגיל הזה בעזרת מבחן קושי. ■

תרגיל 9. *קבעו האם הטור הבא מתכנס או מתבדר*
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n^n}$$

הוכחה. נשים לב כי
$$\sqrt[n]{a_n}=\frac{2^{\frac{n-1}{n}}}{n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$
ולכן ממבחן קושי נקבל שהטור מתכנס. תרגיל לבית הראו כי זה מתכנס בעזרת מבחן המנה. ■

תרגיל 10. *קבעו את התכנסות הטור של הסדרה הבאה*
$$a_n:=\begin{cases}\frac{1}{2^n\cdot n}, & n\in\mathbb{N}\\ \frac{1}{2^{n-1}(n+1)}, & \text{אחרת}\end{cases}$$

הוכחה. ננסה לראות אם מבחן המנה עובד. לכן נתבונן בסדרה $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. נשים לב כי מתקיים

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\begin{cases}\frac{\frac{1}{2^n(n+2)}}{\frac{1}{n2^n}}=\frac{n}{n+2}\xrightarrow[n\to\infty]{}1, & n\in 2\mathbb{N}\\ \frac{\frac{1}{2^{n+1}(n+1)}}{\frac{1}{2^{n-1}(n+1)}}=\frac{1}{4}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{4}, & \text{אחרת}\end{cases}$$

מכיוון שכל האינדקסים הם זוגיים או אי-זוגיים נקבל שזה כל הגבולות החלקיים הם 1 או רבע. ובפרט לא נוכל לקבוע ממבחן המנה אם הטור מתכנס. לכן ננסה את מבחן קושי.

$$\sqrt[n]{a_n}=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt[n]{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}, & \text{זוגי}\\ \sqrt[n]{\frac{1}{2^{n-1}(n+1)}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}, & \text{אחרת}\end{cases}$$

ולכן הגבול של סדרת השורשים מתכנסת לחצי וממבחן קושי הטור מתכנסים ■

משפט 5 (מבחן העיבוי)**.** *אם סדרה היא חיובית ומונוטונית יורדת לאפס אז הטורים הבאים מתכנסים ומתבדרים יחדיו -*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\sum_{n=1}^{\infty}2^na_{2^n}$$

השימוש העיקרי של זה הוא כדי להיפטר מלוגים.

1 סוגי התכנסות

הגדרה 1. טור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס בהחלט אם טור הערכים המוחלטים מתכנס -

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$$

נאמר כי טור מתכנס בתנאי אם ורק אם הוא מתכנס אך לא בהחלט.

משפט 6 (משפט לייבניץ)**.** *אם סדרה מתכנסת לאפס מונוטונית אז הטור הבא גם מתכנס*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$$

תרגיל 11. *קבעו התכנסות בהחלט/בתנאי/התבדרות של הטור הבא*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^{10}}{(n+2)!}$$

הוכחה. נבדוק קודם התכנסות בהחלט. הטור של הערכים המוחלטים הוא

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}}{(n+2)!}$$

נשים לב כי מתקיים

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^{10}\cdot(n+2)!)}{n^{10}\cdot(n+3)!}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{10}\cdot\frac{1}{n+3}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

ולכן ממבחו המנה הטור של הערכים המוחלטים מתכנס ובפרט הטור המקורי מתכנס בהחלט. ■

תרגיל 12. *קבעו התכנסות בהחלט/בתנאי/התבדרות של הטור הבא*

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\log n}$$

הוכחה. נבדוק התכנסות בהחלט. נשים לב כי ההסדרה של הטור מונוטונית יורדת ומתכנסת ל0. לכן נשתמש במבחן העיבוי -

$$\sum_{n=2}^{\infty}2^n\frac{1}{2^n\cdot\log 2^n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log 2}$$

ממבחן ההשוואה הטור הזה יתבדר ולכן גם הטור ''המעובה'' יתבדר ובפרט גם הטור של הערכים המוחלטים יתבדר ובפרט הטור לא מתכנס בהחלט. עכשיו נבדוק התכנסות של הטור המקורי. נשים לב כי מלייבניץ מכיוון שהסדרה הבאה מונוטונית יורדת ל0

$$\frac{1}{n\log n}$$

הטור המקורי שלנו יתכנס. לכן הטור מתכנס אך רק בתנאי. ■

תרגיל 13. *קבעו התכנסות בתנאי/בהחלט/התבדרות של הטור הבא*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

הוכחה. נבדוק קודם התכנסות בהחלט. כלומר למצוא אם הטור הבא מתכנס או לא

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

נשים לב כי הסדרה מימין תהיה בערך e לבסוף ולכן לפחות אינטואיטיביתכדאי להשוות עם $\frac{1}{n}$ כלומר

$$\frac{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\frac{1}{n}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}e$$

ולכן ממבחן ההשוואה השני נקבל כי הטורים מתכנסים ומתבדרים יחדיו ולכן הטור של הערכים המוחלטים יתבדר. נרצה להשתמש בלייבניץ על מנת להראות התכנסות בתנאי. נשים לב כי

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n}&=\frac{\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{\frac{1}{n+1}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\\&=\frac{(n+2)^{n+1}\cdot n^{n+1}}{(n+1)^{2n+2}}=\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1}<1\end{aligned}$$

ולכן הסדרה מונוטונית יורדת ולפי לייבניץ הטור יתכנס בתנאי. ■