תרגול 9 חשבון אינפיניטסימלי 1 שנת 2021/2

ישראל הבר

17 בדצמבר 2021

משפט 1. *תהי פונקציה f המוגדרת בסביסה מנוקבת A של a.*
$L \in \mathbb{R}$ נקרא הגבול של f בנקודה a אם:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A: \quad 0 < |x-a| < \delta \longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

ונסמן

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

הערה 1. גבול לפי קושי שקול לגבול לפי היינה.

הגדרה 1. עוד הגדרות של גבולות -

1. נאמר ש $\lim\limits_{x \to a} = -\infty$ בסביבה מנוקבת A של a אם

$$\forall m < 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A: \quad 0 < |x-a| < \delta \longrightarrow f(x) < m$$

2. נאמר כי $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$ אם

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists M > 0: \quad x > M \longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

3. נאמר כי $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ אם

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists M > 0: \quad x < M \longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

תרגיל 1. *הוכיחו לפי הגדרה*

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x+5}{2x+3} = \frac{1}{2}$$

הוכחה.

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists m < 0: \quad x < m \longrightarrow \left| f(x) - \frac{1}{2} \right| < \epsilon$$

יהי $\epsilon > 0$ נשים לב כי אנחנו רוצים

$$\left| \frac{x+5}{2x+3} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{7}{4x+6} \right| < \epsilon$$

אנחנו רוצים שאם $x < m$ יתקיים הביטוי הקודם. אם מקטינים את האיקס במשוואה נקבל שהביטוי קטן ולכן עבור $m < -\frac{6}{4}$ יתקיים שצריך שיתקיים

$$\frac{7}{-4m-6} < \epsilon$$

וזה יהיה שקול ל

$$m < -\frac{1}{4} \left(\frac{7}{\epsilon} + 6 \right)$$

ולכן סך הכל ניקח

$$m < \min \left\{ -\frac{1}{4} \left(\frac{7}{\epsilon} + 6 \right), -\frac{3}{2} \right\}$$

■

תרגיל 2. *הוכיחו לפי הגדרה*

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{(x-1)^2}=\infty$$

הוכחה. צריך להראות כי

$$\forall M>0 \quad \exists\delta>0: \quad 0<|x-1|<\delta \longrightarrow f(x)>M$$

לכן יהי $M>0$ ונחפש $\delta>0$ מתאים.

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2}>M$$

אך נשים לב כי אם $0<|x-1|<\delta$ יתקיים כי $|x-1|^2<\delta^2$ ולכן

$$f(x)>\frac{x^2+1}{\delta^2}>\frac{1}{\delta^2}$$

ונרצה למצוא $\delta>0$ כך ש $f(x)>M$ ולכן ניקח

$$\delta<\frac{1}{\sqrt{M}}$$

■

תרגיל 3. *חשבו*

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$$

הוכחה. נשים לב כי

$$x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$$

ולכן עבור $x\neq 2$ יתקיים

$$\frac{x^3-8}{x-2}=x^2+2x+4$$

ולכן מאריתמטיקת של גבולות נקבל כי הגבול הוא 12. ■

1 גבולות חד צדדיים

נשים לב כי למשל עבור $f(x)=\sqrt{x}$ מוגדרת רק עבור $x\geq 0$ ולכן אם למשל נרצה להגדיר גבול של הפונקציה ב0 נצטרך הגדרות חדשות - לפי קושי

1. $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$ אם

$$\forall\epsilon>0 \quad \exists\delta>0: \quad 0<x-x_0<\delta \longrightarrow |f(x)-L|<\epsilon$$

2. $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$ אם

$$\forall\epsilon>0 \quad \exists\delta>0: \quad 0<x_0-x<\delta \longrightarrow |f(x)-L|<\epsilon$$

תרגיל 4. *חקרו את הגבולות החד צדדיים של*

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-9}}{|x-3|} \text{ עבור } x_0=3$$

הוכחה. נשים לב כי עבור סביבה מנוקבת שמאלית של 3 הפונקציה לא מוגדרת ולכן אין עבורה גבול חד צדדי. נחשב עבור סביבה מנוקבת ימנית

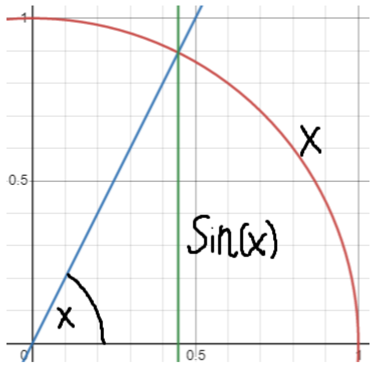
$$\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x^2-9}}{|x-3|}=\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}}=\infty\left(\text{"}=\frac{6}{\infty}\text{"}\right)$$

■

משפט 2. *הגבול של הפונקציה בנקודה קיים אם ורק אם הגבולות החד צדדיים קיימים ושווים.*

תרגיל 5. *חשבו את* $\lim_{x\to0}\sin(x)$

הוכחה. קודם נתבונן בציור הבא -



כאשר הגובה הוא פונקציית סינוס והקשת היא x. ניתן לראות מכאן כי עבור התחום $0<x<\frac{1}{2}\pi$ נקבל כי

$$0<\sin(x)<x$$

ולכן מסנדוויץ' נקבל כי

$$\lim_{x\to0^+}\sin(x)=0$$

עכשיו עבור התחום $-\frac{\pi}{2}<x<0$ נקבל כי $\sin(-x)=-\sin(x)$ ולכן בחישוב הגבול נקבל גם כי

$$\lim_{x\to0^-}\sin(x)=0$$

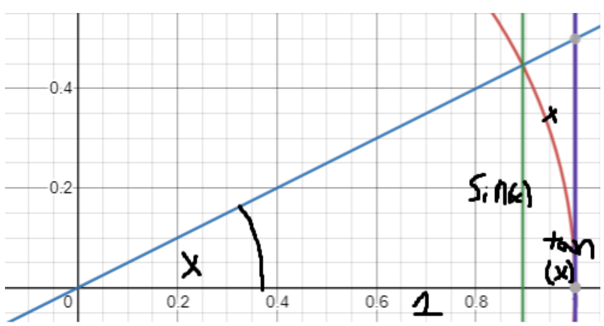
סך הכל נקבל כי

$$\lim_{x\to0}\sin(x)=0$$

■

תרגיל 6. *חשבו* $\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}$

הוכחה. נצייר מחדש עם הוספה חשובה



נשים לב כי זה גורר שבתחום $0<x<\frac{1}{2}\pi$ יתקיים אז

$$\frac{1}{2}\sin(x)<\frac{1}{2}\sin(x)<\frac{1}{2}\tan(x)$$

עבור הגבול החד צדדי הימני נקבל כי ניתן לחלק ב $\sin(x)$ ולכן

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

ולכן לפי סנדוויץ' נקבל כי

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1$$

נשים לב כי הפונקציה זוגית ולכן נקבל כי

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\sin x} = 1$$

בפרט הגבול קיים ושווה 1. ולכן גם עבור המקורי הגבול יהיה 1. ■

2 רציפות

הגדרה 2. פונקציה f רציפה בנקודה $x_0 \in \mathbb{R}$ אם הגבול בנקודה קיים ומקיים

$$f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$$

תרגיל 7. *הוכיחו כי פונקציית הסינוס רציפה בכל נקודה.*

הוכחה. נשים לב כי זה שקול להראות ש

$$\lim_{h\to 0} \sin(x_0 + h) = \sin(x_0)$$

נפתח את הביטוי מימין -

$$\sin(x_0 + h) = \sin(x_0)\cos(h) + \sin(h)\cos(x_0)$$

כשנפעיל את הקבול המתאים נקבל כי

$$\lim_{h\to 0} \sin(x_0 + h) = \sin x_0 \cdot 1 + \cos x_0 \cdot 0 = \sin(x_0)$$

לכן הפונקציה רציפה לכל נקודה $x_0 \in \mathbb{R}$. ■

תרגיל 8. *מצאו $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש*

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x, & x \le -\frac{1}{2}\pi \\ a\sin x + b, & -\frac{\pi}{2} < x \le \frac{1}{2}\pi \\ \cos x, & x > \frac{1}{2}\pi \end{cases}$$

רציפה בכל נקודה.

הוכחה. נשים לב כי בתוך התחומים האלה ממש הפונקציות רציפות. לכן ק' צריך לוודא עבור "נקודות החיתוך". נשים לב כי

$$\lim_{x\to -\left(\frac{1}{2}\pi\right)^-} f(x) = -2\sin\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = 2$$

$$\lim_{x\to \left(-\frac{1}{2}\pi\right)^+} f(x) = a\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + b = b - a$$

$$\lim_{x\to \left(\frac{1}{2}\pi\right)^-} f(x) = a\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + b = a + b$$

$$\lim_{x\to \left(\frac{1}{2}\pi\right)^+} f(x) = 0$$

מזה נקבל שהפונקציה רציפה אם ורק אם מערכת המשוואות הבאה מתקיימת

$$\begin{cases} b - a &= 2 \\ a + b &= 0 \end{cases}$$

כלומר אם ורק אם

$$a = -1, \quad b = 1$$

■