תרגול 11 חשבון אינפיניטסימלי 1 שנת 2021/2

ישראל הבר

31 בדצמבר 2021

1 פתרון הבוחן

תרגיל 1. *תהי $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. הוכיחו שאם לכל $\epsilon > 0$ קיימים M, N כך שלכל $n > N, m > M$ מתקיים $|a_n - a_{m+n}| < \epsilon$, הסדרה a_n מתכנסת.*

הוכחה. יהי $\epsilon > 0$ על פי הנתון

$$\exists M > 0,\ N > 0 \forall n > N \quad \forall m > M : |a_n - a_{n+m}| < \epsilon$$

זה כמובן נותן גם כי

$$\exists M > 0,\ N > 0 \forall n > N \quad \forall m > M \quad \forall k > 0 : |a_n - a_{n+m+k}| < \epsilon$$

יהיו $k_1, k_2 > 0$ אזי

$$|a_n - a_{n+m+k_1}|, |a_n - a_{n+m+k_2}| < \epsilon$$

נשתמש באי שיוויון המשולש כדי לקבל

$$|a_{n+m+k_1} - a_{n+m+k_2}| = |a_{n+m+k_1} - a_n| + |a_{n+m+k_2} - a_n| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$$

סך הכל נשים לב שזה אומר כי

$$\forall c_1, c_2 > N + M + 2 : \quad |a_{c_1} - a_{c_2}| < 2\epsilon$$

יהי $\epsilon_1 > 0$ ניקח $\epsilon = \frac{\epsilon_1}{2}$ לפי מה שמצאנו

$$\exists N' \in \mathbb{N} \quad \forall n, m > N : \quad |a_n - a_m| < \epsilon_1$$

נשים לב שזה תנאי קושי להתכנסות סדרות ולכן הסדרה מתכנסת ■

תרגיל 2. *1. נתונים שני טורים חיוביים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ו $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq n_0$*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

הראו כי אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אזי גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

2. מצאו התבדרות או התכנסות של הטור הבא

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-2}}{e^n n!}$$

הוכחה. 1. נוכל להניח כי $n_0 = 1$ בגלל שהתכנסות טורים תלויה אך ורק בהתכנסות הזנב. לכן מתקיים

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

נשים לב שזה אומר שבגלל שהטורים חיוביים

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad 0 < \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n}$$

לכן נקבל שהסדרה $\{\frac{a_n}{b_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ היא סדרה מונוטונית יורדת, וכמובן חסומה מלרע על ידי 0. לכן הסדרה מתכנסת ל $0 \leq L \leq \frac{a_1}{b_1}$. לכן לבסוף

$$0 < \frac{a_n}{b_n} < L + 1$$

ולכן לבסוף

$$0 < a_n < (L+1)b_n$$

מכיוון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס גם $\sum_{n=1}^{\infty} (L+1)b_n$ מתכנס. ממבחן ההשוואה הראשון נקבל כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

2. נסמן

$$a_n = \frac{n^{n-2}}{e^n n!}$$

נשים לב כי

$$0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n-1}}{e^{n+1}(n+1)!}}{\frac{n^{n-2}}{e^n \cdot n!}} = \frac{e^n}{e^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^{n-1}}{n^{n-2}} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = e^{-1} \frac{1}{n+1} \frac{(n+1)^{n-1}}{n^{n-2}}$$
$$= e^{-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-2}$$

ראינו כבר הרצאה כי $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$ ולכן נקבל כי

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}$$

לכן נשים לב שאם נסמן $b_n := n^{-2}$ נקבל כי

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

ולכן מכיוון שטורים אלה חיוביים נקבל מסעיף א שאם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אזי גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ יתכנס כנדרש. אך נשים לב שראינו בהרצאה כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס. לכן גם הטור המקורי שלנו יתכנס.

■

תרגיל 3. *1. תהי $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ותהיינה $\{a_{m_n}\}_{n\in\mathbb{N}}, \{a_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ תתי סדרות שמכסות את כל הסדרה ו*

$$a_{m_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} a, \qquad a_{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} b$$

אפיינו את כל הגבולות החלקיים של a_n.

2. מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה הבאה

$$\begin{cases} (-1)^{n/2}\frac{n}{n+1}, & n=2k \\ \sqrt[n]{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^n + 2^n} + \frac{\sin}{n}, & n=2k-1 \end{cases}$$

מותר להשתמש בסעיף א לכל כמות סופית של תתי סדרות מתאימות בלי צורך להוכיח.

הוכחה. 1. יהי גבול חלקי c של הסדרה. ניקח תת סדרה המתכנסת לגבול החלקי הזה. נשים לב כי מלפחות אחת התתי סדרות

$$\{a_{m_n}\}_{n\in\mathbb{N}}, \{a_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$$

מופיעות אינסוף איברים בתת סדרה זו. ניקח את התת סדרה המתאימה לאיבר זה. תת סדרה זו אם כן תתכנס לגבול של

$$\{a_{m_n}\}_{n\in\mathbb{N}}, \{a_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$$

בהתאמה. אך מכיוון שסדרה זו היא תת סדרה של סדרה המתכנסת ל c נקבל ש c היא אחת מהגבולות של

$$\{a_{m_n}\}_{n\in\mathbb{N}}, \{a_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$$

כלומר $c\in\{a,b\}$. לכן קבוצת הגבולות החלקיים היא $\{a,b\}$

2. נשים לב כי ניתן לחלק את הסדרה באופן הבא

$$a_n = \begin{cases} \frac{n}{n+1}, & n=4k \\ -\frac{n}{n+1}, & n=4k-2 \\ \sqrt[n]{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^n + 2^n} + \frac{\sin}{n}, & n=2k-1 \end{cases}$$

נשים לב כי עבור ה2 תתי מקרים הראשונים הגבולות החלקיים הם ± 1. נמצא את הגבול של המקרה השלישי. קודם כל נשים לב כי

$$-\frac{1}{n} < \frac{\sin}{n} < \frac{1}{n}$$

ומכיוון ש2 הסדרות מימין ומשמאל מכתנסות ל0 נקבל מסנדוויץ' כי

$$\frac{\sin}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

עכשיו נמצא את הגבול של

$$\sqrt[n]{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^n + 2^n}$$

נשים לב כי לפי מה שראינו בהרצאה כי

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$$

ולכן

$$\sqrt[n]{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^n} < \sqrt[n]{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^n + 2^n} \leq \sqrt[n]{2\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^n}$$

נשים לב כי 2 הסדרות בקצוות האי-שיוויון מתכנסות ל e ולכן מסנדוויץ' נקבל כי הסדרה המקורית מתכנסת ל e. סך הכל קבוצת הגבולות החלקיים (עם שימוש של סעיף א' למקרה של 3 תתי סדרות) הן

$$\{\pm 1, e\}$$

■