תרגול 6 חשבון אינפיניטסימלי 1 שנת 2021/2

ישראל הבר

14 בנובמבר 2021

משפט 1. *לכל מספר ממשי x*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$$

תרגיל 1. *חשבו את*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+7}\right)^n$$

הוכחה. נשים לב כי

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+7}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+7-4}{n+7}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{n+7}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{4}{n+7}\right)^{n+7}\right)^{n/(n+7)}=$$

$$\underset{(m=n+7)}{=}\lim_{m\to\infty}\left(\left(1-\frac{4}{m}\right)^m\right)^{(m-7)/m}$$

נשים לב כי אם הבסיס והמעריך מתכנסים למספרים אי שליליים אז הגבול של החזקה מתכנסה לחזקה של הגבולות. (לא אוכיח לכם בתרגול) ולכן אם נמצא את הגבולות הנפרדים נוכל למצוא את הגבול הכולל. ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+7}\right)^n=\left(\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{4}{m}\right)^m\right)^{\lim\limits_{m\to\infty}(m-7)/m}=\left(e^{-4}\right)^1=e^{-4}$$

■

תרגיל 2. *חשבו את הגבול*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-5}{n^2-4}\right)^n$$

הוכחה.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-5}{n^2-4}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-4-1}{n^2-4}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2-4}\right)^n=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2-4}\right)^{n^2-4}\right)^{n/(n^2-4)}$$

מאותה סיבה נקבל

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-5}{n^2-4}\right)^n=\left(\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^m\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}n/(n^2-4)}=\left(e^{-1}\right)^0=1$$

■

תרגיל 3. *חשבו את*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n^2+1}\right)^n$$

הוכחה. נשים לב כי השרשרת אי-שיוויונים הבאים מתקיימים -

$$0<\left(\frac{n+5}{n^2+1}\right)^n<\left(\frac{n+5}{n^2}\right)^n=\left(\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}\right)^n\le\left(\frac{6}{n}\right)^n<\left(\frac{6}{7}\right)^n$$

(כשחלק מהאי-שיוויונות הן של ''לבסוף''.) נשים לב כי שתי הצדדים הקיצוניים מתכנסים ל0 ולכן ממשפט הסנדוויץ' נקבל גם כי הסדרה שלנו מתכנסת ל0. ■

1 טורים

הגדרה 1. בהינתן סדרה $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ הטור של הוא האובייקט $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. נאמר כי הטור מתכנס אם ורק אם מתקיים כי הגבול הבא קיים

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$$

ובהינתן שהטור מתכנס הערך שלו יהיה הגבול הנ"ל. הביטויים בתוך הגבול הנ"ל נקראים הסכומים החלקיים של הסדרה.

משפט 2. *אם הטור של הסדרה מתכנס נקבל כי הסדרה מתכנסת ל-0.*

תרגיל 4. *קבעו האם הטור הבא מתכנס או מתבדר (לא מתכנס)*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n}$$

הוכחה. מכיוון שהסדרה של הטור לא מתכנסת ל-0 הטור גם לא יתכנס ובפרט יתבדר -

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$$

■

תרגיל 5. *קבעו האם הטור הבא מתכנס או מתבדר (לא מתכנס)*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

הוכחה. בדומה מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)=\pm 1\neq 0$$

כשהגבול למעלה הוא במובן של גבולות חלקיים. ולכן הטור מתבדר. ■

תרגיל 6. *קבעו אם הטור הבא מתכנס או מתבדר*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

הוכחה. נשים לב כי סדרת הגבולות החלקיים הם

$$s_m:=\log\left(\frac{2}{1}\right)+\log\left(\frac{3}{2}\right)+\cdots+\log\left(\frac{m+1}{m}\right)$$

ולכן מחוקי לוגים יתקיים

$$s_m=(\log 2-\log 1)+(\log 3-\log 2)+(\log 4-\log 3)+\cdots+(\log(m+1)-\log m)=\log(m+1)-\log(1)=\log(m+1)$$

ולכן סדרת הגבולות החלקיים מקיימת

$$\lim_{m\to\infty}s_m=\lim_{m\to\infty}(\log(m+1))=\infty$$

ולכן סדרת הגבולות החלקיים לא מתכנסת ובפרט הטור לא מתכנס. ■

תרגיל 7. *קבעו האם הטור הבא מתכנס או מתבדר*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

הוכחה. נתבונן בסדרת הגבולות החלקיים -

$$S_m := \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{m}} > \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{m}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{m}} = \sqrt{m} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

ובפרט יתקיים כי סדרת הגבולות החלקיים לא מתכנסת כלומר הטור מתבדר. ■

תרגיל 8. *קבעו האם הטור הבא מתכנס או מתבדר ואם כן מצאו את סכומו*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+4)}$$

הוכחה. נשים לב כי מתקיים

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+4}\right)$$

ולכן יתקיים עבור סדרת הגבולות החלקיים

$$\begin{aligned} S_m &:= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+4}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+3}\right) \xrightarrow[m\to\infty]{} \frac{1}{2}\left(\frac{7}{12} - 0\right) = \frac{7}{24} \end{aligned}$$

ולכן הטור מתכנס וערכו שווה ל $\frac{7}{24}$ ■

תרגיל 9. *הוכיחו כי הטור הבא מתכנס ומצאו את סכומו*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$$

הוכחה. שימו לב כי

$$a_n := \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

ולכן סדרת גבולות החלקיים מקיימת

$$S_m := \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{m}} - \frac{1}{\sqrt{m+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{m+1}} \xrightarrow[m\to\infty]{} 1$$

ולכן הטוק מתכנס וערכו הוא 1. ■

משפט 3. *הטור ההנדסי*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$$

מתכנס עבור $|q| < 1$ *ומתבדר עבור* $|q| \geq 1$ *וכשהוא מתכנס סכומו הוא*

$$\frac{1}{1-q}$$

תרגיל 10. *הוכיחו כי הטור הבא מתכנס ומצאו את סכומו*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{3^{n-1}}$$

הוכחה. נשים לב כי סדרת הסכומים החלקיים מקיימת

$$S_m := 10 \cdot \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

ומהמשפט נקבל שהסכום מתכנס ל $1.5 = \frac{3}{2}$ ולכן מאריתמטיקת גבולות על הסכומים החלקיים נקבל כי הם מתכנסים ל15. וזה בדיוק אומר שהטור מתכנס וערכו 15. ■

תרגיל 11. *הוכיחו כי הטור הבא מתכנס ומצאו את סכומו -*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$$

הוכחה. נשים לב כי -

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{6^n} + \frac{3^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1\right) + \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1\right) = 0.5 + 1 = 1.5$$

כאשר הפירוק לטורים נכון מכיוון שהטורים בנפרד מתכנסים. כלומר סך הכל הטור המקורי מתכנס לערך 1.5. ■

תרגיל 12. *מצאו את סכום הטור הבא*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2 + n}{2^{n+1} n(n+1)}$$

הוכחה. נפרק את הטור וזה יהיה מותר כשנוכיח ששתי התת טורים האלה יתכנסו

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n(n+1)}{2^{n+1} n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(n+1)}$$

הטור הראשון מתכנס לחצי. לכן נמצא את הגבול של הטור השני. נעשה את זה בצורה דומה לאיך שעשינו לפני. נשים לב כי

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2n(n+1)} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

ולכן הטור המקורי מתכנס ל1. ■

תרגיל 13. *הוכיחו כי הטור הבא מתכנס ומצאו את סכומו*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot (1+n)\right)}{\log n^n \cdot \log (n+1)^{n+1}}$$

הוכחה. נפתח את הטור כדי שנוכל להמשיך בתרגיל

$$\frac{\log\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot (1+n)\right)}{\log n^n \cdot \log (n+1)^{n+1}} = \frac{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) + \log(n+1)}{n\log n \cdot (n+1)\log(n+1)} = \frac{n\log(1+n) - n\log n + \log(n+1)}{n\log n \cdot (n+1)\log(n+1)} =$$
$$= \frac{-n\log n + (n+1)\log(n+1)}{n\log n \cdot (n+1)\log(n+1)} = \frac{1}{n\log n} - \frac{1}{(n+1)\log(n+1)}$$

נפתח סכום חלקי סופי -

$$S_m := \left(\frac{1}{2\log 2} - \frac{1}{3\log 3}\right) + \left(\frac{1}{3\log 3} - \frac{1}{4\log 4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n\log n} - \frac{1}{(n+1)\log(n+1)}\right) =$$
$$= \frac{1}{2\log 2} - \frac{1}{(n+1)\log(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2\log 2}$$

■