תרגול 10 חשבון אינפיניטסימלי 1 שנת 2021/2

ישראל הבר

25 בדצמבר 2021

תרגיל 1. *הוכח או הפרך:*

1. *אם $f \neq g$ לא רציפות בנקודה x_0 אז גם $f(x)+g(x)$ לא רציפה בנקודה זו.*
2. *אם $f \neq g$ לא רציפות בנקודה x_0 אז גם $f(x)\cdot g(x)$*

הוכחה. 1. **הפרכה**

ניקח למשל

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases},\quad g(x)=-f(x)$$

נשים לב כי 2 הפונקציות הנל לא רציפות בבנקודה $x_0=0$ אך

$$g(x)+f(x)=0$$

רציפה בנקודה זו.

2. **הפרכה**

ניקח

$$f(x):=\begin{cases}1, & x\neq 3\\ -1, & x=3\end{cases},\quad g(x):=\begin{cases}-1, & x\neq 3\\ 1, & x=3\end{cases}$$

■

1 מיון נקודות אי רציפות

יש כמה אפשרויות ללמה הפונקציה לא רציפה בנקודה מסויימת -

- a **נקודת אי רציפת סליקה:**

  הגבול קיים אך הערך של הפונקציה לא שווה לגבול בנקודה זו (או שהפונקציה לא מוגרת בנקודה זו.)

- a **נקודת אי רציפות קפיצה:**

  אם הגבולות החד צדדיים קיימים אך שונים.

- a **נקודת אי רציפות מסוג שני:**

  לפחות אחד מהגבולות החד צדדיים לא קיים.

תרגיל 2. *מיינו את נקודות האי רציפות של הפונקציה הבאה*

$$f(x)=\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$$

הוכחה. נשים לב כי (כאשר הכל מוגדר)

$$f(x)=\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}=\frac{(x-1)x}{x(x+1)}$$

עכשיו צריך לאפיין את הנקודות הרגישות. נשים לב כי בהגדרת הפונקציה הנקודות האלה הן $x\in\{0,\pm1\}$.

- **x=0:**

  נשים לב כי

$$\lim_{x\to0}\frac{x(x-1)}{x(x+1)}=-1$$

  ולכן הגבולות החד צדדיים קיימים ושווים, מכיוון שהפונקציה אינה מוגדרת בנקודה זו נקבל שזאת נקודה אי רציפות סליקה.

- **x=1:**

  נשים לב כי

$$\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)}{x(x+1)}=0$$

  מאותן סיבות זו נקודת אי רציפות סליקה.

- **x=-1:**

  נשים לב כי

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=-\frac{2}{0}=\infty$$
$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\frac{-2}{0}=-\infty$$

  ובפרט הגבולות החד צדדיים לא קיימים ולכן זו נקודת אי רציפות מסוג שני.

■

תרגיל 3. *מיינו את נקודת האי-רציפות של הפונקציה*

$$f(x):=\sin\left(\frac{1}{\log(x^2)}\right)$$

הוכחה. צריך לאפיין את נקודות הרגישות של הפונקציה. נשים לב כי יכל להיות שנציב 0 בלוג שזה לא מוגדר, או שנקבל $\log(x^2)=0$. לכן סך הכל הנקודות הבעייתיות הן $x=\pm1$ לכן נחלק למקרים המתאימים

- **x=0:**

$$\lim_{x\to0}\log x^2=-\infty\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{1}{\log x^2}=0\Rightarrow\lim_{x\to0}\sin\left(\frac{1}{\log(x^2)}\right)=0$$

  ולכן הגבולות החד צדדיים קיימים ושווים אך הפונקציה אינה מוגדרת בנקודה ולכן זאת נקודת אי רציפות סליקה.

- **x=1:** - ניקח את הסדרות הבאות

$$x_n=\sqrt{e^{1/(0.5\pi+2\pi n)}}$$
$$y_n=\sqrt{e^{1/(-0.5\pi+2\pi n)}}$$

  נשים לב כי הסדרות האלה מתכנסות ל1 אך

$$f(x_n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1,\quad f(y_n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}-1$$

  ולכן הגבול החד צדדי לא קיים ובפרט זו נקודת אי רציפות מסוג 2. בדומה עבור המקרה $x=-1$.

■

משפט 1 (ערך הביניים). *תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ ויהי y_0 ערך המקיים $f(b) \le y_0 \le f(x)$. קיימת $x_0 \in [a,b]$ כך ש $f(x_0) = y_0$*

תרגיל 4. *תהי f פונקציה רציפה ב $[0,2]$ כך ש $f(2) = 3$. הוכח שקיים $x_0 \in [0,2]$ כך ש $f(x_0) = \frac{1}{x_0}$*

הוכחה. נגדיר $h(x) = xf(x)$. נשים לב כי $h(0) = 0, h(2) = 6$. הפונקציה רציפה בקטע ולכן לפי משפט ערך הביניים יש ערך x_0 כך ש $h(x_0) = 1$. ולכן $f(x_0)x_0 = 1$ ולכן

$$f(x_0) = \frac{1}{x_0}$$

■

תרגיל 5. *תהיינה f, g פונקציות רציפות בקטע $[0,1]$ המקיימות*

$$g([0,1]) = [0,1], \quad f([0,1]) \subseteq [0,1]$$

הוכיחו כי קיימת נקודה x_0 כך ש $f(x_0) = g(x_0)$.

הוכחה. נגדיר $h(x) := f(x) - g(x)$. h רציפה ב $[0,1]$ כחיסור של רציפות. קיימים $x_1 \neq x_2$ כך ש $g(x_1) = 1, g(x_2) = 0$. נשים לב כי מהנתון $f(x_2) \le 1, f(x_1) \ge 0$. ולכן

$$h(x_1) = f(x_1) - g(x_1) = f(x_1) - 1 \le 0$$
$$h(x_2) = f(x_2) - g(x_2) = f(x_2) - 0 \ge 0$$

בלי הגבלת הכלליות $x_1 < x_2$. h רציפה ב $[x_1, x_2]$. ולכן לפי משפט ערך הביניים יש $x_0 \in [x_1, x_2] \subseteq [0,1]$ כך ש -

$$h(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) - g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = g(x_0)$$

■

משפט 2 (ויירשטראס). *פונקציה רציפה בקטע סגור מקבלת בו מינימום ומקסימום.*

תרגיל 6. *נתונות 2 פונקציות f, g רציפות ב $[0,1]$ ומתקיים*

$$\sup\{f(x) \mid x \in [0,1]\} = \sup\{g(x) \mid x \in [0,1]\}$$

הוכיחו שקיימת נקודה $x \in [0,1]$ כך ש- $g(x_0) = f(x_0)$.

הוכחה. לפי ויירשטראס הסופרימום הנ"ל קיים ולכן נסמן אותו ב M.

$$M = \sup_{x\in[0,1]}\{f(x)\} = \sup_{x\in[0,1]}\{g(x)\}$$

כאשר קיימות $x_1, x_2 \in [0,1]$ כך ש-

$$f(x_1) = M, g(x_2) = M$$

נגדיר $h(x) := f(x) - g(x)$. נשים לב כי h רציפה ב- $[0,1]$ כחיסור רציפות. לכן

$$h(x_1) = f(x_1) - g(x_1) = M - g(x_1) \ge 0$$
$$h(x_2) = f(x_2) - g(x_2) = f(x_2) - M \le 0$$

בדומה לתרגיל הקודם יהיה $x_1 < x_0 < x_2$ כך ש $h(x_0) = 0$. ולכן נקבל $f(x_0) = g(x_0)$. ■

למה 1. *תהי $f : X \longrightarrow Y$ פונקציה עולה ממש, רציפה ועל. לכל נקודה $x \in X$ שהיא נקודת הצטברות מימין/משמאל של הקבוצה X אזי הנקודה $y := f(x) \in Y$ היא נקודת הצטברות מימין/משמאל של הקבוצה Y בהתאמה.*

הוכחה. נוכיח עבור גבול משמאל ונשאיר את המקרה עבור הגבול מימין שהוא על אותו עיקרון. נניח שיש סדרה עולה ממש ב X - $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ כך ש $x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_n$. מרציפות הפונקציה $y = f(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x_n)$. כיוון ש f עולה ממש, אזי $y < f(x_n)$ לכל $n \in \mathbb{N}$. ולכן y נקודת הצטברות משמאל של Y. ■