תרגול 4 חשבון אינפיניטסימלי 1 שנת 2021/2

ישראל הבר

30 באוקטובר 2021

תרגיל 1. *הוכיחו כי לכל* $a > 0$ *מתקיים כי*

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$$

הוכחה. נחלק למקרים -

1. **$0 < a < 1$** -

נשים לב כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $0 < a^{\frac{1}{n}} < 1$ ולכן מהגדרת הגבול אנחנו צריכים להראות כי

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N: \quad 1 - a^{\frac{1}{n}} < \epsilon$$

עכשיו נבצע מניפולציות על האי-שיוויון -

$$\begin{aligned} 1 - a^{\frac{1}{n}} &< \epsilon \\ 1 - \epsilon &< a^{\frac{1}{n}} \\ \log_a(1-\epsilon) &> \frac{1}{n} \\ n &> \frac{1}{\log_a(1-\epsilon)} \end{aligned}$$

ולכן ניקח

$$N = \max\left\{\left\lceil \frac{1}{\log_a(1-\epsilon)} \right\rceil, 1\right\} + 1$$

2. **$a > 1$** -

נשים לב כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a^{\frac{1}{n}} > 1$ ולכן מהגדרת הגבול אנחנו צריכים להראות כי -

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N: \quad a^{\frac{1}{n}} - 1 < \epsilon$$

עכשיו נבצע מניפולציות על האי-שיוויון -

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{n}} - 1 &< \epsilon \\ a^{\frac{1}{n}} &< 1 + \epsilon \\ \frac{1}{n} &< \log_a(1+\epsilon) \\ n &> \frac{1}{\log_a(1+\epsilon)} \end{aligned}$$

ולכן ניקח

$$N = \max\left\{\left\lceil \frac{1}{\log_a(1+\epsilon)} \right\rceil, 1\right\} + 1$$

$\blacksquare$

משפט 1. *נניח כי יש סדרות* $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ *ו* b_n *חסומה אז מתקיים כי* $a_n \cdot b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

דוגמה 1. *ניקח*

$$a_n := \frac{1}{\ln(n+1)}, \quad b_n := \sin(n)$$

מתקיימים בדיוק כל התנאים.

תרגיל 2. *הוכיחו כי אם* a_n *סדרה מתכנסת והגבול הבא קיים*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

אזי מתקיים כי $|L| \leq 1$

הוכחה. נחלק שוב למקרים

1. $\mathbf{a \neq 0}$ מתקיים כי

$$|L| = \left|\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}\right| = \left|\frac{a}{a}\right| = 1 \leq 1$$

2. $\mathbf{a = 0}$ מתקיים כי

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - L\right| > \epsilon$$

נניח בשלילה כי מתקיים $|L| > 1$ מתקיים מאי שיוויון המשולש כי עבור כל אפסילון חיובי לבסוף מתקיים כי

$$\left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - |L|\right| < \epsilon$$

בפרט לבסוף מתקיים

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - |L| > -\epsilon$$

ולכן

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > |L| - \epsilon$$

ואם ניקח בפרט $\epsilon = |L| - 1$ נקבל

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$$

מתקיים לבסוף כלומר סדרת הערכים המוחלטים עולה ממש, ובפרט סדרת הערכים המוחלטים לא מתכנסת ל0 בסתירה.

$\blacksquare$

תרגיל 3. *הוכיחו כי אם התנאים הבאים מתקיימים*

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \neq 0, \quad \frac{b_n}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

אזי מתקיים כי $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$

הוכחה.

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1 \cdot a = a$$

$\blacksquare$

משפט 2 (*משפט הסנדוויץ'*)**.** *אם מתקיים כי*

$$a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L, \quad b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L$$

ולבסוף מתקיים

$$a_n \le c_n \le b_n$$

אזי $c_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L$

דוגמה 2. *מצאו את הגבול הבא*

$$\sqrt[n]{2^n+3^n}$$

הוכחה.

$$3 \underset{n\to\infty}{\longleftarrow} 3 = \sqrt[n]{3^n} \le \sqrt[n]{2^n+3^n} \le \sqrt[n]{3^n+3^n} = \sqrt[n]{2\cdot 3^n} = \sqrt[n]{2}\cdot 3 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 3$$

ולכן ממשפט הסנדוויץ' הגבול הוא 3. ∎

התכנסות במובן הרחב

הגדרה 1. נאמר כי סדרה מתכנסת במובן הרחב אם ורק אם מתקיים

$$\forall M>0 \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \forall n>N : a_n>M$$

עם אותם סימונים של גבולות. ניתן גם לעשות את אותו דבר עם מינוס אינסוף.

דוגמה 3. *הוכיחו לפי ההגדרה כי* $2n^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$

הוכחה. יהי $M>0$ לפי ההגדרה צריך להוכיח כי יש $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ מתקיים $a_n>m$. כלומר

$$\begin{aligned} 2n^2 &> M \,(\Longleftrightarrow) \\ n^2 &> \frac{M}{2} \,(\Longleftrightarrow) \\ n &> \sqrt{\frac{M}{2}} \end{aligned}$$

ולכן ניקח

$$N := \left\lceil \sqrt{\frac{M}{2}} \right\rceil + 1$$

∎

הערה 1. *שימו לב כי אם* a_n סדרה מתכנסת לאינסוף ומתקיים כי $a_n \le b_n$ אז גם b_n מתכנסת לאינסוף.

דוגמה 4. *מצאו*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$$

הוכחה. נשים לב כי

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2} \le 1\cdot 2\cdot\dots\cdot\frac{n}{2}\cdot\dots\cdot n = n!$$

ולכן מתקיים

$$\infty \underset{n\to\infty}{\longleftarrow} \sqrt{\frac{n}{2}} = \sqrt[n/2]{\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2}} \le \sqrt[n]{n!}$$

ובפרט הסדרה מתכנסת לאינסוף. ∎

דוגמה 5. *מצאו את*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}$$

הוכחה. נשים לב כי
$$n! \leq \left(\frac{n}{2}\right)^{n/2} \cdot n^{n/2}$$
ולכן
$$\infty \underset{n\to\infty}{\longleftarrow} 2^{n/2} = \frac{n^n}{\frac{n^n}{2^{n/2}}} = \frac{n^n}{\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2} \cdot n^{n/2}} \leq \frac{n^n}{n!}$$
ולכן הסדרה מתכנסת לאינסוף. ∎

טענה 1. אם $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ ו b_n חסומה מלרע אזי מתקיים
$$a_n + b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

הוכחה. ניקח את החסם מלרע $k \in \mathbb{R}$. יהי $M > 0$ עבור $M - k$ מתקיים כי יש $N \in \mathbb{N}$ עבורו לכל $n \geq N$ מתקיים כי $a_n \geq M - k$.
ולכן יתקיים $a_n + b_n \geq M - k + b_n \geq M$ ולכן לפי הגדרת הגבול הסדרה מתכנסת לאינסוף. ∎

תרגיל 4. *הוכיחו כי*
$$\frac{n^2}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$
נשים לב כי
$$\frac{n^2}{n+1} \geq \frac{n^2}{2n} \frac{n}{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$
ולכן מסנדוויץ' הרחב נקבל כי הסדרה תתכנס לאינסוף.

נניח
$$a_n, b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$
מה הן האפשרויות עבור
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

1. **0** - $\frac{n}{n^2}$
2. **c** עבור $c > 0$ למשל
$$\frac{n}{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$
3. ∞ - $\frac{n^2}{n}$
4. $\emptyset$ - למשל ניקח
$$a_n := \begin{cases} n, & \text{אי זוגי} \\ n^2, & \text{זוגי} \end{cases}, \quad b_n := n^2$$