תרגול 8 חשבון אינפיניטסימלי 1 שנת 2021/2

ישראל הבר

12 בדצמבר 2021

תרגיל 1. *קבעו התכנסות בתנאי/בהחלט/התבדרות של הטור הבא*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

הוכחה. נבדוק קודם התכנסות בהחלט. כלומר למצוא אם הטור הבא מתכנס או לא

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

נשים לב כי הסדרה מימין תהיה בערך e לבסוף ולכן לפחות אינטואיטיביתכדאי להשוות עם $\frac{1}{n}$ כלומר

$$\frac{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{\frac{1}{n}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}e$$

ולכן ממבחן ההשוואה השני נקבל כי הטורים מתכנסים ומתבדרים יחדיו ולכן הטור של הערכים המוחלטים יתבדר. נרצה להשתמש בלייבניץ על מנת להראות התכנסות בתנאי. נשים לב כי

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n}&=\frac{\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}=\frac{\frac{1}{n+1}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}}=\\&=\frac{(n+2)^{n+1}\cdot n^{n+1}}{(n+1)^{2n+2}}=\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1}<1\end{aligned}$$

ולכן הסדרה מונוטונית יורדת ולפי לייבניץ הטור יתכנס בתנאי. ■

משפט 1 (קריטריון קושי)**.** *קריטריון קושי עובד גם עבור טורים מתכנסים -*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{מתכנס}\iff\forall\epsilon>0\quad\exists n_0\in\mathbb{N}\quad\forall n\geq n_0\geq\forall p\in\mathbb{N}:\quad|S_{n+p}-S_n|<\epsilon$$

תרגיל 2. *יהי* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *טור מתבדר. בנוסף לכך*

$$\forall n\in\mathbb{N}:\quad a_n>0$$

הוכח כי

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$$

מתבדר.

הוכחה. נניח בשלילה כי הטור מתכנס. לכן לפי קריטריון קושי $\epsilon = \frac{1}{2}$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq n_0$ ולכל $p \in \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{k=1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{S_k}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k}\right| < \frac{1}{2}$$

נשים לב כי סדרת הסכומים החלקיים עולה ממש ולכן ניתן לשמוט את הערכים המוחלטים בנוסף יתקיים

$$\frac{1}{S_{n+p}} \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k} < \frac{1}{2}$$

תשימו לב שמה שמופיע משמאל שווה לביטוי הבא

$$\frac{S_{n+p} - S_n}{S_{n+p}}$$

ולכן קיבלנו כי

$$\frac{S_{n+p} - S_n}{S_{n+p}} < \frac{1}{2}$$

ולכן סך הכל

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad S_{n+p} < 2S_n$$

אך מכיוון ש $S_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ זאת סתירה (אפשר לחסום את הסדרה עם S_{n_0+1}) ■

משפט 2 (משפט אבל). *תהי $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה מונוטונית וחסומה. יהי $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס. אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.*

תרגיל 3. *בדקו אם הטור הבא מתכנס*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

הוכחה. ראינו כבר כי הטור

$$[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

מתכנס. לכן מה שנשאר לראות זה שהסדרה $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ מונוטונית וחסומה. זה ברור כי סינוס תמיד חסומה. בנוסף לכך זה בתחום שבו סינוס מונוטונית עולה ולכן הסדרה מונוטונית יורדת. לכן ממשפט אבל הטור מתכנס. ■

משפט 3 (משפט רימן). *אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי אז על ידי שינוי סדר איברים אפשר לקבל כל סכום*

$$-\infty \leq S \leq \infty$$

1 פונקציות

הגדרה 1 (גבול). $L \in \mathbb{R}$ נקרא גבול של הפונקציה f בנקודה $a \in \mathbb{R}$ אם לכל סדרה $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ המקיימת $a \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_n \neq a$ מתקיים $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L$

תרגיל 4. *מצאו את הגבול הבא והוכיחו*

$$\lim_{x\to 2} \quad \frac{x+4}{x^2-6}$$

הוכחה. נוכיח כי הגבול הוא 3-. תהי $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ כך ש $2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_n \neq 2$ לפי אריתמטיקת של גבולות

$$f(x_n) = \frac{x_n+4}{x_n^2-6} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2+4}{2^2-6} = -3$$

■

תרגיל 5. *תנו דוגמה לכך שהגבול $\lim_{x\to\infty} f(x)$ לא קיים אך הגבול $\lim_{n\to\infty} f(n)$ קיים.*

הוכחה. ניקח $x_n := \frac{n}{2\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ עם הפונקציה $f(x) = \sin(2\pi x)$.

∎

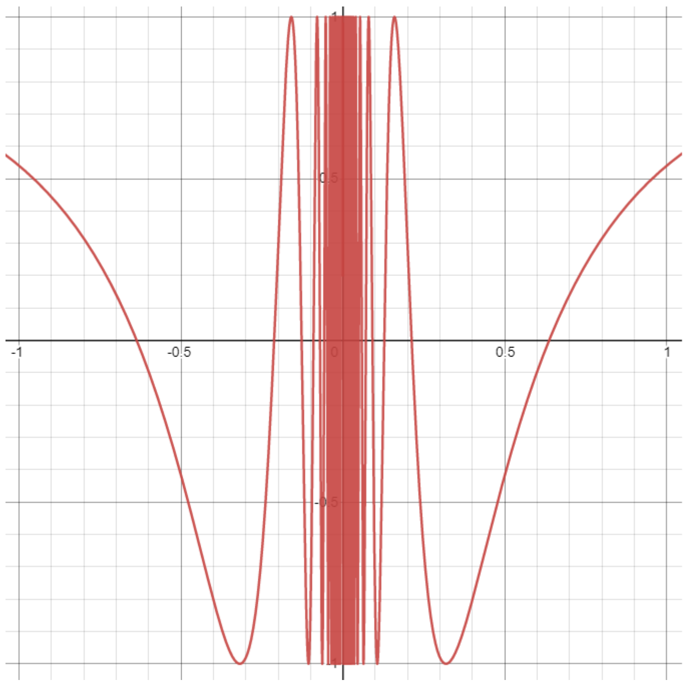
***הערה* 1.** ההפך כמובן לא ייתכן לפי הגדרת הגבול של פונקציה.

תרגיל 6. *הוכיחו כי הגבול*

$$\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

אינו קיים.

הוכחה. קודם ניתן להסתכל על הגרף של הפונקיה כדי לקבל טיפה אינטואיציה -



לפי הגדרה אם נמצא שתי סדרות $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ שמתכנסות ל0 אך עבורם

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(y_n)$$

לכן אם לוקחים

$$x_n := \frac{1}{2\pi n} \qquad y_n := \frac{1}{\pi n + \frac{1}{2}\pi}$$

כמובן שהסדרות האלו מתכנסות ל0, ואם נסתכל על הגבולות האחרים נקבל

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \cos(2\pi n) = 1$$
$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} \cos\left(\pi n + \frac{1}{2}\pi\right) = 0$$

ולכן לפי הגדרה הגבול של הפונקציה הנ"ל לא קיים.

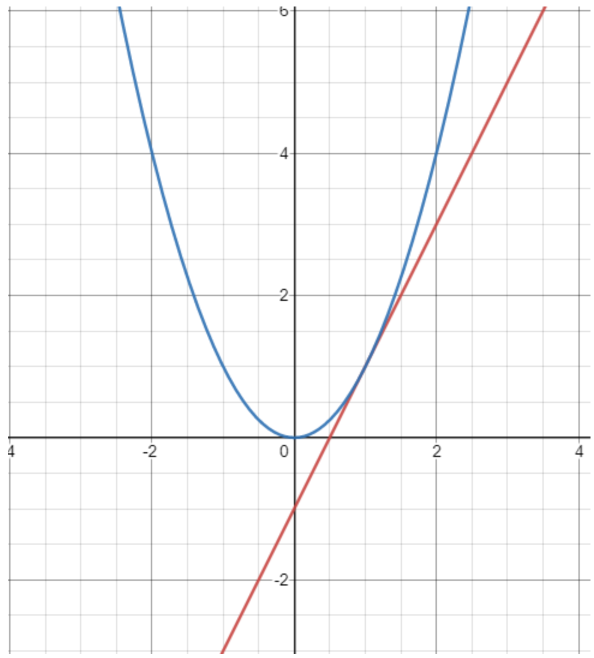
∎

תרגיל 7. *תהי*

$$g(x) := \begin{cases} 2x-1, & x \in \mathbb{Q} \\ x^2, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

האם קיימות נקודות $a \in \mathbb{R}$ *עבורן הגבול*

$$\lim_{x \to a} g(x)$$



הוכחה.
לכל $a \in \mathbb{R}$ יש סדרה $a \xrightarrow[n \to \infty]{} a \neq \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ עבור $x_n \in \mathbb{Q}$.
וגם קיימת סדרה $a \xrightarrow[n \to \infty]{} a \neq \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ כך ש $y_n \in \mathbb{Q}$.
אם לפונקציה היה גבול היה מתקיים כי

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} f(y_n)$$
$$2a - 1 = a^2$$
$$a = 1$$

ולכן אין גבול לכל $a \neq 1$. עבור $a = 1$ מתקיים כי עבור כל סדרה שתתכנס ל $a \in \mathbb{R}$ ניתן לחלק ל2 תתי סדרות - אחת עבורה הערכים הם רציונליים והשנייה עבורה הערכים הם אי רציונליים. שתי התתי סדרות האלה (בהינתן שהן אינסופיות) יקבלו שהפונקציה עליהם תתכנס ל1. זה יכסה את כל האינדקסים שלנו ולכן גם הגבול של הסדרה המקורית תהיה 1 ובפרט לפי ההגדרה הגבול של הפונקציה קיים והוא 1. (נשים לב שהנחנו שהתתי סדרות הן אינסופיות אך אם הן לא זה כמובן גם בסדר. נתמקד בזנב של רק רציונליים או אי רציונליים וגם שם יתקיים שהסדרה המקורית תתכנס כמו שצריך.) ■

הגדרה 2. תהי פונקציה f המוגדרת בסביבה מנוקבת A של a. $L \in \mathbb{R}$ נקרא הגבול של f בנקודה a אם:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A : 0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon$$

ונסמן $\lim_{x \to a} f(x) = L$

הערה 2. גבול לפי קושי שקול לגבול לפי היינה

תרגיל 8. *הוכיחו לפי הגדרה כי*

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2+5}$$

הוכחה. יהי $\epsilon > 0$. נחפש $\delta > 0$ כך שאם $0 < |x-1| < \delta$, אזי $|f(x)| < \epsilon$. נשים לב כי

$$|f(x)| = \left|\frac{x-1}{x^2+5}\right| \leq \frac{|x-1|}{5}$$

ולכן אם נבחר איזשהו $\delta < 5\epsilon$ נקבל גם את מה שצריך. ∎