האי־רציונליות והטרנסצנדנטיות של π ו-e
סמינר סטודנטים תשפ"ב

תומר באואר, 27.12.2021

תקציר

בהתחלה נראה הוכחה מלאה, פשוטה ואלמנטרית לכך שפאי ו-e (ולמעשה עוד המון מספרים) הם אי־רציונליים.

בהמשך נדבר על הוכחה די קצרה של משפט לינדמן-ויירשטראס שכמסקנה מיידית ממנו נקבל שפאי (ולמעשה עוד המון מספרים) הם טרנסצנדנטיים.

ההרצאה מבוססת על שתי רשומות של מאט בייקר. ברשומה הראשונה הוא מביא הוכחה פשוטה לאי־רציונליות של פאי המתבססת על מאמר של אלן פארקס (שמתבסס על נווין). ברשומה השנייה ישנה הוכחה p-אדית לטרנסצנדנטיות של פאי המבוססת על מאמר של בֶּזִיוִין ורוּבּה, ומזכירה גרסה יותר פשוטה להוכחה יחד עם בויקֶרְס.

1 אי־רציונליות

נתחיל עם סימון כמה קבוצות של מספרים: הרציונליים $\mathbb{Q}$, האי־רציונליים $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, האלגבריים הממשיים $\mathbb{A}$, הטרנסצנדנטיים $\mathbb{R}\setminus\mathbb{A}$ (לפי משה ירדן, מספר נַעֲלֶה). הסימון $\mathbb{A}=\mathbb{R}\cap\overline{\mathbb{Q}}$ הוא לא סטנדרטי ולא יופיע הרבה בהרצאה, אבל זה רק שיהיה שם לקבוצת המספרים הממשיים שהם שורש של פולינום במשתנה אחד עם מקדמים רציונליים (או באופן שקול מקדמים שלמים). למטה יש בערך תרגום לרשומה הראשונה של בייקר.

מטרה: יהי $c\in\mathbb{R}$ מספר ממשי חיובי. המטרה שלנו היא להניח בשלילה כי c רציונלי, ותחת ההנחה הזו לבנות פונקציה רציפה $f(x)$ וסדרת פולינומים $g_k(x)\in\mathbb{R}[x]$ לכל k טבעי עם שלוש התכונות הבאות:

א. הפונקציות $f(x)$ ו-$g_k(x)$ כולן חיוביות בקטע $(0,c)$.

ב. קיימת סדרה (M_k) של מספרים ממשיים השואפת לאפס כאשר k שואף לאינסוף, ומתקיים לכל k כי $|g_k(x)|\leq M_k$ עבור כל $x\in[0,c]$ (אפילו שבסעיף הקודם דרשנו חיוביות?)
סימון: קיימת סדרה $(M_k)\xrightarrow{k\to\infty}0$ וגם $\forall k\in\mathbb{N},\forall x\in[0,c]:|g_k(x)|\leq M_k$.

ג. האינטרגל (אַסְכֶּמֶת) $I_k:=\int_0^c f(x)g_k(x)dx$ הוא שלם לכל $k\in\mathbb{N}$.

כדי לראות למה שלוש התכונות האלו גוררות סתירה, נשים לב שהתכונה הראשונה והשלישית מחייבות ש-$I_k \geq 1$ לכל k. אז אם L הערך המרבי של $f(x)$ בקטע $[0,c]$, אז התכונה השנייה גוררת כי

$$I_k \leq \int_0^c LM_k dx \leq cLM_k$$

וזה בהכרח ממש קטן מ-1 עבור k מספיק גדול, כי (M_k) שואפת לאפס.

נשמור בצד כמה קבוצות של פונקציות.

נסמן ב-R את קבוצת כל הפונקציות $g(x)$ הרציפות על $[0,c]$ עם התכונה ש-$g(0)$ וגם $g(c)$ הם שלמים. שימו לב ש-R סגורה תחת חיבור, חיסור וכפל נקודתיים (כלומר R הוא חוג).

נסמן ב-R' את כל הפונקציות $g(x) \in R$ עבורן הנגזרת ה-k-ית גם שייכת ל-R לכל k טבעי. כלל המכפלה עבור נגזרות מראה כי R' סגורה תחת חיבור, חיסור וכפל נקודתיים, ולפי הגדרה גם תחת גזירה.

טענה 1. אם $g(x) \in R'$ וגם $g(0) = g(c) = 0$, אז

$$\forall k \ \frac{g(x)^k}{k!} \in R'$$

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על k. המקרה $k = 1$ ברור.

נניח כי $\frac{g(x)^{k-1}}{(k-1)!} \in R'$. לפי ההנחה הזו נקבל $\frac{g(x)^k}{k!} \in R$. לפי כלל השרשרת לנגזרות נקבל

$$\left(\frac{g(x)^k}{k!}\right)' = \frac{g(x)^{k-1}}{(k-1)!} g'(x)$$

ומפני ש-$g'(x) \in R'$ ויש סגירות לכפל ב-R', אז סיימנו. $\square$

נסמן ב-R^* את כל הפונקציות $g(x) \in R$ עבורן הנגזרת הקדומה ה-k-ית גם שייכת ל-R לכל k טבעי. באופן יותר פורמלי, בקבוצה R^* נמצאות כל הפונקציות $g(x)$ עבורן לכל k טבעי קיימת פונקציה $G_k(x) \in R$ כך שמתקיים $G_k^{(k)}(x) = g(x)$. שימו לב שלפי הגדרה למעשה גם $G_k(x) \in R^*$.

טענה 2. בהנתן פונקציה $f(x) \in R^*$ ופולינום $g(x) \in R'$, אז $\int_0^c f(x)g(x)dx$ הוא מספר שלם.

הוכחה. אם $g(x) = 0$ זה ברור. נוכיח באינדוקציה על $d = \deg g(x)$. אם $d = 0$, אז $g(x) = M$ קבועה, ומסיקים את הטענה מהמשפט היסודי של החשבון האינפיניטסימלי. כלומר מנוסחת ניוטון-לייבניץ

$$\int_0^c f(x)g(x)dx = M(f(c) - f(0))$$

כעת נניח שהטענה נכונה עבור פולינומים עד דרגה $d-1$. תהי $F(x)$ נגזרת קדומה של $f(x)$ השייכת ל-R^*. נשתמש באיסכום לפי חלקים (אינטגרציה בחלקים):

$$\int_0^c f(x)g(x)dx = F(c)g(c) - F(0)g(0) - \int_0^c F(x)g'(x)dx$$

כאשר באגף ימין יש לנו מספר שלם לפי הנחת האינדוקציה. □

כעת ניתן להוכיח את המשפט הראשי, שממנו נסיק כי π ו-e הם אי־רציונליים.

משפט (ראשי)**.** תהי פונקציה $f(x) \in R^*$ עבורה $f(x) > 0$ לכל $x \in (0,c)$. אזי c אי־רציונלי.

הוכחה. נניח בשלילה כי $c = \frac{m}{n}$ רציונלי עבור $m,n \in \mathbb{N}$. אז הפונקציה $g(x) = x(m-nx)$ שייכת ל-R' וכמו כן $g(0) = g(c) = 0$. הרי הנגזרת שלה היא $g'(x) = (m-nx) - nx$, הנגזרת השנייה היא $g''(x) = -2n$ והלאה זה ברור.

לפי טענה 1 גם הפונקציות $g_k(x) := \frac{g(x)^k}{k!}$ שייכות ל-R' לכל k, והן פולינומים. לפי טענה 2 נקבל כי $\int_0^c f(x)g_k(x)dx$ שלם לכל k. מצד שני, גם $f(x)$ וגם $g_k(x)$ חיוביות לכל $x \in (0,c)$. אז התכונות הראשונה והשלישית מתחילת ההרצאה מתקיימות. כדי להראות שהתכונה השנייה מתקיימת, יהי M הערך המרבי של $g(x)$ בקטע $[0,c]$. אז $g_k(x) \le M_k := \frac{M^k}{k!}$. הסדרה (M_k) שואפת לאפס כאשר k שואף לאינסוף. לכן הגענו לסתירה, ומכאן ש-c הוא אי־רציונלי. □

מסקנה 3. המספר π הוא אי־רציונלי.

הוכחה. בחרו את $f(x) = \sin(x)$ ואת $c = \pi$. □

למעשה מהמסקנה האחרונה קל לראות שאם עבור $0 < c \le \pi$ גם $\sin(c)$ וגם $\cos(c)$ רציונליים, אז c אי־רציונלי. במקרה כזה קיים n טבעי עבורו $n \cdot \sin(c)$ ו-$n \cdot \cos(c)$ הם שלמים, ואפשר לבחור את הפונקציה $f(x) = n \cdot \sin(x)$ במשפט הראשי.

מסקנה 4. המספר e הוא אי־רציונלי.

הוכחה. הניחו בשלילה כי $e = \frac{m}{n}$ עבור n,m טבעיים. בחרו את $f(x) = ne^x$ ואת $c = 1$. □

מהמסקנה הזו אפשר להסיק שאם $\frac{m}{n} > 0$ רציונלי וגם $\frac{m}{n} \neq 1$, אז $\ln(\frac{m}{n})$ אי־רציונלי. בלי הגבלת הכלליות, נניח $\frac{m}{n} > 1$, ולכן $\ln(\frac{m}{n}) > 0$. כעת ניתן להשתמש במשפט הראשי עם $c = \ln(\frac{m}{n})$ ו-$f(x) = n \cdot e^x$.

2 טרנסצנדנטיות

לפי משפט לִינְדֶמַן-ויירשטראס (Lindemann–Weierstrass, בקיצור ל"ו) המספרים π ו-e, וגם המספרים אחרי המסקנות האחרונות הם למעשה טרנסצנדנטיים.

משפט 5 (לינדמן-ויירשטראס)**.** יהיו $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ ו-$b_1, \ldots, b_t$ מספרים אלגבריים כך ש-$b_i \neq 0$ לכל i ו-α_i שונים זה מזה, אז

$$b_1 e^{\alpha_1} + \cdots + b_t e^{\alpha_t} \neq 0$$

במילים אחרות: אם $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in \overline{\mathbb{Q}}$ שונים זה מזה, אז $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_t}$ הם בלתי תלויים לינארית מעל $\overline{\mathbb{Q}}$.

הטרנסצנדנטיות של π נובעת ממשפט ל"ו בקלות. נניח בשלילה כי π אלגברי. אז גם πi אלגברי, ולכן לפי המשפט $e^{\pi i} + 1 \neq 0$ שזו סתירה. יותר מוכר הניסוח של לינדמן לפיו אם $\alpha \neq 0$ וגם e^{α} אלגברי, אז α בהכרח טרנסצנדנטי. לדוגמה $e^{\pi i} = -1$ הוא אלגברי, ולכן $i\pi$ טרנסצנדנטי. עבור $\alpha = 1$ נקבל ש-e הוא טרנסצנדנטי.

למשפט ל"ו ההוכחה הרגילה היא לפי הילברט (ויש שיפורים על ידי חוקרים אחרים). ההוכחה המקורית של בֶּזִיוִין ורוֹבֵּה (בקיצור ב"ר) נובעת מקריטריון שלהם לרציונליות של פתרונות למשוואות דיפרנציאליות לינאריות. ההוכחה למעשה מסתמכת על אנליזה p-אדית כבדה יחסית. התוספת של בויקֶרְס עוקפת את זה ומשתמשת בכלים מוכרים מקורסים באינפי. לא נרחיב לגביה, אבל בפועל מדובר בארבעה עמודים יחסית מובנים.

ברשומה של מאט בייקר על הוכחת ב"ר הוא מספר שמשפט ל"ו שקול לטענה שנראית שונה למדי על טורי חזקות פורמליים הניתנים להצגה שפונקציות רציונליות.

תזכורת: יהיה לנו נוח לעבוד עם פיתוח לטור חזקות סביב ∞ במקום סביב 0. נאמר שפונקציה $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ היא אנליטית ב-∞ אם הפונקציה $g(w) = f(1/w)$ אנליטית ב-0. אם $g(w) = \sum b_i w^i$ היא פיתוח לטור חזקות סביב 0, אז נאמר כי

$$f(z) = \sum b_i z^{-i} = b_0 + b_1 \frac{1}{z} + b_2 \frac{1}{z^2} + \ldots$$

הוא הפיתוח של $f(z)$ לטור חזקות סביב $z = \infty$. אצלנו לרוב $b_0 = 0$, או במילים אחרות מתאפסת באינסוף ("נעלמת באינסוף").

תזכורת: נאמר שטור חזקות פורמלי $v(x) \in \mathbb{C}\left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right]$ הוא אנליטי ב-∞ אם לטור החזקות $u(w) = v(1/w)$ יש רדיוס התכנסות חיובי סביב $w = 0$. עם מעט עיוות השפה, נאמר כי $v(x)$ היא פונקציה רציונלית אם קיימים פולינומים $P(x), Q(x)$ כאשר $Q(x) \neq 0$ כך שהפיתוח של $f(x) = P(x)/Q(x)$ סביב $x = \infty$ שווה ל-$v(x)$. פונקציה רציונלית מתאפסת באינסוף אם ורק אם $\deg(P) < \deg(Q)$.

סימון: יהי K שדה, ויהי $\mathcal{F}_K := \frac{1}{x}K\left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right]$ חוג הטורים הפורמליים מעל K שבהם $\frac{1}{x}$ מתאפס באינסוף. יהי $\mathcal{D}\colon \mathcal{F}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ אופרטור הגזירה $\mathcal{D}(v) = v + v'$.

נראה שמשפט לינדמן-ויירשטראס שקול לטענה הבאה:

טענה 6 (ב"ר)**.** אם $v \in \mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ אנליטית ב-∞ וגם $\mathcal{D}(v)$ היא פונקציה רציונלית, אז v פונקציה רציונלית.

שימו לב כי המסקנה של טענה 6 לא בהכרח נכונה עבור פונקציות עם סינגולריות חיונית ב-∞ (כלומר לא אפס, קוטב או סינגולריות סליקה). למשל $\mathcal{D}(e^{-x}) = 0$, אבל e^{-x} אינה פונקציה רציונלית. כדי להוכיח את השקילות של משפט ל"ו וטענה ב"ר צריך גם את ההגדרה הבאה.

הגדרה 7. התמרת לפלס הפורמלית $\mathcal{L}\colon \mathbb{C}\llbracket z \rrbracket \to \mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ מוגדרת לפי

$$\mathcal{L}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! a_n}{x^{n+1}}$$

תזכורת: התמרת לפלס של פונקציה $f(t)$ המוגדרת לכל ממשי $t \geq 0$ (למשל זמן), היא $F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$. לפעמים מסמנים $\mathcal{L}\{f\}$ במקום F. ההגדרה של $\mathcal{L}$ היא הכללה רגילה לטורי חזקות, וברור שהיא חח"ע ועל.

יש כמה תכונות מוכרות של התמרת לפלס שנשתמש בהן להוכחת השקילות:

(ל.1) פונקציה $f(z) \in \mathbb{C}\llbracket z \rrbracket$ היא פונקציה שלמה מגידול מעריכי (או גדילה מעריכית. כלומר $|f(z)| \leq C_1 e^{C_2 |z|}$ עבור קבועים C_1, C_2) אם ורק אם $\mathcal{L}(f)$ אנליטית ב-∞.

(ל.2) פונקציה $f(z) \in \mathbb{C}\llbracket z \rrbracket$ היא פיתוח לטור חזקות סביב $z = 0$ של פולינום מעריכי

$$p_1(z) e^{a_1 z} + \cdots + p_n(z) e^{a_n z}$$

אם ורק אם $\mathcal{L}(f)$ היא פונקציה רציונלית. כך מתקבלת התאמה חח"ע ועל בין פולינומים מעריכיים לבין פונקציות רציונליות המתאפסות באינסוף.
ההוכחה של תכונה זו מתבססת על פירוק פונקציה רציונלית לשברים חלקיים ועל העובדה ש-$\mathcal{L}(e^{az}) = \frac{1}{1-az}$. לכן $p_i(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ ו-$a_i \in \overline{\mathbb{Q}}$ לכל i אם ורק אם $\mathcal{L}(f) \in \overline{\mathbb{Q}}(x)$.

למה 8 (תרגיל לבית)**.** נגדיר $\delta\colon \mathbb{C}\llbracket z \rrbracket \to \mathbb{C}\llbracket z \rrbracket$ לפי $\delta(f(z)) = (z-1) f(z)$, ואת $\mathcal{D}\colon \mathcal{F}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ כמו מקודם. אז δ ו-$\mathcal{D}$ הן התאמות חח"ע ועל, ומתקיים $\mathcal{D}(\mathcal{L}(f)) = \mathcal{L}(\delta(f))$.

הערה. למעשה ב"ר הכלילו את הטענה שלהם לכל אופרטור גזירה לינארי $\mathcal{D}$ עם מקדמים שהם פולינומיים עבורו ∞ היא נקודת סינגולריות אי־רגולרית לחלוטין (?), ואצלנו ההוכחה פשוטה יותר כי יש אופרטור נגדי מפורש. אצלם האופרטור הגזירה הוא $\mathcal{D}'(u) = x^2 u' + (x-1)u$, והמעבר לניסוח עם $\mathcal{D}$ הוא $v(x) = \frac{1}{x} u(\frac{1}{x})$.

כעת כדי להראות שמשפט לינדמן-ויירשטראס גורר את טענה ב"ר, נניח כי $v \in \mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ אנליטית ב-∞ וגם $\mathcal{D}(v)$ רציונלית. לפי תכונה (ל.2) קיים פולינום מעריכי $f(z) = \sum_i p_i(z) e^{a_i z}$ כאשר a_i הם מספרים אלגבריים שונים ו-$p_i(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ כך ש-$\mathcal{L}(f) =$

$\mathcal{D}(v)$. הפונקציה $g(z) := f(z)/(z-1)$ מקיימת $\delta(g(z)) = f(z)$. אז לפי למה 8 מתקיים $\mathcal{L}(g) = v$. מפני ש-v אנליטית ב-∞, אז לפי תכונה (ל.1) הפונקציה $g(z)$ שלמה, ולכן $f(1) = 0$. לפי משפט לינדמן-ויירשטראס בהכרח $p_i(1) = 0$, כלומר $(z-1)|p_i(z)$, לכל i. לכן $g(z)$ גם היא פולינום מעריכי, ולפי תכונה (ל.2) נקבל כי $v(x)$ היא פונקציה רציונלית, כפי רצינו.

בכיוון השני, כדי להראות שטענה ב"ר גוררת את משפט לינדמן-ויירשטראס, נניח בשלילה כי $f(1) = 0$ עבור $f(z) := \sum_i b_i e^{\alpha_i x}$, כאשר a_i הם מספרים אלגבריים שונים ו-b_i הם אלגבריים שאינם אפס לכל $1 \le i \le m$. ניתן להחליף את $f(z)$ במכפלה של צמודי גלואה שלו

$$\prod_\sigma \sum_i \sigma(b_i) e^{\sigma(\alpha_i)x}$$

כאשר $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, b_1, \ldots, b_m)/\mathbb{Q})$. זה מאפשר להניח בלי הגבלת הכלליות כי $f(x) \in \mathbb{Q}[\![z]\!]$, כי המכפלה הזו נשמרת תחת הפעולה של חבורת גלואה. התמרת לפלס של $f(z)$ היא $\mathcal{L}(f) = \sum_i \frac{b_i}{1-\alpha_i x}$, ונשים לב שיש לה רק קטבים פשוטים. בנוסף, מפני ש-a_i שונים זה מזה וגם $f(1) = 0$, אז בהכרח $m \ge 2$ ולפחות α_i אחד שונה מאפס. לכן יש ל-$\mathcal{L}(f)$ לפחות קוטב פשוט אחד. מצד שני, מפני ש-$f(1) = 0$, אז הפונקציה $g(z) := f(z)/(z-1)$ היא שלמה ומגידול מעריכי. לכן לפי תכונה (ל.1) הפונקציה $v := \mathcal{L}(g) \in \mathcal{F}_\mathbb{C}$ היא אנליטית ב-∞. לפי למה 8 נקבל כי $\mathcal{L}(f) = \mathcal{D}(v)$, ולכן ל-$\mathcal{D}(v)$ יש רק קטבים פשוטים. אבל, קל לראות שאם u היא פונקציה רציונלית, אז לפונקציה $\mathcal{D}(u) = u + u'$ אין קטבים פשוטים. כלומר u אינה פונקציה רציונלית, וזו סתירה לטענה ב"ר.

רציונליות של טורי חזקות פורמליים כדי להוכיח את טענה ב"ר, נזכיר שיש להראות שאם $v \in \mathcal{F}_\mathbb{C}$ אנליטית ב-∞ וגם $\mathcal{D}(v)$ היא פונקציה רציונלית, אז v פונקציה רציונלית. כדי לעשות זאת יש למצוא קריטריון "חזק" כדי לאבחן מתי טור חזקות פורמלי עם מקדמים ב-$\mathbb{Q}$ הוא למעשה פונקציה רציונלית. יש היסטוריה ארוכה לתוצאות כאלו, ובייקר בחר ברשומה שלו לקרוא לזה קריטריון בורל-פוליה-דוורק-בֶּרטראנדיאס, שיהיה בדיוק מה שאנחנו צריכים. כעת נעבור למעבר מהיר על ההיסטוריה של התפתחות הקריטריון, ונחזור בהמשך להוכחה.

בורל בסביבות 1894 אמיל בורל הבחין שאם $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ הוא טור חזקות עם מקדמים שלמים המגדיר פונקציה אנליטית על עיגול סגור מרדיוס $R > 1$ ב-$\mathbb{C}$, אז $f(z)$ חייב להיות פולינום. זו תוצאה פשוטה של נוסחת האינטגרל של קושי, המראה שאם $|f| \le M$ בעיגול, אז $|a_n| \le M/(2\pi R^{n+1})$. מפני שכל a_n הוא שלם, אז אי השוויון מראה כי $a_n = 0$ לכל n גדול מספיק. בורל הרחיב את הטיעון הזה למשפט הבא.

משפט 9 (בורל)**.** אם $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ הוא פיתוח לטור חזקות סביב $z = 0$ של פונקציה מרומורפית על עיגול סגור מרדיוס $R > 1$ ב-$\mathbb{C}$, והמקדמים a_n כולם שלמים, אז $f(z)$ היא פונקציה רציונלית.

ההוכחה של המשפט האחרון מתבססת על איפיון ידוע (למי?) של פונקציות רציונליות, ואפשר למצוא הוכחה עבורו למה 10 ברשומה בבלוג של טאו:

למה 10 (קרונקר)**.** תהי $\underline{a} = (a_n)_{n\geq 0}$ סדרת מספרים מרוכבים. אז התנאים הבאים שקולים:

א. הטור $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ מייצג פונקציה רציונלית.

ב. דטרמיננטת קרונקר-הנקל

$$K_N(\underline{a}) = \det(a_{i+j})_{0\leq i,j\leq N}$$

מתאפסת עבור N מספיק גדול.

הרעיון מאחורי ההוכחה של תוצאה יותר כללית של בורל היא להשתמש בקירוב קושי לעיל (עבור המכפלה של $f(z)$ עם פולינום כלשהו), ועם עובדות ידועות על דטרמיננטות, ולהראות שאם f היא מרומורפית על עיגול סגור מרדיוס $R > 1$, אז $K_N(\underline{a}) \to 0$ כאשר $N \to \infty$. אם המספרים a_n כולם שלמים, אז בהכרח $K_N(\underline{a}) = 0$ עבור N מספיק גדול.

פוֹלְיָה בסביבות 1916 פויה גיירג (הונגרית משוערת) הבין שניתן להכליל את ההוכחה של המשפט של בורל הנעזרת בדטרמיננטות קרונקר-הנקל, על ידי החלפת רדיוס ההתכנסות עם קוטר טרנספיניטי (אלסופי? על־סופי?) של תחום ההתכנסות.

הקוטר הטרנספיניטי מודד את הגודל של קבוצה באופן שמכליל את הרדיוס של עיגול. יש לו שימושים באנליזה מרוכבת ובתורת הפוטנציאלים, וכן בתורת המספרים. הקוטר של קבוצה חסומה A במרחב מטרי X הוא המרחק המקסימלי בין שתי נקודות של A. אפשר להכליל זאת לקוטר ה-N-י $\delta_N(A)$ שלפי הגדרה הוא החסם העליון (סופרימום) על פני של ה-N-יות הסדורות $(z_1, \ldots, z_N) \in A^N$ של הממוצע ההנדסי של מרחקים בזוגות בין הנקודות z_i. כלומר

$$\delta_N(A) = \sup_{z_1,\ldots,z_N\in A} \left(\prod_{i\neq j} |z_i - z_j| \right)^{1/(n(n-1))}$$

ומתברר כי $\{\delta_N(A)\}_{N\geq 2}$ יוצאת סדרת יורדת (מונוטונית), המאפשרת להגדיר את הקוטר הטרנספיניטי

$$\delta_\infty(A) := \lim_{N\to\infty} \delta_N(A)$$

הקוטר הטרנספיניטי של עיגול בכל שדה סגור אלגברי ונורמי (כמו $\mathbb{C}$) הוא הרדיוס שלו, והקוטר הטרנספיניטי של קטע ממשי הוא רבע מאורכו. יהיה לנו נוח עבור הניסוח של משפט פוליה והשימוש שלנו במשפט לינדמן-ויירשטראס, לעבוד עם $g(z) = \frac{1}{z} f(\frac{1}{z})$ במקום עם $f(z)$ בניסוח לעיל של משפט בורל, ולחקור את הקוטר הטרנספיניטי של המשלים של תחום ההתכנסות.

משפט 11 (פוליה)**.** אם $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n/z^{n+1}$ הוא טור חזקות עם מקדמים שלמים הניתן להמשכה לפונקציה מרומורפית על המשלים של קבוצה חסומה $A \subset \mathbb{C}$ המכילה את 0 עם $\delta_\infty(A) < 1$, אז $g(z)$ היא פונקציה רציונלית.

התנאי $\delta_\infty(A) < 1$ במשפט פוליה הוא הדוק. לסדרה $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n$ יש מקדמים שלמים, וניתן להמשיך אותה לפונקציה האנליטית $\sqrt{1-\frac{4}{z}}$ על המשלים של הקטע $[0,4]$, ויש לה קוטר טרנספיניטי 1. אבל הפונקציה $\sqrt{1-\frac{4}{z}}$ אינה רציונלית.

דְוּוֹרְק ברנרד דוורק שם לב בסביבות 1960 כי למשפט בורל יש מקבילה p-אדית. אבחנה זו היא חשובה להוכחה המפורסמת שלו להשערות וייל (וֵיי בצרפתית), שפונקציות זטא של יריעה אלגברית מעל שדה סופי היא פונקציה רציונלית. דוורק הבין למעשה שניתן להסיק הן את משפט בורל והן את המקביל ה-p-אדי שלו מהתוצאה הגלובלית הבאה. עבורנו $\mathbb{C}_v$ תהיה ההשלמה של הסגור האלגברי של ההערכה v-אדית של $\mathbb{Q}$. עבור $v = \infty$ נקבל את השדה $\mathbb{C}$ המוכר. עבור $v = p$ ראשוני סופי נקבל את המקבילה ה-p-אדית $\mathbb{C}_p$.

משפט 12 (דוורק)**.** נניח כי $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ הוא טור חזקות עם מקדמים רציונליים. תהי S קבוצה סופית של אתרים (כלומר ראשוניים) של $\mathbb{Q}$, המכילה את האתר האינסופי, עבורה:

א. לכל $p \notin S$, מתקיים $|a_n|_p \leq 1$ לכל $n \geq 0$. כלומר a_n הוא שלם p-אדי.

ב. לכל $v \in S$, הפונקציה $f(z)$ ניתנת להרחבה מרומורפית על עיגול D_v בעל רדיוס R_v ב-$\mathbb{C}$ וגם $\prod_{v\in S} R_v > 1$.

אז $f(z)$ היא פונקציה רציונלית.

ההוכחה של משפט דוורק במקרה הפרטי שבו f היא אנליטית (כלומר לא רק מרומורפית) בכל D_v היא לא קשה. במקרה זה, לכל $v \in S$ המתאים למספר ראשוני p, ההתכנסות ה-p-אדית של f על D_p משמעה $|a_n| R_p^n \to 0$ כאשר $n \to \infty$. זה גורר שישנו קבוע M_p כך ש-$|a_n|_p \leq M_p/R_p^{n+1}$ לכל n. כמו מקודם, קירוב קושי גורר כי $|a_n|_\infty \leq M_\infty/R_\infty^{n+1}$ עבור קבוע כלשהו M_∞. לכן, אם נסמן $M = \prod_{v\in S} M_v$ ו-$R = \prod_{v\in S} R_v$, נקבל כי

$$\prod_{v\in S} |a_n|_v \leq \frac{M}{R^{n+1}} \to 0$$

כאשר $n \to \infty$. מצד שני, נוסחת המכפלה $\prod_v |x|_v = 1$ לכל $x \neq 0$, גוררת שאם $a_n \neq 0$, אז

$$\prod_{v\in S} |a_n|_v \geq \prod_{v \text{ all}} |a_n|_v = 1$$

ומכאן בהכרח $a_n = 0$ החל מ-n מספיק גדול, ולכן f היא פולינום.

בֶּרְטראנדיאס הקוטר הטרנספיניטי הוא מושג שניתן להגדיר בכל מרחב מטרי, ובפרט ניתן להגדיר אותו בתת־קבוצות של $\mathbb{C}_p$. ברטראנדיאס ערבב כמה מן המצרכים והוכיח בעזרתם הכללה משותפת של המשפטים של בורל, פוליה ודוורק, בערך בשנת 1963.

משפט 13 (ברטראנדיאס)**.** יהי $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n/z^{n+1}$ טור חזקות עם מקדמים רציונליים. תהי S קבוצה סופית של אתרים של $\mathbb{Q}$, המכילה את האתר האינסופי, עבורה:

(ג.1) לכל $p\notin S$, מתקיים $|a_n|_p\le 1$ לכל $n\ge 0$. כלומר a_n הוא שלם p-אדי.

(ג.2) לכל $v\in S$, הפונקציה $g(z)$ ניתנת להרחבה מרומורפית למשלים של קבוצה חסומה $K_v\subset\mathbb{C}_v$ (ומניחים כי היא איחוד סופי של עיגולים אם v אינו ארכימידי) וגם $\prod_{v\in S}\delta_\infty(K_v)<1$.

אז $g(z)$ היא פונקציה רציונלית.

ההוכחה מתבססת על דטרמיננטות קרונקר-הנקל ועל נוסחת המכפלה, כמו בהוכחה של משפט דוורק לעיל. כדי לפשט עניינים, הנחנו כי $a_n\in\mathbb{Q}$, אבל הניסוח של משפט ברטראנדיאס ניתן להכללה לכל שדה מספרים K בקלות. עבורנו מספיק המקרה הפרטי שבה כל הרחבה של $g(z)$ היא אנליטית.

הוכחת טענת בֶּזִיוִין ורוֹבּה

כעת אנו מוכנים להסביר את ההוכחה לטענה ב"ר, אחרי שהראנו שהיא גוררת את משפט 5, ולכן את הטרנסצנדנטיות של π ושל e. החלק שהוא אולי הכי מעניין בהוכחה, על פי בייקר, הוא האתרים ה-p-אדיים שאיתם נוודא את נכונות ההנחות למשפט ברטראנדיאס.

הוכחה. תהי $w(x)=v(x)+v'(x)$, שהיא לפי ההנחה פונקציה רציונלית. יהי הפירוק שלה לשברים חלקיים

$$w(x)=\sum_{i,j}\frac{c_{ij}}{(x-\gamma_i)^j}$$

כאשר $\gamma_1,\dots,\gamma_m$ הם מספרים אלגבריים שונים זה מזה. בעזרת שימוש בהופכי הפורמלי

$$\left(I+\frac{d}{dx}\right)^{-1}=\sum_{k\ge 0}(-1)^k\frac{d^k}{dx^k}$$

עבור $\mathcal{D}$, ניתן לוודא "בקלות" כי יש ל-v את הפירוק הבא לשברים חלקיים:

$$v(x)=\sum_{i,j}c_{ij}\sum_{k\ge 0}\binom{k+j-1}{j-1}\frac{k!}{(x-\gamma_i)^{k+j}} \tag{1}$$

תהי S_1 קבוצה סופית של אתרים של $\mathbb{Q}$, המכילה את האתר הארכימדי (האינסופי), כך שלכל $p\notin S_1$ כל המקדמים c_{ij} שאינם אפס וכל γ_i הם עם ערך מוחלט p-אדי

השווה 1, וגם $|\gamma_i - \gamma_l|_p = 1$ לכל $i \neq l$. הנוסחה המפורשת (1) מראה כי לכל $p \notin S_1$, המקדמים a_n של $v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n/x^{n+1}$ הם שלמים p-אדיים. לכן $v(x)$ מקיימת את תכונה (ב.1) לכל קבוצה של אתרים S המכילה את S_1.

עבור $v \in S_1$, הנוסחה (1) מראה שהטור המגדיר את $v(x)$ מתכנס מחוץ לעיגול $K_v \subset \mathbb{C}_v$ עבור רדיוס חיובי R_v כלשהו.

עבור $p \notin S_1$, הנוסחה (1) מראה שהטור המגדיר את $v(x)$ מתכנס במשלים לקבוצה $K_p \subset \mathbb{C}_p$ שהיא איחוד סופי של עיגולים D_i שמרכזם ב-γ_i כלשהם. מפני שלסדרה $\sum_{k=0}^{\infty} k!x^k$ יש רדיוס התכנסות p-אדי השווה ל-$p^{1/(p-1)}$, ניתן לבחור שהרדיוסים של העיגולים D_i יהיה $p^{-1/(p-1)}$. לפי ההנחה על S_1, העיגולים $D_1, \ldots, D_m$ הם שונים זה מזה, ומכאן זה תרגיל קל בעזרת אי-שיוויון המשולש הלא ארכימידי להוכיח כי

$$\delta_\infty \left(\bigcup_{i=1}^{m} D_i \right) = p^{\frac{-1}{m(p-1)}}$$

כעת, מפני שהטור $\sum_p \frac{\log p}{p}$ הנסכם על כל הראשוניים מתבדר, המכפלה האינסופית $\prod_{p \notin S_1} \delta_\infty(K_p)$ מתכנסת לאפס. לכן קיימת קבוצת אתרים S המכילה את S_1 עבורה $\prod_{v \in S} \delta_\infty(K_v) < 1$. עבור בחירה כזו של S, הפונקציה $v(x)$ מקיימת את תכונה (ב.1) וגם את תכונה (ב.2). לכן $v(x)$ היא פונקציה רציונלית, מה שמסיים את ההוכחה. □

תוספות

יש הרבה השערות ומשפטים חשובים בתורת המספרים הטרנסצנדנטית. הקישורים הם לויקיפדיה:

- משפט גֶלְפוֹנד-שניידר: אם $a, b \in \overline{\mathbb{Q}}$ אלגבריים המקיימים $a \neq 0, 1$ ו-b אי־רציונלי, אז כל ערך של a^b הוא טרנסצנדנטי. הסיבה שיש כמה ערכים כי מתירים מרוכבים, כאשר מספר לא נחשב רציונלי אם החלק המדומה שלו שונה מאפס.

- משפט (אלן) בייקר: יהי $\mathbb{L} = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, e^\lambda \in \overline{\mathbb{Q}} \right\}$. אם $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{L}$ בלתי תלויים לינארית מעל $\mathbb{Q}$, אז לכל $\beta_0, \ldots, \beta_n \in \overline{\mathbb{Q}}$ שלא כולם אפס, מתקיים

$$|\beta_0 + \beta_1\lambda_1 + \cdots + \beta_n\lambda_n| > H^{-C}$$

כאשר H הוא המקסימום מבין הגבהים של β_i (כנראה המקסימום מבין הערכים המוחלטים של המונים והמכנים בפולינומים המינימליים שלהם), ו-C הוא קבוע ניתן לחישוב התלוי ב-n, λ_i ובמעלה המרבית d של המספרים β_i. בפרט המספר H^{-C} אינו אפס, ולכן 1 ו-λ_i בלתי תלויים לינארית מעל $\overline{\mathbb{Q}}$.

ניסוח אחר למשפט לינדמן-ויירשטראס אומר שכל איבר לא אפסי של $\mathbb{L}$ הוא טרנסצנדנטי. ניסוח אחר למשפט גלפונד-שניידר הוא שאם $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{L}$ בלתי תלויים לינארית מעל $\mathbb{Q}$ (ואז הם בלתי תלויים לינארית מעל $\overline{\mathbb{Q}}$), אז אם $\lambda_2 \neq 0$ המנה λ_1/λ_2 היא או מספר רציונלי או טרנסצנדנטי (כלומר לא בקבוצה $\overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q}$). המשפט הזה מאפשר להוכיח תוצאות שונות בתורת המספרים לגבי חסמים יעילים

למספר הפתרונות של משוואות דיופנטיות, ובתורת המספרים האלגברית לפתור בעיות של מספרי מחלקה כמו למצוא את כל שדות המספרים המרוכבים ממעלה 2 עם מספר מחלקה 1 או 2.

- השערת שאנואל: יהיו $z_1, \ldots, z_n$ מספרים מרוכבים בלתי תלויים לינארית מעל $\mathbb{Q}$, אז להרחבת השדות $\mathbb{Q}(z_1, \ldots, z_n, e^{z_1}, \ldots, e^{z_n})$ יש מעלת טרנסצנדנטיות (נֶעֱלוּת) לפחות n מעל $\mathbb{Q}$. זה מכליל את כל המשפטים מקודם.
- השערת ארבעת המעריכים: אם x_1, y_1 ו-y_1, y_2 הם שני זוגות של מספרים מרוכבים, כאשר כל זוג הוא בלתי תלוי לינארית מעל $\mathbb{Q}$, אז לפחות אחד מארבעת המעריכים

$$e^{x_1 y_1}, e^{x_1 y_2}, e^{x_2 y_1}, e^{x_2 y_2}$$

הוא טרנסצנדנטי.
- משפט ששת המעריכים: אם $x_1, \ldots, x_d$ הם מספרים מרוכבים בלתי תלויים לינארית מעל $\mathbb{Q}$ וכן $y_1, \ldots, y_k$ הם כאלו וגם $dk > d + k$, אז לפחות אחד מן המעריכים $\exp(x_i y_j)$ עבור $1 \leq i \leq d$ ו-$1 \leq j \leq k$ הוא טרנסצנדנטי. השם של המשפט מגיע עבור $k = 2$ ו-$d = 3$. השערת ארבעת המעריכים היא למעשה חיזוק המשפט הזה גם כאשר $dk \geq d + k$.