תרגול 2 חשבון אינפיניטסימלי 1 שנת 2021/2

ישראל הבר

17 באוקטובר 2021

הגדרה 1. סדרה זאת פונקציה מהטבעיים לקבוצה אחרת. בקורס הזה זה יהיה כמעט אקסקלוסיבית לממשיים. כלומר סדרה זה פונקציה

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

כאשר בדרך כלל כותבים

$$f(n) = f_n \text{ or } a_n$$

סימון 1. בדרך כלל אנחנו כותבים סדרה באופן הבא

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ or } \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

אינטואיטיבית אם אנחנו רואים סדרה אינסופית של מספרים אנחנו יכולים לראות אם המספרים מתקרבים למספר אחר או לא. למשל אם נראה את הסדרה הבא -

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{10^{100}}, \ldots$$

מתקרב לאפס בצורה אינסופית, כלומר ככל שנמשיך זה ימשיך להתקרב לאפס. גם כמו שראיתם למשל בבגרות

$$1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}, \ldots$$

מתכנס ל2. אם נשנה את ה5 איברים הראשונים למשל המספרים עדיין יתקרבו ל2 כמה שנרצה. זה נכון גם אם אם נשנה את ה 10^{100} מספרים הראשונים. בנוסף לכך ברור שהסדרה הקודמת לא שואפת ל 2.001 וזה בגלל שאנחנו לא נתקרב כמה שנרצה ל2.001. ההבנה הזאת יוצרת את ההגדרה הבאה עבור הגבול -

הגדרה 2. נאמר שהסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ שואפת/מתכנסת ל $L \in \mathbb{R}$ אם התנאי הבא מתקיים

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N : |a_n - L| \leq \epsilon$$

סימון 2. אם (a_n) שואפת לL ניתן לסמן את זה גם בצורות הבאות

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L, \text{ or } \; a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L$$

כמובן שאם יש סדרה שמתקרבת בצורה אינסופית למספר אחד היא לא יכולה גם להתקרב אינסופית למספר אחר. מזה מקבלים את המשפט הבא -

משפט 1. *אם לסדרה יש גבול, הוא יחיד.*

תרגיל 1. *מצאו את הגבול הבא אם הוא קיים (והוכיחו שהוא קיים) -*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n}$$

הוכחה. ניתן לראות שזה אמור להתקרב ל1, לכן נוכיח שהגבול הוא 1. בשביל זה קודם צריך לקחת $\epsilon > 0$ ונוכיח שקיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים

$$\begin{aligned} |a_n - 1| &\leq \epsilon \\ \left|\frac{n-1}{n} - 1\right| &\leq \epsilon \\ \left|-\frac{1}{n}\right| &\leq \epsilon \\ n &\geq \frac{1}{\epsilon} \end{aligned}$$

לכן ניקח למשל

$$N = \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil$$

■

תרגיל 2. *הוכיחו לפי הגדרה ש*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n-1}{3n^2+2n+1} = \frac{1}{3}$$

הוכחה. יהי $\epsilon > 0$ ונוכיח שקיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים

$$\begin{aligned} \left|\frac{n^2-n-1}{3n^2+2n+1} - \frac{1}{3}\right| &\leq \epsilon \\ \left|\frac{n^2-n-1-\frac{1}{3}(3n^2+2n+1)}{3n^2+2n+1}\right| &\leq \epsilon \\ \left|\frac{-n-1-\frac{2}{3}n-\frac{1}{3}}{3n^2+2n+1}\right| &\leq \epsilon \\ \left|\frac{-\frac{5}{3}n-\frac{4}{3}}{3n^2+2n+1}\right| &\leq \epsilon \end{aligned}$$

נשים לב כי

$$\left|-\frac{5n+4}{3(3n^2+2n+1)}\right| \leq \frac{5n+4}{9n^2} \leq \frac{9n+9}{9n^2} = \frac{n+1}{n^2} \leq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$$

לכן אם ניקח N כך ש $\frac{2}{N} \leq \epsilon$ נסיים. זה קורה כאשר לוקחים

$$N = \left\lceil \frac{2}{\epsilon} \right\rceil$$

■

תרגיל 3. *הוכיחו כי הגבול הבא קיים ומצאו את הגבול* -

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

הוכחה. ברור מהסתכלות על הסדרה שאם יש גבול הוא צריך להיות 0. נראה זאת. לכן יהי $\epsilon > 0$ ונוכיח שקיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים

$$\begin{aligned} |a_n - 0| &\leq \epsilon \\ \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| &\leq \epsilon \\ \frac{1}{n^2} &\leq \epsilon \\ n^2 &\geq \frac{1}{\epsilon} \\ n &\geq \sqrt{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

לכן ניקח

$$N = \left\lceil \epsilon^{-\frac{1}{2}} \right\rceil$$

■

תרגיל 4. *הוכיחו לפי ההגדרה כי הסדרה*

$$a_n := \frac{1 + (-1)^n}{2}$$

אינה מתכנסת ל0 ולכן גם אינה מתכנסת כלל.

הוכחה. על מנת להראות שאין התכנסות ל0 צריך להראות כי קיים $\epsilon > 0$ כך שלכל $N \in \mathbb{N}$ יש $n \geq N$ כך ש

$$|a_n - 0| > \epsilon$$

לדוגמה ניקח $\epsilon = \frac{1}{2}$ נשים לב כי לכל $N \in \mathbb{N}$ יש אינדקס זוגי שגדול יותר ממנו n' ומתקיים כי

$$|a_{n'}| = 1 > \frac{1}{2}$$

ולכן מתקיים מה שאנחנו רוצים, כלומר הסדרה לא מתכנסת ל0. נניח בשלילה כי יש $0 \neq L \in \mathbb{R}$ שהוא גבול של הסדרה. באותו אופן נראה עכשיו שזה סתירה בדומה למה שראינו קודם. ניקח $\epsilon = \frac{|L|}{2}$ זה חיובי כי L חיובי. לכל $N \in \mathbb{N}$ קיים אינדקס אי זוגי אשר גדול יותר ממנו n' ומתקיים כי

$$|a_n - L| = |0 - L| = |L| > \frac{|L|}{2}$$

ולכן נקבל שאין התכנסות לL. ■

תרגיל 5. *הוכיחו לפי ההגדרה כי הסדרה -*

$$S_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

מתכנסת ומצאו את הגבול.

הוכחה. נזכור כי הסדרה היא הנדסית ולכן הסכום שמבטא את הסדרה שווה ל -

$$\frac{1 \cdot ((\frac{1}{2})^n - 1)}{\frac{1}{2} - 1} = -2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

לכן הניחוש המושכל יהיה שצריך לבדוק התכנסות ל2. כלומר נרצה להראות כי -

$$\forall \epsilon > 0 : \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : \quad |S_n - 2| < \epsilon$$

לכן יהי $\epsilon > 0$ אנחנו רוצים למצוא N מתאים. האי השיוויון הנצרך הוא

$$\begin{aligned} |S_n - 2| &< \epsilon \\ \left|\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right| &< \epsilon \\ \frac{1}{2^{n-1}} &< \epsilon \\ 2^{n-1} &> \epsilon^{-1} \\ n - 1 &> \log \epsilon^{-1} \\ n &> 1 + \log \epsilon^{-1} \end{aligned}$$

ולכן נוכל לקחת

$$N = \max\left\{\left\lceil 2 + \log \epsilon^{-1} \right\rceil, 1\right\}$$

■