# תרגול 3 חשבון אינפיניטסימלי 1 שנת 2021/2

ישראל הבר

22 באוקטובר 2021

**תרגיל 1.** *יהיו* $\alpha, \beta > 0$ *ויהיו סדרות כך ש*

$$\begin{cases} a_1 = \alpha, \quad b_1 = \beta \\ a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{cases}$$

*הוכיחו כי הסדרות הנ"ל מתכנסות.*

*הוכחה.* נשים לב כי

$$a_n - b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} - \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}} = \frac{a_{n-1} - 2\sqrt{a_{n-1} b_{n-1}} + b_{n-1}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{b_{n-1}}\right)^2}{2} \geq 0$$

ולכן עבור $n \geq 2$ מתקיים $a_n \geq b_n$. נוכיח באינדוקציה כי עבור $n \geq 2$ מתקיים גם כי $a_n$ מונוטונית יורדת ו $b_n$ מונוטונית עולה. וזאת מכיוון ש -

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{a_n + a_n}{2} = a_n$$
$$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{b_n \cdot b_n} = b_n$$

ולכן סך הכל לכל $n \geq 2$ מתקיים כי

$$b_2 \leq b_n \leq a_n \leq a_2$$

סך הכל

$$\{a_n\}_{n=2}^{\infty}, \quad \{b_n\}_{n=2}^{\infty}$$

סדרות חסומות ומונוטוניות נקבל כי הן גם מתכנסות. שתיהן זנב של הסדרות המקוריות שלנו ולכן גם הן מתכנסות. ∎

**תרגיל 2.** *יהי* $0 < c < 1$ *ונגדיר סדרה -*

$$\begin{cases} a_1 = c \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}a_n^2 \end{cases}$$

*הוכיחו כי הסדרה מתכנסת ומצאו את הגבול.*

*הוכחה.* נוכיח באינדוקציה כי $a_{n+1} - a_n < 0$.

**בסיס:**

$$a_2 - a_1 = \frac{c}{2} + \frac{c^2}{2} - c = \frac{c^2 - c}{2} < 0 \quad (0 < c^2 < c)$$

נשים לב גם שכל איבר בסדרה חיובי וזאת מכיוון שבהגדת הסדרה מעורבים רק מספרים חיוביים וסכומים של מספרים חיוביים.

**צעד:**

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}a_n^2 - \left(\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}a_{n-1}^2\right) = \frac{1}{2}\left(a_n^2 - a_{n-1}^2\right) = \frac{(a_n - a_{n-1})(a_n + a_{n-1})}{2} < 0$$

∎

ולכן הסדרה מונוטונית יורדת. בנוסף הסדרה חסומה בין 0 ו1. ולכן הסדרה מתכנסת. עכשיו נמצא את הגבול. נניח כי הגבול הוא L. נשים לב כי מתקיים ש

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n (= L)$$

ולכן

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}a_n^2\right) = \frac{1}{2}\left(c + L^2\right)$$

ולכן

$$L^2 - 2L + c = 0$$

כלומר

$$L_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4c}}{2} = 1 \pm \sqrt{1-c}$$

נשים לב כי L לא יכולה להיות גדולה מ1 ולכן

$$L = 1 - \sqrt{1-c}$$

**תרגיל 3.** *הוכיחו כי הסדרה הבאה מתכנסת ומצאות את גבולה* -

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \end{cases}$$

*הוכחה.* קודם כל נוכיח כי

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq a_n \leq 2$$

את זה אפשר לעשות באינדוקציה -

**בסיס:**

$$0 \leq \sqrt{2}(= a_1) \leq 2$$

**צעד:**

$$0 \leq a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \leq \sqrt{2+2} = 2$$

בנוסף נשים לב כי

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{2 + \sqrt{a_n}} - a_n = \frac{2 + a_n - a_n^2}{\sqrt{2 + \sqrt{a_n}} + a_n}$$

לכן $a_{n+1} \geq a_n$ אם ורק אם

$$\begin{aligned} 2 + a_n - a_n^2 \geq 0 &\iff \\ a_n^2 - a_n - 2 \leq 0 &\iff \\ -1 \leq a_n \leq 2 & \end{aligned}$$

ולכן לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+1} \geq a_n$ כלומר הסדרה מונוטונית. הוכחנו כאמור שהיא גם חסומה ולכן היא מתכנסת. בדומה לתרגיל שעבר נחשב את הגבול. נניח כי הגבול הוא L -

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + a_n} = \sqrt{2 + L}$$

ולכן מתקיים כי

$$\begin{aligned} L^2 &= 2 + L \\ L^2 - L - 2 &= 0 \\ (L-2)(L+1) &= 0 \end{aligned}$$

כמובן $L \neq -1$ ולכן $L = 2$. ■

**תרגיל 4.** *תהי הסדרה הבאה -*

$$a_n := \frac{\sum_{i=1}^k \alpha_i n^i}{\sum_{i=1}^k \beta_i n^i}$$

*כאשר מניחים שהיא מוגדרת תמיד ומתקיים $\alpha_n, \beta_n \neq 0$ מצאו את גבול הסדרה.*

*הוכחה.* זה יהיה תוצאה של אריתמטיקה של גבולו, נשים לי כי ניתן לכתוב את הסדרה גם באופן הבא -

$$a_n = \frac{\sum_{i=1}^k \alpha_i n^{i-k}}{\sum_{i=1}^k \beta_i n^{i-k}}$$

נשים לב שהסדרות במונה ובמכנה מתכנסות וזאת מכיוון שלכל $i < k$ מתקיים כי

$$\alpha_i n^{i-k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \beta_i n^{i-k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ועבור $i = k$ מתקיים

$$\alpha_i n^{i-k} = \alpha_i \cdot 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha_k \quad \beta_i n^{i-k} = \beta_i \cdot 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \beta_k$$

ולכן 2 הסדרות מתכנסות והמכנה לא שואף לאפס ומאריתמתיקת גבולות נקבל -

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\alpha_k}{\beta_k}$$

■

**דוגמה 1.** *למשל עבור -*

$$a_n = \frac{3n^7 + 5n^2 + 1}{6n^7 + n^4}$$

*נקבל כי*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{5}{n^5} + \frac{1}{n^7}}{6 + \frac{1}{n^3} = \frac{3}{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

**תרגיל 5.** *הוכח כי הסדרה הבאה מתכנסת ומצא את גבולה*

$$\begin{cases} a_1 = \frac{3}{4} \\ a_{n+1} = \frac{a_n+2}{a_n+3} \end{cases}$$

*הוכחה.* באינדוקציה ניתן להוכיח כי

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad 0 < a_n < 1$$

בנוסף לכך ניתן להוכיח באינדוקציה כי הסדרה מונוטונית יורדת -

**בסיס:**

$$a_2 = \frac{11}{15} < \frac{44}{60} < \frac{45}{60} = \frac{3}{4} = a_1$$

**צעד:**

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 2}{a_{n+1} + 3} = 1 - \frac{1}{a_{n+1} + 3} < 1 - \frac{1}{a_n + 3} = a_{n+1}$$

סך הכל הסדרה מונוטונית יורדת וחסומה. לכן הסדרה גם מתכנסת. עכשיו נמצא את הגבול.

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + 2}{a_n + 3} = \frac{L+2}{L+3}$$

ולכן נקבל -

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{L+2}{L+3} \\
L^2 + 3L &= L + 2 \\
L^2 + 2L - 2 &= 0 \\
L_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 2 \cdot 4}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}
\end{aligned}
$$

כמובן L אי שלילי ולכן נקבל כי

$$L = \sqrt{3} - 1 \approx 0.73205$$

■