

ISSN 0033-8486

РАДИОТЕХНИКА

2 1997

ЖУРНАЛ В ЖУРНАЛЕ

РАДИОСИСТЕМЫ

Выпуск 21 Помехоустойчивое кодирование

ИПРЖР

Тел./факс (095) 925-92-41
E-mail: iprzhr@ire.cplire.ru

ПОДПИСНОЙ ИНДЕКС 70775 В КАТАЛОГЕ АГЕНТСТВА "РОСПЕЧАТЬ" ГАЗЕТЫ И ЖУРНАЛЫ

Пороговые характеристики квазиправдоподобной оценки частоты случайного сигнала

А.П. Трифонов, С.П. Алексеенко

С учетом аномальных ошибок найдены характеристики измерителя частоты узкополосного гауссовского стационарного сигнала с неточно известными формой и параметрами спектра мощности на фоне белого шума.

Во многих прикладных задачах статистической радиотехники необходимо производить измерение несущей частоты или доплеровского смещения частоты флуктуирующих радиосигналов [1—4]. При гауссовских флуктуациях радиосигнала эта задача сводится к оценке смещения ν_0 центральной частоты спектра мощности узкополосного центрированного гауссовского случайного процесса

$$s(t, \nu_0) = a(t) \cos[(\omega_0 + \nu_0)t + \varphi(t)], \quad 0 < t < T, \quad (1)$$

принятого на фоне гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0 . В [2—4] оценка частоты случайного сигнала исследовалась в предположении, что форма и параметры спектра мощности сигнала (1) априори точно известны. В то же время в большом числе практических задач форма и параметры спектра мощности сигнала (1) априори известны лишь приближенно.

Цель работы — определение потерь в точности оценки частоты ν_0 случайного сигнала (1) из-за неполного знания формы и параметров его спектра мощности.

Согласно [1], спектр мощности сигнала (1)

$$G_0(\omega, \nu_0) = \frac{G_0}{2} \left[f_0 \left(\frac{\omega_0 + \nu_0 + \omega}{\theta_0} \right) + f_0 \left(\frac{\omega_0 + \nu_0 - \omega}{\theta_0} \right) \right], \quad (2)$$

где $f_0(x)$ описывает форму спектра мощности и удовлетворяет условиям

$$f_0(x) = f_0(-x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_0^2(x) dx = 1, \quad \max f_0(x) = 1, \quad f_0(x) \geq 0, \quad (3)$$

$$\theta_0 = \int_{-\infty}^{\infty} G_0^2(\omega, \nu) d\omega [2 \max G_0(\omega, \nu)]^{-1} \quad (4)$$

— эквивалентная полоса частот сигнала (1); ν — центральная частота спектра мощности сигнала (1), подлежащая оценке.

Предположим, что неизвестное смещение частоты ν_0 распределено равномерно в интервале $[-\Omega/2; \Omega/2]$ и $\theta_0 \ll \omega_0$, $\Omega \ll \omega_0$.

В случае априорной неопределенности по форме и параметрам спектра мощности одним из возможных решений задачи является синтез квазиправдоподобного алгоритма оценки. В процессе синтеза используются ожидаемая (предполагаемая) форма и параметры спектра мощности

$$G(\omega, \nu) = \frac{G}{2} \left[f \left(\frac{\omega_0 + \nu + \omega}{\theta^*} \right) + f \left(\frac{\omega_0 + \nu - \omega}{\theta^*} \right) \right], \quad (5)$$

где $f(x)$ и θ^* удовлетворяют соотношениям, аналогичным (3) и (4).

Логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОР) для сигнала со спектром мощности (5) при $\mu = T\theta_0/2\pi \gg 1$ может быть представлен в виде [2, 3]

$$M(\nu) = \frac{1}{2} \int_0^T x^2(t, \nu) dt - \frac{T\theta^*}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln[1 + qf(x)] dx, \quad (6)$$

где $q = G/N_0$; $x(t, \nu)$ — отклик фильтра с передаточной функцией $H(i\omega, \nu)$ на реализацию наблюдаемых данных, причем $|H(i\omega, \nu)|^2 = 2G(\omega, \nu) \times \{N_0[N_0/2 + G(\omega, \nu)]\}^{-1}$.

Так как точная форма и параметры спектра мощности (2) априори неизвестны, для получения квазиправдоподобной оценки (КПО) частоты сигнала (1) используем приемное устройство, оптимальное при приеме случайного сигнала со спектром мощности (5). Тогда КПО частоты имеет вид $\hat{\nu} = \arg \sup M^*(\nu)$, $\nu \in [-\Omega/2, \Omega/2]$, где

$$M^*(\nu) = \int_0^T x^2(t, \nu) dt / 2 \quad (7)$$

— член логарифма ФОР (6), зависящий от неизвестной частоты.

Аналогично [3], для (7) справедливо представление $M^*(\nu) = S(\nu) + N(\nu) + C$, где

$$S(\nu) = \mu q q_0 (1 + \delta\theta) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0[x(1 + \delta\theta) - (\nu - \nu_0)/\theta_0] f(x)}{1 + qf(x)} dx \quad (8)$$

— сигнальная функция, $C = \mu q \int_{-\infty}^{\infty} f(x) [1 + qf(x)]^{-1} dx$

— несущественная постоянная; $N(\nu) = M^*(\nu) - \langle M^*(\nu) \rangle$ — шумовая функция, которую при $\mu \gg 1$ можно считать реализацией централизованного гауссовского процесса [1,3] с корреляционной функцией

$$K_N(\nu_1, \nu_2) = \mu q^2 (1 + \delta\theta) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x - \nu_1/\theta^*) f(x - \nu_2/\theta^*) [1 + q \int_0^1 x(1 + \delta\theta) - \nu_0/\theta_0] \frac{1}{\theta_0} dx}{[1 + qf(x - \nu_1/\theta^*)][1 + qf(x - \nu_2/\theta^*)]} dx. \quad (9)$$

Здесь $\delta\theta = (\theta^* - \theta_0)/\theta_0$, $q_0 = G_0/N_0$.

Когда $|\delta\theta| < 1$, то сигнальная функция (8) достигает максимума при $\nu = \nu_0$. Если $\mu \gg 1$, то надежная оценка $\hat{\nu}$ будет несмещенной [3,4].

Найдем теперь ее рассеяние (средний квадрат ошибки). Разобьем априорный интервал наблюдения частоты $[-\Omega/2; \Omega/2]$ на сигнальную область Ω_s , где сигнальная функция (8) заметно отличается от нуля, и на шумовую область Ω_N , где сигнальная функция (8) практически равна нулю. Тогда дисперсия надежной оценки [3], т. е. при $\hat{\nu} \in \Omega_s$, определяется выражением

$$D(\hat{\nu}) = \frac{\partial^2 K_N(\nu_1, \nu_2)}{\partial \nu_1 \partial \nu_2} \left[\frac{\partial^2 S(\nu)}{\partial \nu^2} \right]^{-1} \Big|_{\nu_1 = \nu_2 = \nu = \nu_0}. \quad (10)$$

Подставляя (8) и (9) в (10), находим

$$D(\hat{\nu}) = \frac{\theta_0^2}{\mu q_0^2 (1 + \delta\theta)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[f'(x)]^2 [1 + q_0 f_0(x(1 + \delta\theta))]^2}{[1 + qf(x)]^4} dx \times \\ \times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0''(x(1 + \delta\theta)) f(x)}{1 + qf(x)} dx \right\}^{-2}. \quad (11)$$

Если положить в (11) $\theta = 0$, то при совпадении ожидаемой формы спектра мощности с истинной $f(x) = f_0(x)$ и $G = G_0$ получаем дисперсию оценки максимального правдоподобия (ОМП) ν_m несущей частоты сигнала с априори известными параметрами и формой спектра мощности [3,4]

$$D(\nu_m) = D(\hat{\nu}) \Big|_{\delta\theta=0, f(x)=f_0(x)} =$$

$$= \frac{\theta_0^2}{\mu q_0^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[f_0'(x)]^2}{[1 + q_0 f_0(x)]^2} dx \right\}^{-1}.$$

Формула (11) для дисперсии КПО несколько упрощается в случае слабого сигнала, когда $q, q_0 \ll 1$ и принимает вид

$$D(\hat{\nu}) = \frac{\theta_0^2}{\mu q_0^2 (1 + \delta\theta)^3} \int_{-\infty}^{\infty} [f'(x)]^2 dx = \\ = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_0''(x(1 + \delta\theta)) f(x) dx \right\}^{-2}. \quad (12)$$

В шумовой области, т. е. при $\nu \in \Omega_N$

$$K_N(\nu_1, \nu_2) = \mu q^2 (1 + \delta\theta) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) f(x - \Delta/\theta^*)}{[1 + qf(x)][1 + qf(x - \Delta/\theta^*)]} dx.$$

$$S(\nu) \approx 0, \quad \Delta = \nu_2 - \nu_1.$$

Следовательно, в этой области при $\mu \gg 1$ шумовая функция является асимптотически стационарным гауссовским случайным процессом [1,3]. Принимая во внимание влияние аномальных ошибок, безусловное рассеяние КПО можно записать как [3]

$$V(\hat{\nu}) = \langle (\hat{\nu} - \nu_0)^2 \rangle = P_0 D(\hat{\nu}) + (1 - P_0) \Omega^2/6, \quad (13)$$

где, учитывая, что процесс (7) асимптотически (с ростом времени наблюдения T) гауссовский, вероятность надежной оценки [3] определяется выражением

$$P_0 \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp \left[-\frac{(x-z)^2}{2} - \frac{\xi}{2\pi} \exp \left(-\frac{x^2 \chi^2}{2} \right) \right] dx, \quad (14)$$

$$z^2 = \mu q_0^2 (1 + \delta\theta) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0(x(1 + \delta\theta)) f(x)}{1 + qf(x)} dx \right]^2 \times$$

$$\times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^2(x) [1 + q_0 f_0(x(1 + \delta\theta))]^2}{[1 + qf(x)]^2} dx \right\}^{-1},$$

$$\xi = \frac{m}{(1 + \delta\theta)} \times$$

$$\times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[f'(x)]^2}{[1 + qf(x)]^4} dx / \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^2(x)}{[1 + qf(x)]^2} dx \right\}^{1/2}, \quad (15)$$

$$\chi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^2(x) [1 + q_0 f_0(x)]^2}{[1 + qf(x)]^2} dx / \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^2(x)}{[1 + qf(x)]^2} dx,$$

$$m = \Omega/\theta_0.$$

Однако формула (14) для вероятности надежной оценки довольно громоздка и расчет по ней возможен только численными методами. Поэтому найдем простую верхнюю границу для вероятности аномальных ошибок $P_a = 1 - P_0$. Воспользовавшись

неравенством $1 - \exp(-x) \leq x$ при $x \geq 0$, из (14) имеем $P_a \leq P_a^* = \xi \exp \left[-z^2 \chi^2 / (2(1 + \chi^2)) \right] \left[2\pi \sqrt{1 + \chi^2} \right]^{-1}$. Верхняя граница для вероятности аномальной ошибки может быть использована для аппроксимации P_a при $P_a^* \leq 0,1$. Тогда приближенное значение рассеяния КПО записывается как $V(\hat{\nu}) = D(\hat{\nu}) + \xi \Omega^2 \exp \left[-z^2 \chi^2 / (2(1 + \chi^2)) \right] \left[12\pi \sqrt{1 + \chi^2} \right]^{-1}$.

Выражения для параметров (15), определяющих рассеяние оценки, несколько упрощаются при слабом сигнале, когда $q, q_0 \ll 1$. В этом случае они принимают вид

$$\xi = m \int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2 dx / (1 + \delta\theta), \chi^2 = 1, \\ z^2 = \mu q_0^2 (1 + \delta\theta) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_0(x(1 + \delta\theta)) f(x) dx \right]^2.$$

В качестве примера рассмотрим оценку частоты случайного сигнала, форма спектра мощности которого описывается полиномом Баттерворта [5]:

$$\beta_n(x) = [1 + (\alpha_n x)^2]^{-1}, \quad (16)$$

где n — степень полинома, α_n — нормировочный коэффициент, определяемый из условия нормировки вида (3) $\int_{-\infty}^{\infty} \beta_n^2(x) dx = 1$.

Функция (16) позволяет аппроксимировать форму спектров мощности широкого класса случайных сигналов [5]. Положим, что различие между спектрами мощности принимаемого сигнала (2) и сигнала (5), для которого синтезирован измеритель, сводится к различию формы спектров мощности, так что $\delta\theta = 0$ и $G = G_0$. Пусть при этом форма спектра (5) описывается полиномом Баттерворта степени n , т. е. $f(x) = \beta_n(x)$, а принимаемый сигнал (2) имеет форму спектра мощности, описываемую полиномом Баттерворта первой степени, т. е. $f_0(x) = \beta_1(x) = [1 + (\pi x/2)^2]^{-1}$. Для этого случая на рис. 1 приведены зависимости проигрыша $\rho = V(\nu)/V(\nu_m)$ в точности КПО по сравнению с ОМП от q_0 при $\mu = 100$. Здесь $V(\nu_m) = V(\hat{\nu})$ при $G = G_0$, $f(x) = f_0(x)$ и $\delta\theta = 0$, т. е. $V(\nu_m)$ — рассеяние ОМП [4]. Сплошные кривые на рис. 1 соответствуют значению $m = 200$, штриховые — $m = 20$. Кривые 1 рассчитаны при $n = 4$, 2 — $n = 6$, 3 — $n = 10$. На рис. 2 приведены зависимости проигрыша ρ в точности КПО по сравнению с ОМП, когда форма спектра мощности ожидаемого сигнала (5) описывается полиномом Баттерворта первой степени, т. е. $f(x) = \beta_1(x)$, а принимаемый сигнал имеет форму спектра мощности, описываемую полино-

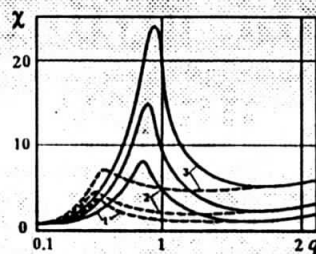


Рис. 1

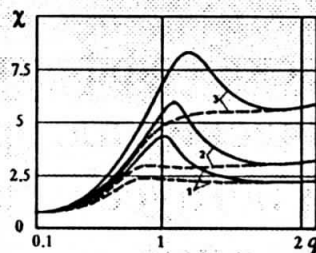


Рис. 2

мом Баттерворта степени n , т. е. $f_0(x) = \beta_n(x)$.

Обозначения на этом рисунке такие же, как на рис. 1.

Из рис. 1, 2 следует, что отличие формы спектров мощности принимаемого и ожидаемого сигналов может привести к существенному проигрышу в точности КПО по сравнению с ОМП. Немонотонный характер зависимости проигрыша

от q_0 объясняется влиянием поро-

вых эффектов. Действительно, их роль существенно возрастает с увеличением априорного интервала возможных значений неизвестной частоты, т. е. с увеличением m (15). Сопоставление кривых рис. 1 и 2 показывает, что проигрыш в точности оценки частоты несколько уменьшается, если спектр мощности ожидаемого сигнала (5) имеет фронты, т. е. участки спада спектра мощности более пологие, чем у спектра мощности принимаемого сигнала (2).

● Установлено, что влияние пороговых эффектов может привести к существенному проигрышу в точности КПО оценки, который возрастает с увеличением априорного интервала возможных значений неизвестной частоты. Сформулированы рекомендации по выбору формы спектра мощности ожидаемого сигнала.

Приведенные результаты получены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

Литература

1. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. — М.: Радио и связь, 1982.
2. Куликов Е.И. Методы измерения случайных процессов. — М.: Радио и связь, 1986.
3. Куликов Е.И., Трифонов А.П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. — М.: Сов. радио, 1978.
4. Трифонов А.П., Енина Е.П. — Радиотехника, 1983, №8.
5. Фомин А.Ф. Помехоустойчивость систем передачи непрерывных сообщений. — М.: Радио и связь, 1975.

Поступила 15 мая 1995 г.

05.94