

184

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

187

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

Т О М 44

№ 4

1999

МОСКВА

378

СТАТИСТИЧЕСКАЯ
РАДИОФИЗИКА

УДК 621.391.01

ОЦЕНКА ЧАСТОТНЫХ ПАРАМЕТРОВ СЛУЧАЙНОГО
РАДИОИМПУЛЬСА С НЕИЗВЕСТНЫМИ МОМЕНТАМИ ПОЯВЛЕНИЯ
И ИСЧЕЗНОВЕНИЯ

© 1999 г. А. П. Трифонов, А. В. Захаров

Поступила в редакцию 26.03.97 г.

Получены асимптотически точные выражения для характеристик квазиравдоподобных и максимально правдоподобных совместных оценок минимальной, максимальной, центральной частоты и ширины полосы частот спектральной плотности случайного радиоимпульса. Найден проигрыш в точности квазиравдоподобных оценок вследствие незнания моментов появления и исчезновения сигнала.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] исследована задача обнаружения, а в [2] – оценки математического ожидания и величины спектральной плотности случайного импульса с неизвестными моментами появления и исчезновения. Однако в ряде прикладных задач статистической радиофизики и радиотехники возникает необходимость в оценке минимальной и максимальной частот (центральной частоты и ширины полосы частот) случайного радиоимпульса [3–5] с неизвестными моментами появления и исчезновения.

Согласно [3–5], случайный радиоимпульс можно представить в виде

$$s(t) = \begin{cases} \xi(t) & \text{при } \Theta_{01} \leq t \leq \Theta_{02}, \\ 0 & \text{при } t < \Theta_{01} \text{ или } t > \Theta_{02}, \end{cases} \quad (1)$$

где Θ_{01} и Θ_{02} – неизвестные моменты появления и исчезновения сигнала; $\xi(t)$ – реализация стационарного центрированного гауссовского случайного процесса со спектральной плотностью

$$G(\omega) = \frac{\gamma_0}{2} \begin{cases} 1 & \text{при } \omega_{01} \leq |\omega| \leq \omega_{02}, \\ 0 & \text{при } |\omega| < \omega_{01} \text{ или } |\omega| > \omega_{02}. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь γ_0 – величина, а ω_{01} и ω_{02} – неизвестные минимальная и максимальная частоты спектральной плотности процесса $\xi(t)$, подлежащие оценке. Обозначим $\Omega_0 = \omega_{02} - \omega_{01}$ ширину полосы частот и $\nu_0 = (\omega_{02} + \omega_{01})/2$ центральную частоту спектральной плотности (2). Будем полагать, что время корреляции $2\pi/\Omega_0$ случайного процесса $\xi(t)$ значительно меньше длительности $\tau_0 = \Theta_{02} - \Theta_{01}$ импульса (1), т.е. выполняется условие широкополосности [3–5]:

$$\mu_0 = \tau_0 \Omega_0 / 2\pi \gg 1. \quad (3)$$

При выполнении (3) параметры ω_{01} и ω_{02} определяют минимальную и максимальную частоты, а параметры ν_0 и Ω_0 – центральную частоту и ширину полосы частот (частотные параметры) случайного радиосигнала (1). Модель (1), (2) случайного радиоимпульса широко используется в практических приложениях статистической радиофизики и радиотехники [3–7].

Полагаем, что сигнал (1) наблюдается в течение времени $[0; T]$ на фоне аддитивного гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0 , так что обработке доступна реализация

$$x(t) = s(t) + n(t), \quad t \in [0; T], \quad (4)$$

причем сигнал и шум статистически независимы. Априорную область возможных значений неизвестных параметров импульса (1) зададим соотношениями $\Omega_{i\min} \leq \omega_{0i} \leq \Omega_{i\max}$, $T_{i\min} \leq \Theta_{0i} \leq T_{i\max}$, $i = 1, 2$. Интервал наблюдения $[0; T]$ выберем так, что $0 \leq T_{1\min} < T_{2\max} \leq T$, т.е. импульс (1) всегда находится внутри этого интервала. На основе наблюдаемой реализации (4) и имеющейся априорной информации необходимо оценить частотные параметры сигнала (1) с неизвестными моментами появления и исчезновения.

В работе [6] рассмотрена оценка полосы частот Ω_0 , а в [7] – оценка центральной частоты ν_0 сигнала (1), принимаемого на фоне шума $n(t)$. Однако в [6, 7] предполагали, что моменты появления Θ_{01} и исчезновения Θ_{02} сигнала априори известны. Это не позволяет использовать результаты [6, 7] для оценивания частотных параметров сигнала (1) с неизвестными моментами появления и исчезновения. Ниже исследованы совместные оценки частотных параметров случайного радиоимпульса (1) с неизвестными моментами появления и исчезновения.

1. КВАЗИПРАВДОПОДОБНЫЕ ОЦЕНКИ

Для синтеза алгоритма оценки воспользуемся методом максимального правдоподобия [3, 8]. Согласно этому методу, для наблюдаемой реализации (4) необходимо формировать логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОР) $L_0(\omega_1, \omega_2)$ как функцию возможных значений ω_i , $i = 1, 2$, неизвестных параметров ω_{0i} импульса (1). Используя результаты [4, 5], при выполнении (3) получаем

$$\begin{aligned} L_0(\omega_1, \omega_2) &= L(\omega_1, \omega_2, \Theta_{01}, \Theta_{02}) = \\ &= \frac{q_0}{N_0(1+q_0)} \int_{\Theta_{01}}^{\Theta_{02}} y^2(t, \omega_1, \omega_2) dt - \\ &\quad - \frac{(\Theta_{02} - \Theta_{01})(\omega_2 - \omega_1)}{2\pi} \ln(1+q_0), \end{aligned} \quad (5)$$

где $q_0 = \gamma_0/N_0$; $y(t, \omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t') H(t-t') dt'$ — отклик фильтра с импульсной переходной функцией $H(t)$ на реализацию $x(t)$ (4), причем передаточная функция $h(\omega)$ фильтра удовлетворяет условиям $|h(\omega)|^2 = 1$ при $\omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_2$; $|h(\omega)|^2 = 0$ при $|\omega| < \omega_1$ или $|\omega| > \omega_2$. Тогда при известных моментах появления Θ_{01} и исчезновения Θ_{02} импульса (1) совместные оценки максимального правдоподобия (ОМП) ω_{im} , $i = 1, 2$, частотных параметров ω_{0i} определяются как координаты положения абсолютного максимума логарифма ФОР $L_0(\omega_1, \omega_2)$ (5) в области $\omega_1 \in [\Omega_{1\min}; \Omega_{1\max}]$, $\omega_2 \in [\Omega_{2\min}; \Omega_{2\max}]$ [8].

Одно из возможных решений задачи оценки частотных параметров импульса (1) при неизвестных моментах его появления и исчезновения — применение квазиправдоподобных оценок (КПО) [9]. Для получения КПО используются ожидаемые (предполагаемые) значения Θ_1^* и Θ_2^* моментов появления и исчезновения импульса. Следовательно, в отличие от ОМП квазиправдоподобные оценки ω_{iq} параметров ω_{0i} представляют собой координаты положения абсолютного максимума функционала $L^*(\omega_1, \omega_2) = L(\omega_1, \omega_2, \Theta_1^*, \Theta_2^*)$ при $\omega_1 \in [\Omega_{1\min}; \Omega_{1\max}]$, $\omega_2 \in [\Omega_{2\min}; \Omega_{2\max}]$ [9]. Здесь $\Theta_2^* > \Theta_1^*$ и в общем случае $\Theta_i^* \neq \Theta_{0i}$. В частном случае, когда $\Theta_i^* = \Theta_{0i}$, КПО ω_{iq} переходят в ОМП ω_{im} . Соответствующие КПО ν_q и Ω_q параметров ν_0 и Ω_0 нетрудно определить по формулам $\Omega_q = \omega_{2q} - \omega_{1q}$ и $\nu_q = (\omega_{2q} + \omega_{1q})/2$.

Найдем характеристики КПО частотных параметров случайного радиоимпульса. Принимая во внимание асимптотически (при $\mu_0 \rightarrow \infty$) гауссовский характер функционала $L^*(\omega_1, \omega_2)$ [3–5],

ограничимся рассмотрением первых двух его моментов. Представим функционал $L^*(\omega_1, \omega_2)$ в виде

$$L^*(\omega_1, \omega_2) = S^*(\omega_1, \omega_2) + N^*(\omega_1, \omega_2), \quad (6)$$

где $S^*(\omega_1, \omega_2) = \langle L^*(\omega_1, \omega_2) \rangle$ — сигнальная, а $N^*(\omega_1, \omega_2) = L^*(\omega_1, \omega_2) - \langle L^*(\omega_1, \omega_2) \rangle$ — шумовая функции, усреднение выполняется по реализациям наблюдаемых данных (4) при фиксированных ω_{0i} , Θ_{0i} [8]. Следуя [6, 7, 10], будем полагать, что ошибки оценивания частотных параметров сигнала (1) существенно больше величины $2\pi/\tau_0$. Это имеет место, когда выполняется условие (3) и величина q_0 не слишком велика. Тогда

$$\begin{aligned} S^*(\omega_1, \omega_2) &= \langle L^*(\omega_1, \omega_2) \rangle = \\ &= A_1^* C(\omega_1, \omega_1, \omega_{01}, \omega_2, \omega_2, \omega_{02})/\Omega_0 - \\ &\quad - A_2^*(\omega_2 - \omega_1)/\Omega_0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$A_1^* = \mu_0 q_0^2 C(\Theta_1^*, \Theta_1^*, \Theta_{01}, \Theta_2^*, \Theta_2^*, \Theta_{02})/\tau_0(1+q_0),$$

$$A_2^* = \mu_0 [\ln(1+q_0) - q_0/(1+q_0)](\Theta_2^* - \Theta_1^*)/\tau_0,$$

$$C(t_0, t_1, t_2, u_0, u_1, u_2) =$$

$$= \max[0; \min(u_0, u_1, u_2) - \max(t_0, t_1, t_2)],$$

а первые два момента шумовой функции $N^*(\omega_1, \omega_2)$ запишем в виде

$$\langle N^*(\omega_1, \omega_2) \rangle = 0,$$

$$B^*(\omega_{11}, \omega_{21}, \omega_{12}, \omega_{22}) =$$

$$= \langle N^*(\omega_{11}, \omega_{12}) N^*(\omega_{21}, \omega_{22}) \rangle =$$

$$= D_1^* C(\omega_{11}, \omega_{21}, \omega_{01}, \omega_{12}, \omega_{22}, \omega_{02})/\Omega_0 + \quad (8)$$

$$+ D_2^* C(\omega_{11}, \omega_{11}, \omega_{21}, \omega_{12}, \omega_{12}, \omega_{22})/\Omega_0,$$

$$D_1^* = \mu_0 q_0^3 (2 + q_0) \times$$

$$\times C(\Theta_1^*, \Theta_1^*, \Theta_{01}, \Theta_2^*, \Theta_2^*, \Theta_{02})/\tau_0(1+q_0)^2,$$

$$D_2^* = \mu_0 q_0^2 (\Theta_2^* - \Theta_1^*)/\tau_0(1+q_0)^2.$$

Отметим, что при $\Theta_1^* = \Theta_{01}$, $\Theta_2^* = \Theta_{02}$ функционал $L^*(\omega_1, \omega_2)$ переходит в логарифм ФОР $L_0(\omega_1, \omega_2)$ (5). Поэтому, полагая в (7), (8) $\Theta_i^* = \Theta_{0i}$, получаем как частный случай моменты функционала (5).

Из выражения (7) следует, что форма сигнальной функции $S^*(\omega_1, \omega_2)$ существенно зависит от соотношения между значениями Θ_i^* и Θ_{0i} , $i = 1, 2$. Нетрудно убедиться, что сигнальная функция (7) достигает наибольшего максимума при $\omega_i = \omega_{0i}$, только если

$$f(\Theta_1^*, \Theta_{01}, \Theta_2^*, \Theta_{02}) = A_1^* - A_2^* > 0. \quad (9)$$

При $\Theta_i^* = \Theta_{0i}$ условие (9) выполняется. Если условие (9) не выполняется, то сигнальная функция (7) достигает наибольшего максимума при $\omega_i = 0$ вне зависимости от истинных значений ω_{0i} параметров принимаемого сигнала, так что КПО не являются состоятельными при $\mu_0 \rightarrow \infty$ [8, 11]. Условие состоятельности (9) налагает ограничения на область допустимых значений моментов появления Θ_{01} и исчезновения Θ_{02} принимаемого сигнала (1) при фиксированных значениях Θ_1^* и Θ_2^* .

Область состоятельности КПО на плоскости параметров $\delta_1 = (\Theta_{01} - \Theta_1^*)/\tau_0$ и $\delta_2 = (\Theta_2^* - \Theta_{02})/\tau_0$ при различных значениях q_0 показана на рис. 1. Здесь сплошной линией показана зависимость, задаваемая уравнением $f(\Theta_1^*, \Theta_{01}, \Theta_2^*, \Theta_{02}) = 0$ с учетом условия $\Theta_2^* > \Theta_1^*$ и ограничивающая область состоятельности КПО при $q_0 = 2$, штриховой линией – при $q_0 = 1$, штрихпунктирной – при $q_0 = 0.5$. Пунктирной линией на рис. 1 показана предельная (при $q_0 \rightarrow 0$) граница области состоятельности. Если точка с координатами (δ_1, δ_2) лежит внутри области, ограниченной соответствующей кривой, то КПО являются состоятельными. Из рис. 1 следует, что с уменьшением q_0 область состоятельности КПО несколько сужается, однако остается симметричной относительно прямой $\delta_1 = \delta_2$.

Полагаем далее, что условие состоятельности (9) выполняется. Тогда моменты (7), (8) функционала $L^*(\omega_1, \omega_2)$ в малой окрестности точки максимума сигнальной функции, когда $\max(|\omega_1 - \omega_{01}|/\Omega_0, |\omega_2 - \omega_{02}|/\Omega_0) \leq \Delta$, $\Delta \rightarrow 0$, допускают аппроксимации:

$$\begin{aligned} S^*(\omega_1, \omega_2) + S^*(\omega_{01}, \omega_{02}) &= \\ &= S_1(\omega_1) + S_2(\omega_2) + o(\Delta), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} B^*(\omega_{11}, \omega_{21}, \omega_{12}, \omega_{22}) + B^*(\omega_{01}, \omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{02}) &= \\ &= B_1(\omega_{11}, \omega_{21}) + B_2(\omega_{12}, \omega_{22}) + o(\Delta), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} S_i(\omega_i) &= A_1^* C_{3-i}(\omega_{0i}, \omega_i, \omega_i) - \\ &- A_2^* |\omega_{0(3-i)} - \omega_i|/\Omega_0, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} B_i(\omega_{1i}, \omega_{2i}) &= D_1^* C_{3-i}(\omega_{0i}, \omega_{1i}, \omega_{2i}) + \\ &+ D_2^* C_{3-i}(\omega_{1i}, \omega_{1i}, \omega_{2i}), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} C_j(u_1, u_2, u_3) &= \min(|\omega_{0j} - u_1|, |\omega_{0j} - u_2|, |\omega_{0j} - u_3|)/\Omega_0, \\ j &= 1, 2. \end{aligned}$$

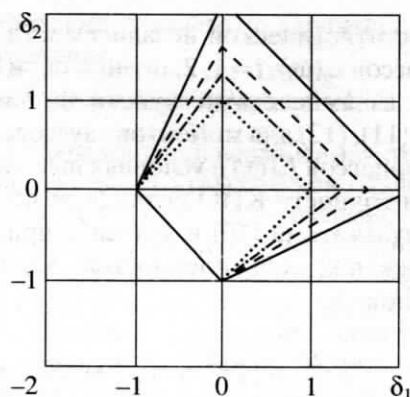


Рис. 1. Границы области состоятельности КПО.

Следовательно, при $\Delta \rightarrow 0$ и $\mu_0 \rightarrow \infty$ функционал $L^*(\omega_1, \omega_2)$ с учетом его асимптотически гауссовского характера можно представить как

$$L^*(\omega_1, \omega_2) + m^* \approx L_1(\omega_1) + L_2(\omega_2), \quad (13)$$

где m^* – гауссовская случайная величина с математическим ожиданием $S^*(\omega_{01}, \omega_{02})$ (7) и дисперсией $B^*(\omega_{01}, \omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{02})$ (8). Случайная величина m^* и функционал $L^*(\omega_1, \omega_2)$ статистически независимы, а $L_i(\omega_i)$ – взаимно статистически независимые гауссовские случайные процессы с математическими ожиданиями $S_i(\omega_i)$ (11) и корреляционными функциями $B_i(\omega_{1i}, \omega_{2i})$ (12). Таким образом, в малой окрестности точки $(\omega_{01}, \omega_{02})$ функционал $L^*(\omega_1, \omega_2)$ может быть представлен в виде (13), причем точность аппроксимации (13) возрастает с увеличением μ_0 (3) и с уменьшением Δ .

В соответствии с (7) при выполнении условия (9) сигнальная функция $S^*(\omega_1, \omega_2)$ достигает наибольшего максимума при $\omega_i = \omega_{0i}$, а реализации шумовой функции $N^*(\omega_1, \omega_2)$ непрерывны с вероятностью 1. Тогда выходное отношение сигнал/шум (ОСШ) для алгоритма КПО запишем в виде [8]

$$z^{*2} = \frac{S^{*2}(\omega_{01}, \omega_{02})}{\langle N^{*2}(\omega_{01}, \omega_{02}) \rangle} = \frac{(A_1^* - A_2^*)^2}{D_1^* + D_2^*}. \quad (14)$$

Следуя [6, 7], полагаем, что КПО имеют высокую апостериорную точность. Для этого необходимо, чтобы наряду с (3), (9) выполнялось условие $z^{*2} \gg 1$ [8]. Тогда КПО ω_{iq} будут лежать в малой окрестности значений ω_{0i} . Пусть величина z^{*2} (14) настолько велика, что для нахождения распределения КПО достаточно ограничиться анализом функционала $L^*(\omega_1, \omega_2)$ на интервалах $\omega_i \in [\omega_{0i} - \varepsilon_i, \omega_{0i} + \varepsilon_i]$, $i = 1, 2$, где величины ε_i настолько малы, что для функционала $L^*(\omega_1, \omega_2)$ справедлива аппроксимация (13). Тогда КПО ω_{iq} приближенно является координатой положения абсолютного максимума реализации случайного процесса $L_i(\omega_i)$ на интервале $[\omega_{0i} - \varepsilon_i, \omega_{0i} + \varepsilon_i]$, причем в силу

взаимной статистической независимости случайных процессов $L_i(\omega_i)$, $i = 1, 2$, оценки ω_{1q} и ω_{2q} приближенно взаимно статистически не зависимы. Формулы (11), (12) для моментов гауссовских случайных процессов $L_i(\omega_i)$ в условиях высокой апостериорной точности КПО позволяют воспользоваться результатами [10] и записать приближенные выражения для плотностей вероятности $W_i(\omega_i)$ оценок ω_{iq} :

$$W_i(\omega_i) = \frac{2}{\Omega_0} \begin{cases} z_{3-i}^2 W[2z_{3-i}^2(\omega_{0i} - \omega_i)/\Omega_0, R_i] & \text{при } -\infty < \omega_i < \omega_{0i}, \\ z_i^2 W[2z_i^2(\omega_i - \omega_{0i})/\Omega_0, R_{3-i}] & \text{при } \omega_{0i} \leq \omega_i < \infty, \end{cases} \quad (15)$$

$$W(x, u) = \Phi(\sqrt{|x|/2}) - 1 + \frac{2+u}{u} \exp\left(|x| \frac{1+u}{u^2}\right) \left[1 - \Phi\left(\sqrt{|x|/2} \left[\frac{2+u}{u}\right]\right)\right],$$

где

$$z_1^2 = (A_1^* - A_2^*)^2 / (D_1^* + D_2^*) = z^{*2}, \quad z_2^2 = A_2^{*2} / D_2^*, \quad (16)$$

$$R_1 \equiv R = A_2^* (D_1^* + D_2^*) / (A_1^* - A_2^*) D_2^*, \quad R_2 = 1/R,$$

$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt / \sqrt{2\pi}$ — интеграл вероятности; коэффициенты A_1^* , A_2^* , D_1^* , D_2^* определяются из (7), (8). Из выражений (15) следует существенно негауссовский характер распределений КПО даже при больших ОСШ (14). Используя (15), (16), находим выражения для нормированных смещений $b_{iq} = \langle \omega_{iq} - \omega_{0i} \rangle / \Omega_0$ и рассеяний $V_{iq} =$

$\langle (\omega_{iq} - \omega_{0i})^2 \rangle / \Omega_0^2$ КПО ω_{iq} минимальной и максимальной частот случайного радиоимпульса:

$$b_{iq} = (-1)^i [z_1^2(2R+1) - z_2^2 R(R+2)] / 2z_1^2 z_2^2 (R+1)^2, \\ V_{iq} = [z_1^4(5R^2 + 6R + 2) + z_2^4 R(2R^2 + 6R + 5)] / 2z_1^4 z_2^4 (R+1)^3. \quad (17)$$

Отметим, что оценки ω_{1q} , ω_{2q} и v_q , Ω_q связаны линейными соотношениями $v_q = (\omega_{1q} + \omega_{2q})/2$, $\Omega_q = \omega_{2q} - \omega_{1q}$. Кроме того, при выполнении (3), (9) и $z^{*2} \gg 1$ оценки ω_{1q} и ω_{2q} приближенно статистически независимы. Поэтому, используя (16), (17), нетрудно получить выражения для нормированных смещений и рассеяний КПО v_q и Ω_q центральной частоты и ширины полосы частот случайного радиоимпульса:

$$b_{vq} = \langle v_q - v_0 \rangle / \Omega_0 = (b_{1q} + b_{2q})/2 = 0, \\ b_{\Omega q} = \langle \Omega_q - \Omega_0 \rangle / \Omega_0 = b_{2q} - b_{1q} = -2b_{1q} = \\ = [z_1^2(2R+1) - z_2^2 R(R+2)] / [z_1 z_2 (R+1)]^2, \\ V_{vq} = \langle (v_q - v_0)^2 \rangle / \Omega_0^2 = (V_{1q} + V_{2q} + 2b_{1q} b_{2q})/4 = \\ = (V_{1q} - b_{1q}^2)/2 = 2\{z_1^4[(1+2R)^3 + 2(1+R)^3] + \\ + z_2^4 R[(2+R)^3 + 2(1+R)^3] + \\ + 2z_1^2 z_2^2 R(2+5R+2R^2)\} / [2z_1 z_2 (1+R)]^4, \\ V_{\Omega q} = \langle (\Omega_q - \Omega_0)^2 \rangle / \Omega_0^2 = V_{1q} + V_{2q} - 2b_{1q} b_{2q} = \\ = 2(V_{1q} + b_{1q}^2) = 8\{z_1^4[(1+2R)^2(3+2R) + \\ + 2(1+R)^3] + z_2^4 R[(2+R)^2(2+3R) + 2(1+R)^3] - \\ - 2z_1^2 z_2^2 R(2+5R+2R^2)\} / [2z_1 z_2 (1+R)]^4.$$

Согласно [10], формулы (15), (17), (18) для характеристик КПО частотных параметров справедливы при выполнении условий (3), (9) и $z^{*2} \gg 1$ (14). Точность этих формул возрастает с увеличением μ_0 (3) и z^{*2} (14).

Выражения (15)–(18) позволяют оценить влияние отклонений ожидаемых значений Θ_i^* неизвестных моментов появления и исчезновения радиосигнала (1) от их истинных значений Θ_{0i} на точность КПО. Для этого введем в рассмотрение отношения χ_Ω и χ_v рассеяний КПО v_q и Ω_q к соответствующим рассеяниям этих же оценок при $\Theta_i^* = \Theta_{0i}$. На рис. 2 показаны зависимости отношений χ_v (сплошные кривые) и χ_Ω (штриховые кривые) от величины $\delta = \delta_1 \equiv (\Theta_{01} - \Theta_1^*)/\tau_0$ при $q_0 = 1$ и $\delta_2 \equiv (\Theta_2^* - \Theta_{02})/\tau_0 = 0$ (кривая 1), $q_0 = 0.1$ и $\delta_2 = 0$ (кривая 2), $q_0 = 0.1$ и $\delta_2 = 0.2$ (кривая 3), $q_0 =$

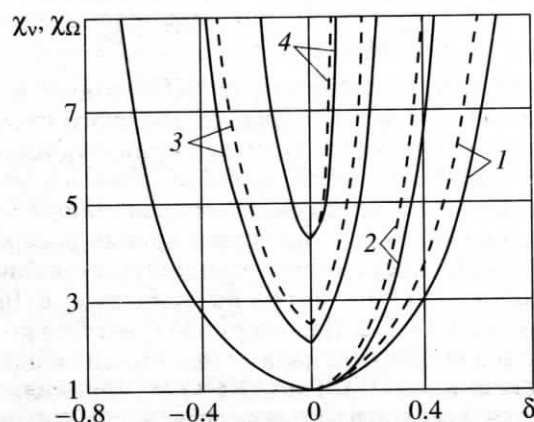


Рис. 2. Потери в точности КПО по сравнению с ОМП.

$= 0.1$ и $\delta_2 = -0.5$ (кривая 4). Такой же вид имеют зависимости χ_v и χ_Ω от величины $\delta = \delta_2$ при $q_0 = 1$ и $\delta_1 = 0$ (кривая 1), $q_0 = 0.1$ и $\delta_1 = 0$ (кривая 2), $q_0 = 0.1$ и $\delta_1 = 0.2$ (кривая 3), $q_0 = 0.1$ и $\delta_1 = -0.5$ (кривая 4). Из рис. 2 следует, что проигрыш в точности КПО v_q и Ω_q вследствие отклонений выбранных при синтезе значений Θ_i^* от Θ_{0i} возрастает с увеличением $|\delta_i|$, $i = 1, 2$, и может достигать значительных величин. При этом с уменьшением q_0 КПО оказываются более критичными к выбору ожидаемых значений Θ_1^* и Θ_2^* моментов появления и исчезновения сигнала (1).

2. ОЦЕНКИ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

Повысить точность оценок частотных параметров случайного радиоимпульса (1) можно, если одновременно с оценкой частотных параметров проводить оценку неизвестных моментов появления и исчезновения сигнала. В этом случае, согласно [8], ОМП ω_{ia} , $i = 1, 2$, параметров ω_{0i} определяются как координаты положения абсолютного максимума функционала

$$L_m(\omega_1, \omega_2) = \sup L(\omega_1, \omega_2, \Theta_1, \Theta_2), \quad (19)$$

$$\Theta_i \in [T_{i\min}; T_{i\max}], \quad i = 1, 2,$$

на интервалах $\omega_i \in [\Omega_{i\min}; \Omega_{i\max}]$, $i = 1, 2$. Здесь $L(\omega_1, \omega_2, \Theta_1, \Theta_2)$ – логарифм ФОП (5). Соответствующие ОМП v_a и Ω_a параметров v_0 и Ω_0 определяются как $\Omega_a = \omega_{2a} - \omega_{1a}$ и $v_a = (\omega_{2a} + \omega_{1a})/2$.

Найдем характеристики ОМП ω_{ia} , ω_{0i} , v_a и Ω_a . Для этого представим логарифм ФОП (5) в виде суммы $L(\omega_1, \omega_2, \Theta_1, \Theta_2) = S(\omega_1, \omega_2, \Theta_1, \Theta_2) + N(\omega_1, \omega_2, \Theta_1, \Theta_2)$ сигнальной $S(\omega_1, \omega_2, \Theta_1, \Theta_2) = \langle L(\omega_1, \omega_2, \Theta_1, \Theta_2) \rangle$ и шумовой $N(\omega_1, \omega_2, \Theta_1, \Theta_2) = L(\omega_1, \omega_2, \Theta_1, \Theta_2) - \langle L(\omega_1, \omega_2, \Theta_1, \Theta_2) \rangle$ функций [8]. Аналогично [10] и разд. 1 находим, что сигнальная функция $S(\omega_1, \omega_2, \Theta_1, \Theta_2)$ достигает наибольшего максимума при $\omega_i = \omega_{0i}$, $\Theta_i = \Theta_{0i}$, $i = 1, 2$, а реализации шумовой функции $N(\omega_1, \omega_2, \Theta_1, \Theta_2)$ непрерывны с вероятностью 1. При этом выходное ОСШ для алгоритма ОМП имеет вид [8]

$$z^2 = S^2(\omega_{01}, \omega_{02}, \Theta_{01}, \Theta_{02}) / \langle N^2(\omega_{01}, \omega_{02}, \Theta_{01}, \Theta_{02}) \rangle =$$

$$= \mu_0 [q_0 - \ln(1 + q_0)]^2 / q_0^2. \quad (20)$$

Полагаем, что наряду с условием (3) выполняется условие $z^2 \gg 1$, так что ОМП имеют высокую апостериорную точность [6–8]. Тогда для нахождения характеристик ОМП достаточно исследовать поведение логарифма ФОП $L(\omega_1, \omega_2, \Theta_1, \Theta_2)$ (5) в малой окрестности значений $\omega_i = \omega_{0i}$, $\Theta_i = \Theta_{0i}$. Вычисляя аналогично (10)–(12) и [10] моменты функционала $L(\omega_1, \omega_2, \Theta_1, \Theta_2)$, получаем, что при $\max(|\omega_i - \omega_{0i}|/\Omega_0, |\Theta_i - \Theta_{0i}|/\tau_0) \leq \Delta$, $i = 1, 2$, $\Delta \rightarrow 0$ и $\mu_0 \rightarrow \infty$ функционал $L(\omega_1, \omega_2, \Theta_1, \Theta_2)$ с учетом его

асимптотически гауссовского характера допускает представление

$$L(\omega_1, \omega_2, \Theta_1, \Theta_2) + m_0 = L_f(\omega_1, \omega_2) + L_t(\Theta_1, \Theta_2). \quad (21)$$

Здесь m_0 – статистически независимая от функционала $L(\omega_1, \omega_2, \Theta_1, \Theta_2)$ гауссовская случайная величина; $L_f(\omega_1, \omega_2)$ и $L_t(\Theta_1, \Theta_2)$ – взаимно статистически независимые гауссовские случайные процессы. Математическое ожидание (сигнальная составляющая) $S_f(\omega_1, \omega_2) = \langle L_f(\omega_1, \omega_2) \rangle$ и корреляционная функция шумовой составляющей $N_f(\omega_1, \omega_2) = L_f(\omega_1, \omega_2) - \langle L_f(\omega_1, \omega_2) \rangle$ случайного процесса $L_f(\omega_1, \omega_2)$ имеют следующий вид:

$$S_f(\omega_1, \omega_2) = A_1 C(\omega_1, \omega_1, \omega_{01}, \omega_2, \omega_2, \omega_{02}) / \Omega_0 -$$

$$- A_2 (\omega_2 - \omega_1) / \Omega_0, \quad (22)$$

$$A_1 = \mu_0 q_0^2 / (1 + q_0),$$

$$A_2 = \mu_0 [\ln(1 + q_0) - q_0 / (1 + q_0)],$$

$$B_f(\omega_{11}, \omega_{21}, \omega_{12}, \omega_{22}) = \langle N_f(\omega_{11}, \omega_{12}) N_f(\omega_{21}, \omega_{22}) \rangle =$$

$$= D_1 C(\omega_{11}, \omega_{21}, \omega_{01}, \omega_{12}, \omega_{22}, \omega_{02}) / \Omega_0 +$$

$$+ D_2 C(\omega_{11}, \omega_{11}, \omega_{21}, \omega_{12}, \omega_{12}, \omega_{22}) / \Omega_0, \quad (23)$$

$$D_1 = \mu_0 q_0^3 (2 + q_0) / (1 + q_0)^2, \quad D_2 = \mu_0 q_0^2 / (1 + q_0)^2,$$

где функция $C(t_0, t_1, t_2, u_0, u_1, u_2)$ определяется из (7). Тогда с учетом (21) получаем, что ОМП ω_{ia} , $i = 1, 2$, приближенно являются координатами положения абсолютного максимума функционала $L_f(\omega_1, \omega_2)$. Моменты (22), (23) случайного процесса $L_f(\omega_1, \omega_2)$ совпадают с соответствующими моментами (7), (8) асимптотически гауссовского случайного процесса $L^*(\omega_1, \omega_2) = L(\omega_1, \omega_2, \Theta_1^*, \Theta_2^*)$, если в (7), (8) полагать $\Theta_i^* = \Theta_{0i}$, $i = 1, 2$. Следовательно, в условиях высокой апостериорной точности характеристики ОМП ω_{ia} , v_a и Ω_a совпадают с характеристиками соответствующих КПО ω_{iq} , v_q и Ω_q при $\Theta_i^* = \Theta_{0i}$. Поэтому для нахождения условных смещений $b_{ia} = \langle \omega_{ia} - \omega_{0i} \rangle / \Omega_0$, $b_{va} = \langle v_a - v_0 \rangle / \Omega_0$, $b_{\Omega a} = \langle \Omega_a - \Omega_0 \rangle / \Omega_0$ и рассеяний $V_{ia} = \langle (\omega_{ia} - \omega_{0i})^2 \rangle / \Omega_0^2$, $V_{va} = \langle (v_a - v_0)^2 \rangle / \Omega_0^2$, $V_{\Omega a} = \langle (\Omega_a - \Omega_0)^2 \rangle / \Omega_0^2$ ОМП при выполнении условий (3) и $z^2 \gg 1$ можно воспользоваться формулами (18), где

$$z_1^2 = (A_1 - A_2)^2 / (D_1 + D_2) =$$

$$= \mu_0 [q_0 - \ln(1 + q_0)]^2 / q_0^2 = z^2,$$

$$z_2^2 = A_2^2 / D_2 = \mu_0 [q_0 - (1 + q_0) \ln(1 + q_0)]^2 / q_0^2, \quad (24)$$

$$R = A_2 (D_1 + D_2) / (A_1 - A_2) D_2 =$$

$$= [(1 + q_0) \ln(1 + q_0) - q_0] (1 + q_0) / [q_0 - \ln(1 + q_0)].$$

Отметим, что отношения χ_v и χ_Ω , зависимости которых от величин δ_2 и δ_1 показаны на рис. 2, совпадают с отношениями рассеяний КПО v_q, Ω_q к соответствующим рассеяниям ОМП v_a, Ω_a . Тем самым величины χ_v и χ_Ω характеризуют выигрыш в точности ОМП v_a, Ω_a по сравнению с КПО v_q, Ω_q при неизвестных моментах появления и исчезновения сигнала (1). Из рис. 2 следует, что выигрыш в точности ОМП может быть значительным. Однако аппаратная реализация ОМП является более сложной, чем аппаратная реализация КПО. Действительно, для получения КПО необходимо формировать случайное поле $L^*(\omega_1, \omega_2) = L(\omega_1, \omega_2, \Theta_1^*, \Theta_2^*)$ как функцию двух аргументов: ω_1 и ω_2 . В то же время для получения ОМП, согласно (19), необходимо формировать случайное поле $L(\omega_1, \omega_2, \Theta_1, \Theta_2)$ (5), зависящее от четырех аргументов. Последнее обстоятельство может привести к трудностям при аппаратной реализации ОМП.

Найденные асимптотически точные выражения для характеристик оценок частотных параметров случайного радиоимпульса (1) позволяют сделать обоснованный выбор между рассмотренными в работе алгоритмами оценок в зависимости от имеющейся априорной информации и от требований, предъявляемых к точности оценок и к степени простоты их аппаратной реализации.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Репин В.Г. // Пробл. передачи информ. 1991. Т. 27. № 1. С. 61.
2. Трифонов А.П., Захаров А.В. // РЭ. 1996. Т. 41. № 8. С. 972.
3. Ван-Трис, Гарри Л. Теория обнаружения, оценок и модуляции. М.: Сов. радио, 1977. Т. 3.
4. Бакут П.А., Большаков И.А., Герасимов Б.М. и др. Вопросы статистической теории радиолокации / Под ред. Тартаковского Г.П. М.: Сов. радио, 1963. Т. 1.
5. Трифонов А.П., Нечаев Е.П., Парфенов В.И. Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами. Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1991.
6. Трифонов А.П., Галун С.А. // РЭ. 1982. Т. 27. № 8. С. 1554.
7. Трифонов А.П. // РЭ. 1980. Т. 25. № 4. С. 749.
8. Куликов Е.И., Трифонов А.П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов радио, 1978.
9. Мудров В.И., Кушко В.Л. Методы обработки измерений: Квазиправдоподобные оценки. М.: Радио и связь, 1983.
10. Трифонов А.П., Захаров А.В. // РЭ. 1996. Т. 41. № 11. С. 1316.
11. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Радио и связь, 1989.
12. Трифонов А.П., Шинаков Ю.С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986.
13. Шинаков Ю.С. // РЭ. 1974. Т. 19. № 3. С. 542.