

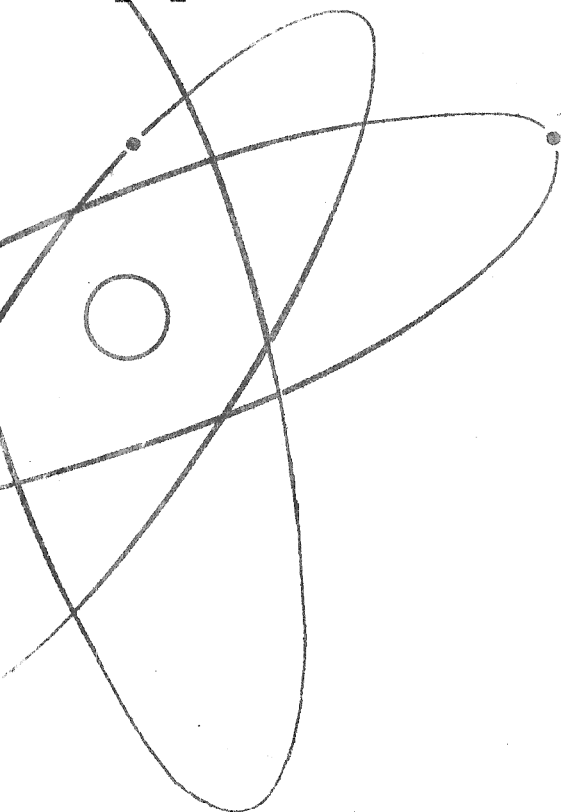
б- 6264/999/42/1-2

ISSN 0021-3470



ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ
ЗАВЕДЕНИЙ

РАДИОЭЛЕКТРОНИКА



ТОМ 42
1-2

ИЗДАНИЕ
НАЦИОНАЛЬНОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
УКРАИНЫ
«КИЕВСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ»

1999

ОЦЕНКА ДИСПЕРСИИ СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНОЙ ПОЛОСОЙ ЧАСТОТ

Выполнен синтез и анализ алгоритма совместной оценки максимального правдоподобия дисперсии и полосы частот случайного сигнала. Приведены результаты статистического моделирования совместной оценки.

В [1] получена структура и найдены характеристики адаптивного максимально-правдоподобного измерителя дисперсии случайного сигнала с прямоугольной формой спектра мощности. При этом предполагалось, что полоса частот анализируемого случайного сигнала априори точно известна. Однако при практической реализации алгоритмов обработки случайных сигналов в радиоэлектронных системах полоса частот сигнала часто бывает известна не точно. Поэтому рассмотрим возможность адаптивного измерения дисперсии случайного сигнала с априори неизвестной полосы частот. Аналогично [1] полагаем, что в течение времени $[0; T]$ обработке доступна реализации наблюдаемых данных вида

$$x(t) = s(t) + v(t) + n(t), \quad (1)$$

здесь $v(t)$ — широкополосная гауссовская стационарная помеха с постоянной в полосе частот $[-\omega_m/2; \omega_m/2]$ и априори неизвестной односторонней спектральной плотностью γ_0 , ω_m — полоса пропускания преселектора радиоэлектронной системы [1], на выходе которой необходимо измерить дисперсию D_0 гауссовского стационарного случайного сигнала $s(t)$; $n(t)$ — гауссовский белый шум с односторонней спектральной плотностью N_0 , который описывает собственные шумы элементов радиоэлектронной системы, включенных после преселектора. Следуя [1], прямоугольный спектр мощности центрированного сигнала $s(t)$ запишем как $G_s(\omega) = 2\pi D_0 I(\omega/\Omega_0)/\Omega_0$, где $I(x) = 1$ при $|x| < 1/2$ и $I(x) = 0$ при $|x| > 1/2$, а Ω_0 — априори неизвестная полоса частот анализируемого случайного сигнала, причем $\Omega_0 < \omega_m$.

Рассмотрим, как влияет априорное незнание полосы частот сигнала Ω_0 на точность оценки дисперсии

$$\hat{D} = \frac{1}{T(k-1)} \left[k \int_0^T y_2^2(t) dt - \int_0^T y_1^2(t) dt \right], \quad (2)$$

синтезированной в [1]. В (2) $y_i(t)$ — отклики фильтров с передаточными функциями $H_i(\omega)$ ($i = 1, 2$) на реализацию наблюдаемых данных (1). Передаточные функции фильтров $H_i(\omega)$ удовлетворяют соотношениям:

$$|H_1(\omega)|^2 = I(\omega / \omega_m), |H_2(\omega)|^2 = I(\omega / \Omega^*), k = \omega_m / \Omega^*,$$

а Ω^* — ожидаемое (предполагаемое) значение полосы частот случайного сигнала, причем в общем случае $\Omega^* \neq \Omega_0$ и $\Omega^* < \omega_m$. Отметим, что структура алгоритма оценки (2) инвариантна к спектральным плотностям помехи γ_0 и белого шума N_0 .

Подставляя в (2) реализацию наблюдаемых данных (1) и выполняя усреднение при фиксированных значениях D_0 и Ω_0 , получаем для условных смещения (систематической ошибки) и рассеяния (среднего квадрата ошибки) оценки (2) выражения:

$$b(\hat{D} | D_0, \delta \Omega) = \langle \hat{D} - D_0 \rangle = D_0 k_0 \min(\delta \Omega, 0) / (k_0 - \delta \Omega - 1), \quad (3)$$

$$V(\hat{D} | D_0, \delta \Omega) = \langle (\hat{D} - D_0)^2 \rangle = b^2(\hat{D} | D_0, \delta \Omega) + \\ + D_0^2 \{ k_0(k_0 - 2\delta \Omega - 2)[(1 + 2q) \min(\delta \Omega, 0) + (1 + q)^2 + \\ + \delta \Omega q^2] + (\delta \Omega + 1)^2(1 + 2q + k_0 q^2) \} / \mu [k_0 - \delta \Omega - 1]^2. \quad (4)$$

Здесь $\mu = T \Omega_0 / 4 \pi$, $k_0 = \omega_m / \Omega_0$, $q = (\gamma_0 + N_0) \Omega_0 / 4 \pi D_0$ — отношение суммарной средней мощности помехи и белого шума в полосе частот случайного сигнала к средней мощности самого сигнала, $\delta \Omega = (\Omega^* - \Omega_0) / \Omega_0$.

Проигрыш в точности оценки дисперсии вследствие неточного знания полосы частот случайного сигнала будем характеризовать отношением $\chi = V(\hat{D} | D_0, \delta \Omega) / V(\hat{D} | D_0)$, где $V(\hat{D} | D_0) = V(\hat{D} | D_0, \delta \Omega = 0)$ — рассеяние оценки дисперсии при априори точно известном значении полосы частот случайного сигнала [1]. Зависимость $\chi(\delta \Omega)$ для $\mu = 100$ и различных значений q приведена на рис. 1 (для $k_0 = 2$) и рис. 2 (для $k_0 = 5$). Кривые 1 рассчитаны для $q = 0, 1, 2$ — 0,5, 3 — 1. Как следует из рис. 1, 2, априорное незнание полосы частот случайного сигнала может привести к значительному снижению точности оценки дисперсии (2). Однако проигрыш в точности оценки убывает с ростом параметров q и k_0 . Отметим, что для не слишком больших значений $|\delta \Omega|$ проигрыш существенно меньше при $\delta \Omega > 0$, чем при $\delta \Omega < 0$. Следовательно, если неизвестно точное значение полосы частот сигнала Ω_0 , то полосе

пропускания Ω^* фильтра $H_2(\omega)$ измерителя (2) следует выбирать несколько большей, чем ожидаемые значения полосы частот сигнала. При этом, если полоса пропускания фильтра превышает полосу частот сигнала не более чем на 10...15%, то проигрыш в точности оценки дисперсии относительно мал — менее 3 дБ. Если же полоса частот сигнала априори известна с погрешностью более 10...15%, то проигрыш в точности оценки может быть значительным, достигая значений 10...15 дБ.

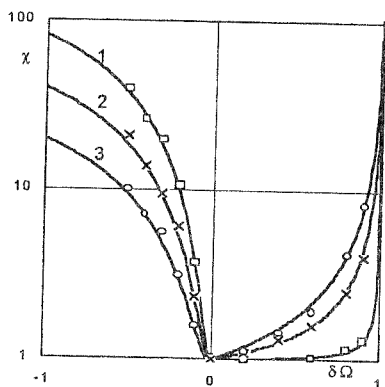


Рис. 1

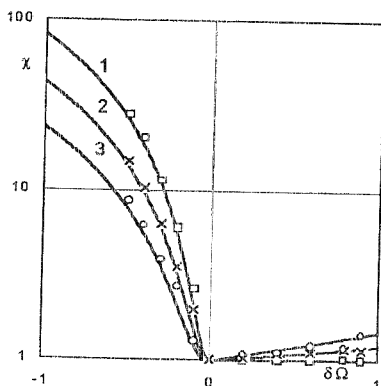


Рис. 2

Для устранения проигрыша в точности оценки дисперсии сигнала вследствие незнания его полосы частот целесообразно использовать приемное устройство, реализующее совместные оценки дисперсии случайного сигнала и его полосы частот. Для синтеза такого устройства, адаптирующегося к широкополосной помехе с неизвестной мощностью и к неизвестной полосе частот сигнала, используем метод максимального правдоподобия [2, 3]. Аналогично [1] введем в рассмотрение три вспомогательные гипотезы H_i , $i = 0, 1, 2$. Гипотеза H_2 предполагает, что реализация наблюдаемых данных имеет вид (1). Гипотеза H_1 предполагает, что анализируемый случайный сигнал отсутствует, так что $x(t) = v(t) + n(t)$. Наконец, гипотеза H_0 предполагает, что наблюдается только белый шум и $x(t) = n(t)$. Обозначим $F_2(D, \Omega, \gamma)$ — логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОР) для гипотезы H_2 при альтернативе H_0 и $F_1(\gamma)$ — логарифм ФОР для гипотезы H_1 при альтернативе H_0 . Тогда оценки максимального правдоподобия (ОМП) дисперсии \tilde{D} и полосы частот $\tilde{\Omega}$ случай-

ного сигнала $s(t)$ при наличии помехи с неизвестной спектральной плотностью γ_0 можно записать в виде

$$(\tilde{D}, \tilde{\Omega}) = \arg \sup L(D, \Omega), \Omega \in [\Omega_{\min}; \Omega_{\max}], \quad (5)$$

$$L(D, \Omega) = \sup_{\gamma} F_2(D, \Omega, \gamma) - \sup_{\gamma} F_1(\gamma). \quad (6)$$

Здесь $[\Omega_{\min}; \Omega_{\max}]$ — априорный интервал возможных значений неизвестной полосы частот случайного сигнала и $\Omega_{\max} < \omega_m$. Введение вспомогательных гипотез $H_i, i=0, 1, 2$ позволяет избежать существенных математических трудностей при получении логарифма ФОП. В результате, полагая $\mu \gg 1$ и используя [2, 4], имеем

$$F_2(D, \Omega, \gamma) = \frac{T(\gamma + d)}{\pi N_0(\gamma + d + N_0)} \int_0^{\Omega/2} S_T(\omega) d\omega + \frac{T\gamma}{\pi N_0(\gamma + N_0)} \int_{\Omega/2}^{\omega_m/2} S_T(\omega) d\omega - \frac{T}{4\pi} \left[\Omega \ln \left(1 + \frac{\gamma + d}{N_0} \right) + (\omega_m - \Omega) \ln \left(1 + \frac{\gamma}{N_0} \right) \right], \quad (7)$$

$$F_1(\gamma) = F_2(0, 0, \gamma), \quad (8)$$

$d = 4\pi D / \Omega, S_T(\omega) = \left| \int_0^T x(t) \exp(-j\omega t) dt \right|^2 / T$ — периодограмма реализации наблюдаемых данных. Подставляя (7), (8) в (5), (6), необходим ОМП дисперсии и полосы частот случайного сигнала

$$\tilde{D} = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\tilde{\Omega}/2} S_T(\omega) d\omega - \frac{1}{\omega_m / \tilde{\Omega} - 1} \int_{\tilde{\Omega}/2}^{\omega_m/2} S_T(\omega) d\omega \right], \quad (9)$$

$$\tilde{\Omega} = \arg \sup M(\Omega), \Omega \in [\Omega_{\min}; \Omega_{\max}], \quad (10)$$

$$M(\Omega) = \frac{T\omega_m}{4\pi} \ln \left[\frac{(\omega_m - \Omega) \int_0^{\omega_m/2} S_T(\omega) d\omega}{\omega_m \int_{\Omega/2}^{\omega_m/2} S_T(\omega) d\omega} \right] + \frac{T\Omega}{4\pi} \ln \left[\frac{\Omega \int_{\Omega/2}^{\omega_m/2} S_T(\omega) d\omega}{(\omega_m - \Omega) \int_0^{\Omega/2} S_T(\omega) d\omega} \right]. \quad (11)$$

Получим характеристики оценок дисперсии (9) и полосы частот (10) случайного сигнала. Для этого представим (11) в виде

$$M(\Omega) = \frac{T \omega_m}{4 \pi} \ln \left[\frac{L_1(\omega_m)}{L_2(\Omega)} \right] + \frac{T \Omega}{4 \pi} \ln \left[\frac{L_2(\Omega)}{L_1(\Omega)} \right], \quad (12)$$

где

$$L_1(\Omega) = \frac{4}{\Omega(\gamma_0 + N_0)} \int_0^{\Omega/2} S_T(\omega) d\omega, \quad (13)$$

$$L_2(\Omega) = \frac{4}{(\omega_m - \Omega)(\gamma_0 + N_0)} \int_{\Omega/2}^{\omega_m/2} S_T(\omega) d\omega. \quad (14)$$

Функцию $L_1(\Omega)$ представим в виде суммы сигнальной и нормированной шумовой функции [2]: $L_1(\Omega) = S_1(\Omega) + \varepsilon N_1(\Omega)$, $\varepsilon = 1/\sqrt{\mu}$, $S_1(\Omega) = 1 + \min(\Omega, \Omega_0)/q\Omega$, $N_1(\Omega) = \sqrt{\mu}[L_1(\Omega) - S_1(\Omega)]$. Нормированная шумовая функция $N_1(\Omega)$ обладает нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$\langle N_1(\Omega_1) N_1(\Omega_2) \rangle = \frac{\Omega_0}{q^2 \Omega_1 \Omega_2} [(1 + 2q) \min(\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2) + q^2 \min(\Omega_1, \Omega_2)].$$

Причем дисперсия шумовой функции $\langle N_1^2(\Omega_0) \rangle = (1 + 1/q)^2$ и ограничена при любых значениях $q > 0$ и $\mu \rightarrow \infty$.

Аналогично функцию $L_2(\Omega)$ представим в виде суммы сигнальной и нормированной шумовой функции: $L_2(\Omega) = S_2(\Omega) + \varepsilon N_2(\Omega)$, $S_2(\Omega) = 1 + \max(\Omega_0 - \Omega, 0)/q(\omega_m - \Omega)$, $N_2(\Omega) = \sqrt{\mu}[L_2(\Omega) - S_2(\Omega)]$. Нормированная шумовая функция $N_2(\Omega)$ обладает нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$\begin{aligned} \langle N_2(\Omega_1) N_2(\Omega_2) \rangle = & \frac{\Omega_0}{q^2 (\omega_m - \Omega_1) (\omega_m - \Omega_2)} \{ (1 + 2q) [\max(\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2) - \\ & - \max(\Omega_1, \Omega_2)] + q^2 \min(\omega_m - \Omega_1, \omega_m - \Omega_2) \}. \end{aligned}$$

Причем дисперсия шумовой функции $\langle N_2^2(\Omega_0) \rangle = (k_0 - 1)^{-1}$ и ограничена при любых значениях $k_0 > 1$ и $\mu \rightarrow \infty$.

Подставив полученные выражения в (12), получим $M(\Omega)$ как функцию параметра ε :

$$M(\Omega) = -\frac{T\Omega}{4\pi} \ln [S_1(\Omega) + \varepsilon N_1(\Omega)] - \frac{T(\omega_m - \Omega)}{4\pi} \ln [S_2(\Omega) + \varepsilon N_2(\Omega)] + \\ + \frac{T\omega_m}{4\pi} \ln [S_1(\omega_m) + \varepsilon N_1(\omega_m)]. \quad (15)$$

Полагая $\mu \gg 1$ ($\varepsilon \ll 1$), разложим (15) в ряд Маклорена по ε до первого члена разложения, зависящего от реализации наблюдаемых данных включительно и отбросим слагаемые, не зависящие от оцениваемого параметра Ω . Тогда (12) можно представить в виде

$$M(\Omega) = \hat{S}(\Omega) + \hat{N}(\Omega), \quad (16)$$

$$\hat{S}(\Omega) = -\mu \left\{ \frac{\Omega}{\Omega_0} \ln S_1(\Omega) + \left(k_0 - \frac{\Omega}{\Omega_0} \right) \ln S_2(\Omega) \right\}, \quad (17)$$

$$\hat{N}(\Omega) = -\sqrt{\mu} \left\{ \frac{\Omega}{\Omega_0} \frac{N_1(\Omega)}{S_1(\Omega)} + \left(k_0 - \frac{\Omega}{\Omega_0} \right) \frac{N_2(\Omega)}{S_2(\Omega)} \right\}.$$

Согласно (17) сигнальная функция $\hat{S}(\Omega)$ достигает наибольшего максимума, когда $\Omega = \Omega_0$. Следовательно, выходное отношение сигнал/шум можем записать как [2]: $z^2 = \hat{S}^2(\Omega_0) / \langle \hat{N}^2(\Omega_0) \rangle = \mu \ln^2(1 + 1/q) / k_0$. В дальнейшем полагаем, что $\mu \gg 1$ и $z \gg 1$, так что оценки (9) и (10) обладают высокой апостериорной точностью. В этом случае, аналогично [3, 5], достаточно исследовать поведение случайного процесса (11) в малой окрестности точки Ω_0 . С увеличением μ процесс (11) в малой окрестности Ω_0 может быть аппроксимирован марковским гауссовским процессом. Применяя затем метод локально-марковской аппроксимации [3], аналогично [5], находим выражения для условных смещения и рассеяния оценки полосы частот (10)

$$b_1(\tilde{\Omega} | \Omega_0) = \langle \tilde{\Omega} - \Omega_0 \rangle = \\ = \frac{2\pi}{Tq^2} \{ (1+q)^2 \Gamma_1^3 (2\Gamma_2 - \Gamma_1) - q^2 (\Gamma_2 - \Gamma_1)^3 (\Gamma_2 + \Gamma_1) \} \Gamma_1^{-2} \Gamma_2^{-2} (\Gamma_2 - \Gamma_1)^{-2}, \quad (18)$$

$$V_1(\tilde{\Omega} | \Omega_0) = \langle (\tilde{\Omega} - \Omega_0)^2 \rangle = \\ = \frac{8\pi^2}{T^2 q^4} \{ (1+q)^4 \Gamma_1^4 [2\Gamma_2^3 - (\Gamma_2 - \Gamma_1)^2 (2\Gamma_2 - \Gamma_1)] + q^4 (\Gamma_2 - \Gamma_1)^4 \times$$

$$\times [2 \Gamma_2^3 - \Gamma_1^2 (\Gamma_2 + \Gamma_1)] \Gamma_1^{-4} \Gamma_2^{-3} (\Gamma_2 - \Gamma_1)^{-4}, \quad (19)$$

где $\Gamma_1 = 1 - q \ln(1 + 1/q)$, $\Gamma_2 = \{(1 + 2/q) \ln(1 + 1/q) - 1\}/q$. В случае отсутствия широкополосной помехи $v(t)$ параметр $q = N_0 \Omega_0 / 4 \pi D_0$ и выражения (18), (19) совпадают с аналогичными выражениями для условных смещения и рассеяния оценки полосы частот, найденными в [5]. Отметим также, что полученные выражения не зависят от истинного значения Ω_0 полосы частот случайного сигнала. Следовательно, условные смещение и рассеяние ОМП $\tilde{\Omega}$, когда $\Omega_0 \in (\Omega_{\min}; \Omega_{\max})$, асимптотически (при $\mu \rightarrow \infty$) совпадают с соответствующими безусловными характеристиками.

При конечном интервале $(\Omega_{\min}; \Omega_{\max})$ значений параметра Ω_0 рассеяние ОМП полосы частот должно быть ограничено, а теоретическое значение рассеяния (19) с увеличением q неограниченно возрастает. Уточним зависимости (18), (19) в области больших значений q . Для $\mu \gg 1$ с увеличением q процесс $M(\Omega)$ (16) является асимптотически винеровским. В [3] получено распределение положения наибольшего максимума винеровского процесса на конечном интервале. Используя результаты [3], находим, что при $\mu/q^2 \ll 1$ смещение и рассеяние оценки ОМП полосы частот определяются выражениями

$$b_0(\tilde{\Omega} | \Omega_0) = (\Omega_{\min} + \Omega_{\max})/2 - \Omega_0, \\ V_0(\tilde{\Omega} | \Omega_0) = b_0^2(\tilde{\Omega} | \Omega_0) + (\Omega_{\max} - \Omega_{\min})^2/8.$$

Таким образом, результирующее выражение для условного рассеяния оценки полосы частот может быть записано в виде

$$V(\tilde{\Omega} | \Omega_0) = \min [V_0(\tilde{\Omega} | \Omega_0), V_1(\tilde{\Omega} | \Omega_0)], \Omega_0 \in (\Omega_{\min}; \Omega_{\max}).$$

Зададим границы априорного интервала полосы частот случайного сигнала как $\Omega_{\min} = \omega_m \eta$, $\Omega_{\max} = \omega_m (1 - \eta)$, $\eta < 0,5$. На рис. 3 приведены зависимости нормированного рассеяния $\rho_1 = V(\tilde{\Omega} | \Omega_0) / \Omega_0^2$ от параметра q для различных значений параметров η и для $\Omega_0 = (\Omega_{\min} + \Omega_{\max})/2$. Кривые 1 построены для $\eta = 0,1$; 2 - 0,2; 3 - 0,3; 4 - 0,4. Для всех кривых $\mu = 100$, $k_0 = 2$.

Рассмотрим теперь характеристики оценки дисперсии (9). Полагаем вначале, что величина параметра Ω_0 априори известна. Тогда в (9) следует полагать $\tilde{\Omega} = \Omega_0$. При этом характеристики оценки \tilde{D} определяются выражениями (3), (4) при $\delta \Omega = 0$. Считаем теперь, что величина параметра Ω_0 не известна. Из (4) следует, что при $\tilde{\Omega} = \Omega_0$ и $\mu \gg 1$ рассеяние оценки (9) имеет порядок малости

μ^{-1} . В то же время, при не слишком больших q рассеяние оценки (10) имеет порядок малости μ^{-2} . Отсюда, аналогично [6], получаем, что характеристики оценки (9) при $\mu \rightarrow \infty$ асимптотически совпадают с характеристиками оценки (2), найденными при известном Ω_0 . Следовательно, графики на рис. 1, 2 характеризуют выигрыш в точности совместной оценки дисперсии и полосы частот (9) и (10) по сравнению с оценкой дисперсии случайного сигнала (2) при $\Omega^* \neq \Omega_0$.

Для проверки работоспособности рассмотренных алгоритмов оценки дисперсии (2), (9) было проведено статистическое моделирование. Моделирование проводилось в частотной области и полагалось, что реализация наблюдаемых данных $x(t)$ доступна обработке в течение интервала наблюдения $[-T/2; T/2]$. Для формирования функций (13), (14), (15) на ЭВМ перейдем к нормированному аргументу $\tilde{\omega} = \omega / \Omega_{\max}$. Тогда

$$M(\alpha) = \mu k_0 \ln \left[\frac{L_1(k_0 \alpha_0)}{L_2(\alpha)} \right] + \frac{\mu \alpha}{\alpha_0} \ln \left[\frac{L_2(\alpha)}{L_1(\alpha)} \right], \quad (20)$$

$$L_1(\alpha) = \frac{\mu}{\alpha q} \int_0^{\alpha/2} |\tilde{X}(\tilde{\omega})|^2 d\tilde{\omega}, \quad (21)$$

$$L_2(\alpha) = \frac{\mu}{(k_0 \alpha_0 - \alpha) q} \int_{\alpha/2}^{k_0 \alpha_0/2} |\tilde{X}(\tilde{\omega})|^2 d\tilde{\omega}, \quad (22)$$

где $\tilde{X}(\tilde{\omega}) = 2 X(\tilde{\omega} \Omega_{\max}) / T \sqrt{D_0}$, $X(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp(-j \omega t) dt$ — спектр реализации $x(t)$, $\alpha = \Omega / \Omega_{\max}$, $\alpha_0 = \Omega_0 / \Omega_{\max}$. Соответственно алгоритм оценки полосы частот (10) может быть представлен как

$$\hat{\alpha} = \operatorname{argsup} M(\alpha), \quad \alpha \in [\eta / (1 - \eta); 1]. \quad (23)$$

Положим $\Omega_0 = (\Omega_{\min} + \Omega_{\max}) / 2$, тогда при заданном значении η нормированная полоса частот $\alpha_0 = 1 / 2 (1 - \eta)$, а $k_0 = 2$. Для моделирования алгоритмов оценки необходимо формировать реализации случайного процесса $\tilde{X}(\tilde{\omega})$ и на их основе вырабатывать функции (20), (21) и (22).

В процессе моделирования вырабатывались отсчеты случайного процесса $\tilde{X}(\tilde{\omega})$ с шагом $\Delta \tilde{\omega}$. На основе сформированных дискретных последовательностей непрерывные реализации этого процесса аппроксимировались ступенчатой

функцией. Относительная среднеквадратичная погрешность аппроксимации определялась по формуле

$$\delta_X = \left\{ \max_{\tilde{\omega} \in \left(\tilde{\omega}^* - \frac{\Delta \tilde{\omega}}{2}; \tilde{\omega}^* + \frac{\Delta \tilde{\omega}}{2} \right)} < |\tilde{X}(\tilde{\omega}^*) - \tilde{X}(\tilde{\omega})|^2 > \sigma_X^{-2} \right\}^{1/2} = \left\{ 2 [1 - R_X(\Delta \tilde{\omega} / 2)] \right\}^{1/2}. \quad (24)$$

Здесь $\tilde{\omega}^*$ — одна из точек, в которых формировались отсчеты процесса $\tilde{X}(\tilde{\omega})$, σ_X^2 — его дисперсия, а $R_X(\tilde{\omega})$ — коэффициент корреляции. В случае отсутствия сигнала $s(t)$ и широкополосной помехи $v(t)$ случайный процесс $\tilde{X}(\tilde{\omega})$ является стационарным и обладает коэффициентом корреляции $R_X(\tilde{\omega}) = \sin(2\pi\mu\tilde{\omega}/\alpha_0) / (2\pi\mu\tilde{\omega}/\alpha_0)$. Тогда при шаге $\Delta\tilde{\omega} = 0,1\alpha_0/\mu$ из (24) для среднеквадратичной погрешности аппроксимации имеем $\delta_X < 0,2$.

Рассмотрим формирование дискретных отсчетов случайного процесса $\tilde{X}(\tilde{\omega})$. Для этого представим $\tilde{X}(\tilde{\omega})$ как $\tilde{X}(\tilde{\omega}) = \tilde{X}_c(\tilde{\omega}) + j\tilde{X}_s(\tilde{\omega})$, где $\tilde{X}_c(\tilde{\omega}) = \text{Re } \tilde{X}(\tilde{\omega})$, а $\tilde{X}_s(\tilde{\omega}) = \text{Im } \tilde{X}(\tilde{\omega})$. При достаточно большом времени наблюдения ($\mu \gg 1$) справедливо представление

$$\tilde{X}_{c,s}(\tilde{\omega}) = \sqrt{\frac{\Omega_{\max}}{2\pi D_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{G_X(\tilde{\omega}' \Omega_{\max})} h(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') [\eta_1(\tilde{\omega}') \pm \eta_2(\tilde{\omega}')] d\tilde{\omega}', \quad (25)$$

где

$$G_X(\tilde{\omega} \Omega_{\max}) = 2\pi D_0 I(\tilde{\omega} / \alpha_0) / \Omega_0 + \gamma_0 I(\tilde{\omega} / k_0 \alpha_0) / 2 + N_0 / 2$$

— спектральная плотность случайного сигнала

$$x(t) (1), h(\tilde{\omega}) = \sin(2\pi\mu\tilde{\omega} / \alpha_0) / [2\pi\mu\tilde{\omega} / \alpha_0],$$

а $\eta_1(\tilde{\omega})$ и $\eta_2(\tilde{\omega})$ — независимые гауссовские случайные процессы с ненулевыми математическими ожиданиями и одинаковыми корреляционными функциями $\langle \eta_i(\tilde{\omega}_1) \eta_i(\tilde{\omega}_2) \rangle = \delta(\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2)$ ($i = 1, 2$). При достаточно малом шаге $\Delta\tilde{\omega}$ можно записать:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{c,s}(\tilde{\omega}_k) \approx & \sqrt{\frac{\Omega_{\max}}{2\pi D_0}} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sqrt{G_X(\tilde{\omega}_i \Omega_{\max})} h(\tilde{\omega}_k - \tilde{\omega}_i) \times \\ & \times \int_{\tilde{\omega}_i - \Delta\tilde{\omega}/2}^{\tilde{\omega}_i + \Delta\tilde{\omega}/2} [\eta_1(\tilde{\omega}') \pm \eta_2(\tilde{\omega}')] d\tilde{\omega}', \end{aligned} \quad (26)$$

где $\tilde{\omega}_k = k \Delta \tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}_i = i \Delta \tilde{\omega}$. Обозначим:

$$v_i = \frac{\tilde{\omega}_i + \Delta \tilde{\omega} / 2}{\tilde{\omega}_i - \Delta \tilde{\omega} / 2} \int \eta(\tilde{\omega}') d\tilde{\omega}'$$

— независимые гауссовские случайные величины с ненулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями $\langle v_i^2 \rangle = \Delta \tilde{\omega}$. Тогда $v_i = x_i \sqrt{\Delta \tilde{\omega}}$, где x_i — независимые гауссовские случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями. Заменяя в (26) бесконечные пределы суммирования на конечные, получаем:

$$\tilde{X}_{c,s}(\tilde{\omega}_k) \approx \sqrt{\Delta \tilde{\omega} / \alpha_0} \sum_{i=-p}^p \sqrt{q + I[(k-i) \Delta \tilde{\omega} / \alpha_0]} h(\tilde{\omega}_i) (x_{k-i} \pm \hat{x}_{k-i}), \quad (27)$$

где \hat{x}_i — независимые гауссовские случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями. При выбранном шаге дискретизации число слагаемых в (27) определялось таким образом, чтобы при отсутствии сигнала $s(t)$ и широкополосной помехи $v(t)$ относительное отклонение дисперсии сформированного отсчета $\langle \tilde{X}_{c,s}^2(\tilde{\omega}_k) \rangle$ от дисперсии самого процесса $\sigma^2 = \langle \tilde{X}_{c,s}^2(\tilde{\omega}) \rangle$ не превышало заданную величину, то есть $|1 - \sigma^{-2} \langle \tilde{X}_{c,s}^2(\tilde{\omega}_k) \rangle| < \epsilon$. Для обеспечения величины $\epsilon = 0,02$ необходимо положить $p = 2 \alpha_0 / \mu \Delta \tilde{\omega}$.

По сформированным согласно (27) ступенчатым аппроксимациям процессов (25) вычислялись аппроксимации интегралов (21), (22)

$$L_1(\alpha) = [\mu \Delta \tilde{\omega} / \alpha q] \sum_{k=1}^N [\tilde{X}_c^2(\tilde{\omega}_k) + \tilde{X}_s^2(\tilde{\omega}_k)], \quad (28)$$

$$L_2(\alpha) = [\mu \Delta \tilde{\omega} / (k_0 \alpha_0 - \alpha) q] \sum_{k=N+1}^M [\tilde{X}_c^2(\tilde{\omega}_k) + \tilde{X}_s^2(\tilde{\omega}_k)], \quad (29)$$

где $N = \text{int}(\alpha / 2 \Delta \tilde{\omega})$, $M = \text{int}(k_0 \alpha_0 / 2 \Delta \tilde{\omega})$, а $\text{int}(\cdot)$ — целая часть числа. В результате подстановки аппроксимаций (28), (29) интегралов (21), (22) в (20) формировался логарифм ФОП. Затем, согласно (23) определялось ОМП α нормированной полосы частот сигнала и вычислялись значения оценок дисперсии (2) и (9). Для каждой сформированной в процессе моделирования реализации (28), (29) интегралов (21), (22) оценки дисперсии вычислялись по формулам

$$\hat{D} = D_0 (\delta \Omega + 1) q [L_1 [\alpha_0 (\delta \Omega + 1)] - L_2 [\alpha_0 (\delta \Omega + 1)]]$$

— для квазиравдоподобной оценки (2) и $\tilde{D} = D_0 \hat{\alpha} q [L_1 (\hat{\alpha}) - L_2 (\hat{\alpha})] / \alpha_0$ — для ОМП дисперсии (9).

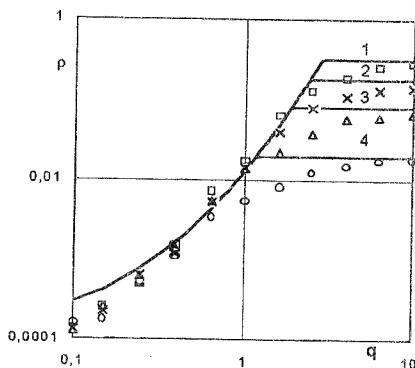


Рис. 3

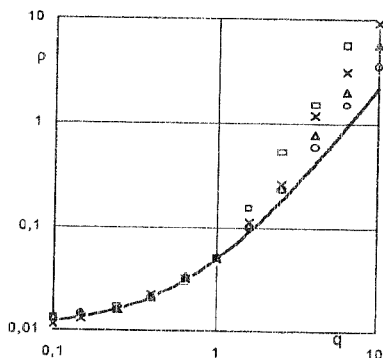


Рис. 4

Моделирование проводилось при значениях параметров $\mu = 100$, $\Delta \tilde{\omega} = 10^{-3} \alpha_0$, $p = 20$. Для каждого значения параметров k_0 , η , q , $\delta \Omega$ было проведено от 500 до 2000 циклов испытаний. По результатам моделирования алгоритмов оценки дисперсии (2), (9) вычислялось экспериментальное значение отношения рассеяния оценки дисперсии (2) к рассеянию совместной оценки (9). Полученные экспериментальные значения нанесены на рис. 1, 2. На рис. 3 показаны экспериментальные значения нормированного рассеяния $\rho_1 = V(\tilde{\Omega} | \Omega_0) / \Omega_0^2$ ОМП (10) полосы частот. Кроме того, для определения области, в которой характеристики совместной оценки дисперсии и полосы частот (9), (10) можно аппроксимировать характеристиками оценки дисперсии случайного сигнала с априори известной полосы частот, на рис. 4 показаны теоретическая и экспериментальная зависимости нормированного рассеяния оценки дисперсии (9) $\rho_2 = V(\tilde{D} | D_0) / D_0^2$ от q для значений параметров $\mu = 100$, $k_0 = 2$. Экспериментальные значения на рис. 3, 4 обозначены: прямоугольники — для $\eta = 0,1$, крестики — 0,2, треугольники — 0,3, кружочки — 0,4.

Из анализа рис. 1, 2, 4 видно, что при значениях параметров $q \leq 1$ использование совместной ОМП дисперсии и полосы частот случайного сигнала позволяет почти полностью компенсировать проигрыш в точности оценки дисперсии, возникающий из-за априорного незнания полосы частот. Кроме

того, из рис. 3 следует, что моделирование показало удовлетворительное согласование теоретических характеристик оценки полосы частот с экспериментальными для $q > 0,1$. Моделирование также показало удовлетворительное согласование полученных в [1] теоретических характеристик оценки дисперсии (2) с экспериментальными и подтвердило работоспособность рассмотренных алгоритмов оценки дисперсии случайного сигнала.

Приведенные результаты получены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Трифонов А. П., Алексеенко С. П. Квазиправдоподобная оценка дисперсии стационарного гауссовского случайного процесса // Радиоэлектроника.— 1994.— № 11.— С. 10—18. (Изв. высш. учеб. заведений).
2. Куликов Е. И., Трифонов А. П. Оценка параметров сигналов на фоне помех.— М. : Сов. радио, 1978.— 296 с.
3. Трифонов А. П., Шинаков Ю. С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех.— М. : Радио и связь, 1986.— 264 с.
4. Куликов Е. И. Методы измерения случайных процессов.— М. : Радио и связь, 1986.— 272 с.
5. Трифонов А. П., Галун С. А. Прием случайного сигнала с неизвестной шириной спектра мощности // Радиотехника и электроника.— 1982.— Т. 27.— № 8.— С. 1554—1562.
6. Трифонов А. П., Захаров А. В. Теоретическое и экспериментальное исследование оценок параметров случайного сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения // Радиотехника и электроника.— 1996.— Т. 41.— № 8.— С. 972—978.

Воронежский госуниверситет.

Поступила в редакцию 05.01.98.

УДК 621.396.677

КОМАРОВИЧ В. Ф., МАРЧУК Л. А., ПРАСЬКО А. Д.

МЕТОД СИНТЕЗА АЛГОРИТМОВ АДАПТИВНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ СИГНАЛОВ С НЕТОЧНО ИЗВЕСТНЫМИ ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Предложен метод синтеза алгоритмов адаптивной пространственной фильтрации, обеспечивающих при наличии ошибок в определении направления прихода полезного сигнала значение отношения сигнал/(помеха+шум) на выходе адаптивной антенной решетки, близкое к потенциально достижимой величине.

Известно, что одним из путей повышения эффективности систем радиосвязи является применение адаптивных антенных решеток (ААР), обеспечивающих подавление помех, совпадающих по несущей частоте и форме спектра с полезным сигналом. Для максимизации отношения сигнал/(помеха+шум) (ОСПШ) на выходе ААР необходимо иметь точные априорные данные о