

190 p. 6434 / 999 / 42 / 12
62

190

ISSN 0021-3462

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

РАДИОФИЗИКА

1999
ТОМ 42
12

ИЗДАНИЕ НИЖЕГОРОДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
И НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО
РАДИОФИЗИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 621.391

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АБСОЛЮТНОГО МАКСИМУМА ОБОБЩЁННОГО РЭЛЕЕВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

А. П. Трифонов, О. В. Чернояров

Найдены предельные законы распределения абсолютного максимума обобщённого релеевского случайного процесса. Методами статистического моделирования установлено, что асимптотические аппроксимации удовлетворительно описывают истинные распределения в широком диапазоне значений параметров случайного процесса.

В В Е Д Е Н И Е

Задача определения статистических характеристик негауссовских случайных процессов имеет широкие приложения в статистической радиофизике и радиотехнике [1–9]. Так, при анализе предельных отклонений и устойчивости сложных технических систем, в теории надёжности и строительной механике, в теории локации и связи необходимо знать распределение абсолютного (наибольшего) максимума реализации стационарной случайной функции [4–9]. Часто к исследованиям характеристик наибольших значений сводятся задачи описания шероховатости поверхностей при механической обработке деталей, задачи описания волновой поверхности моря, сейсмических и ветровых воздействий, задачи анализа вибраций и т. п. Одной из распространённых негауссовских случайных функций является обобщённый релеевский случайный процесс, который можно представить как [3–5]

$$\eta(t) = \sqrt{[N_1(t) + a_1]^2 + [N_2(t) + a_2]^2}, \quad t \in [0; T]. \quad (1)$$

Здесь $a_{1,2}$ — некоторые постоянные величины, а $N_{1,2}(t)$ — независимые центрированные гауссовские случайные процессы с дисперсиями σ^2 и коэффициентами корреляции $R(\tau)$. Одномерная $W(x)$ и двумерная $W_2(x_1, x_2; \tau)$ плотности вероятности процесса $\eta(t)$ имеют вид [3–5]

$$\begin{aligned} W(x) &= \frac{x}{\sigma^2} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{\sigma^2} + z^2 \right) \right] I_0 \left(\frac{zx}{\sigma} \right), \\ W_2(x_1, x_2; \tau) &= \frac{x_1 x_2}{\sigma^4 [1 - R^2(\tau)]} \exp \left\{ -\frac{x_1^2 + x_2^2}{2\sigma^2 [1 - R^2(\tau)]} \right\} \times \\ &\times \exp \left[-\frac{z^2}{1 + R(\tau)} \right] \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n I_n \left(\frac{R(\tau) x_1 x_2}{\sigma^2 (1 - R^2(\tau))} \right) I_n \left(\frac{z x_1}{\sigma (1 + R(\tau))} \right) I_n \left(\frac{z x_2}{\sigma (1 + R(\tau))} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\{x, x_1, x_2\} \geq 0$, $\varepsilon_n = 1$ при $n = 0$, $\varepsilon_n = 2$ при $n > 0$, $z^2 = (a_1^2 + a_2^2) / \sigma^2$, $I_n(x)$ — модифицированная функция Бесселя n -го порядка. На основе (2) можно получить выражения для одномерных моментов и корреляционной функции обобщённого релеевского случайного процесса [3–5].

Примерами процесса (1) могут служить огибающая аддитивной смеси гармонического колебания и узкополосного нормального шума [4–6], выходной сигнал оптимального обнаружителя/измерителя [7, 8], расстояние от начала координат до текущего положения случайно блуждающей по плоскости частицы, абсолютная величина скорости частицы в вязкой среде [10] и др.

В работе [7] получены асимптотические выражения для закона распределения

$$F(h) = P[h_m < h], \quad h_m = \sup\{\tilde{\eta}(t) : t \in [0; T]\}, \quad \tilde{\eta}(t) = \eta(t)/\sigma, \quad (3)$$

абсолютного максимума h_m случайного процесса (1) при $z = 0$ ($a_1 = a_2 = 0$). Методами статистического моделирования установлены границы их применимости. Показано, что вид функции распределения $F(h)$ (3) зависит от аналитических свойств процесса $\eta(t)$, а именно от существования непрерывной производной $\dot{\eta}(t)$. В то же время представляет интерес обобщение этих результатов на случай, когда $z \neq 0$.

Цель настоящей работы — найти асимптотические выражения для закона распределения абсолютного максимума процесса (1) при произвольном z , а также установить условия их применимости.

1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ АБСОЛЮТНОГО МАКСИМУМА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОГО ОБОБЩЁННОГО РЕЛЕЕВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Рассмотрим обобщённый релеевский случайный процесс $\eta(t)$ (1), непрерывный в среднеквадратическом смысле вместе с первой производной $\dot{\eta}(t)$. Согласно [9] в этом случае для коэффициента корреляции $R(\tau)$ квадратур $N_{1,2}(t)$ при $\tau \rightarrow 0$ выполняется соотношение

$$R(\tau) = 1 - \alpha^2 \tau^2 / 2 + o(\tau^2), \quad (4)$$

где $o(\tau^2)$ обозначает слагаемые более высокого по сравнению с τ^2 порядка малости. Кроме того, положим, что при $\tau \rightarrow \infty$

$$R(\tau) = o(\ln^{-1} |\alpha \tau|). \quad (5)$$

Величина α в (4), (5) имеет простой физический смысл. Во временной области она характеризует время корреляции τ_k процессов $N_{1,2}(t)$. Действительно, ограничиваясь параболической аппроксимацией (4) функции $R(\tau)$, время корреляции τ_k можно определить как длительность функции $R(\tau)$ на уровне 0,5 [7, 8]. Тогда

$$\tau_k = 2/\alpha. \quad (6)$$

В спектральной области величина α описывает эквивалентную ширину спектральной плотности процессов $N_{1,2}(t)$ [3–5]:

$$\alpha = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 G(\omega) d\omega / \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega \right]^{1/2}, \quad (7)$$

где $G(\omega) = \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau$ — спектральная плотность процессов $N_{1,2}(t)$.

Из [4, 9] следует, что при выполнении (4), (5) распределение числа выбросов за уровень h реализации процесса (1) с увеличением h сходится к закону Пуассона, и для вероятности (3) можно записать

$$\lim_{\substack{h \rightarrow \infty \\ T \rightarrow \infty}} P[h_m < h] = \exp[-\Pi(h)]. \quad (8)$$

Здесь

$$\Pi(h) = (\xi h / \sqrt{2\pi}) I_0(zh) \exp[-(h^2 + z^2)/2] \quad (9)$$

— среднее число выбросов реализации процесса $\eta(t)$ за уровень h на интервале $[0; T]$, а

$$\xi = T \sqrt{-R''(0)} = T\alpha \quad (10)$$

— приведённая длина интервала наблюдения, характеризующая число независимых отсчётов квадратур $N_{1,2}(t)$ и процесса $\eta(t)$ [4].

В общем случае функция в правой части (8) не является неубывающей функцией h . Поэтому для произвольных h в качестве аппроксимации функции распределения абсолютного максимума процесса $\eta(t)$ можно использовать выражение

$$F(h) \approx \begin{cases} \exp[-\Pi(h)], & h \geq h_{\min}, \\ 0, & h < h_{\min}, \end{cases} \quad (11)$$

где h_{\min} — наименьшее значение h , для которого при любых $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $\Pi(h) > \Pi(h + \varepsilon)$. Записать выражение для h_{\min} в явном виде при $z \neq 0$ затруднительно в силу достаточно сложного характера функции (9). Однако расчёт значений h_{\min} для различных z численными методами показывает, что зависимость $h_{\min} = h_{\min}(z)$ близка к линейной, причём

$$h_{\min}(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} 1, \quad h_{\min}(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} z. \quad (12)$$

Поэтому с учётом (12) для $h_{\min}(z)$ без заметной потери в точности можно использовать аппроксимацию

$$h_{\min}(z) = z + 1, \quad (13)$$

которая является верхней границей для точных значений $h_{\min}(z)$ в семействе прямых линий.

Аппроксимация (11) функции распределения наибольших значений является приближённой, однако точность её возрастает по мере увеличения h и ξ [4, 8, 9]. При малых значениях h и ξ аппроксимация (11) может оказаться слишком грубой. Поскольку при $T \rightarrow 0$ ($\xi \rightarrow 0$) распределение наибольшего значения процесса $\eta(t)$ (1) сходится к обобщённому релеевскому распределению, то можно использовать также аппроксимацию вида [7, 8]

$$F_1(h) \approx \begin{cases} F_R(h) \exp[-(\xi h / \sqrt{2\pi}) \exp[-(h^2 + z^2)/2] I_0(zh)], & h \geq h_{\min}, \\ F_R(h) \exp[-(\xi h_{\min} / \sqrt{2\pi}) \exp[-(h_{\min}^2 + z^2)/2] I_0(zh_{\min})], & h < h_{\min}, \end{cases} \quad (14)$$

где $F_R(h) = \int_0^h x \exp[-(x^2 + z^2)/2] I_0(zx) dx$ — обобщённая функция распределения Релея [5]. Аппроксимация (14) в отличие от (11) асимптотически точна не только при $\xi \rightarrow \infty$, но и при $\xi \rightarrow 0$. При больших значениях h и ξ аппроксимации (11) и (14) практически совпадают. Отметим, что в случае $z = 0$ функция распределения $F_1(h)$ (14) соответствует функции распределения абсолютного максимума релеевского случайного процесса, найденной в [7].

Возможность использования (14) для расчёта характеристик абсолютных максимумов реализаций обобщённого релеевского случайного процесса конечной длительности исследовалась с помощью статистического моделирования на ЭВМ. При этом полагалось, что $z = a_1/\sigma$, $a_2 = 0$, $R(\tau) = \exp(-\alpha^2 \tau^2/2)$. В процессе моделирования на интервале $[0; 1]$ с шагом Δ вырабатывались отсчёты реализаций нормированного случайного процесса $\tilde{\eta}(\tilde{t})$ (3) в нормированном масштабе времени $\tilde{t} = t/T$:

$$\tilde{\eta}(\tilde{t}_j) = \sqrt{[\tilde{N}_1(\tilde{t}_j) + z]^2 + \tilde{N}_2^2(\tilde{t}_j)},$$

$$\tilde{N}_k(\tilde{t}) = N_k(\tilde{t})/\sigma, \quad k = 1, 2; \quad \tilde{t}_j - \tilde{t}_{j-1} = \Delta.$$

Отсчёты процессов $\tilde{N}_{1,2}(\tilde{t})$ формировались на основе последовательности независимых гауссовских чисел методом скользящего суммирования [11]:

$$\tilde{N}_k(\tilde{t}_j) = \sum_{i=-p}^p c_i x_{k,j-i}, \quad k = 1, 2. \quad (15)$$

Здесь $c_i = (2\xi^2\Delta^2/\pi)^{1/4} \exp(-i^2\xi^2\Delta^2)$, а $x_{k,i}$ — независимые гауссовские случайные числа с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями.

Параметры Δ и p выбирались таким образом, чтобы среднеквадратическая погрешность ступенчатой аппроксимации (15) непрерывной реализации процессов $\tilde{N}_{1,2}(\tilde{t})$ не превышала 5%. В описываемом эксперименте параметр $\Delta = 0,01/\xi$, $p = 185$. В каждой реализации отыскивался максимум h_m . По совокупности N реализаций ($N = (1 \div 1,3) \cdot 10^5$) вычислялись эмпирические среднее значение m_Θ , средний квадрат M_Θ и значения функции распределения абсолютных максимумов для различных h и ξ .

В табл. 1 приведены полученные в результате моделирования величины m_Θ и M_Θ , а также соответствующие теоретические характеристики

$$m_T = \int_0^\infty [1 - F_1(h)] dh, \quad M_T = 2 \int_0^\infty h [1 - F_1(h)] dh, \quad (16)$$

рассчитанные численными методами с использованием (14). Из табл. 1 видно, что с ростом ξ точность приближенной формулы (14) возрастает.

На рис. 1, 2 показаны теоретические и экспериментальные функции распределения абсолютного максимума дифференцируемого обобщенного релеевского случайного процесса. Сплошными линиями на рис. 1 показаны теоретические зависимости $F_1(h)$, найденные по формуле (14) для $z = 0,5$, штриховыми линиями — для $z = 2$. На рис. 2 сплошными линиями изображены аналогичные зависимости для $z = 5$, штриховыми — для $z = 10$. Кривые 1 соответствуют $\xi = 5$; кривые 2 — $\xi = 20$; кривые 3 — $\xi = 100$. Экспериментальные значения функции распределения для $\xi = 5; 20; 100$ обозначены на рис. 1, 2 соответственно крестиками, прямоугольниками и звездочками (при $z = 0,5$ и $z = 5$), а также ромбиками, плюсиками и кружочками (при $z = 2$ и $z = 10$).

Поскольку в ряде задач необходимо знать поведение хвостов функции распределения, на рис. 3, 4 приведены вероятности $P_1(h) = 1 - F_1(h)$ для больших h при $\xi = 5; 20; 100$ и $z = 0,5; 2$ (рис. 3) или $z = 5; 10$ (рис. 4). Обозначения на рис. 3, 4 соответствуют обозначениям на рис. 1, 2.

Из рис. 1–4 следует, что выражения (14) для функции распределения абсолютного максимума дифференцируемого обобщенного релеевского случайного процесса $\eta(t)$ (1) удовлетворительно аппроксимируют экспериментальные данные, по крайней мере, при $\xi \geq 5$, $h \geq h_{\min}$.

Т а б л и ц а 1

z	$\xi = 5$				$\xi = 20$				$\xi = 100$			
	m_Θ	m_T	M_Θ	M_T	m_Θ	m_T	M_Θ	M_T	m_Θ	m_T	M_Θ	M_T
0,0	2,14	1,95	4,91	4,39	2,70	2,65	7,55	7,31	3,29	3,28	11,00	10,90
0,5	2,25	2,04	5,41	4,82	2,84	2,78	8,33	8,06	3,46	3,44	12,14	12,03
1,0	2,53	2,29	6,82	6,04	3,17	3,10	10,37	10,01	3,83	3,81	14,88	14,74
2,0	3,35	3,05	11,73	10,39	4,05	3,95	16,71	16,13	4,74	4,72	22,63	22,45
5,0	6,22	5,90	39,30	36,06	6,94	6,84	48,58	47,37	7,65	7,63	58,72	58,42
10	11,18	10,86	125,5	119,1	11,90	11,80	142,0	139,8	12,61	12,59	159,3	158,8

2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ АБСОЛЮТНОГО МАКСИМУМА НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМОГО ОБОБЩЕННОГО РЕЛЕЕВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Рассмотрим недифференцируемый обобщенный релеевский случайный процесс $\eta(t)$ (1). Аналогично [7] будем полагать, что для коэффициента корреляции $R(\tau)$ квадратур $N_{1,2}(t)$ при $\tau \rightarrow 0$ выполняется соотношение

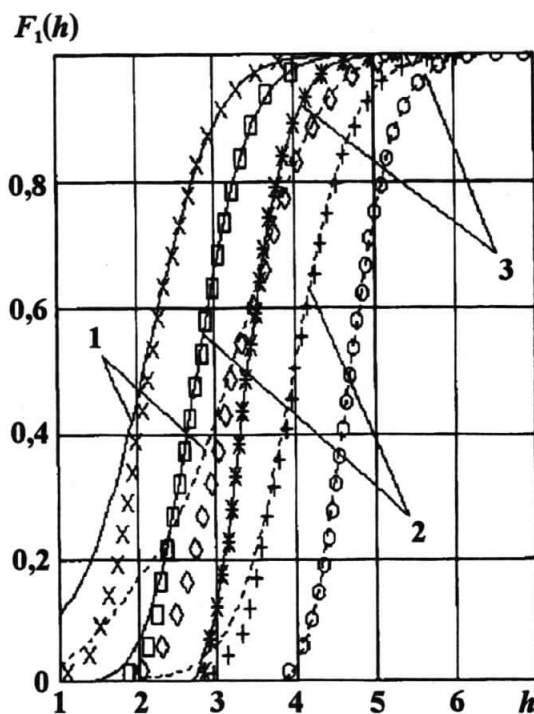


Рис. 1.

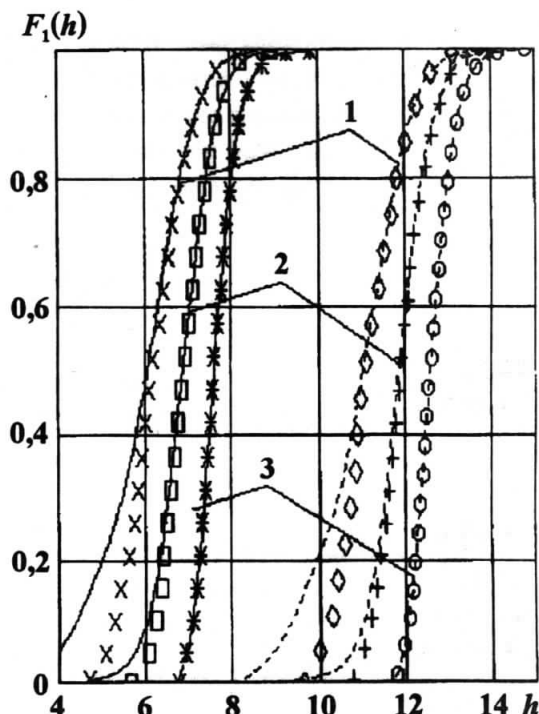


Рис. 2.

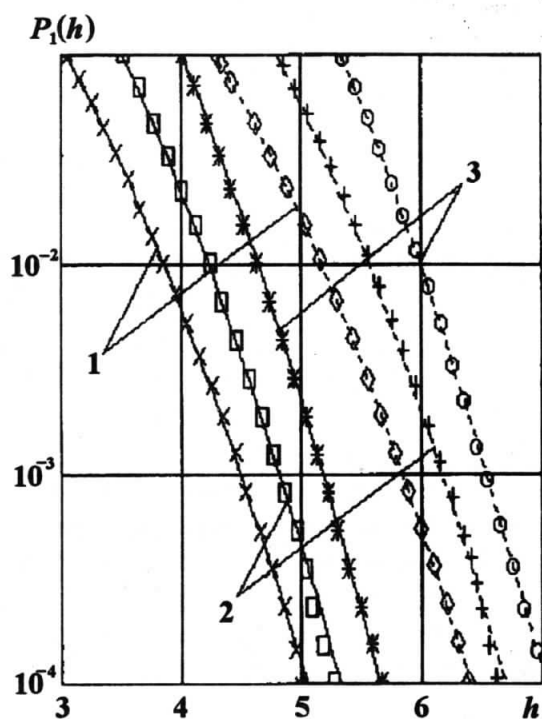


Рис. 3.

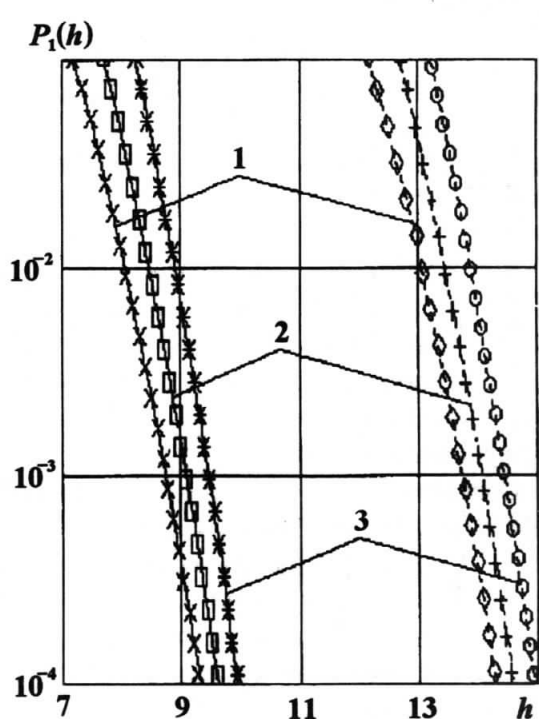


Рис. 4.

$$R(\tau) = 1 - \delta|\tau| + o(|\tau|), \quad \delta > 0, \quad (17)$$

а при $\tau \rightarrow \infty$ — соотношение $R(\tau) = o(\ln^{-1} |\delta\tau|)$. Величина δ , как и величина α в (4), определяет корреляционно-спектральные характеристики процессов $N_{1,2}(t)$. Действительно, приняв по аналогии с (6) время корреляции τ_k равным длительности треугольной аппроксимации (17) функции

$R(\tau)$ на уровне 0,5, получаем $\tau_k = \delta^{-1}$. В спектральной области вследствие недифференцируемости квадратур $N_{1,2}(t)$ определить эквивалентную ширину спектральной плотности согласно выражению (7) не представляется возможным [5]. Однако для описания протяжённости спектральной плотности $G(\omega)$ по оси частот можно использовать одно из определений эффективной ширины спектральной плотности Δf_Θ [3-5], например,

$$\Delta f_\Theta = \frac{1}{\sup\{G(\omega)\}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (18)$$

Следует отметить, что эффективная ширина спектральной плотности прямо пропорциональна величине δ . Так, при экспоненциальном коэффициенте корреляции случайных процессов $N_{1,2}(t)$

$$R(\tau) = \exp(-\delta|\tau|) \quad (19)$$

из (18) имеем $\Delta f_\Theta = \delta/2$.

Из (17) следует, что квадратуры $N_{1,2}(t)$ представляют собой гауссовские локально-марковские случайные процессы [12]. Однако на произвольных временных интервалах марковские свойства процессов $N_{1,2}(t)$ сохраняются лишь тогда, когда коэффициент корреляции $R(\tau)$ удовлетворяет соотношению (19) [5, 6].

Согласно [6] при выполнении (19) и условий $z \ll 1$ или $z \gg 1$ процесс $\eta(t)$ можно приближённо считать марковским случайным процессом, описываемым уравнением

$$\frac{\dot{\eta}}{\sigma\delta} = -\frac{\eta}{\sigma} + \frac{\sigma}{\eta} + z \frac{I_1(z\eta/\sigma)}{I_0(z\eta/\sigma)} + \chi(t)\sqrt{\frac{2}{\delta}}. \quad (20)$$

Здесь $\chi(t)$ — гауссовский дельта-коррелированный процесс (белый шум): $\langle\chi(t)\rangle = 0$, $\langle\chi(t_1)\chi(t_2)\rangle = \delta(t_2 - t_1)$. Соответствующая уравнению (20) стационарная плотность вероятности процесса $\eta(t)$ совпадает с одномерной плотностью вероятности $W(x)$ (2).

В общем случае при произвольных z марковский характер процесса $\eta(t)$ может нарушаться [5, 6]. Однако, используя локально-марковские свойства квадратур $N_{1,2}(t)$, можно показать, что при выполнении (17) процесс $\eta(t)$ (1) является локально-марковским обобщённым релеевским случайным процессом со стационарным законом распределения (2). При этом реализации процессов $N_{1,2}(t)$ и $\eta(t)$ непрерывны с вероятностью 1, как и реализации марковских процессов диффузионного типа.

Согласно [7] вероятностные характеристики превышения достаточно высокого уровня для марковского и локально-марковского процессов асимптотически совпадают. Действительно, в силу непрерывности реализаций марковского и локально-марковского процессов длительность отрезков реализаций этих процессов, превышающих некоторый уровень h , при $h \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Следовательно, при $h \rightarrow \infty$ вероятность непревышения уровня h определяется лишь локальными свойствами процесса. Тогда, воспользовавшись результатами работ [6, 7], для вероятности (3) можно записать

$$P[h_m < h] \approx \exp(-\rho T), \quad (21)$$

где

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\delta} \int_{x_0}^h \frac{dx}{W_{st}(x)}, \quad (22)$$

а $W_{st}(x)$ — стационарная плотность вероятности нормированного случайного процесса $\tilde{\eta}(t)$ (3), определяемая из (2) при $\sigma = 1$. Формула (21) получена в [6] для случая, когда $m \gg 1$ и

$$W_{st}(h) \ll 1. \quad (23)$$

Здесь $m = \delta T$ — приведённая длина интервала наблюдения, характеризующая аналогично (10) число независимых отсчётов процессов $N_{1,2}(t)$ и $\eta(t)$. Очевидно, условие (23) для обобщённого релеевского процесса выполняется, когда $h \gg z + 1$. Значение x_0 в (22) выбирается в области максимальной вероятности значений процесса $\tilde{\eta}(t)$, так что можно положить $x_0 = z + 1$. Тогда, используя для вычисления интеграла (22) асимптотическую формулу Лапласа [13], при $h \rightarrow \infty$ получаем

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\delta} \frac{\exp[(h^2 + z^2)/2]}{\{h[h - zI_1(zh)/I_0(zh)] - 1\} I_0(zh)} [1 + O(h^{-1})], \quad (24)$$

где $O(h^{-1})$ обозначает слагаемые порядка $1/h$. Значит, при больших h согласно (21), (24) для вероятности (3) можно записать

$$P[h_m < h] \approx \exp[-m\varphi(h)], \quad (25)$$

где

$$\varphi(h) = \{h[h - zI_1(zh)/I_0(zh)] - 1\} \exp[-(h^2 + z^2)/2] I_0(zh).$$

При этом, как следует из вывода формулы (21) в [6], точность приближённой формулы (25) возрастает с увеличением m и h .

Поскольку правая часть (25) является неубывающей функцией лишь при $h \geq h_{\min}$, для функции распределения абсолютного максимума процесса $\tilde{\eta}(t)$ используем аппроксимацию

$$F(h) = \begin{cases} \exp[-m\varphi(h)], & h \geq h_{\min}, \\ 0, & h < h_{\min}, \end{cases} \quad (26)$$

где h_{\min} — наименьшее значение h , для которого при любых $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $\varphi(h) > \varphi(h + \varepsilon)$. Величина h_{\min} для фиксированного z может быть рассчитана только численными методами. Однако аналогично выражение (13) для функции $h_{\min} = h_{\min}(z)$ без существенной потери в точности можно предложить аппроксимацию

$$h_{\min} = z + \sqrt{3},$$

которая является верхней границей для точных значений h_{\min} в семействе прямых линий.

При не очень больших значениях h и m формулу (26) можно несколько уточнить, положив [7, 8]

$$F_1(h) = \begin{cases} F_R(h) \exp\left\{-m[h(h - zI_1(zh)/I_0(zh)) - 1] \times \right. \\ \quad \left. \times \exp[-(h^2 + z^2)/2] I_0(zh)\right\}, & h \geq h_{\min}, \\ F_R(h) \exp\left\{-m[h_{\min}(h_{\min} - zI_1(zh_{\min})/I_0(zh_{\min})) - 1] \times \right. \\ \quad \left. \times \exp[-(h_{\min}^2 + z^2)/2] I_0(zh_{\min})\right\}, & h < h_{\min}. \end{cases} \quad (27)$$

В отличие от (26) аппроксимация (27) асимптотически точна как при $m \rightarrow \infty$, так и при $m \rightarrow 0$. При больших h и m аппроксимации (26) и (27) практически совпадают. В случае

$z = 0$ функция распределения $F_1(h)$ (27) соответствует функции распределения абсолютного максимума релеевского случайного процесса, найденной в [7].

Возможность использования формулы (27) исследовалась с помощью моделирования на ЭВМ обобщённого релеевского случайного процесса (1) с коэффициентом корреляции квадратур (19). Моделирование недифференцируемого процесса $\eta(t)$ (1) выполнялось аналогично описанному выше моделированию дифференцируемого процесса. Отличие заключалось лишь в том, что в целях экономии машинного времени для формирования отсчётов нормированных гауссовских процессов $\tilde{N}_{1,2}(\tilde{t})$ использовался рекуррентный метод [11]:

$$\tilde{N}_k(\tilde{t}_j) = \sqrt{1 - \bar{R}^2(\Delta)} x_{k,j} + \bar{R}(\Delta) \tilde{N}_k(\tilde{t}_{j-1}), \quad k = 1, 2.$$

Здесь $\bar{R}(\Delta) = \exp(-m\Delta)$, а $x_{k,j}$ — независимые гауссовские числа с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Шаг дискретизации $\Delta = 0,02/m$ выбирался с таким расчётом, чтобы обеспечить среднеквадратическую погрешность воспроизведения реализации $\tilde{N}_{1,2}(\tilde{t})$ не более 5%.

В табл. 2 приведены полученные в результате моделирования величины m_{Θ} и M_{Θ} , а также характеристики m_T и M_T , рассчитанные по формулам (16), (27). Из табл. 2 видно, что с ростом m точность приближённой формулы (27) возрастает.

Т а б л и ц а 2

z	$m = 5$				$m = 20$				$m = 100$			
	m_{Θ}	m_T	M_{Θ}	M_T	m_{Θ}	m_T	M_{Θ}	M_T	m_{Θ}	m_T	M_{Θ}	M_T
0,0	2,80	2,74	8,11	8,03	3,38	3,41	11,65	11,83	3,92	3,95	15,53	15,70
0,5	2,94	2,78	8,95	8,51	3,53	3,56	12,70	12,92	4,11	4,13	17,01	17,20
1,0	3,23	2,96	10,82	9,92	3,88	3,91	15,34	15,60	4,49	4,52	20,36	20,58
2,0	4,04	3,76	16,73	15,58	4,76	4,80	22,96	23,37	5,40	5,43	29,42	29,68
5,0	6,96	6,46	48,87	43,59	7,69	7,67	59,57	59,32	8,32	8,35	69,47	69,95
10	11,91	11,36	142,4	131,1	12,64	12,61	160,2	159,5	13,29	13,31	176,8	177,4

На рис. 5, 6 показаны теоретические и экспериментальные зависимости $F_1(h)$, а на рис. 7, 8 — зависимости $P_1(h) = 1 - F_1(h)$ для недифференцируемого обобщённого релеевского случайного процесса. Сплошными линиями показаны теоретические зависимости, рассчитанные по формуле (27) для $z = 0,5$ (рис. 5, 7) или $z = 5$ (рис. 6, 8), штриховыми — для $z = 2$ (рис. 5, 7) или $z = 10$ (рис. 6, 8). Кривые 1 соответствуют $m = 5$; кривые 2 — $m = 20$; кривые 3 — $m = 100$. Экспериментальные значения вероятности $F_1(h)$ или $P_1(h)$ для $m = 5; 20; 100$ обозначены на рис. 5–8 соответственно крестиками, прямоугольниками и звёздочками (при $z = 0,5$ и $z = 5$), а также ромбиками, плюсиками и кружочками (при $z = 2$ и $z = 10$). Все экспериментальные характеристики недифференцируемого процесса получены в результате обработки $N = (1 \div 1,3) \cdot 10^5$ реализаций случайного процесса.

Из рис. 5–8 следует, что выражения (27) для функции распределения абсолютного максимума недифференцируемого обобщённого релеевского случайного процесса $\eta(t)$ (1) удовлетворительно аппроксимируют экспериментальные данные, по крайней мере, при $m \geq 5$, $h \geq h_{\min}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для расчёта характеристик наибольших значений обобщённого релеевского случайного процесса можно использовать предельные законы распределения абсолютного максимума, полученные при неограниченном возрастании значений максимумов и длительности реализаций. Вид

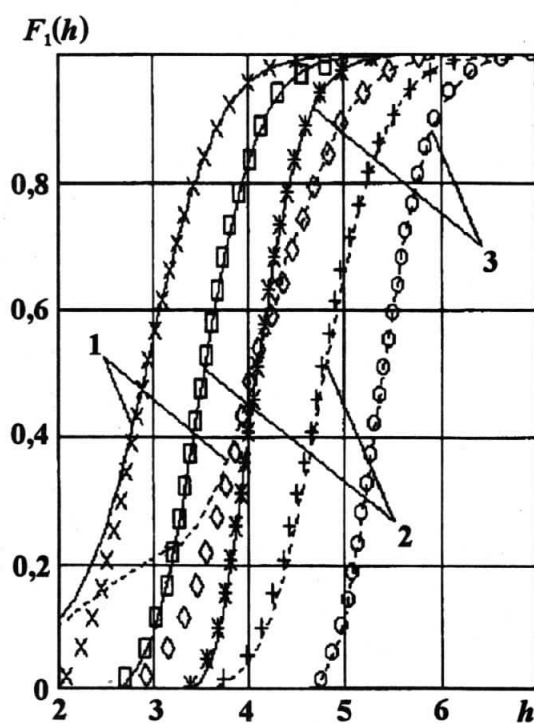


Рис. 5.

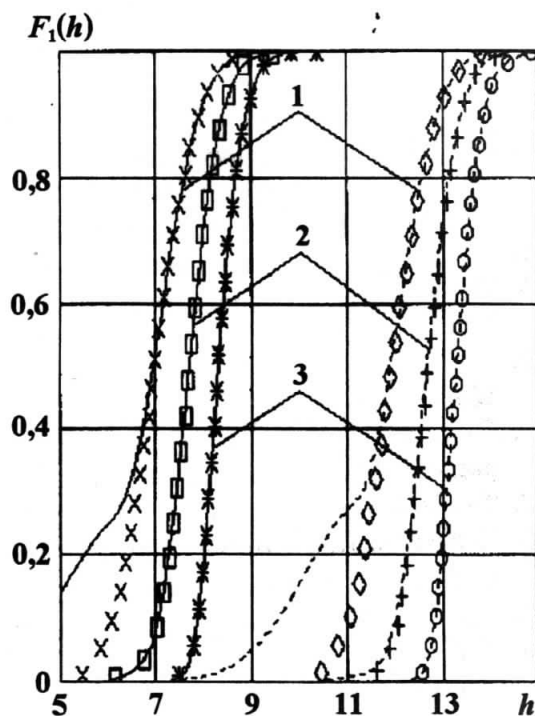


Рис. 6.

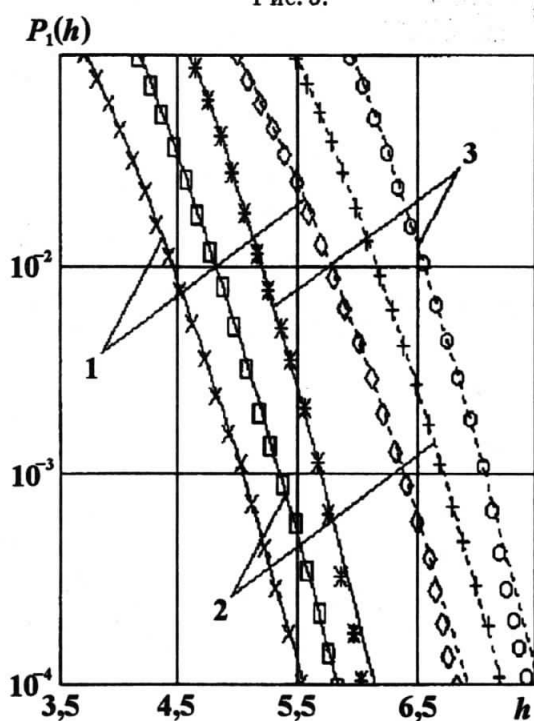


Рис. 7.

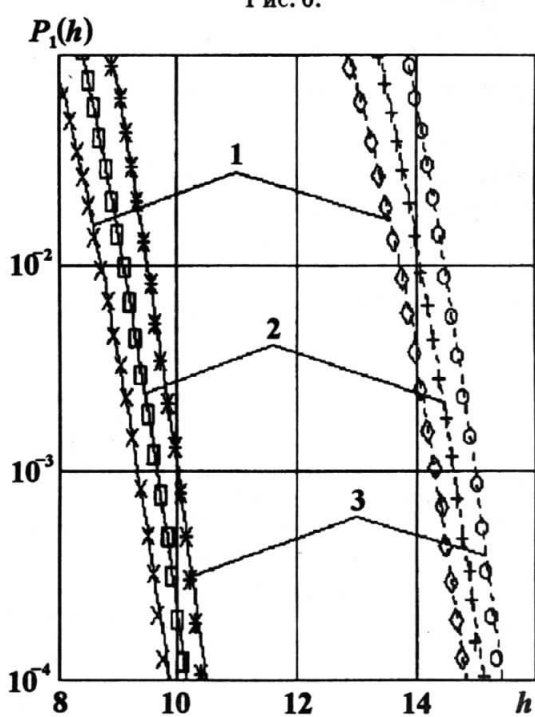


Рис. 8.

асимптотических аппроксимаций зависит от аналитических свойств процесса, а именно от существования его непрерывной производной. Сравнение с экспериментальными данными показывает, что асимптотические формулы удовлетворительно описывают истинные распределения в широком диапазоне значений параметров случайного процесса.

Приведённые результаты получены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 98-01-00090.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовских процессов и их преобразований. — М.: Сов. радио, 1978.
2. Островский М. А. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1997. Т. 40, № 11. С. 1416.
3. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. — М.: Радио и связь, 1982.
4. Тихонов В. И., Хименко В. И. Выбросы траекторий случайных процессов. — М.: Наука, 1987.
5. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. — М.: Радио и связь, 1989.
6. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1961.
7. Трифонов А. П. // Теория обнаружения сигналов. — М.: Радио и связь, 1984. — С. 12.
8. Трифонов А. П., Шинаков Ю. С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. — М.: Радио и связь, 1986.
9. Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. — Мир, 1969.
10. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. Случайные процессы. — М.: Наука, 1976. — Т. 1.
11. Быков В. В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1971.
12. Mc Fadden I. A. // J. Roy. Statist. Soc. 1967. V. B29. P. 489.
13. Федорюк М. В. Метод перевала. — М.: Наука, 1977.

Воронежский государственный
университет, г. Воронеж, Россия

Поступила в редакцию
25 января 1999 г.

**PROBABILITY CHARACTERISTICS OF THE ABSOLUTE MAXIMUM
OF GENERALIZED RAYLEIGH STOCHASTIC PROCESS**

A. P. Trifonov and O. V. Chernoyarov

We obtain the limiting distributions of the absolute maximum of generalized Rayleigh stochastic process. Using the methods of statistical modelling, we show that the asymptotic approximations are in good agreement with the actual distributions over wide ranges of parameters of the stochastic process.