

Р-6264 / 44 / 11-12
62



ISSN 0021-3470

ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ
ЗАВЕДЕНИЙ

РАДИОЭЛЕКТРОНИКА

ТОМ 44

11-12
ноябрь-декабрь

ИЗДАНИЕ
НАЦИОНАЛЬНОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
УКРАИНЫ
«КИЕВСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ»

2001

ТРИФОНОВ А. П., ЗАХАРОВ А. В., ПРОНЯЕВ Е. В.

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ РАЗРЫВНОГО СЛУЧАЙНОГО ИМПУЛЬСА С НЕИЗВЕСТНОЙ ШИРИНОЙ ПОЛОСЫ ЧАСТОТ*

Предложены алгоритмы оценок времени прихода, длительности (моментов появления и исчезновения), математического ожидания и величины спектра мощности флуктуаций гауссовского случайного сигнала. Найдены асимптотически точные выражения для характеристик оценок. Приведены результаты статистического моделирования алгоритмов оценок на ЭВМ.

В [1] исследована задача обнаружения случайного импульса с неизвестными моментами появления и исчезновения. Однако в ряде практических приложений радиоэлектроники возникает необходимость в оценке параметров такого сигнала. Следуя [2], разрывный случайный импульс запишем в виде

$$s(t) = \xi(t) I\left(\frac{t - \lambda_0}{\tau_0}\right); \quad \xi(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } \theta_{01} \leq t \leq \theta_{02}; \\ 0, & \text{при } t < \theta_{01} \text{ или } t > \theta_{02}, \end{cases} \quad (1)$$

где $I(x) = 1$ при $|x| < 1/2$ и $I(x) = 0$ при $|x| \geq 1/2$, λ_0 и τ_0 — время прихода и длительность импульса, $\theta_{01} = \lambda_0 - \tau_0/2$ и $\theta_{02} = \lambda_0 + \tau_0/2$ — моменты его появления и исчезновения. Реализация стационарного гауссовского случайного процесса $\xi(t)$ с математическим ожиданием $\langle \xi(t) \rangle = a_0$ и спектром мощности $G(\omega) = \gamma_0 I(\omega / \Omega_0)$ описывает случайные флуктуации импульса (1). Здесь γ_0 и Ω_0 — величина и ширина спектра мощности случайного процесса $\xi(t)$, а время корреляции $\tau_k = 2\pi / \Omega_0$ процесса $\xi(t)$ значительно меньше длительности τ_0 импульса (1), т. е.

$$\mu_0 = \tau_0 \Omega_0 / 4\pi \gg 1. \quad (2)$$

При выполнении (2) параметр Ω_0 определяет также ширину полосы частот сигнала (1). Модель (1) широко используется в практических приложениях статистической радиофизики и радиотехники [2—6].

* Приведенные результаты получены при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

Рассмотрим влияние незнания ширины полосы частот импульса (1) на точность оценок его параметров. Будем полагать, что сигнал (1) принимается на фоне аддитивного гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0 , так что наблюдению доступна реализация $x(t) = s(t) + n(t)$, а сигнал и шум статистически независимы.

Пусть неизвестные время прихода и длительность импульса (1) принимают значения из априорных интервалов $\lambda_0 \in [\Lambda_1; \Lambda_2]$, $\tau_0 \in [T_1; T_2]$. Тогда, согласно [2], совместные оценки максимального правдоподобия (ОМП) $\lambda_{m0}, \tau_{m0}, \theta_{1m0}, \theta_{2m0}, a_{m0}, \gamma_{m0}$ параметров $\lambda_0, \tau_0, \theta_{01}, \theta_{02}, a_0$ и γ_0 при априори известной ширине полосы частот Ω_0 запишутся в виде

$$(\lambda_{m0}, \tau_{m0}) = \arg \sup_{\lambda, \tau} L(\lambda, \tau, \Omega_0), \quad \lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2], \quad \tau \in [T_1; T_2], \quad (3)$$

$$\theta_{1m0} = \lambda_{m0} - \tau_{m0} / 2, \quad \theta_{2m0} = \lambda_{m0} + \tau_{m0} / 2, \quad (4)$$

$$a_{m0} = \sqrt{N_0 / \tau_{m0}} R_2(\lambda_{m0}, \tau_{m0}), \quad \gamma_{m0} = R_3(\lambda_{m0}, \tau_{m0}, \Omega_0). \quad (5)$$

Здесь

$$L(\lambda, \tau, \Omega) = R_1(\lambda, \tau, \Omega) - \mu \{1 + \ln [\{R_1(\lambda, \tau, \Omega) - R_2^2(\lambda, \tau)\} / \mu]\}, \quad (6)$$

$$R_1(\lambda, \tau, \Omega) = \int_{\lambda - \tau/2}^{\lambda + \tau/2} y^2(t, \Omega) dt / N_0, \quad R_2(\lambda, \tau) = \int_{\lambda - \tau/2}^{\lambda + \tau/2} x(t) dt / \sqrt{N_0 \tau}, \quad (7)$$

$$R_3(\lambda, \tau, \Omega) = (N_0 / 2) \{[R_1(\lambda, \tau, \Omega) - R_2^2(\lambda, \tau)] / \mu - 1\}, \quad \mu = \tau \Omega / 4\pi,$$

$y(t, \Omega)$ — отклик фильтра с передаточной функцией $h(\omega, \Omega)$, удовлетворяющей условию $|h(\omega, \Omega)|^2 = I(\omega / \Omega)$, на наблюдаемую реализацию $x(t)$.

При неизвестной величине Ω_0 вместо ОМП (3)—(5) можно использовать квазиправдоподобные оценки (КПО)

$$(\lambda_q, \tau_q) = \arg \sup_{\lambda, \tau} L(\lambda, \tau, \Omega^*), \quad \lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2], \quad \tau \in [T_1; T_2], \quad (8)$$

$$\theta_{1q} = \lambda_q - \tau_q / 2, \quad \theta_{2q} = \lambda_q + \tau_q / 2, \quad (9)$$

$$a_q = \sqrt{N_0 / \tau_q} R_2(\lambda_q, \tau_q), \quad \gamma_q = R_3(\lambda_q, \tau_q, \Omega^*) \quad (10)$$

соответственно. Здесь Ω^* — ожидаемое (прогнозируемое) значение ширины полосы частот сигнала (1), причем в общем случае $\Omega^* \neq \Omega_0$ и $\Omega^* \tau_0 / 4\pi \gg 1$.

Найдем характеристики КПО (8)—(10). Представим функционал $L(\lambda, \tau, \Omega^*)$ (6) в виде

$$L(\lambda, \tau, \Omega^*) = S^*(\lambda, \tau) + N^*(\lambda, \tau),$$

где $S^*(\lambda, \tau) = \langle L(\lambda, \tau, \Omega^*) \rangle$ — сигнальная,

$N^*(\lambda, \tau) = L(\lambda, \tau, \Omega^*) - \langle L(\lambda, \tau, \Omega^*) \rangle$ — шумовая функция [7],

а усреднение выполняется по реализациям $x(i)$ при фиксированных параметрах импульса (1). Обозначим $r = z_0^2 / \mu_0 (1 + \delta)$, $Q = q \min [1; 1 / (1 + \delta)]$, где $z_0^2 = 2 a_0^2 \tau_0 / N_0$, $q = 2 \gamma_0 / N_0$, $\delta = (\Omega^* - \Omega_0) / \Omega_0$. Следуя [2], можно показать, что сигнальная функция $S^*(\lambda, \tau)$ достигает наибольшего максимума при $\lambda = \lambda_0$, $\tau = \tau_0$, а шумовая функция $N^*(\lambda, \tau)$ является асимптотически (при $\mu_0 \rightarrow \infty$) гауссовским случайным полем, реализации которого непрерывны с вероятностью 1. При этом производные сигнальной функции и корреляционной функции шумовой функции по параметрам λ и τ имеют разрывы первого рода в точке (λ_0, τ_0) максимума сигнальной функции. Это не позволяет для вычисления характеристик оценок (8), (9) воспользоваться формулой Крамера—Рао или методом малого параметра [4, 5, 7]. В частности, формула Крамера—Рао дает тривиальную нулевую нижнюю границу для дисперсий оценок.

Поэтому, аналогично [2], перейдем от совместных КПО (8)—(9) к раздельным КПО положений переднего и заднего фронтов импульса и затем воспользуемся методом локально-марковской аппроксимации [8]. Следуя [2, 6—8], будем считать, что кроме (2) выполняется условие

$$z_q^2 = \frac{S^{*2}(\lambda_0, \tau_0)}{\langle N^{*2}(\lambda_0, \tau_0) \rangle} = \frac{\mu_0 (1 + \delta) \{ [Q - \ln(1 + Q)] + r/2 \}^2}{Q^2 [1 + Q(2 + q)] / (1 + Q)^2 + r(1 + q)} \gg 1, \quad (11)$$

обеспечивающее высокую апостериорную точность оценок. Тогда, аналогично [2], можно найти нормированные смещения и рассеяния КПО (8)—(9):

$$\begin{aligned} b_{iq} &= \langle \theta_{iq} - \theta_{0i} \rangle / \tau_0 = (-1)^{i+1} b(z_q, z_2, R), \\ V_{iq} &= \langle (\theta_{iq} - \theta_{0i})^2 \rangle / \tau_0^2 = V(z_q, z_2, R), \quad i = 1, 2, \\ b_{lq} &= \langle \lambda_q - \lambda_0 \rangle / \tau_0 = 0, \quad b_{lq} = \langle \tau_q - \tau_0 \rangle / \tau_0 = -2 b(z_q, z_2, R), \\ V_{lq} &= \langle (\lambda_q - \lambda_0)^2 \rangle / \tau_0^2 = [V(z_q, z_2, R) - b^2(z_q, z_2, R)] / 2, \\ V_{lq} &= \langle (\tau_q - \tau_0)^2 \rangle / \tau_0^2 = 2 [V(z_q, z_2, R) + b^2(z_q, z_2, R)]. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь

$$b(x_1, x_2, R) = [x_2^2 R(R+2) - x_1^2 (2R+1)] / 2 x_1^2 x_2^2 (R+1)^2, \quad (13)$$

$$V(x_1, x_2, R) = [x_1^4 (5R^2 + 6R + 2) + x_2^4 R(2R^2 + 6R + 5)] / 2 x_1^4 x_2^4 (1+R)^3,$$

z_q^2 определяется из (11), а

$$z_2^2 = \mu_0 (1 + \delta) \{[(1 + Q) \ln(1 + Q) - Q] + r/2\}^2 / (Q^2 + r), \quad (14)$$

$$R = \frac{[(1 + Q) \ln(1 + Q) - Q] + r/2}{\{[Q - \ln(1 + Q)] + r/2\} (Q^2 + r) (1 + Q)} \cdot \frac{Q^2 [1 + Q(2 + q)] + r(1 + q)(1 + Q)^2}{Q^2 + r}.$$

Нормированные смещения и дисперсии КПО (10) имеют вид:

$$\begin{aligned} b_{aq} &= \langle a_q - a_0 \rangle / a_0 = 0, \quad D_{aq} = \langle (a_q - \langle a_q \rangle)^2 \rangle / a_0^2 = (1 + q) / z_0^2, \\ b_{\gamma q} &= \langle \gamma_q - \gamma_0 \rangle / \gamma_0 = -[(1 + q) / 2 \mu_0 q + \max(0; \delta)] / (1 + \delta), \\ D_{\gamma q} &= \langle (\gamma_q - \langle \gamma_q \rangle)^2 \rangle / \gamma_0^2 = [1 + Q(2 + q)] / \mu_0 q^2 (1 + \delta). \end{aligned} \quad (15)$$

Точность выражений (12), (15) возрастает с увеличением μ_0 (2) и z_q^2 (11).

Отметим, что характеристики (15) КПО a_q (10) не зависят от выбора значения Ω^* и совпадают с соответствующими характеристиками

$$b_a = \langle a_{m0} - a_0 \rangle / a_0 \quad \text{и} \quad D_a = \langle (a_{m0} - \langle a_{m0} \rangle)^2 \rangle / a_0^2$$

[2] ОМП a_{m0} (5). При $\Omega^* = \Omega_0$ КПО (8)—(10) переходят в ОМП (3)—(5).

Поэтому, полагая в (12), (15) $\delta = 0$, можно получить, как частный случай, нормированные смещения

$$b_l = \langle \lambda_{m0} - \lambda_0 \rangle / \tau_0, \quad b_t = \langle \tau_{m0} - \tau_0 \rangle / \tau_0, \quad b_i = \langle \theta_{im0} - \theta_{0i} \rangle / \tau_0,$$

$i = 1, 2$, $b_\gamma = \langle \gamma_{m0} - \gamma_0 \rangle / \gamma_0$, дисперсию $D_\gamma = \langle (\gamma_{m0} - \langle \gamma_{m0} \rangle)^2 \rangle / \gamma_0^2$ и рассеяния

$$V_l = \langle (\lambda_{m0} - \lambda_0)^2 \rangle / \tau_0^2, \quad V_t = \langle (\tau_{m0} - \tau_0)^2 \rangle / \tau_0^2, \quad V_i = \langle (\theta_{im0} - \theta_{0i})^2 \rangle / \tau_0^2.$$

ОМП (3)—(5) при априори известной ширине полосы частот сигнала [2].

Выражения (12), (15) позволяют оценить влияние отклонений ожидаемого значения Ω^* ширина полосы частот сигнала (1) от ее истинного значения Ω_0 на точность КПО (8)—(10). Введем в рассмотрение отношения

$$\chi_l = V_{lq} / V_l, \quad \chi_t = V_{tq} / V_t, \quad \chi_1 = V_{1q} / V_1 \equiv V_{2q} / V_2, \quad \chi_\gamma = (D_{\gamma q} + b_{\gamma q}^2) / (D_\gamma + b_\gamma^2),$$

$$\chi_a = (D_{aq} + b_{aq}^2) / (D_a + b_a^2)$$

нормированных рассеяний КПО к рассеяниям соответствующих ОМП (3)—(5). На рис. 1—5 сплошными линиями показаны зависимости этих отношений от величины $\delta = (\Omega^* - \Omega_0) / \Omega_0$, рассчитанные с помощью формул (12), (15) при $\mu_0 = 100$. Кривая 1 на рис. 1—3 соответствует $z_0 = 0, q = 0,7$; 2 — $z_0 = 0, q = 2$; 3 — $z_0 = 7, q = 2$; 4 — $z_0 = 7, q = 0,7$. На рис. 4 кривая 1 соответствует $q = 3$, а кривая 2 — $q = 1,4$. Из рис. 1...4 следует, что с ростом величины $|\delta|$ характеристики КПО (8)—(9) и γ_q (10) могут существенно ухудшаться, причем с уменьшением z_0 и увеличением q точность этих КПО оказывается более критичной к выбору значений Ω^* . С другой стороны, характеристики (15) КПО a_q (10) не зависят от Ω^* , поэтому $\chi_a \equiv 1$ (рис. 5).

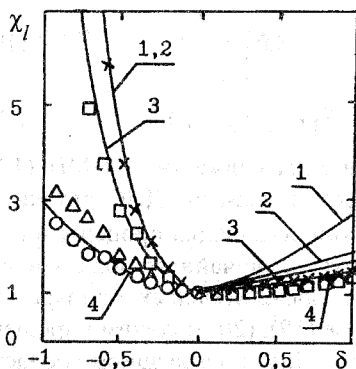


Рис. 1

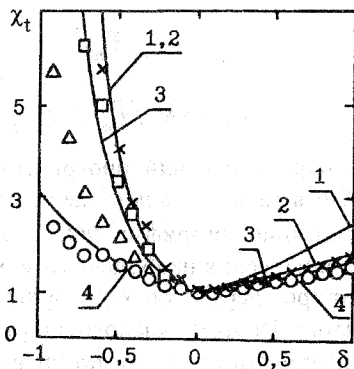


Рис. 2

Повысить точность оценок параметров импульса (1) с неизвестной шириной полосы частот можно, если в (8), (10) заменить фиксированное ожидаемое значение Ω^* ширины полосы частот на ее ОМП. Пусть ширина полосы частот сигнала (1) принимает значение из априорного интервала $\Omega_0 \in [W_1; W_2]$, тогда совместные ОМП $\lambda_m, \tau_m, \theta_{1m}, \theta_{2m}, \Omega_m, a_m, \gamma_m$ параметров $\lambda_0, \tau_0, \theta_{01}, \theta_{02}, \Omega_0, a_0, \gamma_0$ примут вид:

$$(\lambda_m, \tau_m, \Omega_m, a_m, \gamma_m) = \arg \sup M(\lambda, \tau, \Omega, a, \gamma), \quad (16)$$

$$\theta_{1m} = \lambda_m - \tau_m / 2, \quad \theta_{2m} = \lambda_m + \tau_m / 2. \quad (17)$$

где $\lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2]$, $\tau \in [T_1; T_2]$, $\Omega \in [W_1; W_2]$, а логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП) $M(\lambda, \tau, \Omega, a, \gamma)$ при выполнении (2) допускает представление [2]:

$$M(\lambda, \tau, \Omega, a, \gamma) = \int_{\lambda - \tau/2}^{\lambda + \tau/2} Y(t, \Omega, a, \gamma) dt - H(\Omega, a, \gamma) \tau, \quad (18)$$

$$Y(t, \Omega, a, \gamma) = 2 [\gamma y^2(t, \Omega) / N_0 + ax(t)] / (N_0 + 2\gamma),$$

$$H(\Omega, a, \gamma) = a^2 / (N_0 + 2\gamma) + \Omega \ln(1 + 2\gamma / N_0) / (4\pi).$$

Нетрудно показать, что логарифм ФОП (18) достигает наибольшего максимума по переменным a и γ , когда $a = \sqrt{N_0 / \tau} R_2(\lambda, \tau)$, $\gamma = R_3(\lambda, \tau, \Omega)$, причем $\sup_{a, \gamma} M(\lambda, \tau, \Omega, a, \gamma) = L(\lambda, \tau, \Omega)$. Тогда

$$(\lambda_m, \tau_m) = \arg \sup_{\lambda, \tau} \left[\sup_{\Omega} L(\lambda, \tau, \Omega) \right], \quad (19)$$

$$a_m = \sqrt{N_0 / \tau_m} R_2(\lambda_m, \tau_m), \quad \gamma_m = R_3(\lambda_m, \tau_m, \Omega_m). \quad (20)$$

Аппаратурная или программная реализация совместных ОМП (17), (19), (20) в ряде случаев может оказаться весьма сложной. Действительно, формирование логарифма ФОП $L(\lambda, \tau, \Omega)$ (6) и реализация процедуры (19) поиска положения наибольшего максимума этого случайного поля, зависящего от трех переменных, требуют больших вычислительных и аппаратурных затрат. Поэтому аналогично [6] на основе (19), (20) получим упрощенный алгоритм оценки параметров импульса (1). Для этого расширим область возможных значений параметров θ_{01} и θ_{02} до границ, задаваемых условиями $\theta_{01} \in [V_{11}; V_{21}]$, $\theta_{02} \in [V_{12}; V_{22}]$, где

$$V_{11} = \Lambda_1 - T_2 / 2, \quad V_{21} = \Lambda_2 - T_1 / 2, \quad V_{12} = \Lambda_1 + T_1 / 2, \quad V_{22} = \Lambda_2 + T_2 / 2.$$

Полагая $T_1 > \Lambda_2 - \Lambda_1$, так что $\tau = \theta_2 - \theta_1 > 0$ для всех $\theta_i \in [V_{1i}; V_{2i}]$, $i = 1, 2$, представим логарифм ФОП (18) в виде

$$M(\lambda, \tau, \Omega, a, \gamma) = M_1(\lambda - \tau / 2, \Omega, a, \gamma) + M_2(\lambda + \tau / 2, \Omega, a, \gamma),$$

$$M_1(\theta_1, \Omega, a, \gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} Y(t, \Omega, a, \gamma) dt - (\theta_2 - \theta_1) H(\Omega, a, \gamma), \quad (21)$$

$$M_2(\theta_2, \Omega, a, \gamma) = \int_{\theta}^{\theta_2} Y(t, \Omega, a, \gamma) dt - (\theta_2 - \theta) H(\Omega, a, \gamma),$$

где θ — фиксированный момент времени из интервала $[V_{21}; V_{12}]$. Тогда ОМП θ_{1m0} и θ_{2m0} положений переднего и заднего фронтов импульса (1) с априори известными параметрами a_0 , γ_0 и Ω_0 запишутся в виде:

$$\theta_{im0}^* = \arg \sup_{\theta_i \in [V_{1i}; V_{2i}]} M_i(\theta_i, \Omega_0, a_0, \gamma_0), \quad i = 1, 2. \quad (22)$$

При неизвестных значениях параметров импульса (1) подставим в (22) вместо Ω_0 , a_0 и γ_0 их оценки

$$(\Omega_{ig}, a_{ig}, \gamma_{ig}) = \arg \sup M_i(\theta_i, \Omega, a, \gamma), \quad \Omega \in [W_1; W_2]$$

соответственно. Тогда ОМП (22) перейдут в оценки

$$\theta_{is} = \arg \sup_{\theta_i \in [V_{1i}; V_{2i}]} \left[\sup_{\Omega \in [W_1; W_2]} L_i(\theta_i, \Omega) \right], \quad i = 1, 2, \quad (23)$$

где

$$L_i(\theta_i, \Omega) = \sup_{a, \gamma} M_i(\theta_i, \Omega, a, \gamma) = R_{1i}(\theta_i, \Omega) - \mu_i \{1 + \ln[\{R_{1i}(\theta_i, \Omega) - R_{2i}^2(\theta_i)\} / \mu_i]\}, \quad \mu_i = |\theta - \theta_i| \Omega / 4\pi, \quad (24)$$

$$R_{11}(\theta_1, \Omega) = \int_{\theta_1}^{\theta} y^2(t, \Omega) dt / N_0, \quad R_{21}(\theta_1) = \int_{\theta_1}^{\theta} x(t) dt / \sqrt{N_0(\theta - \theta_1)},$$

$$R_{12}(\theta_2, \Omega) = \int_{\theta}^{\theta_2} y^2(t, \Omega) dt / N_0, \quad R_{22}(\theta_2) = \int_{\theta}^{\theta_2} x(t) dt / \sqrt{N_0(\theta_2 - \theta)}.$$

Теперь вместо ОМП λ_m , τ_m (19) и a_m , γ_m (20) будем использовать оценки

$$\lambda_s = (\theta_{2s} + \theta_{1s}) / 2, \quad \tau_s = \theta_{2s} - \theta_{1s}, \quad (25)$$

$$a_s = \sqrt{N_0 / \tau_s} R_2(\lambda_s, \tau_s), \quad \gamma_s = R_3(\lambda_s, \tau_s, \Omega_s) \quad (26)$$

соответственно, где

$$\Omega_s = \arg \sup_{\Omega \in [V_1; V_2]} L(\lambda_s, \tau_s, \Omega). \quad (27)$$

Таким образом, использование оценок (23) позволяет перейти от ОМП (19), (20) к более приемлемым с точки зрения аппаратной реализации оценкам (25), (26). Действительно, для формирования оценок λ_s и τ_s (25) необходимо реализовать процедуры (23) поиска положений наибольших максимумов функций (24) только по двум переменным, а для формирования оценки Ω_s (27) — функции (6) по переменной Ω при фиксированных θ_{1s} и θ_{2s} . Такие процедуры требуют при их практической реализации значительно меньших вычислительных и аппаратных затрат, чем процедура (19) поиска положения максимума функции трех переменных. Однако оценки $(\Omega_{ig}, a_{ig}, \gamma_{ig})$, используемые при получении (23), не являются ОМП. Поэтому и оценки (25), (26), в отличие от (19), (20), уже не будут максимально-правдоподобны. Как будет показано ниже, оценки (25), (26) являются асимптотически максимально-правдоподобными оценками (АМПО).

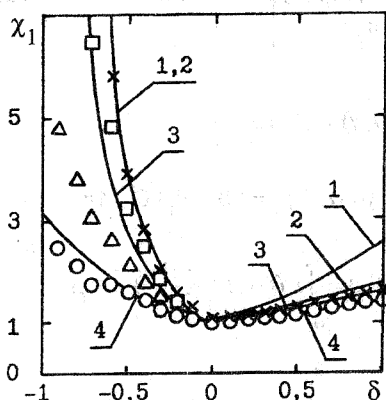


Рис. 3

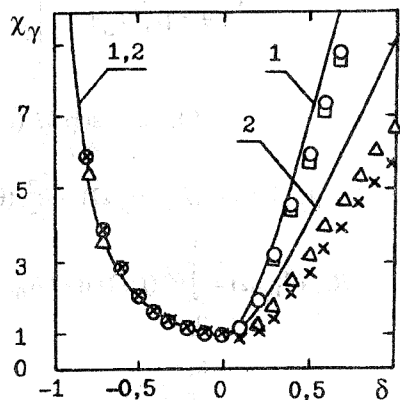


Рис. 4

Исследуем сначала статистические свойства функционалов (24). Представим функционалы (24) в виде суммы

$$L_i(\theta_p, \Omega) = S_i(\theta_p, \Omega) + N_i(\theta_p, \Omega), \quad i = 1, 2, \quad (28)$$

где $S_i(\theta_p, \Omega) = \langle L_i(\theta_p, \Omega) \rangle$ — сигнальные, $N_i(\theta_p, \Omega) = L_i(\theta_p, \Omega) - \langle L_i(\theta_p, \Omega) \rangle$ — шумовые функции [7]. Аналогично [2] можно показать, что при выполнении условия

$$\mu_{0i} = |\vartheta - \theta_{0i}| \Omega_0 / 4 \pi \gg 1, \quad i = 1, 2, \quad (29)$$

сигнальные функции $S_i(\theta_p, \Omega)$ достигают наибольшего максимума при $\theta_i = \theta_{0i}$, $\Omega = \Omega_0$, а шумовые функции $N_i(\theta_p, \Omega)$ являются асимптотически (при $\mu_{0i} \rightarrow \infty$) гауссовскими случайными полями, реализации которых непрерывны с вероятностью 1. Поэтому ограничимся рассмотрением первых двух моментов функционалов (24) в малой окрестности значений θ_{0i} и Ω_0 . При выполнении (2), (29) и $\Delta = \max(|\theta_1 - \theta_{01}|/\tau_0, |\theta_2 - \theta_{02}|/\tau_0, |\Omega - \Omega_0|/\Omega_0) \rightarrow 0$ для сигнальных функций получаем:

$$S_i(\theta_p, \Omega) = [A_1 \min(\Omega, \Omega_0)/\Omega_0 + A_3] \min(|\theta_i - \vartheta|, |\theta_{0i} - \vartheta|)/\tau_0 - (A_2 \Omega/\Omega_0 + A_4) |\theta_i - \vartheta|/\tau_0 + o(\Delta), \quad i = 1, 2, \quad (30)$$

$$A_1 = \mu_0 q^2 / (1 + q), \quad A_2 = \mu_0 [\ln(1 + q) - q / (1 + q)],$$

$$A_3 = z_0^2 (1 + q/2) / (1 + q), \quad A_4 = z_0^2 / 2 (1 + q),$$

а корреляционные функции шумовых функций можно представить в виде:

$$\begin{aligned} B_i(\theta_{1p}, \Omega_1, \theta_{2p}, \Omega_2) &= \langle N_i(\theta_{1p}, \Omega_1) N_i(\theta_{2p}, \Omega_2) \rangle = \\ &= [D_1 \min(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_0)/\Omega_0 + D_3] \min(|\theta_{2i} - \vartheta|, |\theta_{1i} - \vartheta|, |\theta_{0i} - \vartheta|)/\tau_0 + \\ &+ [D_2 \min(\Omega_1, \Omega_2)/\Omega_0 + D_4] \min(|\theta_{2i} - \vartheta|, |\theta_{1i} - \vartheta|)/\tau_0 + \\ &+ [A_1 \min(\Omega_1, \Omega_0)/\Omega_0 + A_3] \min(|\theta_{1i} - \vartheta|, |\theta_{0i} - \vartheta|)/\tau_0 + \\ &+ [A_1 \min(\Omega_2, \Omega_0)/\Omega_0 + A_3] \min(|\theta_{2i} - \vartheta|, |\theta_{0i} - \vartheta|)/\tau_0 + \\ &+ A_1 (\Omega_1/\Omega_0 + A_3) |\theta_{1i} - \vartheta|/\tau_0 + (A_1 \Omega_2/\Omega_0 + A_3) |\theta_{2i} - \vartheta|/\tau_0 + o(\Delta) \end{aligned} \quad (31)$$

$$D_1 = \mu_0 q^3 (2 + q) / (1 + q)^2, \quad D_3 = z_0^2 [(1 + q)^3 - 1] / (1 + q)^2,$$

$$D_2 = \mu_0 q^2 / (1 + q)^2, \quad D_4 = z_0^2 / (1 + q)^2.$$

Из (30), (31) следует, что первые два момента функционалов $L_i(\theta_p, \Omega)$ (24) не имеют непрерывных производных по параметрам θ_i и Ω в точках (θ_{0i}, Ω_0) максимума сигнальных функций $S_i(\theta_p, \Omega)$. Это не позволяет для вычисления характеристик оценок (23) воспользоваться формулой Крамера—Рао или методом малого параметра [4, 5, 7], требующими непрерывной дифференцируе-

мости моментов решающих статистик хотя бы дважды. Следуя [2, 6—8], будем считать, что кроме (2), (29) выполняется условие

$$z^2 = (A_1 - A_2)^2 / (D_1 + D_2) = \mu_0 [q - \ln(1 + q)]^2 / q^2 \gg 1, \quad (32)$$

обеспечивающее высокую апостериорную точность АМПО (23), (25)—(27). Тогда координаты положения наибольшего максимума функционала $L_i(\theta_p, \Omega)$ (24) лежат в малой окрестности точки (θ_{0p}, Ω_0) и $\theta_{is} \rightarrow \theta_{0p}$, $\Omega_s \rightarrow \Omega_0$ в среднеквадратическом при $z \rightarrow \infty$. В результате, для нахождения характеристик оценок (23), (25) в условиях высокой апостериорной точности достаточно исследовать поведение функционалов (24) в малой окрестности значений θ_{0p} , Ω_0 , когда $\Delta \rightarrow 0$.

Обозначим ζ_i , $i = 1, 2$ — гауссовские случайные величины с математическими ожиданиями $m_i = S_i(\theta_{01}, \Omega_0)$ (30) и дисперсиями $\sigma_i^2 = B_i(\theta_{01}, \Omega_0, \theta_{01}, \Omega_0)$ (31), а $L_{fi}(\Omega)$, $i = 1, 2$ — гауссовские случайные процессы с математическими ожиданиями $m_{fi}(\Omega) = S_i(\theta_{0p}, \Omega)$ (30) и корреляционными функциями $B_{fi}(\Omega_1, \Omega_2) = B_i(\theta_{0p}, \Omega_1, \theta_{0p}, \Omega_2)$ (31), причем ζ_i и $L_i(\theta_p, \Omega)$, а также $L_{fi}(\Omega)$ и $L_i(\theta_p, \Omega_0)$ статистически не зависимы. При $\Delta \rightarrow 0$ для моментов (30), (31) функционалов (24) справедливы разложения

$$S_i(\theta_p, \Omega) + m_i = S_i(\theta_p, \Omega_0) + m_{fi}(\Omega) + o(\Delta), \quad (33)$$

$$B_i(\theta_{1p}, \Omega_1, \theta_{2p}, \Omega_2) + \sigma_i^2 = B_i(\theta_{1p}, \Omega_0, \theta_{2p}, \Omega_0) + B_{fi}(\Omega_1, \Omega_2) + o(\Delta).$$

Таким образом, при $\Delta \rightarrow 0$ главные члены асимптотических разложений моментов случайного поля $L_i(\theta_p, \Omega) + \zeta_i$ совпадают с соответствующими моментами случайного поля $L_i(\theta_p, \Omega_0) + L_{fi}(\Omega)$. Следовательно, в условиях высокой апостериорной точности статистические характеристики оценок θ_{is} (23) совпадают с характеристиками ОМП

$$\theta_{im0} = \arg \sup_{\theta_i \in [V_{1i}, V_{2i}]} \left\{ \sup_{\Omega \in [W_1, W_2]} [L_i(\theta_p, \Omega_0) + L_{fi}(\Omega)] \right\} \equiv \arg \sup_{\theta_i \in [V_{1i}, V_{2i}]} L_i(\theta_p, \Omega_0),$$

$$i = 1, 2 \quad (34)$$

моментов появления и исчезновения сигнала (1) с априори известной шириной полосы частот [2]. Соответственно характеристики оценок λ_s и τ_s (25) совпадают с характеристиками ОМП λ_{m0} и τ_{m0} (3) времени прихода и длительности импульса (1) с априори известной шириной полосы частот [2]. Поэтому оценки

(23), (25) являются асимптотически (при $\mu_{0i} \rightarrow \infty, z \rightarrow \infty$) максимально-правдоподобными. Из [2] получаем приближенные выражения для нормированных смещений и рассеяний оценок (23), (25):

$$b_{is} = \langle \theta_{is} - \theta_{0i} \rangle / \tau_0 = (-1)^{i+1} b(z_1, z_2, R), \quad i = 1, 2, \quad (35)$$

$$V_{is} = \langle (\theta_{is} - \theta_{0i})^2 \rangle / \tau_0^2 = V(z_1, z_2, R),$$

$$b_{ls} = \langle \lambda_s - \lambda_0 \rangle / \tau_0 = 0, \quad b_{ts} = \langle \tau_s - \tau_0 \rangle / \tau_0 = -2 b(z_1, z_2, R),$$

$$V_{ls} = \langle (\lambda_s - \lambda_0)^2 \rangle / \tau_0^2 = [V(z_1, z_2, R) - b^2(z_1, z_2, R)] / 2,$$

$$V_{ts} = \langle (\tau_s - \tau_0)^2 \rangle / \tau_0^2 = 2 [V(z_1, z_2, R) + b^2(z_1, z_2, R)],$$

где функции $V(x_1, x_2, R)$ и $b(x_1, x_2, R)$ определяются из (13),

$$z_1^2 = c_1^2 / d_1, \quad z_2^2 = c_2^2 / d_2, \quad R = c_2 d_1 / c_1 d_2,$$

$$c_1 = A_1 + A_3 - c_2 = \mu_0 [q - \ln(1 + q)] + z_0^2 / 2,$$

$$c_2 = A_2 + A_3 = \mu_0 [\ln(1 + q) - q / (1 + q)] + z_0^2 / 2(1 + q), \quad (36)$$

$$d_1 = D_1 + D_3 + d_2 = \mu_0 q^2 + z_0^2 (1 + q),$$

$$d_2 = D_2 + D_4 = (\mu_0 q^2 + z_0^2) / (1 + q)^2.$$

Точность выражений (35) возрастает с увеличением μ_{0i} (29) и z^2 (32).

Нетрудно убедиться, что асимптотические выражения (35), (36) для характеристик АМПО (23), (25) временных параметров сигнала (1) с неизвестными математическим ожиданием a_0 и величиной спектра мощности γ_0 совпадают с соответствующими выражениями для характеристик АМПО этих же параметров при известных значениях a_0 и γ_0 [6].

Рассмотрим теперь характеристики оценок a_s и γ_s (26). Положим вначале, что величины параметров λ_0, τ_0 и Ω_0 априори известны. Тогда в (26) следует подставить $\lambda_s = \lambda_0, \tau_s = \tau_0, \Omega_s = \Omega_0$. Усредняя выражения (26) при $\lambda_s = \lambda_0, \tau_s = \tau_0, \Omega_s = \Omega_0$ и выполнении (2), получаем

$$b_{as} = \langle a_s - a_0 \rangle / a_0 = 0, \quad b_{\gamma s} = \langle \gamma_s - \gamma_0 \rangle / \gamma_0 = -(1 + q) / 2 \mu_0 q,$$

$$D_{as} = \langle (a_s - \langle a_s \rangle)^2 \rangle / a_0^2 = (1 + q) / z_0^2, \quad (37)$$

$$D_{\gamma_s} = \langle (\gamma_s - \langle \gamma_s \rangle)^2 \rangle / \gamma_0^2 = (1+q)^2 / \mu_0 q^2.$$

Положим, что величины параметров λ_0 , τ_0 и Ω_0 неизвестны. Из (35) следует, что при выполнении (29), (32) рассеяния оценок λ_s и τ_s (25) имеет порядок z_1^{-4} , причем $z_1^2 \gg 1$. Так как $(1+q)/z_0^2 \geq 1/4 z_1^2$, то рассеяние оценки a_s имеет порядок $z_1^{-\beta}$, $\beta \leq 2$. С другой стороны, из (35) следует, что рассеяния оценок λ_s и τ_s имеют порядок $z^{-4\alpha}$, $\alpha \geq 1$. Исследуя аналогично (30)—(34) статистические характеристики функционала (6), получаем, что при выполнении (29), (32) характеристики оценки Ω_s (27) приближенно совпадают с характеристиками ОМП ширины полосы частот импульса (1) с априори известными параметрами [9], и, следовательно, рассеяние оценки (27) имеет порядок z^{-4} . Поскольку $(1+q)^2 / \mu_0 q^2 \geq 1/z^2$, то рассеяние оценки γ_s имеет порядок $z^{-\beta}$, $\beta \leq 2$. Поэтому аналогично [10] получаем, что при выполнении (29), (32) характеристики оценок (26) совпадают с соответствующими характеристиками (37), найденными при известных γ_0 , τ_0 и Ω_0 . Точность аппроксимаций (37) возрастает с увеличением μ_{0i} и z^2 .

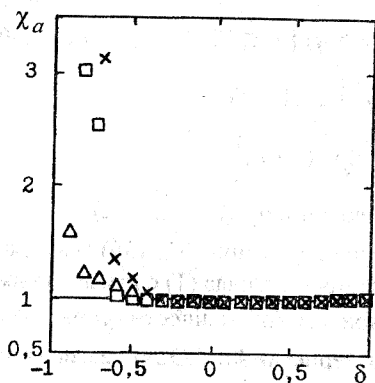


Рис. 5

Нетрудно убедиться, что асимптотические выражения (37) для характеристик оценок a_s и γ_s (26) совпадают с соответствующими выражениями [2] для характеристик ОМП a_{m0} и γ_{m0} (5). Поэтому оценки (26) являются асимптотически (при $\mu_{0i} \rightarrow \infty$ и $z \rightarrow \infty$) максимально правдоподобными.

Отметим также, что отношения χ_b , χ_r , χ_1 , χ_γ и χ_a , зависимости которых от величины δ показаны на рис. 1—5, являются также отношениями рассеяний КПО (8)—(10) к соответствующим рассеяниям АМПО (23), (25), (26) и характеризуют выигрыши в точности АМПО по сравнению с КПО при неизвестной ширине полосы частот сигнала (1).

С целью проверки работоспособности синтезированных алгоритмов и определения границ применимости найденных здесь асимптотически точных формул для характеристик оценок было проведено статистическое моделиро-

вание КПО и АМПО на ЭВМ. В процессе моделирования для различных реализаций $x(t)$ смеси сигнала и шума формировались отсчеты функционалов $L[(\theta_1 + \theta_2)/2, \theta_2 - \theta_1, \Omega]$ (6) и $L_i(\theta_i, \Omega)$, $i = 1, 2$ (34) при $\theta_1 \in [\lambda_0 - \tau_0; \lambda_0 - 5\tau_k]$, $\theta_2 \in [\lambda_0 + 5\tau_k; \lambda_0 + \tau_0]$, $\Omega \in [\Omega_0/10; 2\Omega_0]$ с шагом $0,005\tau_0$ по θ_1 , θ_2 и от $0,005\Omega_0$ до $0,02\Omega_0$ по Ω . Затем, согласно (8)—(10), (23), (25)—(27) формировались КПО $\lambda_q, \tau_q, \theta_{1q}, \theta_{2q}, a_q, \gamma_q$ и АМПО $\lambda_s, \tau_s, \theta_{1s}, \theta_{2s}, a_s, \gamma_s$, вычислялись рассеяния оценок и отношения $\chi_b, \chi_r, \chi_l, \chi_a$ и χ_γ рассеяний КПО и АМПО.

Некоторые экспериментальные значения отношений рассеяний КПО и АМПО показаны на рис. 1—5. Треугольники на рис. 1—3 соответствуют $z_0 = 0, q = 0,7$; крестики — $z_0 = 0, q = 2$; квадратики — $z_0 = 7, q = 2$; кружочки — $z_0 = 7, q = 0,7$. На рис. 4, 5 крестики соответствуют $z_0 = 0, q = 1,4$; треугольники — $z_0 = 7, q = 1,4$; квадратики — $z_0 = 0, q = 3$; кружочки — $z_0 = 7, q = 3$. Каждое экспериментальное значение получено в результате обработки не менее 10^3 реализации $x(t)$. В результате, с вероятностью 0,9 границы доверительных интервалов отклоняются от экспериментальных значений не более чем на 10...30%. Из рис. 1—5 и других результатов моделирования следует, что теоретические зависимости (12), (35) для характеристик КПО (8), (9) и АМПО (23), (25) удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными при $z_m = \min(z_1, z_2) > 4 \dots 5$, а зависимости (15), (37) для характеристик КПО (10) и АМПО (26) — при $z > 6 \dots 7$. Результаты моделирования подтверждают работоспособность и эффективность алгоритма АМПО (23)—(27), а также наличие выигрыша в точности АМПО по сравнению с КПО (8)—(10) при неизвестной ширине полосы частот сигнала (1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Репин В. Г. Обнаружение сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения // Проблемы передачи информации. — 1991. — № 1. — С. 61—72.
2. Трифонов А. П., Захаров А. В. Теоретическое и экспериментальное исследование оценок параметров случайного сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения // Радиотехника и электроника. — 1996. — Т. 41. — № 8. — С. 972—978.
3. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т. 3. — М.: Сов. радио, 1977. — 644 с.
4. Фалькович С. Е., Хомяков Э. Н. Статистическая теория измерительных радиосистем. — М.: Радио и связь, 1981. — 246 с.
5. Вопросы статистической теории радиолокации / П. А. Бакут, И. А. Большаков, Б. М. Герасимов и др.; Т. 1. — М.: Сов. радио, 1963. — 426 с.
6. Трифонов А. П., Захаров А. В., Проняев Е. В. Совместная оценка частотных и временных параметров импульса со случайной субструктурой // Радиотехника. — 1998. — № 12. — С. 34—38.