

208  
p-5014/2001/46/10  
62  
Том 46, Номер 10

208  
ISSN 0033-8494  
Октябрь 2001



# РАДИОТЕХНИКА и ЭЛЕКТРОНИКА

Главный редактор  
Ю.В. Гуляев

<http://www.malk.ru>



“НАУКА”

МАИК “НАУКА/ИНТЕРПЕРИОДИКА”

454

СТАТИСТИЧЕСКАЯ  
РАДИОФИЗИКА

УДК 621.391

ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБНАРУЖЕНИЯ СЛУЧАЙНОГО  
РАДИОИМПУЛЬСА С НЕИЗВЕСТНЫМИ ВРЕМЕНЕМ ПРИХОДА  
И ЦЕНТРАЛЬНОЙ ЧАСТОТОЙ ПРИ ЧАСТИЧНОМ НАРУШЕНИИ  
УСЛОВИЙ РЕГУЛЯРНОСТИ

© 2001 г. А. П. Трифонов, А. В. Захаров

Поступила в редакцию 13.02.2001 г.

Получены асимптотические выражения для вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала при обнаружении флуктуирующего радиоимпульса на фоне белого шума. Рассмотрены случай прямоугольной модулирующей функции и непрерывной спектральной плотности случайной субструктуры радиоимпульса, а также случай непрерывной модулирующей функции и прямоугольной спектральной плотности случайной субструктуры. Границы применимости асимптотических выражений установлены при помощи статистического моделирования на электронно-вычислительной машине.

## ВВЕДЕНИЕ

В ряде практических приложений статистической радиофизики и радиотехники возникает проблема обнаружения импульсных радиосигналов с неизвестными временем прихода и несущей частотой, наблюдаемых на фоне помех [1, 2]. В работах [3, 4] рассмотрена задача обнаружения случайного радиоимпульса

$$s(t) = \xi(t)U[(t - \lambda_0)/\tau], \quad (1)$$

где  $U(x)$  – модулирующая функция, нормированная так, что

$$\max U(x) = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} U^2(x)dx = 1, \quad (2)$$

$\lambda_0$  – время прихода;  $\tau$  – длительность импульса;  $\xi(t) = a(t)\cos[v_0 t - \varphi(t)]$  – реализация стационарного узкополосного центрированного гауссовского случайного процесса со спектральной плотностью

$$G(\omega, v_0) = (\gamma/2) \times \quad (3)$$

$$\times \{G_0[(v_0 - \omega)/\Omega] + G_0[(v_0 + \omega)/\Omega]\}, \quad v_0 \gg \Omega/2,$$

описывающая случайную субструктуру сигнала (1). Здесь  $\gamma = 2\max_{\omega} G(\omega, v)$  – интенсивность;  $\Omega =$

$= \int_0^{\infty} G^2(\omega, v)d\omega / \max_{\omega} G^2(\omega, v)$  – эквивалентная полоса частот;  $v_0$  – центральная частота спектральной плотности;  $G_0(x)$  – функция, описывающая форму спектральной плотности случайной субструктуры и удовлетворяющая условиям

$$\max G_0(x) = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_0^2(x)dx = 1, \quad G_0(x) \geq 0. \quad (4)$$

Процессы  $a(t)$  и  $\varphi(t)$ , являющиеся огибающей и фазой случайной субструктуры, описывают амплитудные и фазовые флуктуации сигнала (1) и имеют соответственно рэлеевское и равномерное распределения [5]. Время корреляции случайного процесса  $\xi(t)$  значительно меньше длительности  $\tau$  радиоимпульса (1), так что

$$\mu = \tau\Omega/2\pi \gg 1. \quad (5)$$

При выполнении (5) параметр  $v_0$  характеризует центральную частоту случайного радиоимпульса (1).

В работе [3] на основе метода максимального правдоподобия (МП) выполнены синтез и анализ алгоритма обнаружения случайного радиоимпульса с неизвестными временем прихода и центральной частотой, наблюдаемого на фоне белого шума. При получении характеристик обнаружения в [3] предполагали, что моменты решающей статистики – логарифма функционала отношения правдоподобия (ФОР) – непрерывно дифференцируемы по неизвестным параметрам импульса хотя бы дважды, т.е. выполняются обычные условия регулярности [6–9]. В этом случае логарифм ФОР является регулярным (дифференцируемым) случайным полем как по времени прихода, так и по частоте сигнала. Отметим, что условия регулярности логарифма ФОР выполняются, если функции  $U(x)$  и  $G_0(x)$  непрерывно дифференцируемы. В работе [4] найдены характеристики МП-обнаружения радиоимпульса (1) с прямоугольными модулирующей функцией и спектральной плотностью субструктуры. В этом случае производные моментов логарифма ФОР имеют разрывы 1-го рода как по времени прихода, так и по частоте сигнала. В результате условия регулярности не выполняются для обоих неизвестных параметров сигнала и логарифм ФОР

является разрывным (недифференцируемым) случайным полем.

В различных приложениях статистической радиофизики и радиотехники используется модель радиосигнала с прямоугольной модулирующей функцией и дифференцируемым спектром [1, 2, 5]. Для случайного радиоимпульса с прямоугольной модулирующей функцией и непрерывно дифференцируемой спектральной плотностью флуктуаций в (1) следует полагать

$$U(x) = I(x), \quad G_0(x) = g(x), \quad (6)$$

где  $I(x) = 1$  при  $|x| \leq 1/2$ ;  $I(x) = 0$  при  $|x| > 1/2$ ;  $g(x)$  – дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям (4). Ниже будет показано, что при выполнении (6) моменты логарифма ФОП непрерывно дифференцируемы по центральной частоте сигнала, однако производные этих моментов по времени прихода сигнала имеют разрывы 1-го рода. Следовательно, условия регулярности решающей статистики нарушаются частично: только по времени прихода сигнала и результаты [3, 4], полученные в предположении полной регулярности или нерегулярности логарифма ФОП, будут не применимы в случае (6). Эти результаты также будут не применимы для сигнала (1) с прямоугольной спектральной плотностью субструктуры и непрерывно дифференцируемой модулирующей функцией

$$U(x) = f(x), \quad G_0(x) = I(x), \quad (7)$$

где  $f(x)$  – дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям (2). В этом случае моменты логарифма ФОП непрерывно дифференцируемы по времени прихода сигнала, однако производные этих моментов по частоте сигнала имеют разрывы 1-го рода. Следовательно, в случае (7) условия регулярности решающей статистики нарушаются только по частоте сигнала и результаты [3, 4] также не применимы.

Ниже на основе новой методики анализа частично дифференцируемых (частично регулярных) случайных полей найдены характеристики МП-обнаружения радиоимпульса (1) с известными временем прихода и центральной частотой при дифференцируемости моментов логарифма ФОП только по одному из неизвестных параметров сигнала.

## 1. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛОГАРИФМА ФОП

Следуя [3, 4], будем считать, что импульс (1) принимается в течение времени  $[0; T]$  на фоне аддитивного гауссовского белого шума  $n(t)$  с односторонней спектральной плотностью  $N_0$ , причем сигнал (1) и шум статистически не зависимы. Наблюдению доступна реализация  $x(t) = is(t) + n(t)$ ,

где  $i = 1$  при наличии сигнала в наблюдаемых данных, а при отсутствии сигнала  $i = 0$ .

Пусть время прихода  $\lambda_0$  и центральная частота  $\nu_0$  импульса (1) принимают значения из априорной области  $\Lambda$ , задаваемой условиями  $\lambda \in [\lambda_{\min}; \lambda_{\max}]$ ,  $\nu \in [\nu_{\min}; \nu_{\max}]$ . Тогда алгоритм МП-обнаружения сигнала (1) сводится к сравнению с порогом  $h$  величины абсолютного (наибольшего) максимума логарифма ФОП  $L(\lambda, \nu)$  в пределах априорной области  $(\lambda, \nu) \in \Lambda$ . Если порог превышен, то принимается решение о наличии сигнала (1), в противном случае принимается решение об отсутствии сигнала. Величину порога  $h$  выбирают в соответствии с заданным критерием оптимальности обнаружения [1, 2, 5]. При выполнении (5) логарифм ФОП с точностью до несущественного постоянного слагаемого  $C = \mu \int_{-\infty}^{\infty} \ln[1 + qG_0(x)]dx$  можно представить в виде [3]

$$L(\lambda, \nu) = \frac{1}{N_0} \int_0^T U^2[(t - \lambda)/\tau] \times \\ \times \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(t') h(t - t', \nu) dt' \right]^2 dt, \quad (8)$$

где  $q = \gamma/N_0$ , а передаточная функция  $H(\omega, \nu)$ , соответствующая импульсной характеристике  $h(t, \nu)$ , удовлетворяет условию  $|H(\omega, \nu)|^2 = qG_0[(\nu - \omega)/\Omega] / \{1 + qG_0[(\nu - \omega)/\Omega]\} + qG_0[(\nu + \omega)/\Omega] / \{1 + qG_0[(\nu + \omega)/\Omega]\}$ . Возможности реализации МП алгоритма обнаружения рассмотрены в [3].

Найдем характеристики МП-обнаружения сигнала (1) с прямоугольной модулирующей функцией (случай (6)) и с прямоугольной спектральной плотностью субструктуры (случай (7)). Отметим, что характеристики обнаружения импульса (1) при  $U(x) = I(x)$ ,  $G_0(x) = I(x)$  получены в [4], а при  $U(x) = f(x)$ ,  $G_0(x) = g(x)$  – в [3]. Однако результаты работ [3, 4] не применимы для расчета характеристик обнаружения в случаях (6), (7).

Исследуем статистические характеристики функционала (8). Обозначим  $S_i(\lambda, \nu) = \langle L(\lambda, \nu) | i \rangle$  регулярные, а  $N_i(\lambda, \nu) = L(\lambda, \nu) - \langle L(\lambda, \nu) | i \rangle$  флуктуирующие составляющие логарифма ФОП при наличии ( $i = 1$ ) и отсутствии ( $i = 0$ ) сигнала (1) в наблюдаемых данных  $x(t)$ . Здесь усреднение выполняется по реализациям  $x(t)$  при фиксированных  $\lambda_0$  и  $\nu_0$  [6, 7]. Введем нормированные параметры  $\eta = \lambda/\tau$ ,  $\kappa = \nu/\Omega$ ,  $\eta_j = \lambda_j/\tau$ ,  $\kappa_j = \nu_j/\Omega$ ,  $j = 0; 1; 2$  в случае (6) и  $\eta = \nu/\Omega$ ,  $\kappa = \lambda/\tau$ ,  $\eta_j = \nu_j/\Omega$ ,  $\kappa_j = \lambda_j/\tau$  в случае (7). Тогда при выполнении (5) для регулярных составляющих логарифма ФОП получаем выражения

$$S_i(\lambda, \nu) = iA_1 C_1(\eta - \eta_0) C_{20}(\kappa - \kappa_0) + A_0, \\ i = 0; 1,$$



$$C_1(\eta) = \begin{cases} 1 - |\eta| & \text{при } |\eta| < 1, \\ 0 & \text{при } |\eta| \geq 1, \end{cases} \quad A_1 = \mu q^2, \quad (9)$$

$$C_{20}(\kappa) = \begin{cases} G_{101}(\kappa, 0) & \text{для (6),} \\ F_{202}(\kappa, 0)/(1+q) & \text{для (7),} \end{cases} \quad A_0 = \mu q \begin{cases} G_{100}(0, 0) & \text{для (6),} \\ 1/(1+q) & \text{для (7).} \end{cases}$$

Первые два момента флуктуирующих составляющих имеют вид

$$\langle N_i(\lambda, \nu) \rangle = 0, \quad \langle N_i(\lambda_1, \nu_1) N_i(\lambda_2, \nu_2) \rangle \equiv K_i(\lambda_1, \nu_1, \lambda_2, \nu_2) =$$

$$= D_0 C_1(\eta_1 - \eta_2) C_2(\kappa_1 - \kappa_2) + i D_1 R_1(\eta_1 - \eta_0, \eta_2 - \eta_0) R_2(\kappa_1 - \kappa_0, \kappa_2 - \kappa_0),$$

$$D_0 = \mu q^2, \quad D_1 = \mu q^3, \quad C_2(\kappa) = \begin{cases} G_{110}(\kappa, 0) & \text{для (6),} \\ F_{220}(\kappa, 0)/(1+q)^2 & \text{для (7),} \end{cases} \quad (10)$$

$$R_1(\eta_1, \eta_2) = \max \left[ 0; \begin{cases} \frac{1 - |\eta_1 - \eta_2| - \min(|\eta_1|, |\eta_2|)}{1 - |\eta_1 - \eta_2|} & \text{при } \eta_1 \eta_2 \geq 0, \\ 1 - |\eta_1 - \eta_2| & \text{при } \eta_1 \eta_2 < 0, \end{cases} \right],$$

$$R_2(\kappa_1, \kappa_2) = \begin{cases} 2G_{111}(\kappa_1, \kappa_2) + qG_{112}(\kappa_1, \kappa_2) & \text{для (6),} \\ [2F_{222}(\kappa_1, \kappa_2) + qF_{224}(\kappa_1, \kappa_2)]/(1+q)^2 & \text{для (7).} \end{cases}$$

Здесь

$$G_{nmk}(\kappa_1, \kappa_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g''(x - \kappa_1) g'''(x - \kappa_2) g^k(x) dx}{[1 + qg(x - \kappa_1)]^n [1 + qg(x - \kappa_2)]^m},$$

$$F_{nmk}(\kappa_1, \kappa_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f''(x - \kappa_1) f'''(x - \kappa_2) f^k(x) dx.$$

Так как функционал (8) является асимптотически (при  $\mu \rightarrow \infty$ ) гауссовским случайным полем, при выполнении (5) ограничимся рассмотрением первых двух моментов (9), (10) логарифма ФОП.

Из выражений (9) следует, что регулярная составляющая  $S_1(\lambda, \nu)$  достигает абсолютного максимума в точке  $(\lambda_0, \nu_0)$  истинных значений времени прихода и частоты принимаемого сигнала (1). Производные регулярной составляющей  $S_1(\lambda, \nu)$  (9) и корреляционных функций (10) флуктуирующих составляющих  $N_1(\lambda, \nu)$  и  $N_0(\lambda, \nu)$  имеют в этой точке разрывы 1-го рода по времени прихода (в случае (6)) или по частоте (в случае (7)). Вместе с тем, моменты (9), (10) логарифма ФОП непрерывно дифференцируемы по частоте в случае (6) или по времени прихода в случае (7). Это не позволяет использовать известные методы анализа для определения характеристик МП-обнаружения радиопульса (1) с прямоугольной модулирующей функцией и непрерывно дифференцируемой спектральной плотностью субструктуры и радиопульса с прямоугольной спек-

тральной плотностью и непрерывно дифференцируемой модулирующей функцией. Получим выражения для вероятностей ложной тревоги (ВЛТ) и пропуска сигнала (ВПС) при обнаружении радиопульса (1) в условиях частичной дифференцируемости моментов логарифма ФОП.

## 2. ВЕРОЯТНОСТЬ ЛОЖНОЙ ТРЕВОГИ

Пусть сигнал (1) отсутствует в наблюдаемых данных  $x(t)$  ( $i = 0$ ). Тогда при выполнении условия (5), обеспечивающего приближенно гауссовский характер логарифма ФОП (8), вероятность ложной тревоги  $\alpha$  можно представить в виде  $\alpha = P[\max_{(\lambda, \nu) \in \Lambda} L(\lambda, \nu) > h] = P[\max_{(\lambda, \nu) \in \Lambda} N_0(\lambda, \nu) > h - A_0] \approx P_M(u)$ , где  $u = (h - A_0)/\sqrt{D_0 C_2(0)}$  – нормированный порог;  $P_M(u) = P[\max_{(\eta, \kappa) \in \Theta} r_0(\eta, \kappa) > u]$  – вероятность превышения порога величиной абсолютного максимума однородного центрированного гауссовского случайного поля  $r_0(\eta, \kappa)$  с корреляционной функцией

$$R_0(\eta, \kappa) = C_1(\eta) C_2(\kappa) / C_2(0). \quad (11)$$

Здесь область  $\Theta$  возможных значений параметров  $\eta$  и  $\kappa$  задается условиями  $\eta \in [\eta_{\min}, \eta_{\max}]$ ,  $\kappa \in [\kappa_{\min}, \kappa_{\max}]$ , где  $\eta_{\min} = \lambda_{\min}/\tau$ ,  $\eta_{\max} = \lambda_{\max}/\tau$ ,  $\kappa_{\min} = v_{\min}/\Omega$ ,  $\kappa_{\max} = v_{\max}/\Omega$  в случае (6) и  $\eta_{\min} = v_{\min}/\Omega$ ,  $\eta_{\max} = v_{\max}/\Omega$ ,  $\kappa_{\min} = \lambda_{\min}/\tau$ ,  $\kappa_{\max} = \lambda_{\max}/\tau$  в случае (7).

Точное выражение для функции  $P_M(u)$  не известно. В работах [3, 6] с учетом асимптотически

пуассоновского распределения числа выбросов дифференцируемого однородного гауссовского случайного поля за уровень  $u \rightarrow \infty$  [8] и на основе приближенной формулы для среднего числа высоких выбросов [8] найдено асимптотически точное (с ростом  $u$ ) выражение для вероятности  $P_N(u)$ . Это выражение получено в предположении, что корреляционная функция поля непрерывно дифференцируема в нуле хотя бы дважды. Однако у корреляционной функции (11) не существует второй производной по  $\eta$  при  $\eta = 0$ , так что результаты [3, 6] здесь не применимы.

В работе [4] найдено асимптотически точное (с ростом  $u$ ) выражение для функции распределения  $F_N(u)$  абсолютного максимума однородного гауссовского случайного поля с недифференцируемой в нуле по обеим переменным корреляционной функцией  $R_0(\eta, \kappa) = C_1(\eta)C_1(\kappa)$ . Это выражение получено при помощи асимптотического (при  $u \rightarrow \infty$ ) разложения распределения максимума случайного поля и приближенного выражения [6] для вероятности неперевышения высокого порога стационарным гауссовским случайным процессом с треугольной корреляционной функцией. В отличие от [4] корреляционная функция (11) непрерывно дифференцируема по  $\kappa$  и результаты [4] также не применимы для вычисления вероятности  $P_N(u)$ .

Получим асимптотически точное (с ростом  $u$ ) выражение для вероятности  $P_N(u)$  на основе новой методики анализа, в которой используется асимптотически пуассоновский характер потока А-выходов случайного поля  $r_0(\eta, \kappa)$  за уровень  $u \rightarrow \infty$  [10]. Следуя [10], назовем А-выходом случайного поля  $r(\eta, \kappa)$  за уровень  $u$  такое пересечение уровня реализацией поля в некоторой точке  $(\eta^*, \kappa^*)$ , когда для некоторого значения  $a > 0$  существует область  $\Sigma$ , задаваемая условиями  $\eta \in [\eta^* - a/2; \eta^* + a/2]$ ,  $\kappa \in [\kappa^* - a; \kappa^*]$  и  $\eta \in [\eta^* - a/2; \eta^*]$ ,  $\kappa = \kappa^*$ , в пределах которой  $r(\eta, \kappa) < u$ . В силу асимптотически пуассоновского характера потока А-выходов

$$P_N(u) = 1 - \exp[-\Pi(u)] \quad (12)$$

при  $u \rightarrow \infty$ , где  $\Pi(u)$  – среднее число А-выходов случайного поля  $r_0(\eta, \kappa)$  за уровень  $u$  в пределах области значений  $(\eta, \kappa) \in \Theta$ . В работе [10] получено асимптотическое выражение для интенсивности потока А-выходов, откуда следует, что при  $u \rightarrow \infty$

$$\Pi(u) = \frac{m_1 \zeta_2}{2\sqrt{\pi}} u^2 H_a \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right),$$

$$\zeta_2 = m_2 \sqrt{-\partial^2 R_0(0, \kappa) / \partial \kappa^2} \Big|_{\kappa=0} =$$

$$= m_2 \sqrt{-\partial^2 C_2(\kappa) / \partial \kappa^2} \Big|_{\kappa=0} / C_2(0), \quad (13)$$

$$m_1 = \eta_{\max} - \eta_{\min}, \quad m_2 = \kappa_{\max} - \kappa_{\min},$$

$$H_a = \lim_{v \rightarrow \infty} [H_a^*(v) / v^2],$$

$$H_a^*(v) = 1 + \int_0^\infty P[\max_{(\eta, \kappa) \in \Theta} \chi(\eta, \kappa) > y] \exp(y) dy,$$

где  $\chi(\eta, \kappa)$  – гауссовское случайное поле с математическим ожиданием  $M(\eta, \kappa) = -|\eta| - \kappa^2$  и корреляционной функцией  $K(\eta_1, \kappa_1, \eta_2, \kappa_2) = \langle [\chi(\eta_1, \kappa_1) - \langle \chi(\eta_1, \kappa_1) \rangle][\chi(\eta_2, \kappa_2) - \langle \chi(\eta_2, \kappa_2) \rangle] \rangle = |\eta_1| + |\eta_2| + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 - |\eta_1 - \eta_2| - (\kappa_1 - \kappa_2)^2$ ;  $\Theta$  – область значений параметров  $\eta$  и  $\kappa$ , задаваемая условиями  $\eta \in [0; v]$ ,  $\kappa \in [0; v]$ . Здесь величины  $m_1$  и  $m_2$  определяют число сигналов (1), которые могут быть размещены на интервале времени  $[\lambda_{\min}; \lambda_{\max}]$  и в полосе частот  $[v_{\min}; v_{\max}]$  соответственно. При этом величины  $m_1$  и  $\zeta_2$  характеризуют число различных значений неизвестных параметров  $\lambda_0$  и  $v_0$  сигнала (1) в пределах априорной области  $\Lambda$ , а величина  $\bar{m} = m_1 \zeta_2$  называется приведенным объемом области  $\Lambda$  [6, 7].

Обозначим  $\chi_j(x)$ ,  $j = 1, 2$ , статистически не зависящие гауссовские случайные процессы с математическими ожиданиями  $M_j^*(x) = -|x|$  и корреляционными функциями  $K_j^*(x_1, x_2) = |x_1| + |x_2| - |x_1 - x_2|$ . Так как  $M(\eta, \kappa) = M_1^*(\eta) + M_2^*(\kappa)$ ,  $K(\eta_1, \kappa_1, \eta_2, \kappa_2) = K_1^*(\eta_1, \eta_2) + K_2^*(\kappa_1, \kappa_2)$ , статистические характеристики гауссовских случайных полей  $\chi(\eta, \kappa)$  и  $\chi_1(\eta) + \chi_2(\kappa)$  совпадают. Тогда в силу статистической независимости случайных процессов  $\chi_1(\eta)$  и  $\chi_2(\kappa)$  получаем

$$H_a^*(v) = \langle \exp[\max_{\eta \in [0; v]} \chi_1(\eta) + \max_{\kappa \in [0; v]} \chi_2(\kappa)] \rangle = H_1^*(v) H_2^*(v),$$

$$H_j^*(v) = \langle \exp[\max_{x \in [0; v]} \chi_j(x)] \rangle =$$

$$= 1 + \int_0^\infty P[\max_{x \in [0; v]} \chi_j(x) > y] \exp(y) dy,$$

$j = 1, 2$ . Следовательно  $H_a = H_1 H_2$ , где  $H_j = \lim_{v \rightarrow \infty} [H_j^*(v) / v]$ ,  $j = 1, 2$  – константы Пикандса [11, 12].

Значения констант  $H_1$  и  $H_2$  получены в ряде работ. В работе [6] показано, что случайный процесс  $\chi_1(x)$  является марковским диффузионным процессом [13] с коэффициентами сноса  $K_1 = 1$  и диффузии  $K_2 = 2$ . Это позволило на основе решения уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова

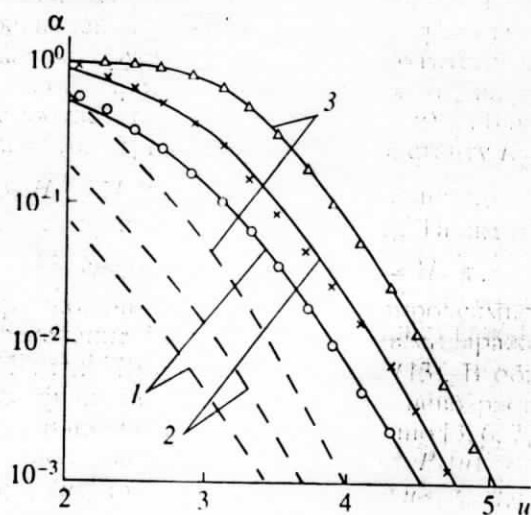


Рис. 1. Аппроксимации вероятности ложной тревоги.

[13] определить вероятность  $P[\max \chi_i(x) > u]$  и найти значение  $H_1 = 1$  [6]. В работах [6, 8] получены асимптотические выражения для вероятности неперевышения высокого порога реализацией дифференцируемого стационарного гауссовского случайного процесса. Сопоставляя эти выражения с соответствующими выражениями, полученными в [10, 12] и содержащими константу  $H_2$ , находим  $H_2 = 1/\sqrt{\pi}$ . Указанные значения констант Пикандса приведены также в [12]. Таким образом, в (13) следует подставлять  $H_a = 1/\sqrt{\pi}$ .

При конечных значениях  $u$  аппроксимируем распределение  $P_M(u)$  его предельным выражением (12), где  $\Pi(u)$  определяется из (13). В общем случае функция  $\Pi(u)$  не является невозрастающей функцией  $u$ . Поэтому аналогично [3, 6, 7] будем использовать аппроксимацию  $P_M(u) = 1 - \exp[-\Pi(u)]$  при  $u \geq u_0$ ,  $P_M(u) = 1$  при  $u < u_0$ , где  $u_0 = \sqrt{2}$  – наименьшее значение  $u$ , для которого при любых  $\epsilon > 0$  выполняется неравенство  $\Pi(u) > \Pi(u + \epsilon)$ . Тогда при выполнении (5) получаем асимптотическое выражение для ВЛТ

$$\alpha = \begin{cases} 1 - \exp\left[-\frac{m_1 \zeta_2}{2\pi} u^2 \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\right] & \text{при } u \geq \sqrt{2}, \\ 1 & \text{при } u < \sqrt{2}. \end{cases} \quad (14)$$

Точность формулы (14) возрастает с увеличением  $\mu$  (5),  $u$ ,  $m_1$  и  $\zeta_2$  (13).

Отметим, что приближенные выражения для характеристик обнаружения случайного радиопульса можно получить на основе методики, используемой в [14, 15]. Эта методика основана на замене непрерывной функции  $L(\lambda, \nu)$  ее дискретными значениями, взятыми в отдельных точках априорной области  $\Lambda$ , так что значения функции

$L(\lambda, \nu)$  в этих точках приближенно статистически не зависимы. Тогда с учетом асимптотически (при  $\mu \rightarrow \infty$ ) гауссовского характера случайного поля  $L(\lambda, \nu)$  получаем приближенное выражение для ВЛТ

$$\alpha_m = 1 - \Phi^m(u), \quad (15)$$

где величина  $m = (\lambda_{\max} - \lambda_{\min})(\nu_{\max} - \nu_{\min})/\Delta_1 \Delta_2 = m_1 \zeta_2 / \varphi$  определяет число независимых отсчетов однородного случайного поля  $N_0(\lambda, \nu)$  в пределах априорной области  $\Lambda$ ,  $\Delta_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |K_0(\lambda, 0, \lambda + \Delta, 0)| d\Delta / K_0(0, 0, 0, 0)$  и  $\Delta_2 = \int_{-\infty}^{\infty} |K_0(0, \nu, 0, \nu + \Delta)| d\Delta / K_0(0, 0, 0, 0)$  – интервалы корреляции поля  $N_0(\lambda, \nu)$  по параметрам  $\lambda$  и  $\nu$ ,  $\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} |C_2(\kappa)| \times \times d\kappa \sqrt{-\partial^2 C_2(\kappa) / \partial \kappa^2} \big|_{\kappa=0} / C_2^3(0)$ ,  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) \times \times dt / \sqrt{2\pi}$  – интеграл вероятности.

Сравним асимптотическое выражение (14) для ВЛТ с приближенным выражением (15). Используя асимптотическое разложение интеграла вероятности, при  $u \rightarrow \infty$  получаем  $\alpha_m \approx m\Phi(-u) \approx m \exp(-u^2/2) / u \sqrt{2\pi}$ ,  $\alpha_m / \alpha \approx u^3 \varphi / \sqrt{2\pi}$ . Таким образом, расчет по формуле (15) при больших порогах  $u$  приводит к значениям ВЛТ, в  $u^3$  раз меньшим, чем расчет по формуле (14). При этом точность формулы (14) растет с увеличением  $u$ , а поведение погрешности формулы (15) не известно. На рис. 1 сплошными линиями показана зависимость ВЛТ от нормированного порога  $u$ , рассчитанная по формуле (14), а штриховыми линиями – по формуле (15) для случая обнаружения радиопульса (1) с колокольной модулирующей функцией  $U(x) = \exp(-\pi x^2/2)$  и прямоугольной спектральной плотностью  $G_0(x) = I(x)$ . Кривые 1 соответствуют  $m_1 = \zeta_2 = 3$ , кривые 2 –  $m_1 = \zeta_2 = 5$ , а кривые 3 –  $m_1 = \zeta_2 = 10$ . Из рис. 1 следует, что формула (15) дает существенно заниженные значения для ВЛТ по сравнению с (14).

Сравним значения ВЛТ при обнаружении сигнала (1) с различными модулирующими функциями и спектральными плотностями субструктуры. Пунктирными линиями на рис. 2 показана зависимость  $\alpha(u)$ , рассчитанная по формулам из [3] при  $U(x) = \exp(-\pi x^2/2)$ ,  $G_0(x) = [1 + (\pi x/2)^2]^{-1}$ , штрихпунктирными линиями – рассчитанная по формулам из [4] при  $U(x) = I(x)$ ,  $G_0(x) = I(x)$ , а штриховыми и сплошными линиями – рассчитанная по формуле (14) для случаев (6) и (7) соответственно при  $f(x) = \exp(-\pi x^2/2)$ ,  $g(x) = [1 + (\pi x/2)^2]^{-1}$ . Кривые 1 на рис. 2 получены при  $m_1 = m_2 = 50$ , а кривые 2 – при  $m_1 = m_2 = 3$ . Из рис. 2 следует, что нарушение условий регулярности решающей статистики приводит к увеличению ВЛТ при МП-обнаружении



случайного радиоимпульса с неизвестными временем прихода и частотой.

### 3. ВЕРОЯТНОСТЬ ПРОПУСКА СИГНАЛА

Пусть сигнал (1) присутствует в наблюдаемых данных  $x(t)$  ( $i = 1$ ). Тогда ВПС  $\beta = P[\max_{(\lambda, \nu) \in \Lambda} L(\lambda, \nu) < h]$ , где  $L(\lambda, \nu) = S_1(\lambda, \nu) + N_1(\lambda, \nu)$ ,  $(\lambda, \nu) \in \Lambda$ .

Точное выражение для ВПС  $\beta$  найти не удастся. При  $m_1 \gg 1$ ,  $\zeta_2 \gg 1$  ВПС можно представить в виде [3, 4, 6, 7]

$$\beta \approx (1 - \alpha) F_S(h), \quad (16)$$

где  $F_S(h) = P[\max_{(\lambda, \nu) \in \Lambda_S} L(\lambda, \nu) < h]$  – функция распределения величины абсолютного максимума логарифма ФОП (8) в пределах сигнальной подобласти  $\Lambda_S$ , задаваемой условиями  $\lambda \in [\lambda_0 - \tau; \lambda_0 + \tau]$ ,  $\nu \in [\nu_0 - \Omega; \nu_0 + \Omega]$ .

Найдем вероятность  $F_S(h)$ . Из соотношений (9), (10) следует, что у регулярной составляющей  $S_1(\lambda, \nu)$  и корреляционной функции  $K_1(\lambda_1, \nu_1, \lambda_2, \nu_2)$  шумовой составляющей  $N_1(\lambda, \nu)$  нет вторых производных в точке  $(\lambda_0, \nu_0)$  по времени прихода (случай (6)) и по частоте (случай (7)). Однако указанные моменты логарифма ФОП непрерывно дифференцируемы по частоте в случае (6) и по времени прихода в случае (7). Это не позволяет использовать методы, развитые в [3, 4, 6, 7], для определения функции  $F_S(h)$ .

Отметим, что регулярная составляющая  $S_1(\lambda, \nu)$  (9) достигает абсолютного максимума в точке  $(\lambda_0, \nu_0)$  истинных значений времени прихода и частоты принимаемого сигнала (1), а реализации шумовой составляющей  $N_1(\lambda, \nu)$  непрерывны с вероятностью единица. Поэтому выходное отношение сигнал/шум (ОСШ) для МП-алгоритма обнаружения случайного радиоимпульса (1) запишем в виде [3, 4, 6, 7]

$$z^2 = [S_1(\lambda_0, \nu_0) - A_0]^2 / \langle N_1^2(\lambda_0, \nu_0) \rangle = A_1 C_{20}(0) / \sqrt{2\sigma_1^2}, \quad (17)$$

где  $\sigma_1^2 = [D_0 C_2(0) + D_1 R_2(0, 0)]/2$ . Следуя [3, 4, 6, 7], будем считать, что ОСШ  $z^2$  (17) велико. Тогда координаты  $(\lambda_m, \nu_m)$  положения абсолютного максимума логарифма ФОП (8) при  $(\lambda, \nu) \in \Lambda_S$  находятся в малой окрестности точки  $(\lambda_0, \nu_0)$ , причем  $\lambda_m \rightarrow \lambda_0$ ,  $\nu_m \rightarrow \nu_0$  в среднеквадратическом при  $z^2 \rightarrow \infty$  [6, 7, 9]. Следовательно, для расчета вероятности  $F_S(h)$  достаточно исследовать поведение составляющих  $S_1(\lambda, \nu)$  и  $N_1(\lambda, \nu)$  функционала (8) в указанной малой окрестности точки  $(\lambda_0, \nu_0)$ .

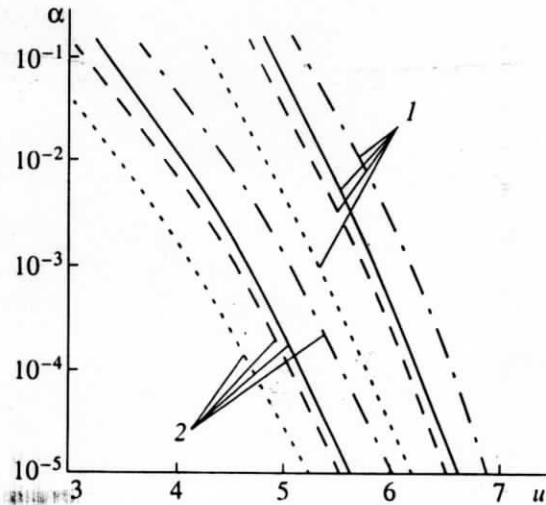


Рис. 2. Вероятность ложной тревоги при различных моделях случайного сигнала.

При  $\delta = \max(|\eta - \eta_0|, |\eta_1 - \eta_0|, |\kappa - \kappa_0|, |\kappa_1 - \kappa_0|) \rightarrow 0$ ,  $j = 1, 2$ , моменты (9), (10) логарифма ФОП допускают асимптотические представления:

$$S_1(\lambda, \nu)/\sigma_1 = S_{11}(\eta - \eta_0) + S_{12}(\kappa - \kappa_0) + A_0 + o(\delta^2),$$

$$S_{11}(t) = z(1 - 2|t|)/\sqrt{2}, \quad (18)$$

$$S_{12}(t) = z[2C_{20}(t)/C_{20}(0) - 1]/\sqrt{2},$$

$$K_1(\lambda_1, \nu_1, \lambda_2, \nu_2)/\sigma_1^2 = K_{11}(\eta_1 - \eta_0, \eta_2 - \eta_0) + K_{12}(\kappa_1 - \kappa_0, \kappa_2 - \kappa_0) + o(\delta^2),$$

$$K_{11}(t_1, t_2) =$$

$$= \begin{cases} 1 - 2|t_1 - t_2| - \rho \min(|t_1|, |t_2|) & \text{при } t_1 t_2 \geq 0, \\ 1 - 2|t_1 - t_2| & \text{при } t_1 t_2 < 0; \end{cases} \quad (19)$$

$$K_{12}(t_1, t_2) =$$

$$= \frac{D_0[2C_2(t_1 - t_2) - C_2(0)] + D_1[2R_2(t_1, t_2) - R_2(0, 0)]}{[D_0 C_2(0) + D_1 R_2(0, 0)]},$$

где величины  $A_1$ ,  $A_0$  и функция  $C_{20}(t)$  определены в (9), а  $D_1$ ,  $D_0$ ,  $C_2(t)$ ,  $R_2(t_1, t_2)$  – в (10). Обозначим  $r_1(\eta)$ ,  $r_2(\kappa)$  статистически не зависящие гауссовские случайные процессы с математическими ожиданиями  $\langle r_1(\eta) \rangle = \max[0; S_{11}(\eta - \eta_0)]$ ,  $\langle r_2(\kappa) \rangle = \max[0; S_{12}(\kappa - \kappa_0)]$  и с корреляционными функциями  $\langle [r_1(\eta_1) - \langle r_1(\eta_1) \rangle][r_1(\eta_2) - \langle r_1(\eta_2) \rangle] \rangle = \max[0; K_{11}(\eta_1 - \eta_0, \eta_2 - \eta_0)]$ ,  $\langle [r_2(\kappa_1) - \langle r_2(\kappa_1) \rangle][r_2(\kappa_2) - \langle r_2(\kappa_2) \rangle] \rangle = \max[0; K_{12}(\kappa_1 - \kappa_0, \kappa_2 - \kappa_0)]$  соответственно. Из выражений (18), (19) с учетом асимптотически (при  $\mu \rightarrow \infty$ ) гауссовского характера случайного поля  $L(\lambda, \nu)$  (8) следует, что статисти-

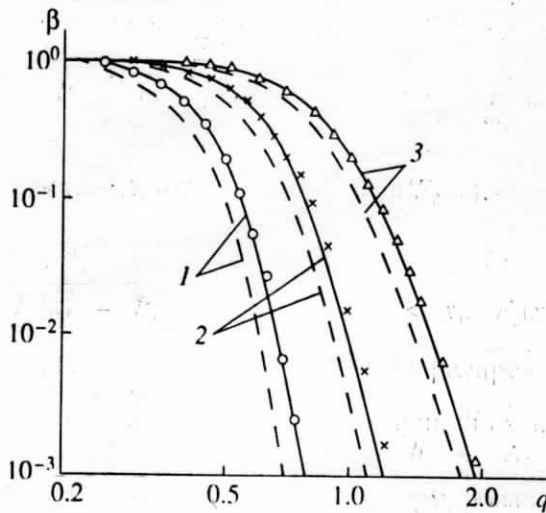


Рис. 3. Аппроксимации вероятности пропуска сигнала.

ческие характеристики случайных полей  $L(\lambda, \nu)/\sigma_1$  и  $r_1(\eta) + r_2(\kappa)$  асимптотически совпадают в малой окрестности точки  $(\lambda_0, \nu_0)$ . Тогда при выполнении (5) и  $z^2 \gg 1$  (17) можно записать

$$F_S(h) \approx P\left[\max_{\eta \in [\eta_0 - 1; \eta_0 + 1]} r_1(\eta) + \max_{\kappa \in [\kappa_0 - 1; \kappa_0 + 1]} r_2(\kappa) < (h - A_0)/\sigma_1\right] = \int F_1(c - x) dF_2(x), \quad (20)$$

где  $F_1(x) = P[\max_{\eta \in [\eta_0 - 1; \eta_0 + 1]} r_1(\eta) < x]$ ,  $F_2(x) = P[\max_{\kappa \in [\kappa_0 - 1; \kappa_0 + 1]} r_2(\kappa) < x]$  — функции распределения абсолютных максимумов случайных процессов  $r_1(\eta)$  и  $r_2(\kappa)$ ,  $c = (h - A_0) \times \sqrt{2/[D_0 C_2(0) + D_1 R_2(0, 0)]}$  — нормированный порог. Точные выражения для функций  $F_j(x)$ ,  $j = 1, 2$ , найти не удастся. В работе [4] приведено асимптотически точное (с ростом  $z$  и  $\mu$ ) выражение  $F_1(x) = \Phi(x - z/\sqrt{2}) - 2 \exp[\psi^2 z^2/4 + \psi z(z - x/\sqrt{2})/2] \times \Phi[x - z(1 + \psi)/\sqrt{2}] + \exp[\psi^2 z^2 + \psi z(z - x/\sqrt{2})] \Phi[x - z(1 + 2\psi)/\sqrt{2}]$ ,  $\psi = 4/(4 - \rho)$ , полученное методом локально-марковской аппроксимации [7]. Аналогично [3, 6, 7] можно найти асимптотически точное (с ростом  $z$  и  $\mu$ ) выражение  $F_2(x) = \Phi(x - z/\sqrt{2})$ . Подставляя эти формулы в (20), получаем

$$F_S(h) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(x\sqrt{2} - z)^2/4] \{ \Phi[c - x - z/\sqrt{2}] - 2 \exp[\psi^2 z^2/4 + \psi z(z - \sqrt{2}(c - x))/2] \times$$

$$\times \Phi[c - x - z(1 + \psi)/\sqrt{2}] + \quad (21)$$

$$+ \exp[\psi^2 z^2 + \psi z(z - \sqrt{2}(c - x))] \times \Phi[c - x - z(1 + 2\psi)/\sqrt{2}] \} dx / \sqrt{2\pi}.$$

Точность выражения (21) возрастает с увеличением  $z$  (17) и  $\mu$  (5).

Таким образом, ВПС  $\beta$  при обнаружении радиоимпульса (1) с неизвестными временем прихода и центральной частотой можно представить в виде (16), где  $F_S(h)$  определяется из (21), а  $\alpha$  — из (14). Точность такой аппроксимации возрастает с увеличением  $\mu$ ,  $z$ ,  $m_1$  и  $\zeta_2$ .

Отметим, что для получения приближенного выражения для ВПС можно использовать методику [14, 15], основанную на замене непрерывной функции (8) ее независимыми дискретными значениями. Воспользовавшись этой методикой, получаем

$$\beta_m = \Phi^{m-1}(u) \Phi(c/\sqrt{2} - z). \quad (22)$$

На рис. 3 сплошными линиями показана зависимость  $\beta(q)$  при обнаружении сигнала (1) по критерию Неймана–Пирсона с фиксированной ВЛТ  $\alpha = 10^{-4}$ , рассчитанная по формулам (16), (14), (21), а штриховыми линиями — соответствующая зависимость  $\beta_m(q)$  (22) с фиксированной ВЛТ  $\alpha_m = 10^{-4}$  (15). Кривые получены для сигнала с колоночной модулирующей функцией  $U(x) = \exp(-\pi x^2/2)$  и прямоугольной спектральной плотностью  $G_0(x) = I(x)$  при  $m_1 = \zeta_2 = 10$  и  $\mu = 200$  (кривые 1),  $\mu = 100$  (кривые 2),  $\mu = 50$  (кривые 3). Из рис. 3 видно, что формулы (22), (15) дают несколько заниженные значения ВПС по сравнению с (16), (14), причем из-за невысокой точности формулы (15) действительное значение ВЛТ для штриховых кривых на рис. 3 оказывается значительно больше, чем  $10^{-4}$ . При этом точность формулы (16) возрастает с увеличением  $z$ ,  $m_i$ ,  $i = 1, 2$ , а поведение погрешности формулы (22) не известно.

Сравним теперь значения ВПС при обнаружении радиоимпульса (1) с различными модулирующими функциями и спектральными плотностями по критерию Неймана–Пирсона. Пунктирной линией на рис. 4 показана предельная (при  $q \ll 1$ ) зависимость ВПС  $\beta$  от ОСШ  $z$ , рассчитанная по формулам из [3] при  $U(x) = f(x)$ ,  $G_0(x) = g(x)$ , штрихпунктирной линией — рассчитанная по формулам из [4] при  $U(x) = I(x)$ ,  $G_0(x) = I(x)$ , а штриховой и сплошной линиями — рассчитанная по формулам (16), (14), (21) для случаев (6) и (7) соответственно, где  $f(x) = \exp(-\pi x^2/2)$ ,  $g(x) = [1 + (\pi x/2)^2]^{-1}$ . Кривые получены при фиксированной ВЛТ



$\alpha = 10^{-4}$  и  $m_1 = m_2 = 10$ . Из рис. 4 следует, что нарушение условий регулярности решающей статистики приводит к увеличению ВПС при МП-обнаружении случайного радиоимпульса (1).

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

С целью экспериментальной проверки эффективности МП-алгоритма обнаружения и установления границ применимости асимптотически точных формул (14), (16), (21) для ВЛТ и ВПС проведено моделирование на ЭВМ централизованного гауссовского случайного поля  $r_0(\eta, \kappa)$  с корреляционной функцией  $R_0(\eta, \kappa)$  (11), а также гауссовского случайного поля  $r(\eta, \kappa)$  с математическим ожиданием  $\langle r(\eta, \kappa) \rangle = m_s C_1(\eta - \eta_0) C_{20}(\kappa - \kappa_0)$  и корреляционной функцией  $\langle [r(\eta_1, \kappa_1) - \langle r(\eta_1, \kappa_1) \rangle][r(\eta_2, \kappa_2) - \langle r(\eta_2, \kappa_2) \rangle] \rangle = R_0(\eta_1 - \eta_2, \kappa_1 - \kappa_2) + \sigma_s^2 R_1(\eta_1 - \eta_0, \eta_2 - \eta_0) R_2(\kappa_1 - \kappa_0, \kappa_2 - \kappa_0)$ .

Здесь  $m_s = A_1 / \sqrt{D_0 C_2(0)}$ ,  $\sigma_s^2 = D_1 / D_0 C_2(0)$ , а функции  $C_j(t)$ ,  $C_{20}(t)$  и  $R_j(t_1, t_2)$ ,  $j = 1, 2$ , определяются из (9), (10) для случая (7) при  $f(x) = \exp(-\pi x^2/2)$ . В процессе моделирования с шагом  $\Delta\eta = 0.005$  по переменной  $\eta$  и  $\Delta\kappa = 0.08$  по переменной  $\kappa$  формировались отсчеты случайных полей  $R_{kj} = r_0(k\Delta\eta, j\Delta\kappa)$  и  $\Gamma_{kj} = r(k\Delta\eta, j\Delta\kappa)$  случайных полей  $r_0(\eta, \kappa)$  и  $r(\eta, \kappa)$  для всех  $k = \overline{1, \{m_1/\Delta\eta\}}$ ,  $j = \overline{1, \{m_2/\Delta\kappa\}}$ , где  $\{x\}$  — целая часть числа  $x$ . При этом среднеквадратическая погрешность ступенчатой аппроксимации непрерывных реализаций моделируемых полей при использовании их отсчетов не превышает 0,1. Значения ВЛТ  $\alpha$  для различных порогов  $u$  вычисляли как относительные частоты превышения порогов наибольшим из отсчетов  $R_{kj}$ , а значения ВПС  $\beta$  вычисляли как относительные частоты неперевышения порогов наибольшим из отсчетов  $\Gamma_{kj}$ .

На рис. 1 нанесены экспериментальные значения ВЛТ при  $m_1 = \zeta_2 = 3$  (кружочки),  $m_1 = \zeta_2 = 5$  (крестики) и  $m_1 = \zeta_2 = 10$  (треугольники), а на рис. 3 — экспериментальные значения ВПС при  $m_1 = \zeta_2 = 10$ ,  $\mu = 200$  (кружочки),  $\mu = 100$  (крестики),  $\mu = 50$  (треугольники) и фиксированном пороге  $u$ , рассчитанном по формуле (14) для случая  $\alpha = 10^{-4}$ . Приведенные значения ВЛТ и ВПС получены в результате обработки не менее  $10^4$  реализаций случайных полей  $r_0(\eta, \kappa)$  и  $r(\eta, \kappa)$ , так что с вероятностью 0.95 границы доверительных интервалов отклоняются от экспериментальных значений не более чем на 20% при  $\alpha, \beta \geq 0.01$  и не более чем на 40% при  $\alpha, \beta \geq 0.003$ . Из рис. 1 следует, что формула (14) удовлетворительно аппроксимирует экспериментальные данные уже при  $m_1 \geq 3$ ,

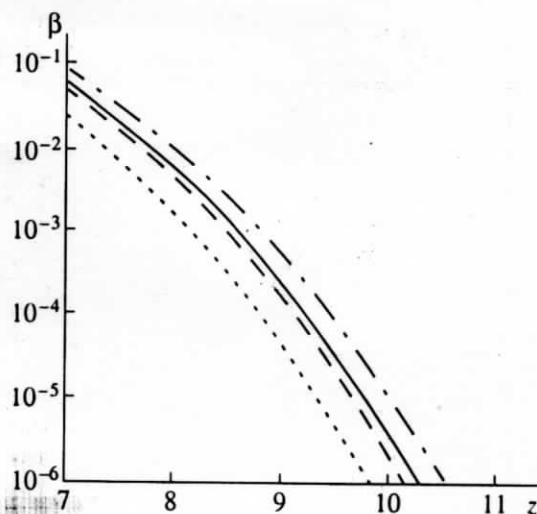


Рис. 4. Вероятность пропуска при различных моделях случайного сигнала.

$\zeta_2 \geq 3$ , а формула (15) дает существенно заниженные значения ВЛТ. При этом точность формулы (14) возрастает с увеличением  $u$  (уменьшением  $\alpha$ ), и с ростом  $m_j$ ,  $j = 1, 2$ , а поведение погрешности формулы (15) не известно. Из рис. 3 и других результатов моделирования следует, что асимптотическая формула (16) с учетом (14), (21) удовлетворительно аппроксимирует экспериментальные данные уже при  $m_1 \geq 3$ ,  $\zeta_2 \geq 3$ ,  $z \geq 2$ , а формулы (22), (15) дают несколько заниженные значения ВПС при обнаружении по критерию Неймана–Пирсона. При этом точность формулы (16) возрастает с увеличением  $m_j$  и  $z$ , а погрешность формулы (22) не известна.

Работа выполнена при частичной поддержке Минобразования РФ (грант № ЕОО-3.5-5).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов. М.: Радио и связь, 1983.
2. Сосулин Ю.Г. Теоретические основы радиолокации и радионавигации. М.: Радио и связь, 1992.
3. Трифонов А.П., Парфенов В.И. // РЭ. 1998. Т. 44. № 8. С. 959.
4. Трифонов А.П., Захаров А.В. // РЭ. 2000. Т. 46. № 11. С. 1329.
5. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982.
6. Акимов П.С., Бакут П.А., Богданович В.А. и др. Теория обнаружения сигналов / Под ред. Бакута П.А. М.: Радио и связь, 1984.

7. Трифонов А.П., Шинаков Ю.С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986.
8. Беллев Ю.К. // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1970. № 2. С. 77.
9. Ибрагимов И.А., Хасъминский Р.З. Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979.
10. Питербарг В.И. Асимптотические методы в теории гауссовских процессов и полей. М.: Изд-во МГУ, 1988.
11. Pickands J. // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 145. № 3. P. 51.
12. Питербарг В.И., Фаталов В.Р. // Успехи мат. наук. 1995. Т. 50. № 6. С. 57.
13. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Радио и связь, 1977.
14. Вайнштейн Л.А., Зубаков В.Д. Выделение сигналов на фоне случайных помех. М.: Сов. радио, 1960.
15. Фалькович С.Е. Прием радиолокационных сигналов на фоне флуктуационных помех. М.: Сов. радио, 1961.

РАДИОТЕХНИКА