

р-9908

2001/6/2-3/

ISSN 1560-4128

62
**ЭВ
&
ЭС**

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ И ЭЛЕКТРОННЫЕ СИСТЕМЫ

2-3'2001

www.webcenter.ru/~iprzhr/

т. 6

В НОМЕРЕ :

**Численное решение некоторых двумерных
задач прикладной электродинамики**

**Метод конечных элементов для расчета
спиральных замедляющих систем
со сложной конфигурацией диэлектрических
вставок и тонких металлических опор**



Тел./факс: (095) 925-9241
E-mail: iprzhr@online.ru
<http://www.webcenter.ru/~iprzhr/>

Журнал переводится на английский язык
и издается компанией Begell House, Inc. под названием
TELECOMMUNICATIONS AND RADIO ENGINEERING

**ПОДПИСНОЙ ИНДЕКС 71961 В КАТАЛОГЕ АГЕНТСТВА "РОСПЕЧАТЬ": ГАЗЕТЫ И ЖУРНАЛЫ
ПОДПИСКА НА ГАЗЕТЫ И ЖУРНАЛЫ ПО МОСКВЕ ЧЕРЕЗ ИНТЕРНЕТ WWW.GAZETY.RU**

УДК 621.391

Оценка дисперсии случайного сигнала с неизвестной центральной частотой при наличии помехи с неизвестной интенсивностью *

А. П. Трифонов, А. А. Глазнев

Выполнен синтез и анализ алгоритма оценки максимального правдоподобия дисперсии и центральной частоты случайного сигнала, адаптирующегося к помехе с неизвестной интенсивностью; приведены результаты статистического моделирования оценок на ЭВМ.

The maximum likelihood method is used to obtain an algorithm for the simultaneous estimation of random signal variance and main frequency in the presence of interference of unknown intensity. The characteristics of estimates are derived. The results of the statistical modeling of algorithms are presented.

Задача оценки дисперсии стационарных случайных процессов рассматривалась в [1–4]. В [3] предложен способ аппаратной реализации и исследована эффективность максимально правдоподобного измерителя дисперсии стационарного гауссовского случайного сигнала на фоне гауссовского белого шума и аддитивной внешней помехи с неизвестной в общем случае интенсивностью. При этом обработка случайного сигнала производилась на видеочастоте. Однако при практической реализации алгоритмов обработки случайных сигналов в электронных системах (ЭС) с преобразованием частоты центральная частота узкополосного сигнала часто бывает известна неточно [4]. Тогда использование алгоритма оценки дисперсии, рассмотренного в [3], оказывается затруднительным. Поэтому исследуем возможность измерения дисперсии случайного сигнала с неизвестной центральной частотой при его обработке на промежуточной частоте ЭС.

Аналогично [3] полагаем, что в течение времени $[0; T]$ обработке доступна прошедшая через смеситель ЭС реализация наблюдаемых данных

$$x(t) = s(t) + \xi(t) + n(t). \quad (1)$$

Здесь $\xi(t)$ — узкополосная гауссовская стационарная помеха с постоянной в полосе частот $[\omega_0 - \omega_m/2; \omega_0 + \omega_m/2]$ и априори неизвестной односторонней спектральной плотностью γ_0 ; ω_m — полоса пропускания; ω_0 — промежуточная частота ЭС, на выходе которой необходимо измерить дисперсию D_0 узкополосного гауссовского стационарного случайного сигнала $s(t)$; $n(t)$ — гауссовский белый шум с односторонней спектральной плотностью N_0 , который описывает собственные шумы элементов ЭС, включенных после смесителя.

Следуя [4], прямоугольный спектр мощности (СМ) узкополосного сигнала $s(t)$ запишем как

$$G_s(\omega) = \frac{\pi D_0}{\Omega} \left\{ I\left(\frac{\nu_0 - \omega}{\Omega}\right) + I\left(\frac{\nu_0 + \omega}{\Omega}\right) \right\}, \quad I(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1/2; \\ 0, & |x| > 1/2, \end{cases} \quad (2)$$

где Ω — ширина полосы частот анализируемого случайного сигнала $s(t)$; ν_0 — его априори неизвестная центральная частота, принимающая значения из интервала $[\nu_{\min}; \nu_{\max}]$.

Аналогично [3] положим, что $\omega_m > \Omega$ и СМ помехи $\xi(t)$ полностью перекрывает СМ сигнала $s(t)$, т.е. выполняются условия $\omega_0 - \omega_m/2 \leq \nu_{\min} - \Omega/2$ и $\omega_0 + \omega_m/2 \geq \nu_{\max} + \Omega/2$. Будем считать, что процессы $s(t)$, $\xi(t)$ и $n(t)$ статистически независимы. Кроме того положим, что время наблюдения T значительно больше времени корреляции случайного сигнала $s(t)$, т.е.

$$\mu = T\Omega/2\pi \gg 1.$$

Для синтеза алгоритма оценки дисперсии воспользуемся методом максимального правдоподобия [5,6]. С этой целью аналогично [3] введем в рассмотрение три вспомогательные гипотезы H_i , $i = 0, 1, 2$. Гипотеза H_2 предполагает, что реализация наблюдаемых данных имеет вид (1). По гипотезе H_1 аналогично

* Приведенные результаты получены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

зируемый случайный сигнал отсутствует, т. е. $x(t) = \xi(t) + n(t)$, по гипотезе H_0 наблюдается только белый шум и $x(t) = n(t)$.

Обозначим через $F_2(D, \nu, \gamma)$ логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОР) для гипотезы H_2 при альтернативе H_0 и $F_1(\gamma)$ — логарифм ФОР для гипотезы H_1 при альтернативе H_0 . При выполнении (3) согласно [5] можем записать

$$F_2(D, \nu, \gamma) = \frac{T}{\pi N_0 (N_0 + \gamma)} \left\{ \frac{N_0 d}{N_0 + \gamma + d} \int_{\nu - \Omega/2}^{\nu + \Omega/2} S_T(\omega) d\omega + \gamma \int_{\omega_0 - \omega_m/2}^{\omega_0 + \omega_m/2} S_T(\omega) d\omega \right\} - \mu \left\{ \ln \left(1 + \frac{\gamma + d}{N_0} \right) + (k-1) \ln \left(1 + \frac{\gamma}{N_0} \right) \right\}; \quad (4)$$

$$F_1(\gamma) = F_2(0, 0, \gamma), \quad (5)$$

где $S_T(\omega) = \left| \int_0^T x(t) \exp(-j\omega t) dt \right|^2 / T$ — периодограмма реализации наблюдаемых данных [2]; $d = 2\pi D / \Omega$; $k = \omega_m / \Omega$.

Если центральная частота ν_0 априори известна, то оценка максимального правдоподобия (ОМП) дисперсии D_0

$$D_0^* = \operatorname{argsup}_{D>0} L(D); \quad (6)$$

$$L(D) = \sup_{\gamma} F_2(D, \nu_0, \gamma) - \sup_{\gamma} F_1(\gamma). \quad (7)$$

Подставляя (4), (5) в (6), (7), находим ОМП дисперсии случайного сигнала

$$D_0^* = D_m(\nu_0); \quad (8)$$

$$D_m(\nu_0) = \max[0, D(\nu_0)]; \quad (9)$$

$$D(\nu) = \frac{1}{\pi(k-1)} \left[k \int_{\nu - \Omega/2}^{\nu + \Omega/2} S_T(\omega) d\omega - \int_{\omega_0 - \omega_m/2}^{\omega_0 + \omega_m/2} S_T(\omega) d\omega \right]. \quad (10)$$

Положим вначале, что центральная частота ν_0 априори неизвестна, но можно указать ее некоторое приближенное ожидаемое значение ν^* , причем в общем случае $\nu^* \neq \nu_0$. Принимая в качестве истинного значения неизвестной центральной частоты ν_0 случайного сигнала предполагаемое значение ν^* , получаем оценку

$$D^* = D_m(\nu^*), \quad (11)$$

которую в отличие от ОМП (8) назовем квазиправдоподобной оценкой (КПО). При $\nu^* = \nu_0$ КПО (11) переходит в ОМП (8).

Выясним в какой степени незнание центральной частоты влияет на характеристики КПО (11). При выполнении (3) и фиксированном значении ν^* случайная величина $Y = D(\nu^*)$ является приближенно гауссовской [6, 7]. Математическое ожидание a и дисперсию σ^2 случайной величины Y можно найти непосредственно, усредняя (10) по реализациям $x(t)$ при фиксированных ν^* , ν_0 и D_0 :

$$a = \langle Y \rangle = D_0 [1 - k\delta / (k-1)];$$

$$\sigma^2 = \langle (Y - \langle Y \rangle)^2 \rangle = \frac{D_0^2}{\mu(k-1)Q^2} \left[(k-1)(1+Q)^2 + 1 - k(k-2)(Q^2 + 2Q)\delta / (k-1) \right], \quad (12)$$

где $Q = 2\pi D_0 / \Omega(\gamma_0 + N_0)$; $\delta = \min(1, \Delta)$; $\Delta = |\nu^* - \nu_0| / \Omega$ — относительное отклонение ожидаемого значения центральной частоты случайного сигнала от ее истинного значения.

Используя для описания случайной величины Y гауссовскую функцию распределения $F_Y(x) = \Phi[(x-a)/\sigma]$ с параметрами (12), где $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt / \sqrt{2\pi}$ — интеграл вероятности [5], находим функцию распределения $F^*(x)$ КПО (11):

$$F^*(x) = \Theta(x)F_Y(x) = \Theta(x)\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right); \quad \Theta(x) = \begin{cases} 1, x \geq 0; \\ 0, x < 0. \end{cases} \quad (13)$$

С учетом (13) получаем выражения для смещения (систематической ошибки) $b(D^*) = \langle D^* - D_0 \rangle$, рассеяния (среднего квадрата ошибки) $V(D^*) = \langle (D^* - D_0)^2 \rangle$ оценки (11):

$$b(D^*) = \int_0^\infty [1 - F^*(x)] dx - \int_{-\infty}^0 F^*(x) dx - D_0 = a\Phi(a/\sigma) + \sigma \exp[-a^2/2\sigma^2] / \sqrt{2\pi} - D_0;$$

$$V(D^*) = 2 \int_0^\infty x[1 - F^*(x)] dx - 2 \int_{-\infty}^0 xF^*(x) dx - D_0[2b(D^*) + D_0] =$$

$$= (a^2 - 2aD_0 + \sigma^2)\Phi(a/\sigma) + (a - 2D_0)\sigma \exp[-a^2/2\sigma^2] / \sqrt{2\pi} + D_0^2, \quad (14)$$

где a и σ^2 определяются из (12). При $a/\sigma \gg 1$, что справедливо при достаточно больших μ , формулы (14) значительно упрощаются и принимают вид

$$b(D^*) = a - D_0; \quad V(D^*) = b^2(D^*) + \sigma^2. \quad (15)$$

Полагая в (14), (15) $\nu^* = \nu_0$ ($\Delta = 0$), находим выражения для характеристик ОМП (8). В частности согласно (15) при $a/\sigma \gg 1$

$$b(D_0^*) = \langle D_0^* - D_0 \rangle = 0, \quad V(D_0^*) = \langle (D_0^* - D_0)^2 \rangle = \frac{D_0^2}{\mu(k-1)Q^2} [(k-1)(1+Q)^2 + 1]. \quad (16)$$

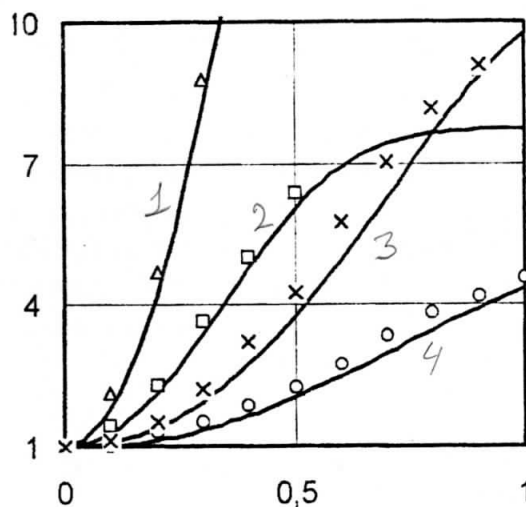


Рис. 1

Отметим, что формулы (16) совпадают с аналогичными выражениями для характеристик оценки дисперсии широкополосного гауссовского случайного сигнала, полученными в [3]. Точность формул (14)–(16) возрастает с увеличением параметра μ (3).

Полученные характеристики (14) позволяют определить потери $\rho = V(D^*)/V_0(D_0^*)$ в точности КПО (11), возникающие вследствие отличия ожидаемого ν^* и истинного ν_0 значений центральной частоты. Здесь $V_0(D_0^*) = V(D^*)|_{\Delta=0}$ — рассеяние КПО (11) при $\Delta = 0$, совпадающее с рассеянием ОМП (8). На рис. 1 приведены зависимости $\rho = \rho(\Delta)$ при $k = 2, Q = 1$ (кривая 1), $k = 2, Q = 0,5$ (кривая 2), $k = 15, Q = 0,5$ (кривая 3), $k = 15, Q = 0,3$ (кривая 4). Для всех кривых $\mu = 100$. Из рис. 1 следует, что с увеличением относительного отклонения Δ ожидаемого значения центральной частоты от ее истинного значения потери в точности КПО (11) возрастают и могут достигать значительных величин, причем с ростом Q и уменьшением k влияние расстройки по частоте на точность КПО увеличивается.

Для уменьшения проигрыша в точности оценки дисперсии целесообразно производить оценивание неизвестной центральной частоты по методу максимального правдоподобия и использовать эту оценку (11) вместо ν^* . Тогда ОМП дисперсии \tilde{D} и центральной частоты $\tilde{\nu}$ можно записать в виде

$$(\tilde{D}, \tilde{\nu}) = \arg \sup_{D, \nu} L(D, \nu), \quad D > 0, \quad \nu \in [\nu_{\min}; \nu_{\max}];$$

$$L(D, \nu) = \sup_{\gamma} F_2(D, \nu, \gamma) - \sup_{\gamma} F_1(\gamma),$$

где логарифмы ФОП $F_2(D, \nu, \gamma)$ и $F_1(\gamma)$ найдены ранее в виде (4) и (5).

Подставляя (4), (5) в (17), (18), находим ОМП дисперсии и центральной частоты случайного сигнала

$$\tilde{D} = D_m(\tilde{\nu}); \quad (19)$$

$$\tilde{\nu} = \arg \sup D(\nu), \quad \nu \in [\nu_{\min}; \nu_{\max}]. \quad (20)$$

Здесь $D_m(\nu)$ определяется из (9), а $D(\nu)$ — из (10).

Найдем характеристики ОМП (19) и (20). Для этого получим функцию распределения абсолютного максимума случайного процесса $D(\nu)$ (10). Представим $D(\nu)$ в виде суммы сигнальной $S(\nu)$ и шумовой $N(\nu)$ функций [5] $D(\nu) = S(\nu) + N(\nu)$. Здесь $S(\nu) = \langle D(\nu) \rangle$, $N(\nu) = D(\nu) - \langle D(\nu) \rangle$. Сигнальная функция имеет вид

$$S(\nu) = D_0 \left[1 - k \min(1, |\nu - \nu_0| / \Omega) / (k-1) \right]. \quad (21)$$

Шумовая функция центрирована ($\langle N(\nu) \rangle = 0$) и обладает корреляционной функцией

$$\begin{aligned} \langle N(\nu_1)N(\nu_2) \rangle = & \frac{D_0^2 k}{\mu(k-1)Q^2} \left\{ 1 - \frac{k}{k-1} \min\left(1, \frac{|\nu_1 - \nu_2|}{\Omega}\right) \right\} + \frac{D_0^2 (2+Q)}{\mu(k-1)^2 Q} \left\{ k^2 I\left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{2\Omega}\right) I\left(\frac{\nu_1 - \nu_0}{2\Omega}\right) \times \right. \\ & \times I\left(\frac{\nu_2 - \nu_0}{2\Omega}\right) \left[1 + \frac{\min(\nu_0, \nu_1, \nu_2) - \max(\nu_0, \nu_1, \nu_2)}{\Omega} \right] - k \left[2 - \min\left(1, \frac{|\nu_1 - \nu_0|}{\Omega}\right) - \min\left(1, \frac{|\nu_2 - \nu_0|}{\Omega}\right) \right] + 1 \left. \right\}. \quad (22) \end{aligned}$$

Разобьем аналогично [5, 8] весь интервал возможных значений неизвестной частоты случайного сигнала ν на две подобласти:

$$\Theta_S = [\nu_0 - \Omega/2; \nu_0 + \Omega/2]; \quad \Theta_N = [\nu_{\min}; \nu_0 - \Omega/2) \cup (\nu_0 + \Omega/2; \nu_{\max}].$$

Обозначим $\sigma_0^2 = D_0^2 [(k-1)(1+Q)^2 + 1] / [\mu(k-1)Q^2]$ — дисперсия случайной величины $D(\nu_0)$; $S_N = -D_0 / (k-1)$ — математическое ожидание; $\sigma_N^2 = D_0^2 k / [\mu(k-1)Q^2]$ — дисперсия случайного процесса $D(\nu)$ при $\nu \in \Theta_N$. Из (21), (22) следует, что у сигнальной и корреляционной функции шумовой функции не существует второй производной по оцениваемому параметру при $\nu = \nu_1 = \nu_2 = \nu_0$. Следовательно, случайный сигнал, обладающий СМ (2), является разрывным по параметру ν [8] и использовать в качестве характеристики точности оценки центральной частоты дисперсию эффективной оценки [1, 5, 6] не представляется возможным. Поэтому для анализа алгоритмов (19), (20) применим метод локально-марковской аппроксимации [8]. В результате получаем приближенное выражение для функций распределения $F_S(x)$, $F_N(x)$ случайных величин $u_S = \sup_{\nu \in \Theta_S} D(\nu) / \sigma_0$ и $u_N = \sup_{\nu \in \Theta_N} D(\nu) / \sigma_0$:

$$\begin{aligned} F_S(x) = & \Phi[x - z] - 2 \exp[-\psi z(x - z) + \psi^2 z^2 / 2] \Phi[x - z(1 + \psi)] + \\ & + \exp[-2\psi z(x - z) + 2\psi^2 z^2] \Phi[x - z(1 + 2\psi)]; \quad (23) \end{aligned}$$

$$F_N(x) = \begin{cases} \exp\left[-\frac{km(gx - h)}{\sqrt{2\pi}(k-1)} \exp\left\{-\frac{(gx - h)^2}{2}\right\}\right], & x \geq h + 1/g; \\ 0, & x < h + 1/g, \end{cases}$$

$$\text{где } z^2 = \frac{D_0^2}{\sigma_0^2} = \frac{\mu(k-1)Q^2}{(k-1)(1+Q)^2 + 1}; \quad \psi = \frac{2[(k-1)(1+Q)^2 + 1]}{k(Q^2 + 2Q + 2)}; \quad g = \frac{\sigma_0}{\sigma_N} = \sqrt{\frac{(k-1)(1+Q)^2 + 1}{k}};$$

$h = S_N / \sigma_N = -Q\sqrt{\mu/[k(k-1)]}$; $m = (\nu_{\max} - \nu_{\min}) / \Omega$, причем, поскольку $\omega_m > \Omega$, всегда $m \leq k-1$. Выражения (23) справедливы при выполнении условий $\mu \gg 1$ (3), $z \gg 1$, $m \gg 1$ и их точность возрастает с увеличением μ , z , m .

Если $m \gg 1$, то аналогично [8] можно показать, что случайные величины u_N и u_S приближенно статистически независимы. Отсюда находим выражение для функции распределения $F_u(x)$ случайной величины $u = D(\tilde{\nu}) / \sigma_0$ при $m \gg 1$

$$F_u(x) = F_S(x)F_N(x)$$

и при $m \leq 1$

$$F_u(x) = F_S(x).$$

Рассмотрим случай, когда значение параметра $m \leq 1$. Тогда оценка центральной частоты (20) является надежной [5] и с увеличением μ случайный процесс $D(\nu)$ в малой окрестности ν_0 может быть аппроксимирован марковским гауссовским процессом. Применяя затем метод локально-марковской аппроксимации [8] и используя (21), (22), получаем выражения для условных смещения и рассеяния надежной оценки центральной частоты (20)

$$b_0(\tilde{\nu}) = \langle \tilde{\nu} - \nu_0 \rangle = 0; \quad V_0(\tilde{\nu}) = \langle (\tilde{\nu} - \nu_0)^2 \rangle = \frac{13\Omega^2 (Q^2 + 2Q + 2)^2}{8\mu^2 Q^4}.$$

При $m \gg 1$ с учетом аномальных ошибок [5] условные смещения и рассеяние оценки центральной частоты (20) запишутся как

$$b_N(\tilde{\nu}) = (1 - P_0)[(\nu_{\min} + \nu_{\max})/2 - \nu_0];$$

где $V_N(\tilde{\nu}) = P_0 V_0(\tilde{\nu}) + (1 - P_0) V_a(\tilde{\nu})$,

$$P_0 = P[|\tilde{\nu} - \nu_0| < \Omega] \approx \int F_N(x) dF_S(x) = 2\psi z \int_{h+1/g}^{\infty} \exp\left[-\frac{mk(gx-h)}{\sqrt{2\pi(k-1)}} \exp\left\{-\frac{(gx-h)^2}{2}\right\}\right] \times \\ \times \left\{ \exp\left[-\psi z(x-z) + \frac{\psi^2 z^2}{2}\right] \Phi[x-z(1+\psi)] - \exp\left[-2\psi z(x-z) + 2\psi^2 z^2\right] \Phi[x-z(1+2\psi)] \right\} dx$$

— вероятность надежной оценки;

$$V_a(\tilde{\nu}) = \nu_0^2 - \nu_0(\nu_{\min} + \nu_{\max}) + (\nu_{\min}^2 + \nu_{\min}\nu_{\max} + \nu_{\max}^2)/3$$

— рассеяние ОМП при наличии только аномальных ошибок, т.е. при $z \rightarrow 0$. Отметим, что формула (26) получена в предположении гауссовского распределения случайного процесса (10) и применима при отношении сигнал-шум (ОСШ) $z > 1$. Точность этого выражения возрастает с увеличением априорного интервала возможных значений центральной частоты, определяемого параметром m , и с увеличением ОСШ z . В общем случае для произвольных ОСШ результирующее значение рассеяния оценки (20) запишем в виде

$$V(\tilde{\nu}) = \min[V_N(\tilde{\nu}), V_a(\tilde{\nu})],$$

где $V_N(\tilde{\nu})$ определяется из (27), а $V_a(\tilde{\nu})$ — из (29).

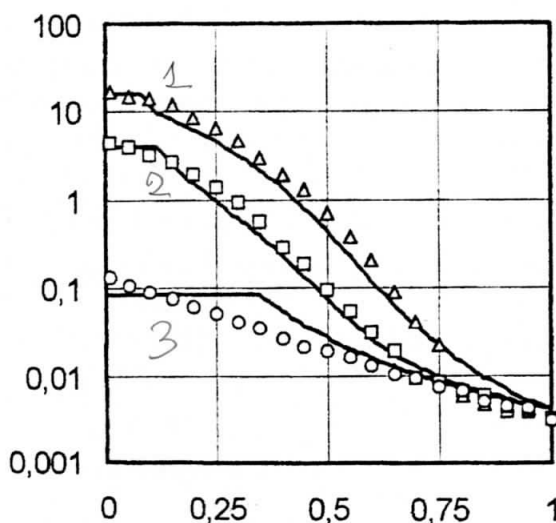


Рис. 2

На рис. 2 изображена зависимость относительного рассеяния $\tilde{V} = V(\tilde{\nu})/\Omega^2$ оценки центральной частоты от параметра Q , рассчитанная по (30) для $\nu_{\min} = \omega_0 - \omega_m/2 + \Omega/2$, $\nu_{\max} = \omega_0 + \omega_m/2 - \Omega/2$, $\nu_0 = \omega_0 = (\nu_{\min} + \nu_{\max})/2$, $m = k-1$. Кривые 1, 2, 3 соответствуют $k = 15, 8, 2$. Для всех кривых $\mu = 100$. Из рис. видно, что аномальные ошибки могут оказывать существенное влияние на точность оценки центральной частоты, причем с увеличением параметров k и m их влияние возрастает. Действительно кривая 3, построенная для $k = 2$, фактически характеризует рассеяние надежной оценки центральной частоты (26) и отклонение от нее кривых 1, 2 обусловлено аномальными ошибками.

Получим теперь характеристики оценки дисперсии (19). Функция распределения $F_D(x)$ оценки \tilde{D} (19) свя-

на с функцией $F_u(x)$ (24) выражением $F_D(x) = \Theta(x)F_u(x/D_0)$. Воспользовавшись аппроксимацией (25) функции $F_u(x)$, при $k \leq 2$, $m \leq 1$ находим

$$b(\tilde{D}) = D_0 \left\{ \left[1 + \frac{3}{2\psi z^2} \right] \Phi(z) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}z} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) + \frac{2}{\psi z^2} \exp\left(\frac{\psi^2 z^2}{2} + \psi z^2\right) \times \right. \\ \left. \times [1 - \Phi(z(1+\psi))] - \frac{1}{2\psi z^2} \exp(2\psi^2 z^2 + 2\psi z^2) [1 - \Phi(z(1+2\psi))] - 1 \right\}; \\ V(\tilde{D}) = D_0^2 \left\{ 1 - \left[1 - \frac{1}{z^2} - \frac{7}{2\psi z^2} \right] \Phi(z) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}z} \left[1 - \frac{3}{\psi z^2} \right] \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) - \frac{4}{\psi z^2} \times \right. \\ \left. \times \left[1 - \frac{1}{\psi z^2} \right] \exp\left(\frac{\psi^2 z^2}{2} + \psi z^2\right) [1 - \Phi(z(1+\psi))] + \frac{1}{2\psi z^2} \left[2 - \frac{1}{\psi z^2} \right] \exp(2\psi^2 z^2 + 2\psi z^2) [1 - \Phi(z(1+2\psi))] \right\}. \quad (31)$$

Используя аппроксимацию (24), при $k \gg 1$, $m \gg 1$ получаем

$$b(\tilde{D}) = \langle \tilde{D} \rangle - D_0; \quad V(\tilde{D}) = \langle \tilde{D}^2 \rangle - 2D_0 \langle \tilde{D} \rangle + D_0^2; \quad (32)$$

$$\langle \tilde{D} \rangle = D_0 \left\{ \int_0^\infty [1 - F_u(x)] dx \right\}, \quad \langle \tilde{D}^2 \rangle = 2D_0^2 \left\{ \int_0^\infty x [1 - F_u(x)] dx \right\},$$

где $F_u(x)$ определяется из (24). Точность формул (31) возрастает с увеличением μ и z , а формул (32) — с увеличением μ , z и m .

Сопоставление (14), (31), (32) позволяет определить выигрыш $\chi = V(D^*)/V(\tilde{D})$ в точности совместной ОМП дисперсии и центральной частоты (19) по сравнению с КПО (11). На рис. 3. нанесены зависимости $\chi = \chi(\Delta)$, рассчитанные по (14), (31), (32). Кривая 1 соответствует $k = 2$, $Q = 5$; кривая 2 — $k = 2$, $Q = 2$; кривая 3 — $k = 15$, $Q = 2$; а кривая 4 — $k = 15$, $Q = 1$. Для всех кривых $\mu = 100$. Анализ кривых на рис. 3 показывает, что при больших отклонениях предполагаемого и истинного значения центральной частоты Δ выигрыш χ в точности совместной оценки может достигать значительных величин, причем с ростом Q , Δ и уменьшением k выигрыш увеличивается. Однако, как показывают результаты численных расчетов, при малых значениях Δ рассеяние совместной оценки (19) может несколько превышать рассеяние КПО (11). Так, при $k = 15$, $Q = 1$, $\mu = 100$ и $\Delta = 0,03$, используя (14), (32), получаем значение $\chi \approx 0,94$, т.е. точность совместной оценки на 6 % хуже точности КПО.

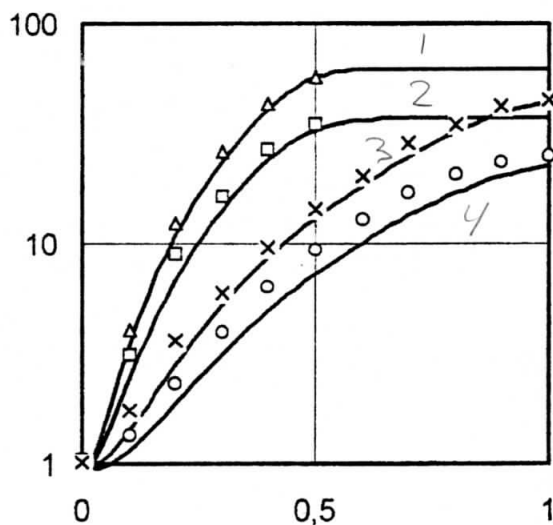


Рис. 3

Для проверки работоспособности рассмотренных алгоритмов оценки дисперсии (8), (11) и (19) было выполнено их статистическое моделирование на ЭВМ. Моделирование проводилось в частотной области и полагалось, что реализация наблюдаемых данных $x(t)$ (1) доступна обработке в течение интервала наблюдения $[-T/2; T/2]$. Кроме того считалось, что $\omega_0 = \nu_0$ и $\nu_{\min} = \omega_0 - \omega_m/2 + \Omega/2$, $\nu_{\max} = \omega_0 + \omega_m/2 - \Omega/2$, $m = k - 1$. Для формирования случайного процесса (10) на ЭВМ использовался нормированный аргумент $\tilde{\omega} = \omega/\Omega$, так что (10) имело вид

$$D(r) = \frac{D_0 \mu}{4(k-1)} \left[k \int_{r-1/2}^{r+1/2} |\tilde{X}(\tilde{\omega})|^2 d\tilde{\omega} - \int_{r_0-k/2}^{r_0+k/2} |\tilde{X}(\tilde{\omega})|^2 d\tilde{\omega} \right], \quad (33)$$

где $\tilde{X}(\tilde{\omega}) = \sqrt{8}X(\tilde{\omega}\Omega)/T\sqrt{D_0}$; $X(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\exp(-j\omega t)dt$ — спектр реализации $x(t)$, $r = v/\Omega$, $r_0 = v_0/\Omega$.

Для моделирования алгоритмов (8), (11) и (19) необходимо формировать реализации случайного процесса $\tilde{X}(\tilde{\omega})$ и на их основе вырабатывать функцию (33). В процессе моделирования вырабатывались отсчеты случайного процесса $\tilde{X}(\tilde{\omega})$ с шагом $\Delta\tilde{\omega}$. На основе сформированных дискретных последовательностей непрерывные реализации этого процесса аппроксимировались ступенчатой функцией. Относительная среднеквадратическая погрешность аппроксимации

$$\delta_X = \left\{ \max_{\tilde{\omega} \in \left(\tilde{\omega}^* - \frac{\Delta\tilde{\omega}}{2}, \tilde{\omega}^* + \frac{\Delta\tilde{\omega}}{2} \right)} \left| \tilde{X}(\tilde{\omega}^*) - \tilde{X}(\tilde{\omega}) \right|^2 \sigma_X^{-2} \right\}^{1/2} = \{2[1 - R_X(\Delta\tilde{\omega}/2)]\}^{1/2}. \quad (34)$$

Здесь $\tilde{\omega}^*$ — одна из точек, в которых формировались отсчеты процесса $\tilde{X}(\tilde{\omega})$; σ_X^2 — его дисперсия, $R_X(\tilde{\omega})$ — коэффициент корреляции.

В случае отсутствия сигнала $s(t)$ и помехи $\xi(t)$ случайный процесс $\tilde{X}(\tilde{\omega})$ является стационарным и обладает коэффициентом корреляции $R_X(\tilde{\omega}) = \sin(\pi\mu\tilde{\omega})/(\pi\mu\tilde{\omega})$. Тогда при шаге $\Delta\tilde{\omega} = 0,1/\mu$ из (34) для среднеквадратической погрешности аппроксимации имеем $\delta_X < 0,1$.

Рассмотрим формирование дискретных отсчетов случайного процесса $\tilde{X}(\tilde{\omega})$. Для этого представим $\tilde{X}(\tilde{\omega}) = \tilde{X}_c(\tilde{\omega}) + j\tilde{X}_s(\tilde{\omega})$, где $\tilde{X}_c(\tilde{\omega}) = \text{Re } \tilde{X}(\tilde{\omega})$, а $\tilde{X}_s(\tilde{\omega}) = \text{Im } \tilde{X}(\tilde{\omega})$. При достаточно большом времени наблюдения ($\mu \gg 1$) справедливо представление

$$\tilde{X}_{c,s}(\tilde{\omega}) = \sqrt{\frac{\Omega}{\pi D_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{G_X(\tilde{\omega}'\Omega)} h(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') [\eta_1(\tilde{\omega}') \pm \eta_2(\tilde{\omega}')] d\tilde{\omega}', \quad (35)$$

где $G_X(\tilde{\omega}\Omega) = \pi D_0 \{I(r_0 - \tilde{\omega}) + I(r_0 + \tilde{\omega})\}/\Omega + \gamma_0 \{I[(r_0 - \tilde{\omega})/k] + I[(r_0 + \tilde{\omega})/k]\}/2 + N_0/2$ — спектральная плотность наблюдаемого процесса $x(t)$ (1); $h(\tilde{\omega}) = \sin(\pi\mu\tilde{\omega})/(\pi\mu\tilde{\omega})$; $\eta_1(\tilde{\omega})$, $\eta_2(\tilde{\omega})$ — независимые гауссовские случайные процессы с нулевыми математическими ожиданиями и одинаковыми корреляционными функциями $\langle \eta_i(\tilde{\omega}_1)\eta_i(\tilde{\omega}_2) \rangle = \delta(\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2)$ ($i = 1, 2$). При достаточно малом шаге $\Delta\tilde{\omega}$ можно записать

$$\tilde{X}_{c,s}(r_0 + \tilde{\omega}_n) \approx \sqrt{\frac{\Omega}{\pi D_0}} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sqrt{G_X(\tilde{\omega}_i\Omega)} h(r_0 + \tilde{\omega}_n - \tilde{\omega}_i) \int_{\tilde{\omega}_i - \Delta\tilde{\omega}/2}^{\tilde{\omega}_i + \Delta\tilde{\omega}/2} [\eta_1(\tilde{\omega}') \pm \eta_2(\tilde{\omega}')] d\tilde{\omega}', \quad (36)$$

где $\tilde{\omega}_n = n\Delta\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}_i = i\Delta\tilde{\omega}$. Обозначим $\lambda_i = \int_{\tilde{\omega}_i - \Delta\tilde{\omega}/2}^{\tilde{\omega}_i + \Delta\tilde{\omega}/2} \eta(\tilde{\omega}') d\tilde{\omega}'$ — независимые гауссовские случайные величины с

нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями $\langle \lambda_i^2 \rangle = \Delta\tilde{\omega}$. Тогда $\lambda_i = x_i \sqrt{\Delta\tilde{\omega}}$, где x_i — независимые гауссовские случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями. Заменяя в (36) переменную суммирования и переходя от бесконечных пределов к конечным, получаем

$$\tilde{X}_{c,s}(r_0 + \tilde{\omega}_n) \approx \sqrt{\Delta\tilde{\omega}/Q} \sum_{i=-p}^p h(i\Delta\tilde{\omega})(x_{n-i} \pm \hat{x}_{n-i}) \sqrt{QI[(n-i)\Delta\tilde{\omega}] + 1}, \quad (37)$$

где \hat{x}_i — независимые гауссовские случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями.

При выбранном шаге дискретизации число слагаемых в (37) определялось таким образом, чтобы при отсутствии сигнала $s(t)$ и помехи $\xi(t)$ относительное отклонение дисперсии сформированного отсчета

$\langle \tilde{X}_{c,s}^2(r_0 + \tilde{\omega}_n) \rangle$ от дисперсии самого процесса $\sigma^2 = \langle \tilde{X}_{c,s}^2(\tilde{\omega}) \rangle$ не превышало заданную величину, т. е. $|1 - \sigma^{-2} \langle \tilde{X}_{c,s}^2(r_0 + \tilde{\omega}_n) \rangle| < \varepsilon$. Для обеспечения $\varepsilon = 0,02$ было выбрано значение $p = 4 / \mu \Delta \tilde{\omega}$.

По сформированным согласно (37) ступенчатым аппроксимациям процессов (35) вычислялась аппроксимация интеграла (33)

$$D(r_0 + j\Delta\tilde{\omega}) = \frac{D_0 \mu \Delta \tilde{\omega}}{4} \left\{ \sum_{n=j-N}^{j+N} \tilde{X}^2(r_0 + \tilde{\omega}_n) - \frac{1}{k-1} \sum_{n=-M}^{j-N-1} \tilde{X}^2(r_0 + \tilde{\omega}_n) - \frac{1}{k-1} \sum_{n=j+N+1}^M \tilde{X}^2(r_0 + \tilde{\omega}_n) \right\}, \quad (38)$$

где $\tilde{X}^2(r_0 + \tilde{\omega}_n) = \tilde{X}_c^2(r_0 + \tilde{\omega}_n) + \tilde{X}_s^2(r_0 + \tilde{\omega}_n)$; $N = \text{int}(1/2\Delta\tilde{\omega})$; $M = \text{int}(k/2\Delta\tilde{\omega})$; $j = \text{int}[(r - r_0)/\Delta\tilde{\omega}]$; $j \in [-(M-N); M-N]$; $\text{int}(\cdot)$ — целая часть числа.

Для каждой сформированной в процессе моделирования реализации (38) интеграла (33), оценки дисперсии (8), (11) и (19) вычислялись по формулам $D_0^* = \max[0, D(r_0)]$ для ОМП дисперсии (8), $D^* = \max[0, D(r_0 + j^*\Delta\tilde{\omega})]$, $j^* = \text{int}[(v^* - v_0)/\Omega\Delta\tilde{\omega}]$ для КПО дисперсии (11) и $\tilde{D} = \max[0, D(r_0 + \tilde{j}\Delta\tilde{\omega})]$, $\tilde{j} = \arg \sup_j D(r_0 + j\Delta\tilde{\omega})$ для совместной оценки дисперсии и центральной частоты случайного сигнала (19), (20).

Моделирование проводилось при значениях параметров $\mu = 100$, $\Delta\tilde{\omega} = 0,001$, $p = 40$. Для каждого значения параметров k, Q, m было проведено 500..2000 циклов испытаний. По результатам моделирования алгоритмов оценки дисперсии (8), (11), (19) вычислялись экспериментальное значение отношений рассеяния ОМП дисперсии (8) к рассеянию КПО (11) и рассеяния совместной оценки (19) к рассеянию КПО (11). Полученные экспериментальные значения нанесены на рис. 1, 3. На рис. 2 показаны экспериментальные значения нормированного рассеяния $\tilde{V} = V(\tilde{v})/\Omega^2$ ОМП (20) центральной частоты случайного сигнала. Как видно из рис. 1, 2 и 3 моделирование показало удовлетворительное согласование теоретических расчетов характеристик оценок по (14), (30)–(32) с экспериментальными значениями и подтвердило работоспособность синтезированных алгоритмов оценки дисперсии случайного сигнала.

Таким образом, полученные результаты позволяют сделать обоснованный выбор между рассмотренными алгоритмами оценки в зависимости от требований, предъявляемых к точности измерения и степени простоты аппаратной или программной реализации алгоритма.

Литература

1. Куликов Е.И. Методы измерения случайных процессов. — М.: Радио и связь, 1986.
2. Мирский Г.Я. Аппаратурное определение характеристик случайных процессов. — М.: Энергия, 1972.
3. Трифонов А.П., Алексеев С.П. Квазиправдоподобная оценка дисперсии стационарного гауссовского случайного процесса — Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника, 1994, № 11, с. 10–18.
4. Трифонов А.П., Нечаев Е.П. Совместная оценка величины и центральной частоты спектра мощности случайного процесса. — Изв. вузов. Сер. Приборостроение, 1988, т. 37, № 12, с. 3–6.
5. Куликов Е.И., Трифонов А.П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. — М.: Сов. радио, 1978.
6. Ван-Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции / Пер. с англ. под ред В.И. Тихонова. — М.: Сов. радио, 1972, т. 1.
7. Вопросы статистической теории радиолокации / П.А. Бакут, И.А. Большаков, Б.М. Герасимов и др.: Под ред. Г.П. Тартаковского. — М.: Сов. радио, 1963, т. 1.
8. Трифонов А.П., Шинаков Ю.С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. — М.: Радио и связь, 1986.

Поступила 1 апреля 1999 г.



Трифонов Андрей Павлович (1944 г. р.) — докт. тех. наук, профессор, зав. кафедрой радиофизики Воронежского государственного университета.
Область научных интересов: статистическая радиофизика и радиотехника, разработка и применение статистических методов для получения, передачи и обработки информации.



Глазнев Александр Александрович (1975 г. р.) — аспирант кафедры радиофизики физического факультета Воронежского государственного университета.
Область научных интересов: статистическая обработка случайных процессов с неизвестными параметрами.