ISSN 0021-3470

ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ
ЗАВЕДЕНИЙ

РАДИОЭЛЕКТРОНИКА

ТОМ 39

1-2

ИЗДАНИЕ
КИЕВСКОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА

1996

УДК 621.391

ТРИФОНОВ А. П., РОЛДУГИН С. В.

ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ СВОЙСТВ СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА НА ТОЧНОСТЬ ОЦЕНОК ЕГО ПАРАМЕТРОВ

Выполнены синтез и анализ квазиправдоподобных оценок параметров спектра мощнос случайного гауссовского сигнала, свойства которого изменяются в некоторой точке интерв ла наблюдения. Общие соотношения конкретизированы для оценки центральной часто спектра мощности колокольной формы.

В работах [1—3] исследованы оценки максимального правдоподоби (ОМП) параметров $\vec{\theta} = \|\theta_1 \ldots \theta_p\|$ спектра мощности (СМ) центриро ванного стационарного гауссовского сигнала $s(t)$, наблюдаемого на фон гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотность N_0. Однако существует большой класс случайных сигналов [4, 5], свойс ва которых резко (скачкообразно) изменяются в некоторый момент вре мени τ на интервале наблюдения $[0;T]$. В связи с чем представляе интерес анализ влияния изменения свойств случайного сигнала на то ность оценок его параметров.

Сигнал со скачкообразным изменением свойств представим в ви составного случайного процесса [5]

$$s(t, \vec{\theta}_0, \tau_0) = \xi_1(t)\,\eta(\tau_0 - t) + \xi_2(t)\,\eta(t - \tau_0), \quad (1)$$

где $\xi_k(t)$ — независимые гауссовские центрированные стационарные слу чайные процессы, обладающие СМ $G_k(\omega, \vec{\theta}_0)$, $k = 1,2$; $\eta(t) = 1$ пр $t > 0$ и $\eta(t) = 0$ при $t < 0$, τ_0 — момент изменения свойств составно случайного сигнала, а $\vec{\theta}_0$ — истинное значение оцениваемых парамет ров. Истинное значение τ_0 момента изменения свойств наблюдаемо случайного сигнала обычно неизвестно [4]. Поэтому при синтезе алгорит ма оценки параметров $\vec{\theta}_0$ сигнала (1) будем считать, что его свойств изменяются в некоторый предполагаемый (ожидаемый) момент τ. При этом в общем случае $\tau \neq \tau_0$.

Для синтеза алгоритма оценки параметров $\vec{\theta}_0$ сигнала (1) воспол зуемся методом максимального правдоподобия [1—3]. В соответствии этим методом необходимо формировать логарифм функционала отношения правдоподобия [2]

$$L(\vec{\theta}) = \frac{1}{N_0} \int_0^T \int_0^T x(t_1)\, x(t_2)\, Q(t_1, t_2, \vec{\theta}, \tau)\, dt_1\, dt_2 - H(\vec{\theta}, \tau) . \tag{2}$$

Здесь $x(t) = s(t, \vec{\theta}_0, \tau_0) + n(t)$ — реализация наблюдаемых данных, $Q(t_1, t_2, \vec{\theta}, \tau) = \widetilde{Q}(t_1, t_2, \vec{\theta}, \tau, 1)$,

$$H(\vec{\theta}, \tau) = \int_0^1 d\varphi \int_0^T \widetilde{Q}(t, t, \vec{\theta}, \tau, \varphi)\, dt / 2 , \tag{3}$$

функция $\widetilde{Q}(t_1, t_2, \vec{\theta}, \tau, \varphi)$ определяется из решения интегрального уравнения

$$\frac{N_0}{2} \widetilde{Q}(t_1, t_2, \vec{\theta}, \tau, \varphi) + \varphi \int_0^T \widetilde{Q}(t_1, t, \vec{\theta}, \tau, \varphi) B_s(t, t_2, \vec{\theta}, \tau)\, dt = B_s(t_1, t_2, \vec{\theta}, \tau), \tag{4}$$

$$B_s(t_1, t_2, \vec{\theta}, \tau) = \mathrm{M} \left[s(t_1, \vec{\theta}, \tau)\, s(t_2, \vec{\theta}, \tau) \right] =$$

$$= \eta(\tau - t_1)\, \eta(\tau - t_2)\, B_1(t_2 - t_1, \vec{\theta}) + \eta(t_1 - \tau)\, \eta(t_2 - \tau)\, B_2(t_2 - t_1, \vec{\theta}) \tag{5}$$

— корреляционная функция сигнала (1), а $B_k(t_2 - t_1, \vec{\theta}) = \mathrm{M}\, [\xi_k(t_1)\, \xi_k(t_2)]$ — корреляционные функции случайных процессов $\xi_k(t)$, $k = 1,2$.

Положим, что выполняется условие

$$\mu >> 1 , \tag{6}$$

где $\mu = \min \{ \mu_1, \mu_2 \}$, $\mu_1 = \tau_0\, \Omega_1 / 2\pi$, $\mu_2 = (T - \tau_0)\, \Omega_2 / 2\pi$, а

$$\Omega_k = \int_{-\infty}^{+\infty} G_k^2(\omega, \vec{\theta}_0)\, d\omega\, \left[2 \max_{\omega} G_k^2(\omega, \vec{\theta}_0) \right]^{-1} \tag{7}$$

— эквивалентные полосы частот процессов $\xi_k(t)$, $k = 1,2$. Тогда решение уравнения (4) можно искать в форме, структурно подобной корреляционной функции (5) сигнала (1)

$$\widetilde{Q}(t_1, t_2, \vec{\theta}, \tau, \varphi) = \eta(\tau - t_1)\, \eta(\tau - t_2)\, \widetilde{Q}_1(t_2 - t_1, \vec{\theta}, \varphi) +$$

$$+ \eta(t_1 - \tau)\, \eta(t_2 - \tau)\, \widetilde{Q}_2(t_2 - t_1, \vec{\theta}, \varphi) . \tag{8}$$

Подставляя (8) в (4), получаем систему интегральных уравнений

$$\frac{N_0}{2} \widetilde{Q}_1(t_2 - t_1, \vec{\theta}, \varphi) + \varphi \int_0^{\tau} \widetilde{Q}_1(t - t_1, \vec{\theta}, \varphi)\, B_1(t_2 - t, \vec{\theta})\, dt = B_1(t_2 - t_1, \vec{\theta}) ,$$

$$\frac{N_0}{2}\,\widetilde{Q}_2(t_2-t_1,\vec{\theta},\varphi)+\varphi\int_{\tau}^{T}\widetilde{Q}_2(t-t_1,\vec{\theta},\varphi)\,B_2(t_2-t,\vec{\theta})\,dt=B_2(t_2-t_1,\vec{\theta})\,. \qquad (9)$$

В силу (6) пределы интегрирования в уравнениях системы (9) можно заменить на бесконечные. В результате приходим к интегральным уравнениям типа свертки

$$\frac{N_0}{2}\,\widetilde{Q}_k(t_2-t_1,\vec{\theta},\varphi)+\varphi\int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{Q}_k(t-t_1,\vec{\theta},\varphi)B_k(t_2-t,\vec{\theta})\,dt=B_k(t_2-t_1,\vec{\theta}),\ k=1,2. \qquad (10)$$

Решая систему уравнений (10) с помощью преобразования Фурье, находим

$$\widetilde{Q}_k(t_2-t_1,\vec{\theta},\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho_k(\omega,\vec{\theta})\exp\left[j\omega\,(t_2-t_1)\right]}{1+\varphi\,\rho_k(\omega,\vec{\theta})}\,d\omega\,, \qquad (11)$$

где $\rho_k(\omega,\vec{\theta})=2G_k(\omega,\vec{\theta})/N_0$. Подставляя (11) в (8), а (8) в (2) и (3), имеем

$$L(\vec{\theta})=\frac{1}{N_0}\int_0^{\tau}\int_0^{\tau}x(t_1)\,x(t_2)\,Q_1(t_2-t_1,\vec{\theta})\,dt_1\,dt_2+$$

$$+\frac{1}{N_0}\int_{\tau}^{T}\int_{\tau}^{T}x(t_1)\,x(t_2)\,Q_2(t_2-t_1,\vec{\theta})\,dt_1\,dt_2-\tau H_1(\vec{\theta})-(T-\tau)H_2(\vec{\theta}). \qquad (12)$$

Здесь $Q_k(t_2-t_1,\vec{\theta})=\widetilde{Q}_k(t_2-t_1,\vec{\theta},1)$, $H_k(\vec{\theta})=\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\left[1+\rho_k(\omega,\vec{\theta})\right]d\omega\,/\,4\pi$.

Обозначим $\hat{\vec{\theta}}=\arg\sup L(\vec{\theta})$ — оценку параметров $\vec{\theta}_0$ сигнала (1). Поскольку реализация наблюдаемых данных $x(t)$ в (12) содержит сигнал (1), у которого момент изменения свойств $\tau_0\neq\tau$, оценка $\hat{\vec{\theta}}$ не является ОМП. Эту оценку можно назвать квазиправдоподобной оценкой (КПО) [6] поскольку она совпадает с ОМП при $\tau=\tau_0$.

Для определения характеристик КПО $\hat{\vec{\theta}}$ параметров $\vec{\theta}_0$ сигнала (1) представим (12) как сумму [1, 3] $L(\vec{\theta})=S(\vec{\theta})+N(\vec{\theta})$, где $S(\vec{\theta})=\mathbf{M}\,[L(\vec{\theta})]$ — сигнальная функция, а $N(\vec{\theta})=L(\vec{\theta})-\mathbf{M}\,[L(\vec{\theta})]$ — шумовая.

Выполняя в (12) усреднение и учитывая (6), находим сигнальную функцию $S(\vec{\theta})=\tau\,A_1(\vec{\theta})+(T-\tau)\,A_2(\vec{\theta})+\alpha\,P_1(\vec{\theta})+\beta\,P_2(\vec{\theta})$. Здесь

$$A_k(\vec{\theta})=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{\rho_k(\omega,\vec{\theta})\,[1+\rho_k(\omega,\vec{\theta}_0)]}{1+\rho_k(\omega,\vec{\theta})}-\ln\left[1+\rho_k(\omega,\vec{\theta})\right]\right\}d\omega\,,$$

$$P_k(\vec{\theta}) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_k(\omega, \vec{\theta})\, \Delta(\omega, \vec{\theta}_0)}{1 + \rho_k(\omega, \vec{\theta})}\, d\omega \ , \ k = 1,2 \ ,$$

$$\Delta(\omega, \vec{\theta}_0) = \rho_2(\omega, \vec{\theta}_0) - \rho_1(\omega, \vec{\theta}_0) \ , \ \alpha = \max(0, \tau-\tau_0) \ , \ \beta = \min(0, \tau-\tau_0).$$

Шумовая функция $N(\vec{\theta})$ представляет собой реализацию случайного поля, два первых момента которого

$$\mathrm{M}\ [N(\vec{\theta})]=0, B_N(\vec{\theta}_1,\vec{\theta}_2)=\mathrm{M}\ [N(\vec{\theta}_1)N(\vec{\theta}_2)]=$$

$$= \tau\ F_1(\vec{\theta}_1, \vec{\theta}_2) + (T - \tau)\ F_2(\vec{\theta}_1, \vec{\theta}_2) + \alpha\ W_1(\vec{\theta}_1, \vec{\theta}_2) + \beta\ W_2(\vec{\theta}_1, \vec{\theta}_2) \ ,$$

$$F_k(\vec{\theta}_1, \vec{\theta}_2) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_k(\omega, \vec{\theta}_1)\, \rho_k(\omega, \vec{\theta}_2)\ [1 + \rho_k(\omega, \vec{\theta}_0)\,]^2}{[\ 1 + \rho_k(\omega, \vec{\theta}_1)]\ \ [\ 1 + \rho_k(\omega, \vec{\theta}_2)]}\, d\omega \ ,$$

$$W_k(\vec{\theta}_1,\vec{\theta}_2) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_k(\omega,\vec{\theta}_1)\, \rho_k(\omega,\vec{\theta}_2)\ \Delta(\omega,\vec{\theta}_0)\ \ [2+\rho_1(\omega,\vec{\theta}_0)+\rho_2(\omega,\vec{\theta}_0)\,]}{[\ 1 + \rho_k(\omega,\vec{\theta}_1)]\ \ [\ 1 + \rho_k(\omega,\vec{\theta}_2)]}\, d\omega \ .$$

Так как, по определению КПО, функция $L(\vec{\theta})$ (12) при $\vec{\theta} = \hat{\vec{\theta}}$ достигает наибольшего максимума, КПО $\hat{\vec{\theta}}$ является решением системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i}[\ S(\vec{\theta}) + N(\vec{\theta})\ ]\ \Big|_{\hat{\vec{\theta}}} = 0 \ , \quad i = \overline{1,p} \ . \tag{13}$$

Если шумовая функция отсутствует, так что $N(\vec{\theta}) \equiv 0$, то функция (12) достигает наибольшего максимума в точке $\vec{\tilde{\theta}} = \arg\sup S(\vec{\theta})$. В общем случае $\vec{\tilde{\theta}} \neq \vec{\theta}_0$ и может быть найдено из системы уравнений

$$\left[\frac{\partial S(\vec{\theta})}{\partial \theta_i}\right]_{\vec{\tilde{\theta}}} = \tau\ A_{1i} + (T - \tau)\ A_{2i} + \alpha\ P_{1i} + \beta\ P_{2i} = 0 \ , \quad i = \overline{1,p} \ , \tag{14}$$

где

$$A_{ki} = \left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\, \rho_k(\omega, \vec{\theta})}{\partial \theta_i}\, \frac{\rho_k(\omega, \vec{\theta}_0) - \rho_k(\omega, \vec{\theta})}{[\ 1 + \rho_k(\omega, \vec{\theta})]^{\ 2}}\, d\omega \right\}_{\vec{\tilde{\theta}}} ,$$

$$P_{ki} = \left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\, \rho_k(\omega, \vec{\theta})}{\partial \theta_i}\, \frac{\Delta(\omega, \vec{\theta}_0)}{[\ 1 + \rho_k(\omega, \vec{\theta})]^{\ 2}}\, d\omega \right\}_{\vec{\tilde{\theta}}} , \quad k = 1,2 \ .$$

Поскольку $\max S(\vec{\theta}) = S(\vec{\tilde{\theta}})$, отношение сигнал—шум [3] можем записать в виде: $z^2 = S^2(\vec{\tilde{\theta}}) / B_N(\vec{\tilde{\theta}}, \vec{\tilde{\theta}})$. Полагая отношение сигнал—шум достаточно большим, для приближенного решения системы уравнений (13) применим метод малого параметра [3]. В качестве малого параметра используем величину $1/z$. Ограничиваясь рассмотрением первого приближения, находим смещение (систематическую ошибку) КПО i-го параметра

$$b_i = \mathrm{M}\left[\hat{\theta}_i - \theta_{0i}\right] = \tilde{\theta}_i - \theta_{0i} \tag{15}$$

и корреляционную матрицу КПО

$$\mathrm{K} = \left\| \mathrm{M}\left[(\hat{\theta}_i - \tilde{\theta}_i)(\hat{\theta}_j - \tilde{\theta}_j)\right] \right\| = \mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{B}\,(\mathbf{S}^{+})^{-1}, \tag{16}$$

где (+) означает транспонирование,

$$\mathbf{S} = \left\| -\left[\frac{\partial^2 S(\vec{\theta})}{\partial\theta_i\,\partial\theta_j}\right]_{\vec{\tilde{\theta}}} \right\|, \quad \mathbf{B} = \left\| \left[\frac{\partial^2 B_N(\vec{\theta}_1, \vec{\theta}_2)}{\partial\theta_{1i}\,\partial\theta_{2j}}\right]_{\vec{\tilde{\theta}}} \right\|,$$

$$\left[\frac{\partial^2 S(\vec{\theta})}{\partial\theta_i\,\partial\theta_j}\right]_{\vec{\tilde{\theta}}} = \tau\,A_{1ij} + (T-\tau)\,A_{2ij} + \alpha\,P_{1ij} + \beta\,P_{2ij},$$

$$\left[\frac{\partial^2 B_N(\vec{\theta}_1, \vec{\theta}_2)}{\partial\theta_{1i}\,\partial\theta_{2j}}\right]_{\vec{\tilde{\theta}}} = \tau\,F_{1ij} + (T-\tau)\,F_{2ij} + \alpha\,W_{1ij} + \beta\,W_{2ij}.$$

$$A_{kij} = \left[\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial^2\rho_k(\omega,\vec{\theta})}{\partial\theta_i\,\partial\theta_j}\,\frac{\rho_k(\omega,\vec{\theta}_0) - \rho_k(\omega,\vec{\theta})}{\left[1+\rho_k(\omega,\vec{\theta})\right]^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial\rho_k(\omega,\vec{\theta})}{\partial\theta_i}\,\frac{\partial\rho_k(\omega,\vec{\theta})}{\partial\theta_j}\,\frac{1 + 2\rho_k(\omega,\vec{\theta}_0) - \rho_k(\omega,\vec{\theta})}{\left[1+\rho_k(\omega,\vec{\theta})\right]^3}\right)d\omega\right]_{\vec{\tilde{\theta}}},$$

$$P_{kij} = \left[\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial^2\rho_k(\omega,\vec{\theta})}{\partial\theta_i\,\partial\theta_j}\left[1+\rho_k(\omega,\vec{\theta})\right] - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2\,\frac{\partial\rho_k(\omega,\vec{\theta})}{\partial\theta_i}\,\frac{\partial\rho_k(\omega,\vec{\theta})}{\partial\theta_j}\right)\frac{\Delta(\omega,\vec{\theta}_0)}{\left[1+\rho_k(\omega,\vec{\theta})\right]^3}\,d\omega\right]_{\vec{\tilde{\theta}}},$$

$$F_{kij} = \left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\rho_k(\omega,\vec{\theta})}{\partial\theta_i}\,\frac{\partial\rho_k(\omega,\vec{\theta})}{\partial\theta_j}\,\frac{\left[1+\rho_k(\omega,\vec{\theta}_0)\right]^2}{\left[1+\rho_k(\omega,\vec{\theta})\right]^4}\,d\omega\right\}_{\vec{\tilde{\theta}}}, \quad k=1,2;\ i,j=\overline{1,p},$$

$$W_{kij} = \left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\rho_k(\omega,\vec{\theta})}{\partial\theta_i}\,\frac{\partial\rho_k(\omega,\vec{\theta})}{\partial\theta_j}\,\frac{\Delta(\omega,\vec{\theta}_0)\,\left[2+\rho_1(\omega,\vec{\theta}_0)+\rho_2(\omega,\vec{\theta}_0)\right]}{\left[1+\rho_k(\omega,\vec{\theta})\right]^4}\,d\omega\right\}_{\vec{\tilde{\theta}}}.$$

Полученные для характеристик КПО выражения (15), (16) являются довольно общими. Из них, как частный случай, можно найти характеристики ОМП $\vec{\theta}_m$ параметров $\vec{\theta}_0$ сигнала (1) со скачкообразным изменением свойств. Действительно, при $\tau = \tau_0$, КПО $\hat{\vec{\theta}}$ переходит в ОМП $\vec{\theta}_m$. Как нетрудно убедиться, в этом случае решение системы (14) совпадает с истинным значением оцениваемых параметров. Следовательно, $\vec{\bar{\theta}} = \vec{\theta}_0$ и ОМП $\vec{\theta}_m$ несмещенная. Полагая в (16) $\tau = \tau_0$ и $\vec{\bar{\theta}} = \vec{\theta}_0$, получаем корреляционную матрицу ОМП в виде

$$\mathbf{K}_m = \left\| \left[\frac{\tau_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \rho_1(\omega,\vec{\theta})}{\partial \theta_i} \frac{\partial \rho_1(\omega,\vec{\theta})}{\partial \theta_j} \left[1+\rho_1(\omega,\vec{\theta}) \right]^{-2} d\omega + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{T-\tau_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \rho_2(\omega,\vec{\theta})}{\partial \theta_i} \frac{\partial \rho_2(\omega,\vec{\theta})}{\partial \theta_j} \left[1+\rho_2(\omega,\vec{\theta}) \right]^{-2} d\omega \right]_{\vec{\theta}_0} \right\|^{-1}; \; i,j = \overline{1,p}. \qquad (17)$$

Если в (17) положить $\tau_0 = T$, то получим корреляционную матрицу ОМП параметров $\vec{\theta}_0$ СМ стационарного случайного процесса $\xi_1(t)$, а при $\tau_0 = 0$ — корреляционную матрицу ОМП параметров СМ стационарного процесса $\xi_2(t)$ соответственно

$$\mathbf{K}_{mk} = \left\| \left[\frac{T}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \rho_k(\omega,\vec{\theta})}{\partial \theta_i} \frac{\partial \rho_k(\omega,\vec{\theta})}{\partial \theta_j} \left[1+\rho_k(\omega,\vec{\theta}) \right]^{-2} d\omega \right]_{\vec{\theta}_0} \right\|^{-1}. \qquad (18)$$

$$k = 1,2; \quad i,j = \overline{1,p}$$

Последнее выражение совпадает с корреляционной матрицей совместно-эффективных оценок параметров СМ стационарного гауссовского случайного процесса $\xi_k(t)$ [2]. В частности, при $p = 1$ из (18) получаем результат [1, 3].

Выражения (15), (16) позволяют также найти характеристики КПО параметров СМ стационарного гауссовского процесса, если неоптимальность этих оценок обусловлена отличием формы СМ, для которого синтезирован алгоритм оценки, от формы СМ реально наблюдаемого случайного стационарного сигнала [6]. Действительно, полагая, например, $\tau_0 = T$ и $\tau = 0$, получаем характеристики КПО, когда алгоритм оценки синтезирован для стационарного процесса, обладающего СМ $G_2(\omega, \vec{\theta})$, а наблюдается стационарный процесс, обладающий СМ $G_1(\omega, \vec{\theta}_0)$. Если же положить $\tau_0 = 0$ и $\tau = T$, то получим характеристики КПО, когда алгоритм оценки синтезирован для стационарного процесса, обладающего СМ $G_1(\omega, \vec{\vartheta})$, а наблюдается стационарный процесс, обладающий СМ $G_2(\omega, \vec{\vartheta}_0)$. Последние два частных случая общих выражений (15), (16) совпадают с результатами [6].

Наконец, положив $\tau = T$ при произвольном $\tau_0 \in [0;T]$, получим характеристики КПО, когда алгоритм оценки синтезирован для стационарного гауссовского сигнала, обладающего СМ $G_1(\omega, \vec{\vartheta})$, а наблюдается сигнал (1) с изменением свойств в момент τ_0. Совершенно аналогично, при $\tau = 0$ и $\tau_0 \in [0;T]$ получаем характеристики КПО, когда алгоритм оценки синтезирован для стационарного гауссовского сигнала, обладающего СМ $G_2(\omega, \vec{\vartheta})$, а наблюдается нестационарный сигнал (1).

Сопоставление перечисленных частных вариантов выражений (15), (16) позволяет определить потери в точности оценки параметров случайного сигнала вследствие изменения его свойств, из-за незнания момента изменения его свойств, а также за счет отличия формы СМ ожидаемого сигнала от формы СМ наблюдаемого сигнала.

В качестве примера рассмотрим оценку центральной частоты ν_0 узкополосного случайного сигнала, СМ которого имеет вид [5]

$$G_k(\omega, \nu_0) = \frac{\gamma_k}{2}\left[g_k\left(\frac{\nu_0 - \omega}{\Omega_k}\right) + g_k\left(\frac{\nu_0 + \omega}{\Omega_k}\right)\right], \tag{19}$$

где γ_k — максимальная величина СМ, Ω_k — эквивалентная полоса частот (7), а функция $g_k(\cdot)$ описывает форму СМ и удовлетворяет условиям

$$g_k(x) = g_k(-x) \geq 0, \ \max g_k(x) = 1, \ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_k^{\,2}(x)\, dx = 1, \ k = 1,2 \tag{20}$$

Подставляя (19) в (14) и учитывая (20), получаем $\tilde{\nu} = \nu_0$. Следовательно, КПО центральной частоты будет несмещенной, а ее дисперсия, согласно (16), запишется как

$$D(\tau, \tau_0) = \left[\tau\, F_{111} + (T - \tau)\, F_{211} + \alpha\, W_{111} + \beta\, W_{211}\right] \times$$
$$\times \left[\tau\, A_{111} + (T - \tau)\, A_{211} + \alpha\, P_{111} + \beta\, P_{211}\right]^{-2}. \tag{21}$$

Здесь

$$F_{k11} = -A_{k11} = \frac{q_k^{\,2}}{2\pi\Omega_k}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{dg_k(x)/dx}{1 + q_k\, g_k(x)}\right]^2 dx,$$

$$P_{k11}=\frac{q_k}{2\pi\Omega_k}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{d^2g_k(x)}{dx^2}\left[1+q_k\,g_k(x)\right]-2q_k\left[\frac{dg_k(x)}{dx}\right]^2\right\}\times$$

$$\times\frac{q_2\,g_2(x\Omega_k/\Omega_2)-q_1\,g_1(x\Omega_k/\Omega_1)}{\left[1+q_k\,g_k(x)\right]^3}\,dx\,, \tag{22}$$

$$W_{k11}=\frac{q_k^2}{2\pi\Omega_k}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{dg_k(x)}{dx}\right]^2\left\{q_2\,g_2\left(\frac{x\,\Omega_k}{\Omega_2}\right)-q_1\,g_1\left(\frac{x\,\Omega_k}{\Omega_1}\right)\right\}\times$$

$$\times\left[2+q_1\,g_1\left(\frac{x\,\Omega_k}{\Omega_1}\right)+q_2\,g_2\left(\frac{x\,\Omega_k}{\Omega_2}\right)\right]\left[1+q_k\,g_k(x)\right]^{-4}dx\,,$$

$$q_k=\frac{\gamma_k}{N_0}\,,\ k=1,2.$$

Выражения (22), определяющие величину дисперсии (21) КПО центральной частоты существенно упрощаются для слабого случайного сигнала, когда

$$q_k \ll 1\,,\quad k=1,2\,. \tag{23}$$

Пренебрегая в силу (23) членами порядка малости $q_k^{\,3}$ и менее в (22), получаем

$$F_{k11}=-\Lambda_{k11}=\frac{q_k^2}{2\pi\Omega_k}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[g_k'(x)\right]^2dx\,,$$

$$P_{k11}=\frac{q_kq_1}{2\pi\Omega_1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}g_k'(x)\,g_1'\left(\frac{x\,\Omega_k}{\Omega_1}\right)dx-\frac{q_kq_2}{2\pi\Omega_2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}g_k'(x)\,g_2'\left(\frac{x\,\Omega_k}{\Omega_2}\right)dx\,,$$

$$W_{k11}\approx 0\,,\quad g_k'(x)=dg_k(x)/dx\,,\quad k=1,2\,. \tag{24}$$

Положим далее, что у слабого случайного сигнала (1), обладающего СМ (19) в момент τ_0 изменяется только эквивалентная полоса частот (7), так что

$$q_1=q_2=q\,,\quad g_1(x)=g_2(x)=g(x)\,. \tag{25}$$

Подставляя (25) в (24), а затем (24) в (21), находим дисперсию КПО центральной частоты

$$D(\tau,\tau_0)=\psi\left[\tau+\frac{(T-\tau)}{\chi}\right]\left\{\tau+\frac{(T-\tau)}{\chi}-\alpha\left[1-\frac{R(1/\chi)}{\chi}\right]-\beta\left[R(\chi)-\frac{1}{\chi}\right]\right\}^{-2},$$

где (26)

$$\psi = \left\{ q^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[g'(x) \right]^2 dx \,/\, 2\pi\Omega_1 \right\}^{-1},$$

$$R(\chi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g'(x)\, g'(\chi x)\, dx \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[g'(x) \right]^2 dx \right\}^{-1}, \quad \chi = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}. \qquad (27)$$

Полагая в (26) $\tau = \tau_0$, получаем дисперсию ОМП центральной частоты слабого узкополосного сигнала, эквивалентная полоса которого изменяется в момент τ_0

$$D_m = D(\tau_0, \tau_0) = \psi \left[\tau_0 + (T - \tau_0) \,/\, \chi \right]^{-1}. \qquad (28)$$

Проигрыш в точности КПО по сравнению с точностью ОМП за счет отличия ожидаемого момента τ изменения эквивалентной полосы от его истинного значения τ_0 можно охарактеризовать отношением

$$\kappa = D(\tau, \tau_0)/D_m = [\eta + (1-\eta)/\chi][\eta + \delta_\tau + (1 - \eta - \delta_\tau)/\chi] \times$$

$$\times \left(\eta + \delta_\tau + \frac{1-\eta-\delta_\tau}{\chi} - \max(0,\delta_\tau)\left[1 - \frac{R(1/\chi)}{\chi} \right] - \min(0,\delta_\tau)\left[R(\chi) - \frac{1}{\chi} \right] \right)^{-2},$$

$$\eta = \tau_0 / T, \quad \delta_\tau = (\tau - \tau_0)/T. \qquad (29)$$

Согласно (12), для получения КПО с учетом изменения свойств сигнала (1) необходимо формировать два квадратичных функционала от реализации наблюдаемых данных. Если же сигнал предполагается стационарным (т. е. $\tau = 0$ или $\tau = T$), то достаточно формировать один квадратичный функционал, что несколько упрощает реализацию КПО. Рассмотрим ситуацию, когда для получения КПО используется алгоритм, синтезированный в предположении, что наблюдается стационарный сигнал, обладающий СМ $G_1(\omega, \nu)$. Тогда в (12) следует положить $\tau = T$, а дисперсия получаемой при этом КПО, согласно (26), запишется как

$$D_T = D(T, \tau_0) = \psi\, T\, [T - (T - \tau_0)\,(1 - R(1/\chi)/\chi)]^{-2}. \qquad (30)$$

Сопоставляя (26) и (30), можно определить проигрыш в точности более простой КПО, синтезированной для стационарного сигнала, по сравнению с КПО, синтезированной с учетом изменения свойств сигнала. Количественно этот проигрыш будем характеризовать отношением

$$h_T = \frac{D_T}{D(\tau, \tau_0)} = \left(\eta + \delta_\tau + \frac{1-\eta-\delta_\tau}{\chi} - \max(0,\delta_\tau)\left[1 - \frac{R(1/\chi)}{\chi} \right] - \right.$$

$$\left. - \min(0,\delta_\tau)\left[R(\chi) - \frac{1}{\chi} \right] \right)^2 \left[1 - (1-\eta)\left\{ 1 - \frac{R(1/\chi)}{\chi} \right\} \right]^{-2} \left[\eta + \delta_\tau + \frac{1-\eta-\delta_\tau}{\chi} \right]^{-1}. \qquad (31)$$

Если же для получения КПО используется алгоритм, синтезированный в предположении, что наблюдается стационарный сигнал, обладающий СМ $G_2(\omega, \nu)$, то в (12) следует положить $\tau = 0$. Дисперсию такой КПО получаем из (26) при $\tau = 0$

$$D_0 = D(0, \tau_0) = \psi\, T\, \chi^{-1}\, [T/\chi + \tau_0\, (R(\chi) - 1/\chi)]^{-2}. \tag{32}$$

Проигрыш в точности КПО, синтезированной для стационарного сигнала, обладающего СМ $G_2(\omega, \nu)$ по сравнению с точностью КПО, синтезированной с учетом изменения свойств сигнала, можно охарактеризовать отношением

$$h_0 = \frac{D_0}{D(\tau, \tau_0)} = \chi \left(\eta + \delta_\tau + \frac{1 - \eta - \delta_\tau}{\chi} - \max(0, \delta_\tau)\left[1 - \frac{R(1/\chi)}{\chi}\right] - \right.$$
$$\left. - \min(0, \delta_\tau)\left[R(\chi) - \frac{1}{\chi}\right]\right)^2 \left[1 + \eta\{\chi\, R(\chi) - 1\}\right]^{-2}\left[\eta + \delta_\tau + \frac{1 - \eta - \delta_\tau}{\chi}\right]^{-1}. \tag{33}$$

Очевидно, максимальной точностью обладает ОМП, синтезированная с учетом изменения свойств сигнала (1) в момент τ_0. Для получения ОМП надо в (12) положить $\tau = \tau_0$, а ее дисперсия определяется из (28). Сопоставляя (28) и (30), получаем проигрыш в точности КПО, синтезированной для стационарного сигнала, обладающего СМ $G_1(\omega, \nu)$ по сравнению с точностью ОМП, синтезированной при априори известном моменте изменения свойств сигнала (1)

$$h_{Tm} = \frac{D_T}{D_m} = \frac{1 + \eta\, (\chi - 1)}{\chi\, (1 - (1 - \eta)\, [1 - R(1/\chi)/\chi\,])^2}. \tag{34}$$

Совершенно аналогично, из (28) и (32) имеем

$$h_{0m} = \frac{D_0}{D_m} = \frac{1 + \eta\, (\chi - 1)}{(1 + \eta\, [\chi\, R(\chi) - 1\,])^2} \tag{35}$$

— проигрыш в точности КПО, синтезированной для стационарного сигнала, обладающего СМ $G_2(\omega, \nu)$, по сравнению с точностью ОМП.

Пусть при выполнении (25) СМ (19) случайного сигнала с неизвестной центральной частотой имеет колокольную форму

$$g(x) = \exp(-\pi\, x^2/2). \tag{36}$$

Подставляя (36) в (27), находим $R(\chi) = \chi\, [2/(1 + \chi^2)]^{3/2}$. На рис. 1 приведены зависимости $\kappa\,(\delta_\tau)$ (29) проигрыша в точности КПО (26) по сравнению с точностью ОМП (28) центральной частоты сигнала, форма СМ которого имеет колокольную форму (36). Кривые на рис. 1 рассчитаны при $\eta = 0.5$ (т. е. момент изменения свойств расположен в середине интервала наблюдения) и обозначены: *1* — для $\chi = 0.2$, *2* — $\chi = 0.4$, *3*

— $\chi = 2.5$, $4 - \chi = 5.0$. Как следует из рис. 1 проигрыш тем больше, чем сильнее величина χ отличается от единицы и чем больше $|\delta_\tau|$, т. е. чем значительнее отличие ожидаемого (предполагаемого) значения τ момента изменения свойств сигнала (1) от его истинной величины τ_0 .

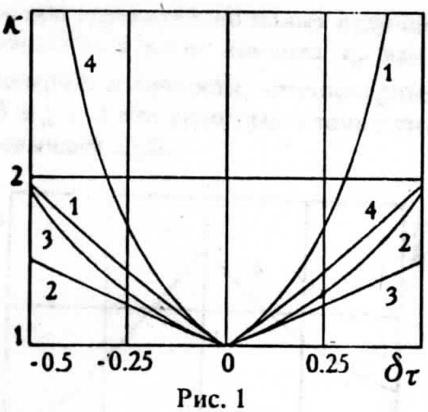

Рис. 1

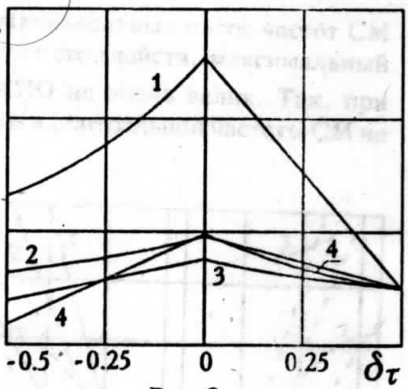

Рис. 2

На рис. 2 приведены зависимости $h_T(\delta_\tau)$ (31) проигрыша в точности КПО (30), синтезированной для стационарного случайного сигнала, обладающего СМ $G_1(\omega, \nu)$ по сравнению с точностью КПО (26), учитывающей изменение свойств сигнала (1). На рис. 3 приведены зависимости $h_0(\delta_\tau)$ (33) проигрыша в точности КПО (32), синтезированной для стационарного случайного сигнала, обладающего СМ $G_2(\omega, \nu)$ по сравнению с точностью КПО (26), учитывающей изменение свойств сигнала (1). Обозначения кривых рис. 2, 3 такие же, как на рис. 1. Сопоставление кривых на рис. 2, 3 позволяет определить условия, при которых целесообразно в процессе синтеза учитывать изменение свойств сигнала (1) и, соответственно, использовать алгоритм КПО (12) вместо более простых алгоритмов оценки параметров стационарных сигналов [1—3]. Так,для всех рассмотренных значений χ, применение алгоритма КПО (12) приводит к повышению точности оценки, если $|\delta_\tau| < 0.25$.

Естественно, максимальный проигрыш «стационарных» КПО по сравнению с «нестационарной» достигается при $\delta_\tau = 0$, когда «нестационарная» КПО совпадает с ОМП. Этот максимальный проигрыш, как функция χ, показан на рис. 4. Здесь сплошными линиями нанесены зависимости $h_{Tm}(\chi)$ (34), а штриховыми — зависимости $h_{0m}(\chi)$ (35). Кривые 1 соответствуют значению $\eta = 0,25$; $2 - \eta = 0,5$; $3 - \eta = 0,75$. Отметим, что при сравнительно малых отличиях эквивалентных полос частот СМ сигнала до и после момента τ_0 изменения его свойств, максимальный проигрыш в точности «стационарных» КПО не очень велик. Так, при $0{,}5 \le \chi \le 2$ этот проигрыш в точности оценки центральной частоты СМ не превышает 3 дБ.

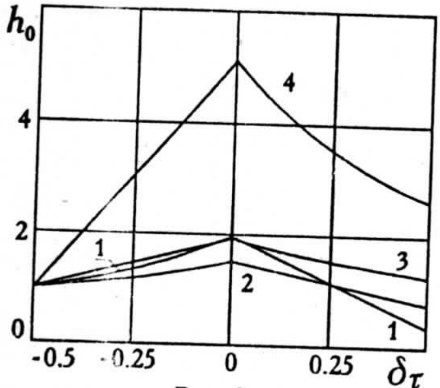

Рис. 3

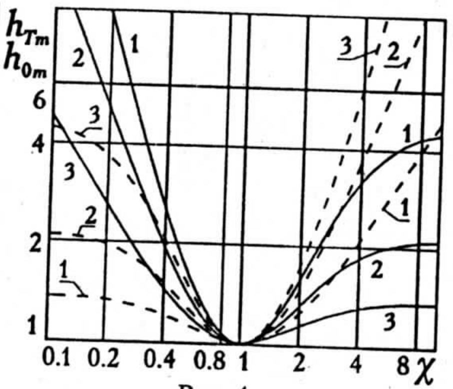

Рис. 4

Полученные выражения позволяют сделать обоснованный выбор между различными КПО и ОМП параметров сигнала с изменением свойств, в зависимости от требований, предъявляемых к точности оценки и к степени простоты аппаратурной реализации алгоритма.

Приведенные результаты получены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Куликов Е. И.* Методы измерения случайных процессов.— М.: Радио и связь, 1986.— 272 с.
2. *Ван Трис Г.* Теория обнаружения, оценок и модуляции.— М.: Сов. радио, 1977.— Т. 3.— 664 с.
3. *Куликов Е. И., Трифонов А. П.* Оценка параметров сигналов на фоне помех.— М.: Сов. радио, 1978.— 296 с.
4. Обнаружение изменения свойств сигналов и динамических систем / М. Бассвиль, А. Вилски, А. Банвенист и др.; Под ред. М. Бассвиль, А. Банвениста.— М.: Мир, 1989.— 278 с.
5. *Тихонов В. И.* Статистическая радиотехника.— М.: Радио и связь, 1982.— 634 с.
6. *Трифонов А. П., Алексеенко С. П.* Квазиправдоподобная оценка параметров спектра мощности случайного сигнала // Радиотехника и электроника, 1995.— Т. 40.— № 1.— С. 88—92.

Воронежский госуниверситет.

Поступила в редакцию 08.08.95.