Proyecto: Derivación e Integración

Diego Barajas
Brandonn Cruz

October 2018

1 Derivación por extrapolación de Richardson

1.1 Problema

Calcular las derivadas de cada x para un conjunto de parejas (x,y).

1.2 Formalización

1.2.1 Entradas

Conjunto de parejas (x,y) ϵ R que representen una función discreta. Cantidad de iteraciones n ϵ $+R$ que se quiera del algoritmo de Richardson. Distancia inicial h ϵ $+R$.

1.2.2 Salidas

Derivada de la función evaluada en cada x_i. Con la restricción de que no será evaluados el primer y último punto. Es decir que la salida será:
$f'(X)$
$dondeX = x_2, x_3, x_4, ..., x_{l-1}$

cada x_i corresponde a los valores de entrada y l es la cantidad de datos que entraron.

Para conseguir esta salida se implementará el algoridmo de extrapolación de Richardson, el cual se puede escribir de forma iterativa de la siguiente manera:

$$N_1(h) = N_{j-1}(h/2) + \frac{N_{j-1}(h/2) - N_{j-1}(h)}{4^{j-1} - 1} \tag{1}$$

Donde j = 2,3,4,5,...,n

El usar este método implica tener una primera aproximación de la derivada, dado que su propósito es el de mejorar la precisión de algún otro método. En este caso esa primera aproximación se conseguirá con la fórmula de Tres puntos:

$$f'(x) = \frac{1}{2h}[f(x+h) - f(x-h)] \tag{2}$$

Otra de las restricciones del algoritmo es el no recibir la función f(x) a la que corresponden las parejas (x,y). Dado que la extrapolación de Richardson para derivación necesita de la función f(x), se decidió optar por utilizar interpolación de Lagrange para obtener un polinomio que se asemejara a esta función, y así utilizarlo para el algoritmo de Richardson.

2 Integracio definida por extrapolación de Richarson

2.1 Problema

Calcular la integral definida dados un conjunto de valores $X[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ y $Y[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ los cuales representar una función f(x) en un plano cartesiano. La integral a calcular se expresa de la siguiente manera.

$$\int_{x_1}^{x_n} (f(x)) \tag{3}$$

2.2 Formalización

2.2.1 Entradas

valores $X[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ y $Y[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ para los cuales cada pareja de valores $(x_m,\ y_m)$ representa un punto en el plano cartesiano para un función f(x).

2.2.2 Salidas

Valor aproximado para la integral definida

$$\int_{x_1}^{x_n} (f(x)) \tag{4}$$

2.3 Análisis del algoritmo

El método de extrapolación de Richardson nos permite dados uno valores aproximados para las integrales hallar unos nuevos valores con un menor error. Para hallar los valores aproximados para la integral se opto por usar el método de trapecios modificado para lograr una complejidad constante de su algoritmo el cual conjunto a la extrapolación de Richardson nos permite hallar valores bastante exactos para las integrales definidas con una complejidad O(n).

El método de extrapolación de Richardson funciona por niveles de manera que se construye un árbol, cuyo tamaño depende de la cantidad de integrales con las que se cuente previamente, para cada nivel su ecuación es la siguiente

$$\frac{(4^{k-1})}{(4^{k-1}-1)} * Im - \frac{1}{4^{k-1}-1} * Il \tag{5}$$

donde k es el nivel actual de la operación, Im es el valor de la integral más exacta e Il es el valor de la integral menos exacta para esa iteracion, al terminar de resolver el árbol se obtendrá una única respuesta la cual tendrá un menor error a las integrales calculador por el método del trapecio.

3 Manual de compilación

El nombre de la librería es: Richardson.
Para ejecutar la función de derivación se debe hacer de la siguiente manera: richardson(x,y,h,n)
Para ejecutar la función de integracion se debe hacer de la siguiente manera: integral(x, y)
Las entradas para cada función se especificaron anteriormente.