Taller 1 Analisis Numerico

Barajas Diego
Cruz Brandonn

August 2018

1 Ejercicio 1.a

1.1 Problema

Evaluar un polinomio P y su derivada para un valor determinado X

1.2 Formalizacion del algoritmo

1.2.1 Entradas

Polinomio P talque, P = $[n_m, ..., n_2, n_1, n_0]$ donde cada valor n_i representa un valor real que como polinomio sera representado como n^m siendo m la posicion desendente que ocupar el valor en el polinomio.
valor real x, donde x representa el valor en el cual sera evaluado el polinomio.
valor entero positivo A que representa la cantidad de cifras significativas que va a manegar la solucion del problema

1.2.2 Salidas

pareja de valores reales V, donde V = $[V_0, V_1]$ siendo el valor V_0 el resultado de la evaluacion del polinomio P en x, y siendo V_1 la cantidad de operaciones nesesarias para realizar la operacion.
pareja de valores reales W, donde W = $[W_0, W_1]$ siendo el valor W_0 el resultado de la evaluacion de la derivada del polinomio P en x, y siendo W_1 la cantidad de operaciones nesesarias para realizar la operacion.

1.3 Resultados del algoritmo

para el polinomio P = $2x^4 - 3x^2 + 3x - 4$

1. La solucion del polinomio para x = -2 es 10 y requiere 8 operaciones
2. La solucion para la derivada del polinomio con x = -2 es -49 y requiere 17 operaciones

2 Ejercicio 2

2.1 Problema

Calcular las dimensiones de un cuadrád a recortar para cada esquina de una lámina, con el objetivo de construír una caja sin tapa.

2.2 Formalización

2.2.1 Entradas

Largo l y ancho a de una lámina, donde l y a ϵ R. Además, un volumen v ϵ R, que indique el volumen de la caja a construír.

2.2.2 Salidas

Lado n de un cuadrado, donde n ϵ R. Donde n cumpla la condición $v = (l - n)(a - n)n$.

2.3 Solución del ejercicio

Para el ejercicio propuesto, el largo de la lámina era 32 cm y el ancho 24 cm. El volumen era de un litro de capacidad, por lo tanto las entradas son: l = 32 cm, a = 24 cm y v = 10 cm^3.
Por el método de bisección, con un intervalo de $[0, 20]$, el valor de n dado por el algoritmo es: 16.03859424 con un error porcentual de $8.916x10^{-5}$ %.
El volumen de la caja es: $v = (l - n)(a - n)n$, y al reemplazar las variables por los valores conocidos queda:
$v = (32 - 16.03859424)(24 - 16.03859424)16.03859424 \approx 9.99951661$. Como el volumen se acerca lo suficiente a el volumen esperado, se puede decir que el método es efectivo.
Desarrollando el mismo procedimiento, pero esta vez con tres secciones, el resultado fue:
n = 0.01295534 con un error porcentual de 0.0 %

2.4 Respuestas

1. ¿Cuál etapa del proceso de resolución de un problema numérico requiere más atención?
   R/ La etapa de análisis del problema, pues cuando se comprende bien el contexto del problema, y la solución que se busca, es más sencillo formular una solución.

2. ¿Qué conocimientos son necesarios para formular un modelo matemático?
   R/ Para nuestro ejemplo era necesario tener conocimientos de cálculo vectorial, y todos los conocimientos que lo anteceden. En general depende del problema.

3. En el ejemplo de la caja ¿Cuál sería la desventaja de intentar obtener experimentalmente la solución mediante prueba y error en lugar de analizar el modelo matemático?
   R/ De forma exahustiva se pierde eficiencia, es decir que es demasiada lenta la búsqueda de la solución. Además se corre el riesgo de no encontrar la solución ya sea porque la memoria del computador se llena o por una aproximación no suficiente a la solución. Por otro lado un modelo permite una buena aproximación a la solución, además de ser más eficiente con los recursos.

4. ¿Qué es más crítico: el error de truncamiento o el error de redondeo?
   R/El error de truncamiento.

5. ¿Cuál es la ventaja de instrumentar computacionalmente un método numérico?
   R/Permite ejecutar operaciones complejas en un rango aceptable de precisión, y de una manera más eficiente de lo que un humano podría hacerlo.

6. ¿Por qué es importante validar los resultados obtenidos?
   R/ Para verificar si la implementación de un método numérico es correcta o no.

3 Ejercicio 3

3.1 Problema

Crear un algoritmo iterativo que calcule la ráiz cuadrada de un número.

3.2 Formalización

3.2.1 Entradas

Número x ϵ $+R$ al cual se le va a calcular la raíz cuadrada. Tolerancia e ϵ R el cual representa el mínimo error esperado en el resultado.

3.2.2 Salidas

Número y ϵ R, donde $y * y \approx$ x. Para este algoritmo se usa el método del punto fijo con la ecuación $x = \frac{x+(\frac{n}{x})}{2}$.

3.3 Respuestas

1. Precisión: Para la precisión de los ejercicios, se introdujo que el error sea menor a 0.0001.

2. Convergencia: Al realizar el gráfico de dispersión del ejercicio con raíz cuadrada de siete, se encontró que converge en una potencial de grado 2.

3. Validez: Para comprobar la validez del algoritmo, los resultados de este se multiplicaron por sí mismos, y los productos fueron iguales al número ingresado en la entrada.

4 Ejercicio 5

4.1 Problema

Calcular la propagacion del error para un problema aritmetico basado en el calculo de la distancia de una particula.

4.2 Formalizacion del algoritmo

4.2.1 Entradas

Valor real V la velocidad de una particula.
Valor real Ev representando el error de V.
Valor real T siendo este el tiempo de recorrido de la particula.
Valor real Et representando el error de T. Valor entero positivo A que representa la cantidad de cifras significativas a trabajar

4.2.2 Salidas

Valor de la velocidad de la particula representada por D, con su error absoluto y error relativo.

4.3 Resultados del algoritmo

para una velocidad de $4 \pm 0.1 \ \frac{m}{s}$ y un tiempo de $5 \pm 0.1 \ s$

1. Distancia promedio = 20.01
2. Error absoluto = 0.9
3. Error relativo = 4.5 %

5 Ejercicio 6

1. Ejecutar con n = 73 da como resultado:
   1001001.
2. $log_2(n) + 1$. Para encontrar la solución lo primero que se hizo es comprender la funcionalidad del algoritmo, que es convertir un número a binario. Una vez entendido esto se comprendió el por qué de las divisiones iterativamente, pues es la forma en que un número se convierte a binario. Por ejemplo el 73 es:
   $73/2 = 36 residuo = 1; 36/2 = 18 residuo = 0; 18/2 = 9 residuo = 0; 9/2 =$

$4residuo = 1; 4/2 = 2residuo = 0; 2/2 = 1residuo = 0$ Si se toman los residuos y el último valor, queda: 1001001 que corresponde al número binario de 73.
Como el sistema binario funciona en base 2, es decir que un número se expresa de la forma: $2^i 2^{i-1} ... 2^4 2^3 2^2 2^1 2^0$ Se entiende que el número n transformado en binario debe estar dentro de 2^i, lo contario sería: $log_2(n) = i$ así i corresponde a el número de iteraciones. La suma con 1 se da para contar 2^0, aunque en notación de complejidad se ignore esta constante, quedando:
$O(log_2(n))$

6 Ejercicio 9

6.1 Problema

Resolver ecuaciones no necesariamente lineales con el método del punto fijo.

6.2 Formalización

6.2.1 Entradas

Una ecuación $g(x) = x$. Tolerancia del error t ϵ R. Valor inicial x_0 ϵ R; donde x_0 ϵ $[a, b]$. El intervalo $[a, b]$ debe cumplir la siguiente condición: Existe un c ϵ $[a, b]$ que cumple la condición $g(c) = 0$

6.2.2 Salidas

Un x_1 ϵ R que cumple la igualdad $g(x_1) = 0$.

7 Ejercicio 13

7.1 Problema

Encontrar el valor mas cercano a la raiz n-ésima de un valor real N en un rango de valores predeterminado por medio de operaciones aritmeticas basicas.

7.2 Formalizacion del algoritmo

7.2.1 Entradas

Pareja de valores X_i y X_d que representan el intervalo en donde se desea buscar la raiz siendo X_i el maximo valor por izquierda y X_d el maximo valor por derecha.
Valor entero I que representa el indice de la raiz.
Valor real R representando el radicando de la raiz.
Valor entero positivo A, siendo A la cantidad de cifras significativas con las cuales trabajara el algoritmo.

7.2.2 Salidas

valor real N mas cercano a la raiz I-ésima de R dentro del rango de valores comprendido por X_i y X_d.

7.3 Resultados del algoritmo

Para un intervalo de -20 a 20 con 8 cifras significativas.
La raiz con indice 2 y radicando 7 es:
2.64575132.

La raiz con indice 3 y radicando 32 es:
3.1748021

8 Ejercicio 15

8.1 Problema

Resolver la ecuación $\int_x^0 (5 - e^u)du = 2$ con el método del punto fijo.

8.2 Formalización

8.2.1 Entradas

Una ecuación $g(x) = x$. Tolerancia del error t ϵ R. Valor inicial $x_0 \ \epsilon \ R$; donde $x_0 \ \epsilon \ [a, b]$. El intervalo $[a, b]$ debe cumplir la siguiente condición: Existe un c ϵ $[a, b]$ que cumple la condición $g(c) = 0$

8.2.2 Salidas

Un $x_1 \ \epsilon \ R$ que cumple la igualdad $g(x_1) = 0$.

8.3 Solución del ejercicio

Una solución se realizó con la ecuación:
$\frac{1-e^x}{5} = x$
Con $x_0 = 1.5$ siguiendo que $x_0 > ln(4) \approx 1.386294$.
El resultado del algoritmo del punto fijo fue: 6.69e-06 que es $6.69x10^{-6}$. Con un error de 4.016e-05 que equivale a $4.016x10^{-5}$
Para probar la eficacia del algoritmo, se reemplaza x_1 en la ecuación $g(x_1) = 0$, y se comprueba la igualdad. $\frac{1-e^{(6.69x10^{-6})}}{5} \approx -0.00000067$. Luego el resultado es diferente de 0, pero al ser menor que el error, se dice que la respuesta es válida.
La segunda solución se realizó con la ecuación:
Al intentar despejar nuevas $g(x) = x$ no se halló otra ecuación válida para el algoritmo de punto fijo.
Algunas de las ecuaciones que no sirvieron son:
$1 - 5ln(x) = x$, $ln(5 - 1/x) - ln(x) = x$, $e^{(1-x)/5} = x$.

La razón por la que no pueden ser utilizadas para este método, es porque su dominio es: $D = (0, \infty)$, y el método para este caso requiere un dominio $D = (-\infty, \infty)$. La razón de esto es que el algoritmo calcula un resultado y luego lo toma para evaluarlo en una función. En el caso de logaritmo natural (ln), si un sólo resultado da negativo, al evaluar ese resultado en la función, saldrá error, al no estar la función definida en los números negativos.

9 Manual de compilacion

Para el ejercicio 1a, 2, 5, 6, 7, 9, 13 ejecutar el archivo taller1$_main.pyenpython$.

Para el ejercicio 3 ejecutar el archivo Ejercicio$_3.RenR$