

שאלה 4: זיהוי הטיות

כזכור, שיטת הנטינגטון-היל היא שיטת-מחלק עם פונציית המחלק הבאה:

$$f(s) = \text{sqrt}(s * (s+1))$$

זו השיטה המקובלת בארה"ב לחלוקת מושבים בבית-הנבחרים בין המדינות.

הוכיחו, שבשיטה זו יש הטיה לטובת מפלגות קטנות: בחלוקה בין שתי מפלגות, מספר המושבים של המפלגה הקטנה עשוי להיות מעוגל כלפי מעלה, גם כשהשארית שלה קטנה מ-0.5.

שיטת הנטינגטון-היל היא גרסה שונה של שיטת וובסטר, אך היא משתמשת בשיטת עיגול מעט שונה. בעוד השיטה של וובסטר מתעגלת ב-0.5, שיטת הנטינגטון-היל מעוגלת לפי הממוצע הגיאומטרי, הממוצע הגיאומטרי של שני מספרים הוא השורש הריבועי של המכפלה שלהם.

לדוגמא הממוצע הגיאומטרי של (5,6) הוא :

$$\text{sqrt}(5 * 6) = \text{sqrt}(30) = 5.4772$$

לכן כאשר משתמשים בשיטת הנטינגטון-היל ככל שיש לך מספר מושבים יותר גבוה כן $f(s)$ יותר גדול וכן התוצאה של הסיבוב הבא עבור אותה מפלגה קטן בהתאם.

לדוגמא: שתי מפלגות המתחרות על 7 מושבים:

- מפלגה א': 5550 קולות

- מפלגה ב': 1450 קולות

סך הקולות הוא 7000, מספר המושבים הוא 7 ולכן עבור כל מושב צריך לצבור 1000 קולות.

ננסה לחזות את מספר המושבים שכל מפלגה תקבל:

- מפלגה א': $5550 / (7000/7) = 5550/1000 = 5.55$

- מפלגה ב': $1450 / (7000/7) = 1450/1000 = 1.45$

ומכאן נראה כי מפלגה א' תקבל לפחות 5 מושבים ומפלגה ב' תקבל לפחות מושב אחד אך קיים מושב אחד שלא חילקנו עדיין, ומי יקבל אותו? לפי ההגיון מפלגה א' צריכה לקבל את המושב השביעי מכיוון ששארית הקולות של מפלגה א' גדולה משארית הקולות של מפלגה ב' $0.55 > 0.45$ לכן החיזוי שלנו מראה כי מפלגה א' תקבל 6 מושבים ואילו מפלגה ב' רק מושב אחד.

עכשיו נשתמש בשיטת הנטינגטון-היל לחילוק המושבים:

מפלגה א'	מפלגה ב'
0	0
5550	1450
1	0
$5550/\sqrt{1 * 2} = 3924.442$	1450
2	0
$5550/\sqrt{2 * 3} = 2265.778$	1450
3	0
$5550/\sqrt{3 * 4} = 1602.146$	1450
4	0
$5550/\sqrt{4 * 5} = 1241.017$	1450
4	1
1241.017	$1450/\sqrt{1 * 2} = 1025.304$
5	1
$5550/\sqrt{5 * 6} = 1013.286$	1025.304
5	2

קיבלנו על פי שיטת הנטינגטון-היל כי מפלגה א' תקבל 5 מושבים ומפלגה ב' תקבל 2 מושבים בניגוד לחיזוי שלנו, זאת משום שבכל שלב שמספר המושבים של אותה מפלגה גדל כך $f(s)$ המחלק יגדל והתוצאה תקטן, לכן עבור מפלגות קטנות זהו דבר אשר תורם להם וזאת משום שהם נשארו עם מספר מושבים נמוך ובינתיים המפלגה הגדולה תופסות תאוצה ומספר המושבים שהם קיבלו גדל וגדל וכך גם המחלק עצמו ולכן יש למפלגה הקטנה יותר לתפוס את המושבים האחרונים.

כמו כן לא בטוח שהמפלגה הקטנה תתפוס את המושב ה"מתנדנד" אלא זה רק מגדיל לה את הסיכוי.

קישור לקוד:

https://github.com/barakamram/Economic_Algorithms/blob/main/Ex3/huntington_hill.py

דוגמאות הרצה למטה – חשוב

דוגמאות הרצה:

- מספר מושבים: 7, מספר קולות: 7000
- מפלגה א': 5550 \leftarrow 5.55 חיצוי: 6, הנטינגטון-היל: 5
- מפלגה ב': 1450 \leftarrow 1.45 חיצוי: 1, הנטינגטון-היל: 2

```
{5550: 1, 1450: 0}
{3924.4426355853384: 2, 1450: 0}
{2265.77801207444: 3, 1450: 0}
{1602.1469970012115: 4, 1450: 0}
{1241.0177275123833: 4, 1450: 1}
{1241.0177275123833: 5, 1025.3048327204938: 1}
{1013.2867313845574: 5, 1025.3048327204938: 2}
--- huntington_hill ---> {5550: 5, 1450: 2}
--- prediction: ---
--- 5550 ---> accurate: 5.55, should get: 6
--- 1450 ---> accurate: 1.45, should get: 1
```

- מספר מושבים: 10, מספר קולות: 5000
- מפלגה א': 3765 \leftarrow 7.53 חיצוי: 8, הנטינגטון-היל: 7
- מפלגה ב': 1235 \leftarrow 2.47 חיצוי: 2, הנטינגטון-היל: 3

```
{3765: 1, 1235: 0}
{2662.257031167351: 2, 1235: 0}
{1537.0548135964443: 3, 1235: 0}
{1086.8618817494705: 3, 1235: 1}
{1086.8618817494705: 4, 873.2768747653861: 1}
{841.8795935286707: 4, 873.2768747653861: 2}
{841.8795935286707: 5, 504.1866387228709: 2}
{687.3918096689835: 6, 504.1866387228709: 2}
{580.952112607276: 7, 504.1866387228709: 2}
{503.1192879001389: 7, 504.1866387228709: 3}
--- huntington_hill ---> {3765: 7, 1235: 3}
--- prediction: ---
--- 3765 ---> accurate: 7.53, should get: 8
--- 1235 ---> accurate: 2.47, should get: 2
```

בדוגמאות הבאות נראה את רגישות השיטה:
ההבדל בין הדוגמא השלישית לרביעית היא הבדל של מאה קולות (שאפילו לא הועברו לצד השני אלא נקרא להם קולות "לא כשרים" ולכן לא נספרו\נמחקו)
100 קולות מתוך 69042 קולות זה 0.0000144839% כלומר אפילו אחוז קטנטן יכול להשפיע על חלוקת המושבים:
בדוגמא השלישית אנו רואים כי המפלגה הקטנה באמת קיבלה את המושב ה"מתנדנד" ואילו בדוגמא הרביעית לאחר שפסלו 100 קולות כי היה חשד למרמה בקלפי "ברקן" רואים כי המפלגה הגדולה דווקא קיבלה את המושב ה"מתנדנד"

- מספר מושבים: 20, מספר קולות: 69042
- מפלגה א': 50102 —> 14.513 חזיו: 15, הנטינגטון-היל: 14
- מפלגה ב': 18940 —> 5.486 חזיו: 5, הנטינגטון-היל: 6

```
{50102: 1, 18940: 0}
{35427.4639510084: 2, 18940: 0}
{20454.055848820466: 3, 18940: 0}
{14463.201593469315: 3, 18940: 1}
{14463.201593469315: 4, 13392.602435673209: 1}
{11203.147780869445: 4, 13392.602435673209: 2}
{11203.147780869445: 5, 7732.2226213855665: 2}
{9147.331858707945: 6, 7732.2226213855665: 2}
{7730.906439800729: 6, 7732.2226213855665: 3}
{7730.906439800729: 7, 5467.507049225756: 3}
{6695.161371148143: 8, 5467.507049225756: 3}
{5904.577325168068: 9, 5467.507049225756: 3}
{5281.214510991871: 9, 5467.507049225756: 4}
{5281.214510991871: 10, 4235.112749384602: 4}
{4777.038264638267: 11, 4235.112749384602: 4}
{4360.8193593461865: 12, 4235.112749384602: 4}
{4011.370380971238: 12, 4235.112749384602: 5}
{4011.370380971238: 13, 3457.9550797159486: 5}
{3713.807326335449: 14, 3457.9550797159486: 5}
{3457.3664654170634: 14, 3457.9550797159486: 6}
--- huntington_hill ---> {50102: 14, 18940: 6}
--- prediction: ---
--- 50102 ---> accurate: 14.513484545638887, should get: 15
--- 18940 ---> accurate: 5.486515454361114, should get: 5
```

- מספר מושבים: 20 , מספר קולות: 68942
- מפלגה א': 50102 —< 14.534 חיזוי: 15 , הנטינגטון-היל: 15
- מפלגה ב': 18840 —< 5.465 חיזוי: 5 , הנטינגטון-היל: 5

```
{50102: 1, 18840: 0}
{35427.4639510084: 2, 18840: 0}
{20454.055848820466: 3, 18840: 0}
{14463.201593469315: 3, 18840: 1}
{14463.201593469315: 4, 13321.891757554555: 1}
{11203.147780869445: 4, 13321.891757554555: 2}
{11203.147780869445: 5, 7691.39779233918: 2}
{9147.331858707945: 6, 7691.39779233918: 2}
{7730.906439800729: 7, 7691.39779233918: 2}
{6695.161371148143: 7, 7691.39779233918: 3}
{6695.161371148143: 8, 5438.639535766275: 3}
{5904.577325168068: 9, 5438.639535766275: 3}
{5281.214510991871: 9, 5438.639535766275: 4}
{5281.214510991871: 10, 4212.7520696096035: 4}
{4777.038264638267: 11, 4212.7520696096035: 4}
{4360.8193593461865: 12, 4212.7520696096035: 4}
{4011.370380971238: 12, 4212.7520696096035: 5}
{4011.370380971238: 13, 3439.697661132443: 5}
{3713.807326335449: 14, 3439.697661132443: 5}
{3457.3664654170634: 15, 3439.697661132443: 5}
--- huntington_hill ---> {50102: 15, 18840: 5}
--- prediction: ---
--- 50102 ---> accurate: 14.534536276870414, should get: 15
--- 18840 ---> accurate: 5.465463723129587, should get: 5
```