סיכום מאמר הצעות לטובת חופש מקנאה: גישה פרוצדורלית לבעיות חלוקה הוגנת של n שחקנים.

נכתב ע"י: Claus-Jochen Haake, Matthias G. Raith and Francis Edward Su.
מגישים: ברק עמרם ועדי דהרי.

מבוא

מאמר זה עוסק בבעיות בנושא *חלוקה הוגנת*, כאשר קבוצת אנשים צריכה להחליט איך לחלק כמות מסוימת של אובייקטים (חפצים, קרדיט, נכסים וכו'...) ביניהם בצורה "הוגנת", בעוד נלקחת בחשבון סיטואציה בה יידרשו פיצויים כספיים לטובת שמירה על הגינות ומניעת קנאה בסוף תהליך החלוקה.
נושאים שיכולים להתאים לפרוצדורה זו:

- ירושה וחלוקה בין כל הצדדים היורשים.
- חלוקת משימות בין עמיתים לעבודה.
- מפתחים הדורשים קרדיט על חלקים ממוצר מסוים.
- אנשים החולקים דירה וחפצים.

במקרים רבים הנוגעים בחלוקה הוגנת, עלולים לגרור עלויות ופיצויים לכלל הקבוצה, כקבוצה.
כרעיון בסיס בהגדרת *הוגנות*, מאמר זה מתמקד בצמצום עד שלילת קנאה בתוך קבוצת האנשים כחלק מתהליך החלוקה, כלומר, בסופו של התהליך, כל אדם מהקבוצה יהיה "שמח בחלקו" ולא ירצה לבצע החלפה עם אדם אחר מהקבוצה,
כחלק מהוכחת קיימות של מצב אידיאלי זה, מוכחים במאמר אלגוריתמים מסוימים התורמים לשיפור וייעול חלוקת האובייקטים בין חברי הקבוצה.
כחלק ממאמר זה נלקחים מספר חוקרים ודבריהם בחשבון:

- Alkan et al. (1991).
- Aragones(1995).
- Su (1999).
- Klijn (2000).

כאשר אלקן וסו (Alkan, Su) מדגישים את שימוש לא לינארי בכסף לטובת חלוקה הוגנת בקבוצה.
בעוד אלגוריתמים אראגונס וקליין (Aragones, Klijn) מציעים פתרון מדויק להעדפת האנשים כלפי כסף בצורה לינארית.
במאמר זה מדובר על פתרון שלם אשר מתאר תהליך מתחילה ועד סוף, כאשר התהליך עצמו *אינטואיטיבי* (כל צעד ניתן להבנה), *מתקבל על הדעת* (כל שלב בתהליך ניתן לויכוח פשוט) ו*ניתן לניהול* (כל צעד ניתן לחישוב בצורה חד-משמעית). אפיון זה של התהליך חשוב ומתבקש לטובת השגת המטרה - תוצאת חלוקה הוגנת.
בעבר, הוצעו פתרונות שונים לחלוקה הוגנת. למשל, Knaster and Steinhuas ב-1948 העלו שיטה לחלוקה הוגנת, פשוטה ואינטואיטיבית אך אינה תקפה לקבוצה העולה במספרה על 2 אנשים.
בגישה מודרנית יותר, הציעו Brams and Kilgour ב-2001 תיארו תהליך של חלוקת N עצמים ל-N אנשים בצורה יעילה, תוך הסתמכות על מחירי שוק עדכנייםת אך גם רעיון זה לוקה בחסר בכך שלא מונע קנאה.

כחלק מתהליך שמאמר זה מתאר, בהסתמך על רעיון Knaster-Streinhaus , נשמר רעיון ההגינות ומניעת הקנאה עבור כל מספר של אנשים כקבוצה. תהליך זה, בשלבים, מבטל קנאה ע"י מתן פיצויים פנים-קבוצתיים כלפי שחקנים קנאים באופן מדויק ומכוון לטובת שמירה על הגינות.
כחלק מהנחות הבסיס של התהליך, יוצאים מנקודת ההנחה שחברי הקבוצה יכולים לתת ערך כמותי (כספי) להעדפתם כלפי נתח מסוים בחלוקה, כמו כן, נקודת הנחה נוספת ליישום תהליך זה היא שסך כל ההשקעות מכלל חברי הקבוצה שווה או עולה על סך כל החבילות יחד.
דרישה זו לא נחוצה להשגת המטרה, אך מבטיחה כי אף אדם לא ישלם יותר מעלות הנתח אותו לקח.
2 שיטות אפשריות לגביית הכספים:

- **מקדמות:** כל אדם ישלם את עלות הנתח אותו בחר, בכך כולם מתחילים ללא יתרון או עודף.
- **תשלום בסוף:** לאחר חישוב הפיצויים עבור כל המשתתפים מתבצע שלב התשלום.

תיאור התהליך בשלבים

נגדיר קבוצת I אנשים: $I = \{1, . . . , n\}$,
אשר דורשים חלוקה של K אובייקטים: $K = \{1, . . . , m\}$.

הנחה 1. *חברי הקבוצה מעריכים נתחים באמצעי הניתן למנייה, קרי, כסף*

כלומר, עבור כל תת-קבוצה של אובייקטים $B_i \subseteq K$ יכול שחקן i לבטא הערכה מספרית b_i .
כך שסכום כל ההערכות הספציפיות של האובייקטים המרכיבים את B_i הוא b_i .
בנוסף, ייתכנו מגבלות נוספות וכמו-כן, במידה וכמות האובייקטים המרכיבים את K קטנה מכמות האנשים בקבוצה, יהיה נתח אשר יהיה ריק, כלומר, אחד מחברי הקבוצה יצא "בידיים ריקות" מבחינה מוחשית.
בנוסף, נגדיר C להיות סכום כולל של המשאבים ביחידה משותפת (קרי כסף) של כלל הקבוצה.

$$B = \{(B_1, . . . , B_n) | B_i \subseteq K,\ B_i \cap B_j = \Phi,\ \bigcup_{i \in I} B_i = K\}$$

נסמן

- K כקבוצת כל החפצים שברצוננו לחלק
- Bi כמספר החבילה i כמובן שכל Bi מוכל ב K
- עבור כל Bi, Bj: $Bi \cap Bj = \phi$ כלומר, לא יכול להיות חפץ בשתי חבילות שונות.
- $\cup_{i \in I} Bi = K$ כלומר, איחוד כל תתי-הקבוצות שווה לסך כל החפצים לחלוקה.

הנחה 2. *אנשים מעדיפים חפצים מסוימים באמצעות הערכה הניתנת למדידה (קרי כסף).*

תחת הנחות 1 + 2 נאפיין את העדפת השחקנים בעזרת פונקציות לינאריות:

$$u_i : 2^K \rightarrow R \times R$$
$$u_i(B_j, c_j) = b_i(B_j) - c_j,\ i, j \in I$$

הנחה 3. *סכום כל ההצעות של השחקנים עבור כל הנתחים הוא לפחות הסך הכולל של שווי הנתחים.*

$\sum_{j=1}^{n} b_i(\overline{B_j}) \geq C,\ \forall i \in I$.

הליך הפיצויים

עם **מקדמה**, כל שחקן מוסיף לקופת ההליך את הצעתו עבור החבילה שהוקצתה לו.

נגדיר $M = \sum_{j=1}^{n} b_i(\overline{B_j}) \geq C,\ \forall i \in I$.

מכאן, העודף הנותר בקופה לאחר הקצאת הנתחים לשחקנים יהיה $M - C$ ובהכרח $M - C \geq 0$

במידה וישאר עודף בקופה, ההחזר יתבצע בצורה של **הנחות** לטובת מניעת הקנאה ושיפור הגינות הליך החלוקה.

הליך חישוב ההנחות הינו תהליך איטרטיבי, כאשר בסבב הראשון הערכות השחקנים והקצאת הנתחים מתבצעת בצורה כזו שההצעה הגבוהה ביותר, בהתחשב כי הצעה גבוהה יותר יכולה להתקיים, אך השחקן שהעמיד הצעה זו "זכה" בנתח אחר כבר ע"פ אותו עיקרון.

בסבבים הבאים תחושב ההנחה עבור כל אחד מהשחקנים תוך התחשבות בהערכות המתוקנות ע"ס סבבים קודמים.

דוגמא לריצת האלגוריתם

נניח כי 4 שחקנים משתתפים במיזם שיתופי מהצורה המתוארת לעיל, ובו סך שווי הנתחים הוא 100 דולרים,

נגדיר 4 שחקנים: $P_i,\ 1 \leq i \leq 4$.

מכאן, כמות הנתחים שסך כל האובייקטים יתחלקו היא 4, נתח אחד לכל שחקן.

נסמן נתח $\overline{B_i},\ 1 \leq i \leq 4$.

חלוקה ראשונית: לשחקן P_i יוקצה נתח $\overline{B_i}$ בצורה כזו שסכום כל ההשקעות משחקני הקבוצה הוא הגבוה ביותר

טבלה 1 - השקעה ראשונית עבור נתח מוקצה

Table 1. Players' bids for bundles

	$\bar{B}_1$	$\bar{B}_2$	$\bar{B}_3$	$\bar{B}_4$
P1	$\boxed{50}$	20	10	20
P2	60	$\boxed{40}$	15	10
P3	0	40	$\boxed{25}$	35
P4	50	35	10	$\boxed{30}$
Initial payment	50	40	25	30

מקריאת הטבלה ניתן להסיק:

$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 50 + 40 + 25 + 30 = 145$

לכן, סכום ההשקעות עולה על שווי סך כל הנכסים והעודף הנותר הוא 45.

$M - C = 45$

נבצע נרמול לטבלה כך שאל מול כל שחקן המייצג שורה יעמוד שחקן מקביל אשר מייצגת עמודה, והערכים הניצבים בטבלה עצמה מייצגים את רמת הקנאה בין השחקנים.
תהליך הנרמול עובד כך שאנו מחסרים את ערך ההשקעה הראשוני של השחקן על החבילה שהוקצאה לו, מכל עמודה המייצגת אותו, אותו ערך ניתן לראות בטבלה 1, באלכסון הראשי המשקף את סכום ההשקעה הראשוני עבור כל שחקן, לפי שורות.

טבלה 2 - אתחול מטריצת "קנאה" והערכת הנחות

Table 2. The initial assessment matrix

	P1	P2	P3	P4
P1	0	−20	−15	−10
P2	10	0	−10	−20
P3	−50	0	0	5
P4	0	−5	−15	0
Discounts	0	0	0	0

ההנחות עבור כל אחד משחקני הקבוצה מתחילות בערך 0.
בנוסף, ע"פ הגדרת טבלה זו, ניתן להסיק את ערכי הקנאה של שחקנים מסוימים:
ע"י אי-השוויון הבא: $b_{i,i} < b_{i,j}$ המצביע על קנאת השחקן j בשחקן ן.
כלומר, אנו למדים מהטבלה כי:

- $b_{2,2} < b_{2,1}$ מצביע על קנאת P_2 ב P_1.
- $b_{3,3} < b_{3,4}$ מצביע על קנאת P_3 ב P_4.

כלומר, קנאת שחקן נקבעת ע"ס הצעה גבוהה מההצעה שהתקבלה מהשחקן אשר אליו הוקצאה אותו נתח.

בשלב הבא, נבצע נרמול של המטריצה ע"י העלאת ערכי העמודה של השחקן המקנא כך שהערך בו התבטאה הקנאה ישתווה לערך השחקן בו מקנא, כלומר: $b_{i,i} \geq b_{i,j}$ עבור כל j.

- שחקן P_2 יפוצה ויקבל תוספת של 10 דולר
- שחקן P_3 יפוצה ויקבל תוספת של 5 דולר

טבלה 3 - נרמול ועדכון ערכי מטריצה לטובת שיפור תהליך החלוקה והפיצויים

Table 3. The modified assessment matrix

	P1	P2	P3	P4
P1	0	−10	−10	−10
P2	10	10	−5	−20
P3	−50	10	5	5
P4	0	5	−10	0
Discounts	0	10	5	0

כלומר בטבלה ניתן להבחין כי:

- $b_{3,3} < b_{3,2}$ המצביע על קנאת P_3 בP_2.
- $b_{4,4} < b_{4,2}$ המצביע על קנאת P_4 בP_2.

בשלב הבא, נחזור על תהליך נרמול במטריצה החדשה (טבלה 3) בכדי להגיע לסכומי פיצויים והנחות כך שתמנע קנאה מכלל השחקנים.

  - שחקן P_3 יפוצה ויקבל תוספת של 5 דולר
  - שחקן P_4 יפוצה ויקבל תוספת של 5 דולר

טבלה 4 - נרמול ועדכון ערכי מטריצה לטובת שיפור תהליך החלוקה והפיצויים

Table 4. The envy-free assessment matrix

	P1	P2	P3	P4
P1	0	−10	−5	−5
P2	10	10	0	−15
P3	−50	10	10	10
P4	0	5	−5	5
Discounts	0	10	10	5

בטבלה זו ניתן לראות כי עבור כל i, j מתקיים: $b_{i,i} \geq b_{i,j}$
ומכאן שכל שחקני הקבוצה הגיעו למצב קנאה אידיאלי בהתחשב בהנחות שהוקצו להם, כלומר, אין קנאה בין שחקן לשחקן וסך הכסף שהושקע ע"י כל השחקנים בניצול אידיאלי עם עודף של 20 דולר.

הסכום שנשאר בעודף, מאחר ולא קיימת קנאה והגענו למצב הוגן בו כל השחקנים מרגישים "שווים", יתחלק שווה בשווה וכל שחקן יקבל "עודף" של 5 דולר.

- שחקן P_1 יקבל את נתח $\overline{B}_1$ ויפוצה בסך 0 דולר מהנחות ופיצוים, ועוד 5 דולר עודף <= סה"כ: 5 דולר.
- שחקן P_2 יקבל את נתח $\overline{B}_2$ ויפוצה בסך 10 דולר מהנחות ופיצוים, ועוד 5 דולר עודף <= סה"כ: 15 דולר.
- שחקן P_3 יקבל את נתח $\overline{B}_3$ ויפוצה בסך 10 דולר מהנחות ופיצוים, ועוד 5 דולר עודף <= סה"כ: 15 דולר.
- שחקן P_4 יקבל את נתח $\overline{B}_4$ ויפוצה בסך 5 דולר מהנחות ופיצוים, ועוד 5 דולר עודף <= סה"כ: 10 דולר.