HOL4-Beagle, from higher-order to first-order

Thibault Gauthier

May 17, 2014

Deux types de prouveurs

	HOL4	Beagle
Type	Interactive	Automatic
Expressivité	Higher-order	First-order
Soundness	Small kernel (LCF)	Long optimized code
Family	HOL Light, Proof-Power, Isabelle/HOL	Spass + T

Énoncé du problème

Problem Here are two HOL4 internal provers.

- Metis: first-order
- Cooper: arithmetic

Énoncé du problème

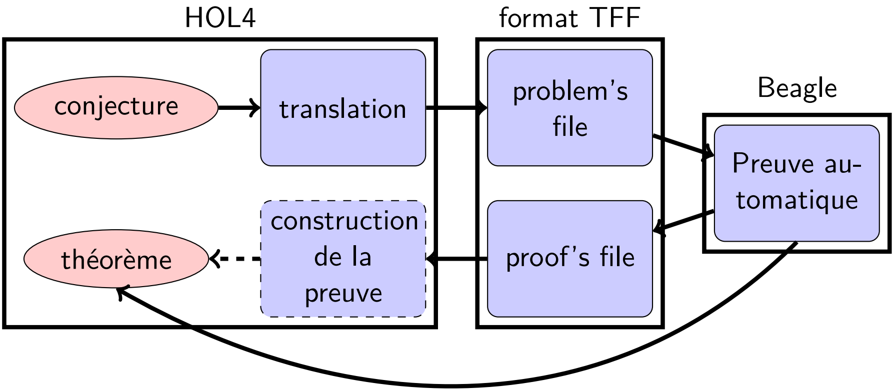
Problem Here are two HOL4 internal provers.

- Metis: first-order
- Cooper: arithmetic

Solution An external prover.

- Beagle: first-order and arithmetic

Schéma d'interaction



1. Introduction
   - Deux types de prouveurs
   - Énoncé du problème
   - Schéma d'interaction
2. Traduction vers le premier ordre
   - Monomorphisation
   - λ-lifting
   - Défonctionnalisation
3. Conclusion
   - Qualités et limites

Ordre de la traduction vers le premier ordre

1. Monomorphisation
2. Négation de la conclusion
3. Mise en forme normale conjonctive
4. λ-lifting
5. Élimination des booléens
6. Mise sous forme d'un ensemble de clauses
7. Défonctionnalisation

Monomorphisation

Instanciation des types polymorphes (a,...) par des types monomorphes (int,$bool$,...).

Problème

Thm 1: $\forall x : a.\ D\ x\ 0$ Thm 2: $C = \lambda x : a.\ D\ x\ 0$

Conjecture : $C\ 2$

Monomorphisation

Instanciation des types polymorphes (a,...) par des types monomorphes (int,$bool$,...).

Problème

Thm 1: $\forall x : a.\ D\ x\ 0$ Thm 2: $C = \lambda x : a.\ D\ x\ 0$
Conjecture : $C\ 2$

Unification de $C : a \to int \to bool$ et de $C : int \to int \to bool$

Thm 1: $\forall x : a.\ D\ x\ 0$ Thm 2: $C = \lambda x : int.\ D\ x\ 0$
Conjecture: $C\ 2$

Monomorphisation

Instanciation des types polymorphes (a,...) par des types monomorphes (int,$bool$,...).

Problème

Thm 1: $\forall x : a.\ D\ x\ 0$ Thm 2: $C = \lambda x : a.\ D\ x\ 0$
Conjecture : $C\ 2$

Unification de $C : a \to int \to bool$ et de $C : int \to int \to bool$

Thm 1: $\forall x : a.\ D\ x\ 0$ Thm 2: $C = \lambda x : int.\ D\ x\ 0$
Conjecture: $C\ 2$

Unification de $D : a \to int \to bool$ et de $D : int \to int \to bool$

Thm 1: $\forall x : int.\ D\ x\ 0$ Thm 2: $C = \lambda x : int.\ D\ x\ 0$
Conjecture: $C\ 2$

λ-lifting

Problème

Thm 1: $\forall x.\ D\ x\ 0$ Thm 2: $C = \lambda x.\ D\ x\ 0$
Conjecture: $C\ 2$

Négation de la conclusion

$$\{\forall x.\ D\ x\ 0\ ,\ C = \lambda x.\ D\ x\ 0\ ,\ \neg(C\ 2)\}$$

λ-lifting

Problème

Thm 1: $\forall x.\ D\ x\ 0$ Thm 2: $C = \lambda x.\ D\ x\ 0$
Conjecture: $C\ 2$

Négation de la conclusion

$$\{\forall x.\ D\ x\ 0\ ,\ \ C = \lambda x.\ D\ x\ 0\ ,\ \ \neg(C\ 2)\}$$

λ-lifting :

$$C = \lambda x.\ D\ x\ 0\ \rightarrowtail\ \exists f.\ (\forall x.\ f\ x = D\ x\ 0) \wedge C = f$$

Mise sous forme d'un ensemble de clauses

$$\{\forall x.\ D\ x\ 0\ ,\ \forall x.\ f\ x = D\ x\ 0\ ,\ C = f\ ,\ \neg(C\ 2)\}$$

Défonctionnalisation

Soit App vérifiant $App\ f\ x = f\ x$. On effectue une défonctionnalisation lorsqu'une fonction non-arithmétique :

- est quantifiée universellement
  $!h.\ h\ x\ y \ \rightarrowtail\ !h.\ App\ (App\ h\ x)\ y$
- a le même type qu'une fonction quantifiée universellement
- a un nombre d'arguments auxquelles la fonction est appliquée qui varie
  $\{h\ x\ y\ z\ ,\ h\ x = j\} \ \rightarrowtail\ \{App\ (App\ (h\ x)\ y)\ z\ ,\ h\ x = j\}$

Défonctionnalisation

Soit *App* vérifiant *App* $f\ x = f\ x$. On effectue une défonctionnalisation lorsqu'une fonction non-arithmétique :

- est quantifiée universellement
  $!h.\ h\ x\ y \ \rightarrowtail\ !h.\ App\ (App\ h\ x)\ y$
- a le même type qu'une fonction quantifiée universellement
- a un nombre d'arguments auxquelles la fonction est appliquée qui varie
  $\{h\ x\ y\ z\ ,\ \ h\ x = j\} \ \rightarrowtail\ \{App\ (App\ (h\ x)\ y)\ z\ ,\ \ h\ x = j\}$

Défonctionnalisation

$$\{\forall x.\ D\ x\ 0\ ,\ \forall x.\ f\ x = D\ x\ 0\ ,\ C = f\ ,\ \neg(C\ 2)\}$$

$$\{\forall x.\ D\ x\ 0\ ,\ \forall x.\ App\ f\ x = D\ x\ 0\ ,\ C = f\ ,\ \neg(C\ 2)\}$$

Qualités et limites de l'interaction HOL4-Beagle

Qualités:

- est correcte (préserve la satisfaisabilité)
- prouve 80% des conjectures prouvées par Metis auxquelles on a enlevé les lemmes arithmétiques
- utilise un format de communication répandu

Limites:

- est incomplète et (ne préserve pas l'insatisfaisabilité)
- ne cherche pas automatiquement des théorèmes aidant à prouver la conjecture
- ne rejoue pas (encore) la preuve