מערכת משוואות לינאריות

מערכת משוואות לינאריות של m משוואות ב-n נעלמים

תוצג כך: (*)

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n &= b_3 \\
\vdots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

מקדמים חופשיים

מוסכם: אם כל המקדמים החופשיים הם אפסים המע׳ נקראת **מע׳ הומוגנית**.

הגדרה: מע׳ משוואות מדורגת

מע׳ מדורגת של משוואות לינאריות היא מע׳ שבה האיבר הפותח בכל שורה נמצא מימין לאיבר הפותח בשורה שמעליו.

מטריצות

הגדרה:

מטריצת המקדמים של מע' (*) הינה:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{\underset{\text{שורות}}{m} \times \underset{\text{עמודות}}{n}}$$

הגדרה:

מטריצת המקדמים המורחבת של מע' (*) הינה:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} & b_2 \end{array}\right)$$

הגדרה:

נאמר שמטריצה A שקולת שורות למטריצה B, אם קיים רצף פעולות אלמנטריות שמעבירות את המטריצה A למטריצה B.

במקרה זה נסמן $A \sim B$.

הגדרה: מטריצה מדורגת

מטריצה המקיימת שני תנאים:

1. האיבר הפותח בכל שורה נמצא מימין לאיבר הפותח בשורה שמעליו.
2. כל שורות האפסים (אם יש) נמצאות בתחתית המטריצה.

הגדרה: מטריצה מדורגת קנונית

מטריצה מדורגת, ובנוסף מקיימת את התנאי הבא:

בכל שורה שאינה אפסים הפותח הוא 1 וכל יתר האיברים בעמודה הם אפסים.

שימו ♡ חשוב !

כאשר עובדים עם פרמטר יש להימנע מכפל בסקלר מכיוון שאי אפשר לדעת אם הפרמטר $=0$.

~~$R_1 \to kR_1$~~

✓ $R_2 \to R_2 - kR_1$

פתרונות למטריצה:

פתרון יחיד:

1. מס' השורות שווה מס' הנעלמים.
2. האלכסון שונה מאפס.
3. אין שורת סתירה.

אינסוף פתרונות:

1. מס' השורות קטן ממס' העמודות (יותר משתנים ממשו')
2. אין שורת סתירה.

אין פיתרון:

1. יש שורת סתירה $(0,0,\dots,0|a)$

הגדרה: מע' משוואות הומוגניות

מע' משוואות הומוגניות היא מע' שבה כל הקבועים בצד ימין הם אפס.

לפיכך לכל מערכת הומוגנית יש לפחות פתרון אחד והוא $(0,0,\dots,0)$ – הפתרון זה מכונה הפתרון הטריוויאלי.

כלומר, למע' המשוואות יש פתרון יחיד או אינסוף פתרונות.

טענה: נתונה מע' המשוואות עם m משוואות ו-n נעלמים.
למע' פתרון יחיד אם"ם לאחר דירוג מס' המשוואות שווה למס' הנעלמים.
בכל מקרה אחר, יש אינסוף פתרונות.

מטריצות מיוחדות

וקטור - מטריצה בעלת שורה אחת או עמודה אחת.
לדוגמה:

$$\underline{u}=(1,3,-5) \quad \underline{v}=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$$

מטריצה ריבועית - מטריצה שבה מס' השורות שווה למס' העמודות.

מטריצת האפס - מטריצה שכל איבריה הם אפס.

מטריצת היחידה - מטריצה ריבועית שאיברי האלכסון הראשי שלה 1 ושאר האיברים 0.

$$I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

מטריצה משולשית עליונה - מטריצה ריבועית שכל איבריה מתחת לאלכסון הראשי הם אפס.

$$U=\begin{pmatrix}*&*&*\\0&*&*\\0&0&*\end{pmatrix}$$

מטריצה משולשית תחתונה - מטריצה ריבועית שכל איבריה מעל לאלכסון הראשי הם אפס.

$$\begin{pmatrix}*&0&0&0\\ *&*&0&0\end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} * & * & * & 0 \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

<u>מטריצה אלכסונית</u> - מטריצה שכל איבריה פרט לאלכסון הראשי הם אפס.

$$D = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

<u>מטריצה סימטרית</u> - מטריצה <u>ריבועית</u> שבה האיבר ij לאיבר ji.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix} \qquad A = A^T$$

<u>מטריצה אנטי-סימטרית</u> - מטריצה <u>ריבועית</u> שבה האיבר ij לאיבר ji-.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -2 & 5 & 6 & -7 \\ 3 & -6 & 8 & 9 \\ -4 & 7 & -9 & 10 \end{pmatrix} \qquad A = -A^T$$

<u>פעולות על מטריצות</u>

<u>כפל מטריצות</u> - הכפל AB מוגדר רק אם מס' העמודות במטריצה A שווה למס' השורות במטריצה B.

כלומר: $A_{m \times n} \; B_{n \times q}$

הסדר במטריצה המכפלה תהיה $AB_{m \times q}$

<u>כללי כפל מטריצות</u>:

1. $A(BC) = (AB) \cdot C$
2. $A(B+C) = A \cdot B + A \cdot C$, $(A+B)C = A \cdot C + B \cdot C$

3. $k(AB) = (kA)B = A(kB) = (AB)k$

4. $A_{n\times n} \cdot I_n = I_n \cdot A_{n\times n} = A_{n\times n}$

טעויות נפוצות:

1. $AB \neq BA$
2. $AB = 0 \not\Rightarrow A=0$ or $B=0$
3. $AB + CA \neq A(B+C)$ ← חייב ש-A תהיה בצמוד 33
4. $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

תכונות חשובות של כפל מטריצות

תכונה 1: כפל מטריצה בוקטור שהרכיב ה-א שלו 1, ויתר הרכיבים 0 מניב את העמודה ה-א של המטריצה.

לדוגמה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

תכונה 2: כפל מטריצה בוקטור שהרכיב ה-א שלו b ושאר רכיביו 0 מניב את העמודה ה-א של המטריצה מוכפלת ב-b.

לדוגמה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 10\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

תכונה 3: כפל מטריצה שעמודותיה הוקטורים $v_1, \dots, v_n$ בוקטור עמודה שרכיביו $b_1, \dots, b_n$ מניב צירוף לינארי $b_1v_1, \dots, b_nv_n$ של העמודות.

לדוגמה:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&1&2&3\\4&5&6&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14\\20\\11\\40\end{pmatrix} = 14\begin{pmatrix}1\\5\\9\\4\end{pmatrix}+20\begin{pmatrix}2\\6\\1\\5\end{pmatrix}+11\begin{pmatrix}3\\7\\2\\6\end{pmatrix}+40\begin{pmatrix}4\\8\\3\\7\end{pmatrix}$$

המטריצה ההופכית

נתונה מטריצה ריבועית A.

המטריצה A תקרא הפיכה אם קיימת מטריצה ריבועית שמסומן A^{-1} אשר מקיימת: $A\cdot A^{-1}=I$, $A^{-1}\cdot A=I$.

כלומר,

אם $A\cdot B=I$ אז $A\cdot B=B\cdot A$.

מטריצה $A_{n\times n}$ היא הפיכה אם"ם לאחר הדירוג היא מכילה n שורות שונות מ-0.

איך נמצא את המטריצה ההופכית?

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\4&-1&8&0&1&0\\2&1&3&0&0&1\end{array}\right)$$

נדרג למטריצה יחידה

מה שיצא בימין מהדירוג הוא ההופכית.

1. $A\cdot A^{-1}=I$
2. $(A^{-1})^{-1}=A$
3. $(A^{-1})^{n}=(A^{n})^{-1}=A^{-n}$

4. $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
5. $(k \cdot A)^{-1} = \frac{1}{k} \cdot A^{-1}$
6. $A^n \cdot A^m = A^{n+m}$

מטריצה אלמנטרית

מטריצה אלמנטרית היא מטריצה המתקבלת ע"י יישום פעולה אלמנטרית אחת על מטריצת היחידה.

משפט: תוצאות יישום פעולה אלמנטרית על מטריצה A שווה להכפלת A משמאל במטריצה האלמנטרית המתאימה.

משפט: כל מטריצה ריבועית והפיכה ניתן לרשום כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

שלבים:

1. דרג עד לקבלת מטריצת יחידה.
2. הכן רשימה של כל הפעולות שורה שביצעת.
3. הכן רשימה חדשה של כל פעולות השורה שביצעת לפי הכללים הבאים:

במקום $R_i \pm kR_j \to R_i$ ← $R_i \mp kR_j \to R_i$

במקום $R_i \to kR_i$ ← $R_i \to \frac{1}{k} R_i$

4. בנה מטריצות אלמנטריות $e_1, e_2, \ldots$ כמס' הפעולות, לפי הפעולות משלב 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdots\ldots = A$$

$R_2 \to R_2 + 4R_1$ $\quad R_3 \to R_3 + 2R_1$ $\quad R_3 \to R_3 - R_2$

טענה: אם u,v הם פתרונות של מע' הומוגנית.
כל צירוף לינארי שלהם $a\underline{u}+b\underline{v}$ גם פותר את המערכת.

$$\left.\begin{aligned} A\underline{u} &= 0 \\ A\underline{v} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{הומוגנית}$$

$$\begin{aligned} A(4\underline{u}+10v) &= A(4u)+A(10v) \\ &= 4Au+10Av \\ &= 0+0=0 \end{aligned}$$

נניח שנתונה מע' משוואות $Ax=b$, כך ש-A הפיכה.
נוכל לפתור כך:

$$Ax=b \Rightarrow A^{-1}Ax=A^{-1}b \Rightarrow x=A^{-1}b$$

משפט: תהי A מטריצה ריבועית.
A הפיכה $\Longleftrightarrow$ למע' $Ax=b$ פתרון יחיד
A הפיכה $\Longleftrightarrow$ למע' $Ax=0$ הפתרון הטריוויאלי בלבד

מקרי מס' הפתרונות של מע' משוואות בעזרת הדרגה:

$$A_{m\times n}\cdot X_{n\times 1}=b_{m\times 1}$$

1. פתרון יחיד:

מס' נעלמים = דרגה מורחבת = דרגה מצומצמת

(rank(A|b) = דרגה מורחבת, rank(A) = דרגה מצומצמת)

2. אינסוף פתרונות:

מס' נעלמים > דרגה מורחבת = דרגה מצומצמת

3. אין פתרון:

דרגה מורחבת > דרגה מצומצמת

במערכת הומוגנית: $A_{m\times n}\cdot X_{n\times 1}=0_{m\times 1}$

למע' פתרון יחיד $x=0$ אם"ם $\text{rank}(A)=n$

מטריצה משוחלפת

המטריצה המשוחלפת של A מסומנת A^T.
והיא מתקבלת מהמטריצה A ע"י כתיבת השורות של A כעמודות של A^T. אם $A_{m\times n}$ אז $A^T_{n\times m}$

$a_{ij}^T = a_{ji}$

כללים:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A\pm B)^T = A^T \pm B^T$
3. $(ABC)^T = C^T B^T A^T$
4. $(kA)^T = kA^T$
5. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
6. $\det(A^T) = \det(A)$

מטריצה סימטרית -

מטריצה ריבועית שמקיימת $A = A^T$.

מטריצה אנטי-סימטרית -

מטריצה ריבועית שמקיימת $A = -A^T$.

כללי הדרגה:

$A_{m \times n}$

1. $0 \le rank(A) \le m, n$
2. $rank(A) = rank(A^T) = rank(AA^T) = rank(A^TA)$
3. $rank(AB) \le rank(A), rank(B)$
4. $ran(A+B) \le rank(A) + rank(B)$

$A_{n \times n}$

A הפיכה אמ"מ $rank(A) = n$

הכפלה במטריצה הפיכה לא משנה את הדרגה.

דטרמיננטה

תכונות הדטרמיננטה נכון גם לעמודות וגם לשורות

דגש:

1. החלפת שורות במטריצה משנה את סימן הדטרמיננטה.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

2. כפל שורה של מטריצה בסקלר מכפילה את הדטרמיננטה בסקלר.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \quad R_1 \to 3R_1$$

$\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

3. הוספת כפולה של שורה אחת לשורה אחרת אינה משנה את הדטרמיננטה.

$R_2 \to R_2 - 3R_1$

$R_2 \to RR_2 - 3R_1$ ✗ ← משנה

ניתן להוציא גורם משותף משורה מחוץ לדטרמיננטה.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \\ 9 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 9 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

4. הדטרמיננטה של מטריצה משולשת שווה למכפלת איברי האלכסון.

5. אם במטריצה שתי שורות שוות או שתי שורות שהאחת כפולה של האחרת אז הדטרמיננטה שווה לאפס.

6. אם במטריצה שורת אפסים אז הדטרמיננטה שווה לאפס.

חוקי דטרמיננטות

1. $|A| = |A^t|$
2. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
3. $|A \cdot B \cdot C| = |A| \cdot |B| \cdot |C|$
4. $|A^n| = |A|^n$, $|A^{-n}| = \frac{1}{|A|^n}$
5. $|k \cdot A_{n\times n}| = k^n \cdot |A_{n\times n}|$
6. $|I| = 1$

7. $|adj(A)| = |A|^{n-1}$

8. $A = B \Rightarrow |A| = |B|$

כלל קרמר לפתרון מערכת של שתי משוואות בשני נעלמים

נניח המשוואות:
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = k_1 \\ a_2x + b_2y = k_2 \end{cases}$$

יש פתרון יחיד אמ"מ בדטרמיננטת המקדמים שלה שונה מאפס.

במקרה זה ניתן לחשב את הפתרון כך:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad , \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & k_1 \\ a_2 & k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

המטריצה המצורפת $adj(A)$

$$adj\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T$$

מוחקים שורה ועמודה לפי האיבר

כללים:

1. $adj(A) \cdot A = A \cdot adj(A) = |A| \cdot I$
2. $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj(A)$
3. $adj(I) = I$

4. $adj(A^T) = (adj(A))^T$, $adj(A^{-1}) = (adj(A))^{-1}$

5. $adj(AB) = adj(B) \cdot adj(A)$

6. $|adj(A)| = |A|^{n-1}$

סדר המטריצה

$$\boxed{adj\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +d & -c \\ -b & +a \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

שדות

שדה F הוא מבנה אלגברי המורכב מקבוצת איברים ושתי פעולות בינאריות הנקראות כפל וחיבור (אין צורך בהן לרשימה). פעולות אלה נדרשות לקיים את התכונות הבאות הנקראות אקסיומות השדה.

a,b,c הם איברים כלשהם של השדה F.

1. $a+b=b+a$ (חילוף בחיבור)
2. $(a+b)+c = a+(b+c)$ (קיבוץ בחיבור)
3. $a+0=a$ (נייטרליות לאפס בחיבור)
4. $a+(-a)=0$ (נגדיות של איברים)

5. $a \cdot b = b \cdot a$ (חילוף בכפל)
6. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (קיבוץ לכפל)
7. $a \cdot 1 = a$ (נייטרליות לאחד בכפל) — איבר יחידה
8. $a \cdot a^{-1} = 1$ $(a \neq 0)$ (קיום איבר הופכי)
9. $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (פילוג)

חיסור: $a-b=a+(-b)$
חילוק: $\frac{a}{b}=a\cdot b^{-1}$

דוגמאות לשדות:

1. שדה המס' הממשיים $\mathbb{R}$.
2. שדה המס' הרציונליים $\mathbb{Q}=\left\{\frac{x}{y}\,\middle|\,x,y\in\mathbb{Z},\ y\neq 0\right\}$
3. שדה המס' המרוכבים $\mathbb{C}=\{x+yi\mid x,y\in\mathbb{R}\}$

שדות סופיים:

1. הקב' $\{0,1\}$ עם פעולות החיבור והכפל הבאות מהווה שדה של שני איברים.

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\otimes$	0	1
0	0	0
1	0	1

2. שדה השאריות מודולו p, המכיל את כל השאריות בחלוקת מס' שלם ב-p מודולו p: $\mathbb{Z}_p=\{0,1,2,\dots,p-1\}$

פעולת החיבור של שני מס' מחזירה את שארית חלוקת הסכום ב-p.
פעולת הכפל של שני מס' מחזירה את שארית המכפלה ב-p.

תת שדה

יהי $\mathbb{F}$ שדה.

תת קבוצה $H \subseteq F$ נקראת תת שדה של $\mathbb{F}$, אם H שדה ביחס לאותן פעולות כמו של $\mathbb{F}$.

לדוגמאות,

$\mathbb{Q}$ תת שדה של $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$ תת שדה של $\mathbb{C}$.

$\mathbb{Z}_p$ אינו תת שדה של $\mathbb{R}$.

קריטריון מקוצר לתת שדה:

יהי $\mathbb{F}$ שדה.

תת קבוצה $H \subseteq F$ היא תת שדה של $\mathbb{F}$ אם"ם מתקיים:

1. $1_{\mathbb{F}} \in H$
2. $a, b \in H \implies a - b \in H$
3. $a, b \neq 0_F \in H \implies a \cdot b^{-1} \in H$

מרחבים וקטורים

המרחב הוקטורי $\mathbb{R}^3$

אוסף כל הוקטורים ממימד 3.

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

כדי להיות מרחב וקטורי עליה לקיים שתי דרישות:

1. על קבוצת הוקטורים צריכות להיות מוגדרות שתי פעולות:

- חיבור:

$$(a, b, c) + (A, B, C) = (a + A, b + B, c + C)$$

- כפל בסקלר:

$$k(a,b,c) = (ka, kb, kc)$$

2- קים החוק סיומות:

אקסיומות החיבור:

1. לכל שלושה וקטורים u,v,w מתקיים:
$$(u+v)+w = u+(v+w)$$

2. לכל שני וקטורים u,v מתקיים:
$$u+v = v+u$$

3. קיים וקטור שסימונו 0 ונקרא וקטור האפס שעבורו $v+0=v$ לכל וקטור v.

4. לכל וקטור v קיים וקטור נגדי $-v$ שעבורו:
$$v+(-v)=0$$

אקסיומות הכפל בסקלר:

5. לכל סקלר k ולכל שני וקטורים u,v מתקיים:
$$k(u+v) = ku+kv$$

6. לכל שני סקלרים a,b ולכל וקטור v מתקיים:
$$(a+b)v = av+bv$$

7. לכל שני סקלרים a,b ולכל וקטור v מתקיים:
$$(ab)\cdot v = a(bv)$$

8. לכל וקטור v קיים סקלר יחידה 1 כך שמתקיים:
$$1\cdot v = v$$

מרחבים וקטורים מוכרים:

1. המרחב הוקטורי $\underbrace{M_{m\times n}}\,[\mathbb{R}]$:

כל המטריצות מסדר $m\times n$.

כניסות המטריצה יהיו רק ממשיים.

$$M_{2\times 3}[\mathbb{R}] = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R} \right\}$$

2. המרחב הוקטורי $P_n[\mathbb{R}]$:

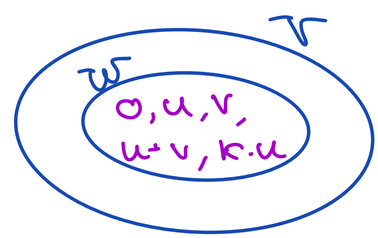
אוסף כל הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-n.

$$P_3[\mathbb{R}] = \{ ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a,b,c,d \in \mathbb{R} \}$$

תת מרחב וקטורי

W הוא תת מרחב של מרחב וקטורי V אם מתקיים:

1. $0 \in W$
2. $u,v \in W \Rightarrow u+v \in W$
3. $u \in W \Rightarrow k\cdot u \in W$



צירופים לינאריים

אם קיימים קבועים a ו-b כך ש:

$$u = a\cdot v + b\cdot w$$

אז אומרים שהוקטור u הוא צ"ל של v ו-w.

איך נרשום את w כצירוף לינארי של u ו-v?

1. $(2,-11,-6,12) = a(-1,2.5,-4,4) + b\cdot(1,-4,0.5,1)$

נפתח סוגריים, מעבר משוואות, מטריצה, נדרג.

.2

$u=(-1,2.5,-4,4)$, $v=(1,-4,0.5,1)$

$w=(2,-11,-6,12)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2.5 & -4 & 4 & u \\ 1 & -4 & 0.5 & 1 & v \\ 2 & -11 & -6 & 12 & w \end{array}\right) \leftarrow$$

את מי שנרצה לרשום כבר נשים בסוף.

נדרג, ונשווה ל:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2.5 & -4 & 4 & u \\ 0 & -1.5 & -3.5 & 5 & v+u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w+2u-4(v+u) \end{array}\right)$$

$$w+2u-4(v+u)=0$$

$$\boxed{w=2u+4v}$$

איך נבצע עם מטריצות?

$A=\begin{pmatrix} -1 & 2.5 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 2 & -11 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$

איך נרשום את המטריצה C כצירוף לינארי של A,B?

.1 דרך כזה. $\begin{pmatrix} 2 & -11 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} -1 & 2.5 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$

נפתח סוגריים, מעבר משוואות, מטריצה, נדרג.

.2

$A=\begin{pmatrix} -1 & 2.5 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 2 & -11 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2.5 & -4 & 4 & A \\ 1 & -4 & 0.5 & 1 & B \\ 2 & -11 & -6 & 12 & C \end{array}\right)$$

נדרג, ונקבל:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2.5 & -4 & 4 & A \\ 0 & -1.5 & -3.5 & 5 & B+A \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C+2A-4(B+A) \end{array}\right)$$

$$C+2A-4(B+A)=0$$

$$\boxed{C=2A+4B}$$

איך נבצע עם פולינומים?

.1 $$\underbrace{2x^3-11x^2-6x+12}_{r(x)}=a\underbrace{(-x^3+2.5x^2-4x+4)}_{p(x)}+b\underbrace{(x^3-4x^2+0.5x+1)}_{q(x)}$$

$$2x^3-11x^2-6x+12=(-a+b)x^3+(2.5a-4b)x^2+(-4a+0.5b)x+(4a+b)$$

מעבירים למע' משוואות לפי כל מקדם, מטריצה, נדרג.

.2
$$p(x)=-x^3+2.5x^2-4x+4$$
$$q(x)=x^3-4x^2+0.5x+1$$
$$r(x)=2x^3-11x^2-6x+12$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2.5 & -4 & 4 & p \\ 1 & -4 & 0.5 & 1 & q \\ 2 & -11 & -6 & 12 & r \end{array}\right) \leftarrow$$

מטריצה
של רק מקדמים

מדרגים, וכמו בסעיפים הקודמים.

פרישה לינארית

הגדרה:

אם $A=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$

אזי $Sp(A)=\{a_1v_1+a_2v_2+\dots+a_nv_n \mid a_1,a_2,\dots,a_n\in\mathbb{R}\}$

$Sp(A)$ נקראת הפרישה הלינארית של הקב' A או המרחב הנפרש ע"י קבוצה A.

תלות לינארית

קב' וקטורים תיקרא תלויה לינארית אם ניתן לכתוב לפחות וקטור אחד בקבוצה כצירוף לינארי של וקטורים אחרים בקבוצה.

למשל:

$$A=\{u=(1,2,3),\ v=(4,5,6),\ w=(7,8,9)\}$$

$$u=2\cdot v-w$$

הגדרה:

נתונים הוקטורים $u_1,u_2,\dots,u_n$

אם למשוואה: $a_1\cdot u_1+a_2\cdot u_2+\dots+a_n\cdot u_n=0$

יש רק את הפתרון הטריוויאלי $a_1=a_2=\dots=a_n=0$

אז הוקטורים בת"ל.

אם ישנו פיתרון שאינו הפתרון הטריוויאלי

אז הוקטורים ת"ל.

דרך פתרון:

בדוק האם יש תלות לינארית:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2.5\\ -4 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 0.5 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & -11\\ -6 & 12\end{pmatrix}$$

דרך א׳:

נפתור את המשוואה:

$$a\begin{pmatrix}-1 & 2.5\\ -4 & 4\end{pmatrix} b\cdot\begin{pmatrix}1 & -4\\ 0.5 & 1\end{pmatrix} c\cdot\begin{pmatrix}2 & -11\\ -6 & 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

נשווה ל:

$$\begin{pmatrix}-a+b+2c & 2.5a-4b-11c\\ -4a+0.5b-6c & 4a+b+12c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}-a+b+2c=0\\ 2.5a-4b-11c=0\\ -4a+0.5b-6c=0\\ 4a+b-12c=0\end{cases}$$

נעביר למטריצה ונפתור.

דרך ב׳:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2.5\\ -4 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 0.5 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & -11\\ -6 & 12\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}-1 & 2.5 & -4 & 4 & A\\ 1 & -4 & 0.5 & 1 & B\\ 2 & -11 & -6 & 12 & C\end{array}\right)$$

נדרג ונשווה ל:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}-1 & 2.5 & -4 & 4 & A\\ 0 & -1.5 & -3.5 & 5 & B+A\end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & C+2A-4(B+A) \end{array}\right)$$

$$C+2A-4(B+A)=0$$

$$C-2A-4B=0$$ ← ניתן להציג כת"ל

תנאי מספיק לת"ל:

1. כל וקטורים שמכילה מעל n וקטורים ממימד n בהכרח ת"ל. לדוגמא:

$$A=\{(1,2),(3,4),(5,6)\}$$

2. כל מטריצה שמכילה יותר מ- mxn מטריצות ממימד mxn בהכרח ת"ל. לדוגמא:

$$A=\left\{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\0&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}$$

3. כל פולינומים מעלה קטנה או שווה n שמכילה יותר מ-n+1 פולינומים בהכרח ת"ל. למשל:

$$A=\{x^2+x+1,\ 4x-5,\ x^2+1,\ x+x^2\}$$

בסיס

הגדרה: קב׳ וקטורים מהווה בסיס למרחב וקטורי אם היא:

1. פורשת את המרחב. $(x,y) = a(1,2)+b(3,4)$
2. בלתי תלויה ליניארית. $a(1,2)+b(3,4)=(0,0)$
3. בקבוצה יש מס׳ איברים כמס׳ המימד.

2 3 דרישים מספיקים

טענה: תנאי מספיק לבסיס מרחב מפורש.

1. קבוצה של n וקטורים בת״ל ממימד n מהווים בסיס ל- $\mathbb{R}^n$. (אין צורך לבדוק פרישה)
2. קבוצה של $m\times n$ מטריצות, בת״ל מהווה בסיס ל- $M_{m\times n}[\mathbb{R}]$.
3. קבוצה של $n+1$ פולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-n מהווים בסיס ל- $P_n[\mathbb{R}]$.

$\Downarrow$

אם יש סתירה הם בטוח לא בסיס!

מציאת בסיס ומימד למרחב הפתרונות של מע׳ משוואות הומוגנית:

נסמן ב- W את מרחב הפתרונות של מע׳ המשוואות ההומוגנית הבאה. מצאו בסיס ומימד ל- W.

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3+x_4-x_5=0 \\ 2x_1+5x_2+10x_3+3x_4-3x_5=0 \\ 4x_1+9x_2+18x_3+5x_4-5x_5=0 \end{cases}$$

שלב 1 - מדרגים

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 10 & 3 & -3 \\ 4 & 9 & 18 & 5 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{דירוג}]{\text{לאחר}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שלב 2 -

$$\begin{cases} \boxed{x_1} + 2x_2 + 4x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ \boxed{x_2} + 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

חופשיים ⟵ $x_3 = r \ , \ x_4 = s \ , \ x_5 = t$

$$x_2 = t - s - 2r$$
$$x_1 = -t + s$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-t+s, t-s-2r, r, s, t)$$

נכתוב בצורת וקטורים לפי המקדמים של כל אחד

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = r(0,-2,1,0,0) + s(1,-1,0,1,0) + t(-1,1,0,0,1)$$

בסיס מרחב הפתרונות

$$B_W = \{(0,-2,1,0,0), (1,-1,0,1,0), (-1,1,0,0,1)\}$$

$$\dim W = 3$$

כמה וקטורים בבסיס

B_W יהיה מה השורות לפני פתרון - מה שונות
מהאפסים אחרי
דירוג

מציאת בסיס ומימד לתת מרחב של מרחב מפורש:

לפניך תת מרחב של $\mathbb{R}^3$.

$W = Span\{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)\}$

נעביר לצורת מטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

ומה שיפול בדרך (שורת אפסים) זה הוקטור שהיה תלוי.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(7,8,9) נפל

$B_W = \{(1,2,3),(0,-3,-6),(0,0,1)\}$

כדי להשלים בסיס ל-$\mathbb{R}^3$

במטריצה, נדרג, ולאחר הדירוג נכתוב את
השורות ללא אפסים ב-W.
וזה מספר השורות ב-dim.

(כנ"ל לעמודות)

דרגה

משפט:

מימד מרחב השורות שווה למימד מרחב העמודות ונקרא דרגת המטריצה.

$$\boxed{\dim(row) = \dim(col) = rank(A)}$$

תכונות של rank:

1. אם $A \sim B$ אז $rank(A) = rank(B)$
2. $rank(A^T) = rank(A)$
3. $A = 0$ אם ורק אם $rank\ A = 0$.
   מטריצת אפסים
4. $rank(A) =$ מס' האיברים הפותחים בצורה המדורגת $=$ מס' השורות שאינן שונות אפסים בצורה המדורגת
5. לכל מטריצה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ מתקיים:
   $rank(A) \le \min\{m,n\}$
6. $A \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה אם"ם $rank(A) = n$.
7. אם $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ אז למע' ההומוגנית $AX=0$ קיים פתרון יחיד אם"ם $rank(A) = n$.

טענה: אם A ו-B מטריצות שעבורן המכפלה AB מוגדרת, אז: $rank(AB) \le \min\{rank(A), rank(B)\}$

הגדרה: המרחב המאפס

תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

קב' הפתרונות של המע' ההומוגנית $AX=0$ יוצרת עם

המאפס של A, הינו:

$$\underset{\text{Null}}{N}(A) = \overbrace{\{v\in\mathbb{F}^n \mid A\cdot v=0\}}^{\text{ת״מ של } \mathbb{F}^n} \subseteq \mathbb{F}^n$$

משפט: תהי $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, אזי $\operatorname{rank}A + \dim N(A) = n$

חיתוך וסכום של תתי מרחבים

הגדרה: חיתוך של תת מרחבים

יהיו U ו- W שני תת מרחבים של מרחב וקטורי V.
החיתוך של U ו- W סימון $U\cap W$ מוגדר כך:

$$U\cap W = \{x\in V \mid x\in U \wedge x\in W\}$$

כיצד נמצא את החיתוך?

$$U = Sp\{(1,1,4),(-1,0,1)\}$$
$$W = Sp\{(-1,1,1),(2,-1,8)\}$$

$$(x,y,z)\in U\cap W$$

$$(x,y,z) = a(1,1,4)+b(-1,0,1)$$
$$(x,y,z) = c(-1,1,1)+d(2,-1,8)$$

$$a(1,1,4)+b(-1,0,1) = c(-1,1,1)+d(2,-1,8)$$
$$a(1,1,4)+b(-1,0,1)-c(-1,1,1)+d(2,-1,8)=0$$
$$(a,a,4a)+(-b,0,b)+(c,-c,-c)+(-2d,d,-8d)=0$$

$$\begin{cases} a-b+c-2d=0 \\ a-c+d=0 \\ 4a+b-c-8d=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a-b+c-2d=0 \\ b-2c+3d=0 \\ c-3d=0 \end{cases} \Rightarrow d=1 \rightarrow c=3,\ b=3,\ a=2$$

$$(x,y,z) = 2(1,1,4)+3(-1,c,1) = (-1,2,11)$$
$$(x,y,z) = 3(-1,1,1)+1(2,-1,8) = (-1,2,11)$$

$$U\cap W = Sp\{(-1,2,11)\}$$

$$B_{U\cap W} = \{(-1,2,11)\} \quad , \quad \dim(U\cap W)=1$$

החיתוך $U\cap W$ הוא תת מרחב של V.

הגדרה: סכום תת מרחבים

יהיו U ו- W שני תת מרחבים של מרחב וקטורי V.

הסכום של U ו- W שיסומן $U+W$ מוגדר כך:

$$U+W=\{x\in V \mid x=u+w\ ,\ u\in U\ ,\ w\in W\}$$

למציאת סכום נשתמש ב:

$$\begin{cases} U=sp(\{u_1,\dots,u_n\}) \\ W=sp(\{w_1,\dots,w_t\}) \end{cases} \Longrightarrow U+W=sp(\{u_1,\dots,u_n,w_1,\dots,w_t\})$$

לדוגמא,

$$U=sp\{(1,2,3),(4,5,6)\}$$
$$W=sp\{(7,8,9),(10,11,12)\}$$

נמצא בסיס ומימד ל- $U+W$.

$$U+W=sp\{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9),(10,11,12)\}$$

נבנה מטריצה ששורותיה הן הוקטורים ונדרג.
בדירוג השורות השונות מ-0 הן בסיס של $U+W$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{U+W}=\{(1,2,3),(0,1,2)\}$$

$$\dim(U+W)=2$$

הסכום $U+W$ הוא תת מרחב של V.

משפטים:

1. $U, W, U\cup W \subseteq U+W$
2. $U+W$ תת המרחב הקטן ביותר המכיל את U ואת W.
3. $U\cup W$ תת מרחב $\iff$ $W\subseteq U$ או $U\subseteq W$

משפט המימד

יהי V מרחב וקטורי.

יהיו U ו- W תת מרחבים ממימד סופי של V.

אזי,

$$\boxed{\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U\cap W)}$$

סכום ישר של תת המרחב

משפט: (1)

אם:

1. $U+W=V$
2. $\dim(U\cap W)=0$

אזי:

$$U\oplus W = V$$

משפט: (2)

אם:

1. $U+W=V$

2. $\dim U + \dim W = \dim V$

אז:

$U \oplus W = V$

הגדרה:

יהיו U ו- W שני תת מרחבים של מרחב וקטורי V.
נאמר ש- V הוא הסכום הישר של U ו- W ונסמן $V = U \oplus W$, אם לכל וקטור $v \in V$ ניתן לכתוב באופן אחד ויחיד כ- $v = u + w$ כאשר $u \in U$, $w \in W$.

העתקות לינאריות

הגדרה:

יהיו V ו- U וקטורים מעל אותו שדה K. (אותו רק מעל)
העתקה $T: V \to U$ נקראת העתקה לינארית אם היא מקיימת את שני התנאים הבאים:

א. $T(u+v) = T(u) + T(v) \quad \forall u,v \in V$

ב. $T(k \cdot u) = k \cdot T(u) \quad \forall k \in K \ \forall u \in V$

או בקיצור:

$$T(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha \cdot T(u) + \beta \cdot T(v) \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{F}$$

אם העתקה לינארית היא ממרחב וקטורי לעצמו היא נקראת אופרטור לינארי.

גרעין ותמונה של ה"ל:

תהי $T: V \to W$ ה"ל.

הגדרה: גרעין

הגרעין של T הינו:

$$\ker T = \{ v \in V \mid T(v) = 0_W \} \subseteq V$$

הגדרה: תמונה

התמונה של T הינה:

$$\operatorname{Im} T = \{ w \in W \mid \text{קיים } v \in V \text{ כך ש- } T(v) = w \} \subseteq W$$

משפט המימד:

תהי $T: V \to W$ ה"ל. אזי:

$$\dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = \dim V$$

העתקה לינארית חח"ע

העתקה לינארית $T: V \to U$ תיקרא חח"ע אם לכל שני וקטורים שונים ב-V מתאימים שני וקטורים שונים ב-U.

טענה: העתקה לינארית T היא חח"ע אמ"מ $\ker T = \{0\}$.

העתקה לינארית על

העתקה לינארית $T: V \to U$ תיקרא על אם לכל וקטור ב-U קיים וקטור מקור ב-V.

טענה: העתקה לינארית $T: V \to U$ היא על אמ"מ $\dim \operatorname{Im} T = \dim U$

איזומורפיזם

העתקה לינארית $T:V\to U$ תיקרא איזומורפיזם אם היא חח"ע ועל.

העתקה הפוכה

תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית.
אם ההעתקה היא חח"ע ועל אז יש לה העתקה ההפוכה שמסומנת ב-T^{-1} ומקיימת $T(T^{-1}(v))=v$ לכל וקטור v ב-V.

מסקנה:

תהי $T:V\to W$ ט"ל. נניח כי $\dim V=\dim W$ אז התנאים הבאים שקולים:

1. T חח"ע.
2. T על.
3. T איזומורפיזם.

טענה:

תהי $T:V\to W$ ט"ל.

1. אם T חח"ע ו-$\{v_1,\dots,v_n\}\subseteq V$ בת"ל, אז גם $\{T(v_1),\dots,T(v_n)\}\subseteq W$ בת"ל.
2. אם T על ו-$\{v_1,\dots,v_n\}\subseteq V$ פורשת, אז גם $\{T(v_1),\dots,T(v_n)\}\subseteq W$ פורשת.
3. אם T איזומורפיזם ו-$\{v_1,\dots,v_n\}\subseteq V$ בסיס,

אז אם $\{T(v_1),\dots,T(v_n)\}\subseteq W$ בסיס.

קואורדינטות

יהי V מ"ו ממד n מעל השדה $\mathbb{F}$.

יהי $B=(v_1,\dots,v_n)\subseteq V$ בסיס סדור של V

(כלומר בסיס אשר יש חשיבות לסדר האיברים בו)

לכל $v\in V$ קיים ויחידה הצגה:

$$V=\lambda_1 V_1+\dots+\lambda_n V_n$$

נסמן את ה-n-יות המקדמים ב-

$$[v]_B=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^n$$

וקטור הקורדינאטות של v ביחס לבסיס הסדור B.

$$(x,y,z)=(x+y-z)\cdot(1,1,1)+(z-y)\cdot(1,0,1)+(z-x)\cdot(0,1,1)$$

$$\boxed{[w]_B=(x+y-z,\ z-y,\ z-x)}$$

הערה: העתק הקורדינטות הוא ט"ל איזומורפיזם.

#הבהרה:

העתק הקואורדינטות מאפשר לנו לתרגם שאלות ממרחבים כלליים למרחב $\mathbb{F}^n$ אשר בו יש לנו כלים נוחים לניתוח השאלות.