Laboratorium 6
Kwadratury

Mateusz Król

25/04/2024 r.

Zadanie 1.

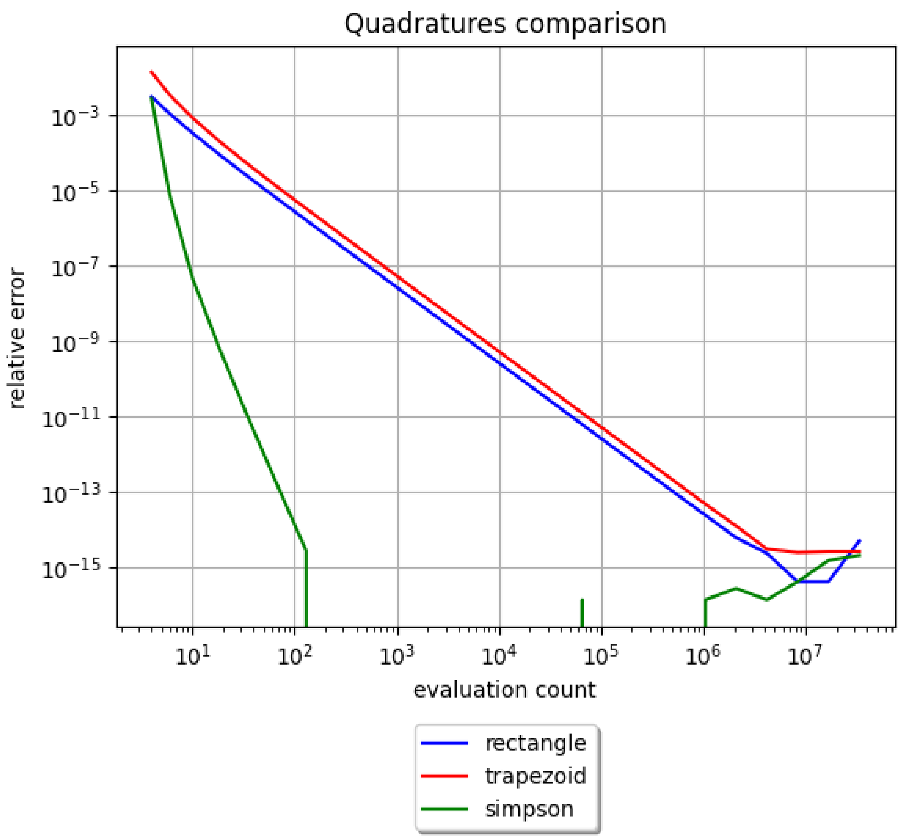
Wiadomo, że

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx = \pi.$$

Powyższą równość można wykorzystać do obliczenia przybliżonej wartości π poprzez całkowanie numeryczne.

Oblicz wartość powyższej całki, korzystając ze złożonych kwadratur otwartej prostokątów (ang. mid-point rule), trapezów i Simpsona.

Wykres błędów względnych w zależności od liczby ewaluacji funkcji podcałkowej dla kwadratury prostokątów, kwadratury trapezów, kwadratury *Simpson*'a:



Wykres błędów względnych dla kwadratury trapezów i kwadratury *Simpson*'a pokrywa się.

Z wykresu można odczytać, że kwadratura *Simpson*'a w tym przypadku gwarantuje najmniejszą wartość błędu względnego. Ponadto, zniżanie kroku poniżej $h \approx 10^{-7}$, nie zmniejsza już błędu kwadratury prostokątów.
Ten wynik zgadza się z wynikiem z *Laboratorium 1*, w którym wyznaczone h_{min} wyniosło 10^{-6}, 10^{-8}.

Wartości empirycznych rządów zbieżniości dla każdej z użytych metod:

Method	Empirical order of convergence
rectangle	≈ 2.00
trapezoid	≈ 2.00
simpson	≈ 6.21

Wartości empirycznych rzędów zbieżniości zgadzają się z wartościami przewidywanymi przez teorię dla metody prostokątów oraz dla metody trapezów wynoszącą ≈ 2.00
Wartość dla metody *Simpson*'a nie zgadza się z wartością teoretyczną równą 4.

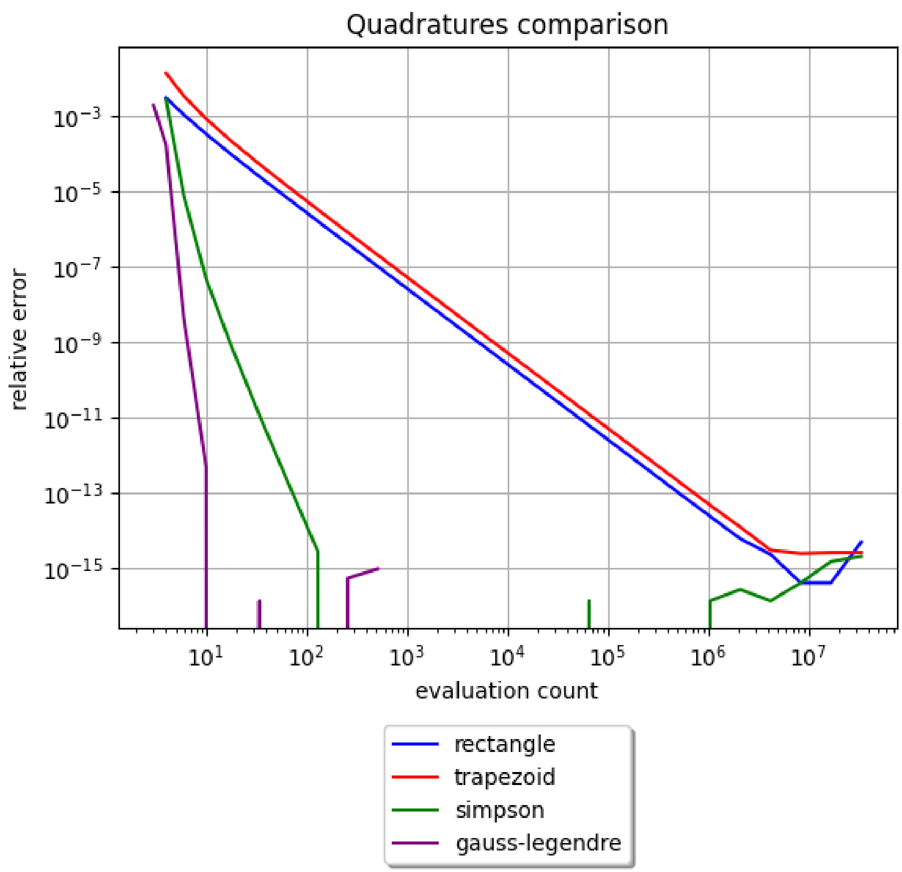
Zadanie 2.

Oblicz wartość całki

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\, dx$$

metodą Gaussa-Legendre'a. Narysuj wykres wartości bezwzględnej błędu względnego w zależności od liczby ewaluacji funkcji podcałkowej, n + 1.

Wykres przedstawiający porównanie wszystkich metod:



Wnioski

Metodą, która w testowanym przypadku potrzebowała najmniejszej liczby ewaluacji funkcji podcałkowej w celu uzyskania zadowalającej wartości błędu względnego ($\approx 10^{-15}$), była metoda *Gaussa-Legendre'a*.