Laboratorium 9

Równania różniczkowe zwyczajne

Mateusz Król

22/05/2024 r.

Zadanie 1.

Przedstaw każde z poniższych równań różniczkowych zwyczajnych jako równoważny układ równań pierwszego rzędu (ang. *first-order system of ODEs*):

(a) równanie *Van der Pol*'a:

$$y'' = y'(1 - y^2) - y$$

(b) równanie *Blasius*'a:

$$y''' = -yy''$$

(c) II zasada dynamiki *Newton*'a dla problemu dwóch ciał:

$$y_1'' = -GM \cdot \frac{y_1}{(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}}$$

$$y_2'' = -GM \cdot \frac{y_2}{(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}}$$

Układy równań różniczkowych:
(a) równanie *Van der Pol*'a:

Podstawienia:

$$y_1 = y$$

$$y_2 = y'$$

Układ równań:

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = y_2(1 - y_2^2)$$

(b) równanie *Blasius*'a:

Podstawienia:

$$y_1 = y$$
$$y_2 = y'$$
$$y_3 = y''$$

Układ równań:

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = y_3$$
$$y_3' = -y_1 y_3$$

(c) II zasada dynamiki *Newton*'a dla problemu dwóch ciał:

Podstawienie:

$$y_3 = y_1'$$
$$y_4 = y_2'$$

Układ równań:

$$y_1' = y_3$$
$$y_2' = y_4$$
$$y_3' = -GM \cdot \frac{y_1}{(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}}$$
$$y_4' = -GM \cdot \frac{y_2}{(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}}$$

Zadanie 2.

Dane jest równanie różniczkowe zwyczajne

$$y' = -5y$$

z warunkiem początkowym $y(0) = 1$. Równanie rozwiązujemy numerycznie z krokiem $h = 0.5$.

Poniższa tabela przedstawia wartości czynników amplifikacji dla zadanego równania różniczkowego, dla każdej z omówionych metod.
Wartości te świadczą o numerycznej stabilności tych metod.

Method	Amplification factor
Explicit Euler	-1.5
Implicit Euler	≈ 0.286
Trapezoidal	≈ -0.111
Modified Euler	1.625
RK4	≈ 0.648

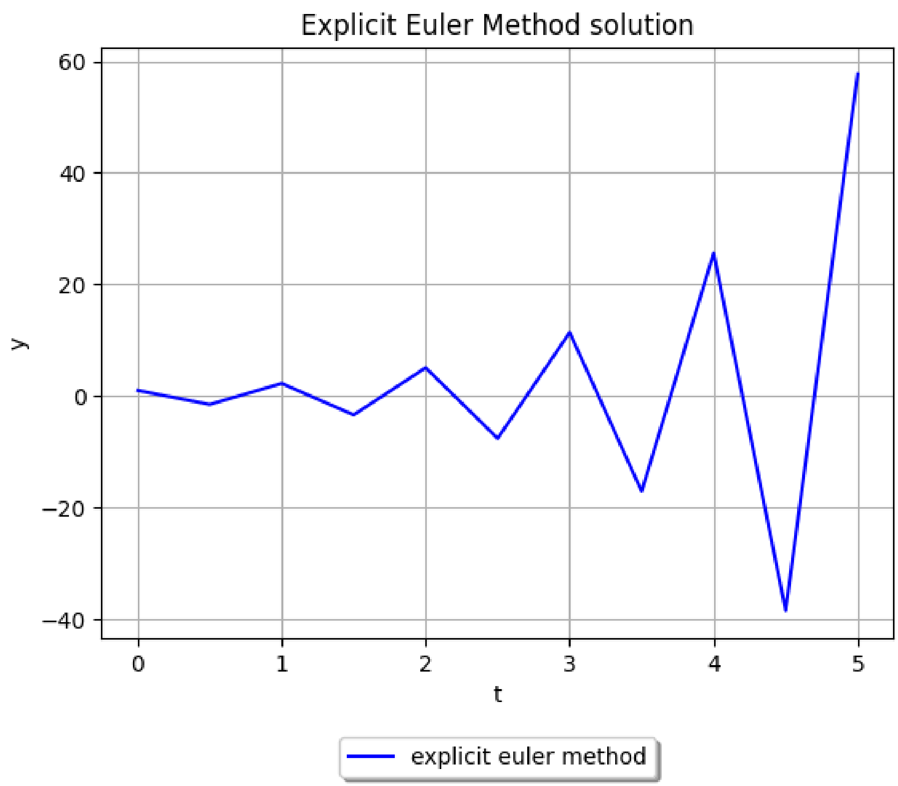
Metody stabilne numerycznie dla zadanego równania to te, dla których wartość bezwzględna z czynnika amplifikacji jest mniejsza od 1.
Są to metody: Implicit Euler, Trapezoidal, RK4.

Jawna metoda *Euler*'a jest niestabilna numerycznie dla zadanego parametru $h = 0.5$.
Wzór iteracyjny:

$$y_{n+1} = y_n + h_n \lambda y_n$$

Wartość przybliżonego rozwiązania tą metodą dla $t = 0.5$ wynosi $y = -1.5$.

Wykres wartości rozwiązania wykorzystując jawną metodę *Euler*'a:

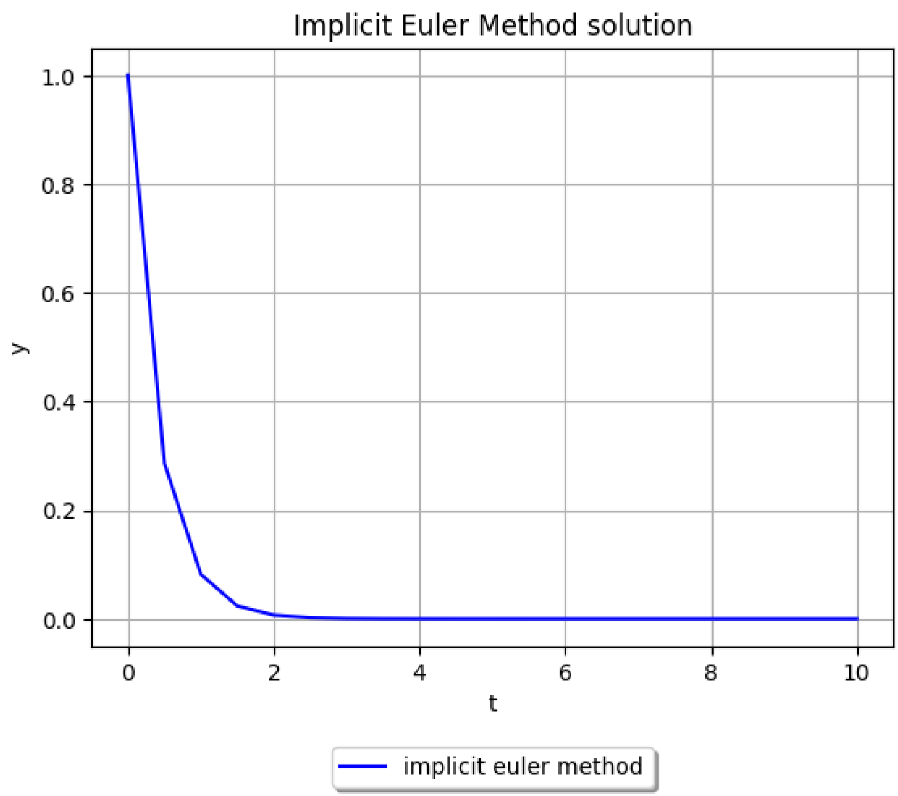


Niejawna metoda *Euler*'a jest stabilna numerycznie dla zadanego parametru $h = 0.5$.
Wzór iteracyjny:

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 - h_n \lambda}$$

Wartość przybliżonego rozwiązania tą metodą dla $t = 0.5$ wynosi $y \approx 0.286$.

Wykres wartości rozwiązania wykorzystując niejawną metodę *Euler*'a:



Zadanie 3.

Model *Kermack*'a-*McKendrick*'a przebiegu epidemii w populacji opisany jest układem równań różniczkowych:

$$S' = -\beta IS$$

$$I' = \beta IS - \gamma I$$

$$R' = \gamma I$$

, gdzie:
S reprezentuje liczbę osób zdrowych, podatnych na zainfekowanie,
I reprezentuje liczbę osób zainfekowanych i roznoszących infekcję,
R reprezentuje liczbę osób ozdrowiałych.

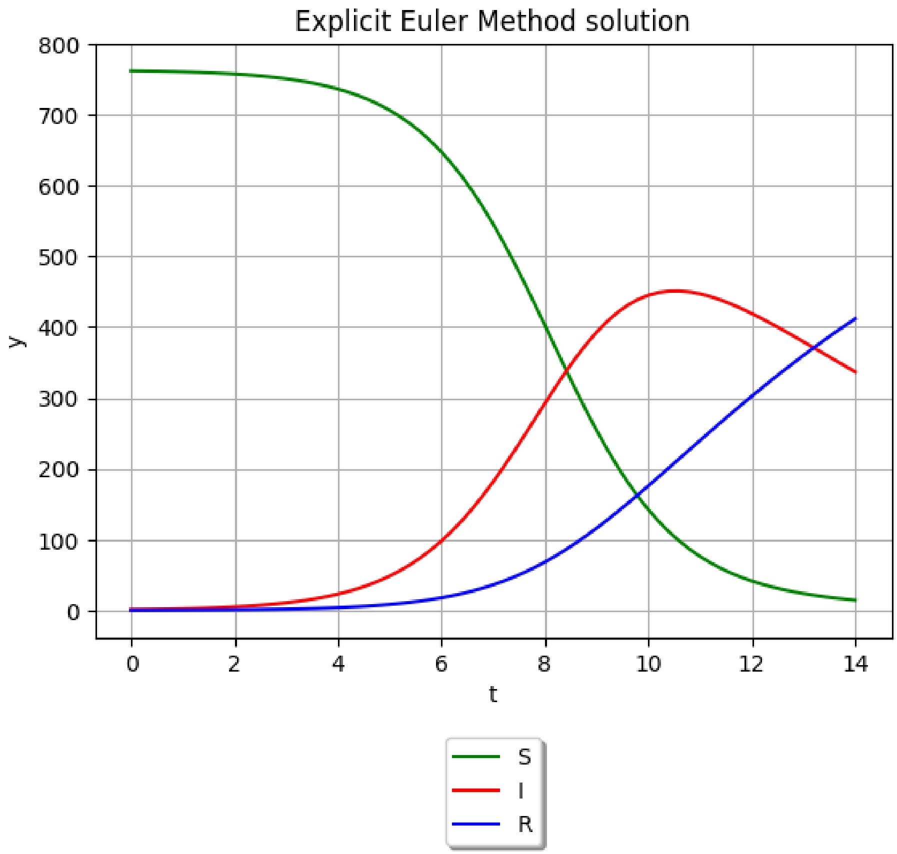
Parametr β reprezentuje współczynnik zakaźności (ang. *transmission rate*).

Parametr γ reprezentuje współczynnik wyzdrowień (ang. *recovery rate*).
Wartość $\frac{1}{\gamma}$ reprezentuje średni czas choroby.

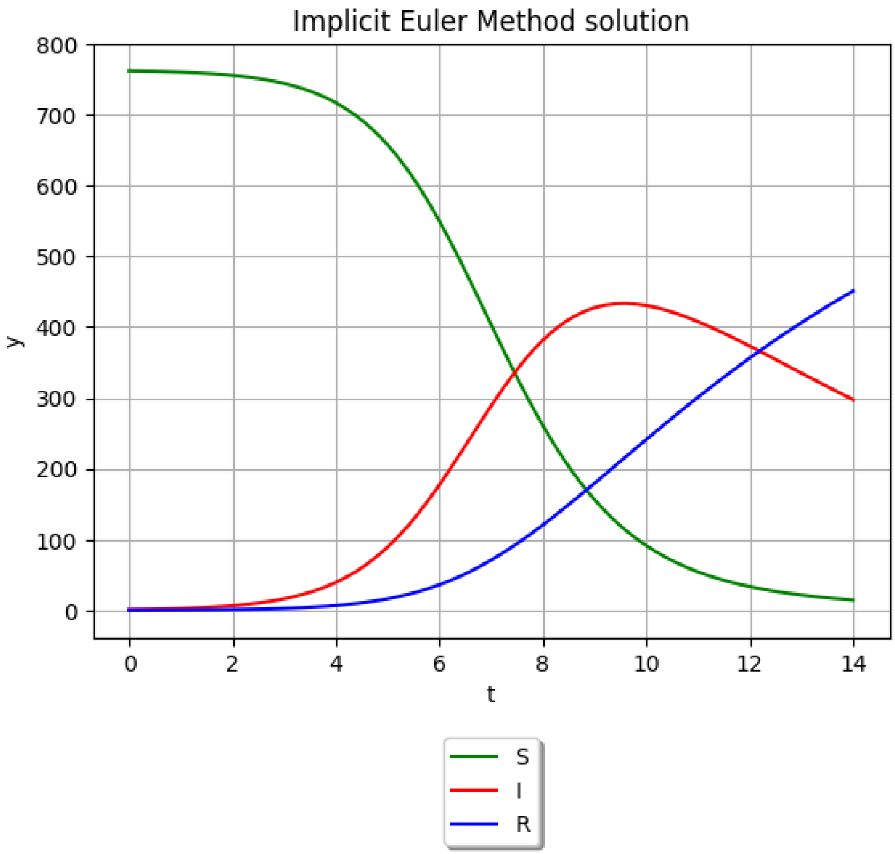
Założenia modelu:

- Przyrost liczby osób zakażonych jest proporcjonalny do liczby osób zakażonych oraz do liczby osób podatnych.
- Przyrost liczby osób odpornych lub zmarłych jest wprost proporcjonalny do liczby aktualnie chorych.
- Okres inkubacji choroby jest zaniedbywalnie krótki.
- Populacja jest wymieszana.

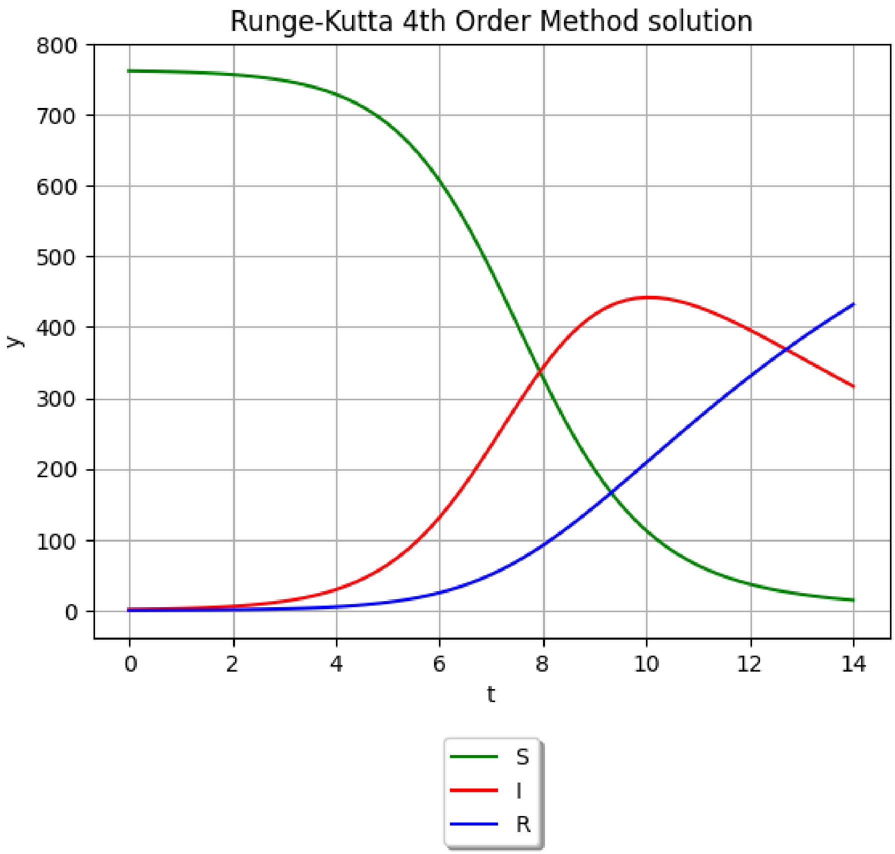
Wykres modelu *Kermack*'a-*McKendrick*'a przebiegu epidemii wykorzystując niejawną metodę *Euler*'a:



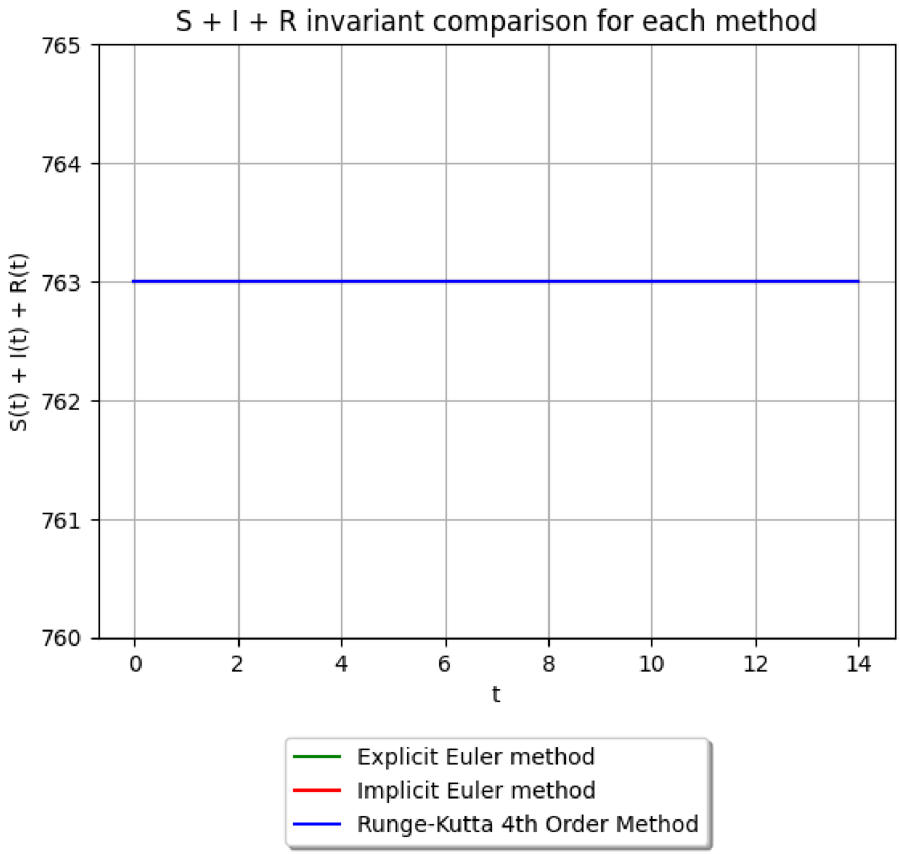
Wykres modelu *Kermack*'a-*McKendrick*'a przebiegu epidemii wykorzystując jawną metodę *Euler*'a:



Wykres modelu *Kermack*'a-*McKendrick*'a przebiegu epidemii wykorzystując metodę *Rungego Kutty*:



Wykres funkcji $S(t) + I(t) + R(t)$ dla każdej z metod:



$$L_1(\theta) = \sum_{t=0}^{T} (I_t - \hat{I}_t)^2$$

$$L_2(\theta) = -\sum_{t=0}^{T} I_t \cdot \ln(\hat{I}_t) + \sum_{t=0}^{T} \hat{I}_t$$

Tabela przedstawiająca wyznaczone wartości współczynników β i γ korzystając z metody *Rungego Kutty* dla różnych funkcji kosztu (przyjmując $N = 500$):

Cost function	β	γ	$R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$
L_1	≈ 1.568	≈ 0.283	≈ 5.547
L_2	≈ 1.583	≈ 0.330	≈ 4.811

Wnioski

W **Zadaniu 1.**, dla trzech równań / układów równań różniczkowych wyższego rzędu niż pierwszego, możliwe było doprowadzenie problemu do rozwiązania układu równań różniczkowych pierwszego rzędu.
Powyższa praktyka sprawdza się dla dowolnego układu równań różniczkowych n-tego rzędu.

W **Zadaniu 2.**, zgodnie z przewidywaniami (na podstawie przedstawionej tabelki z wartościami czynników amplifikacji), jawna metoda *Euler*'a okazała sie być niestabilna numerycznie. Wykres rozwiązania otrzymanego tą metodą nie zgadza się z wykresem rozwiązania analitycznego.
Wykres rozwiązania otrzymanego niejawna metodą *Euler*'a, jako że jest stabilna numerycznie, zgadza się z rozwiązaniem analitycznym zadanego równania różniczkowego.

W **Zadaniu 3.**, Model *Kermack*'a-*McKendrick*'a skutecznie opisuje dynamikę rozprzestrzeniania się epidemii.
Wykres funkcji $S(t) + I(t) + R(t)$ jest stale równy N, co zgadza się założeniem, że całkowita populacja jest stała.
Metoda $RK4$ jest uznawana za najlepszą z tych testowanych, ze względu na błąd lokalny rzędu zaledwie $O(h^5)$, a globalny $O(h^4)$.
Obliczone wartości R_0 większe niż 1 sugeruja, że choroba jest zdolna do rozprzestrzeniania się w populacji co zgadza się zamieszczonymi wykresami.