

Laboratorium 3

Interpolacja

Mateusz Król

20/03/2024 r.

Zadanie 1.

Populacja Stanów Zjednoczonych na przestrzeni lat przedstawiała się następująco:

Rok	Populacja
1900	76 212 168
1910	92 228 496
1920	106 021 537
1930	123 202 624
1940	132 164 569
1950	151 325 798
1960	179 323 175
1970	203 302 031
1980	226 542 199

Istnieje dokładnie jeden wielomian ósmego stopnia, który interpoluje powyższe dziewięć punktów, natomiast sam wielomian może być reprezentowany na różne sposoby.

Dla każdej z macierzy Vandermonde'a powstałych na podstawie zbiorów funkcji bazowych ϕ :

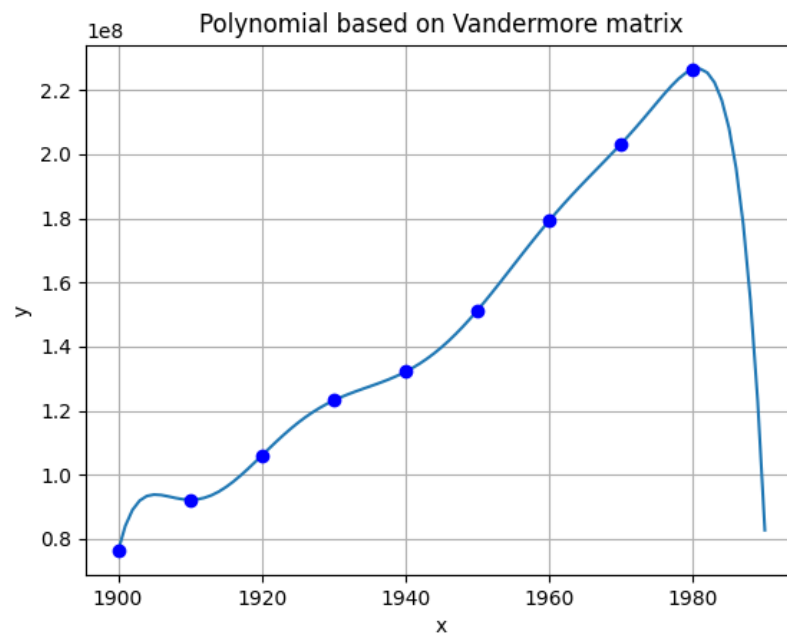
$$\begin{aligned}\phi_j(t) &= t^{j-1}, \text{ dla } j = 1, \dots, 9 \\ \phi_j(t) &= (t - 1900)^{j-1}, \text{ dla } j = 1, \dots, 9 \\ \phi_j(t) &= (t - 1940)^{j-1}, \text{ dla } j = 1, \dots, 9 \\ \phi_j(t) &= \left(\frac{t - 1940}{40} \right)^{j-1}, \text{ dla } j = 1, \dots, 9\end{aligned}$$

, współczynniki uwarunkowania wynosiły:

base function	$cond(V)$
ϕ_1	$3.98 \cdot 10^{32}$
ϕ_2	$6.31 \cdot 10^{15}$
ϕ_3	$9.32 \cdot 10^{12}$
ϕ_4	$1.61 \cdot 10^3$

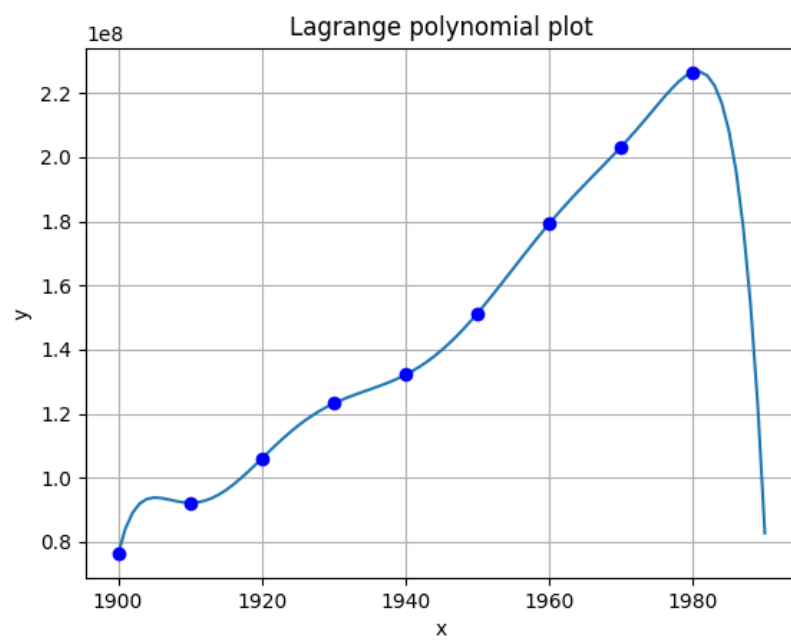
Najlepiej uwarunkowaną bazą wielomianów jest ta zbudowana na podstawie zbioru funkcji $\phi_j(t) = \left(\frac{t-1940}{40}\right)^{j-1}$.

Korzystając z tej bazy i wykorzystując schemat *Hornera*, obliczyłem wartości wielomianu interpolacyjnego na przedziale [1900; 1990]:

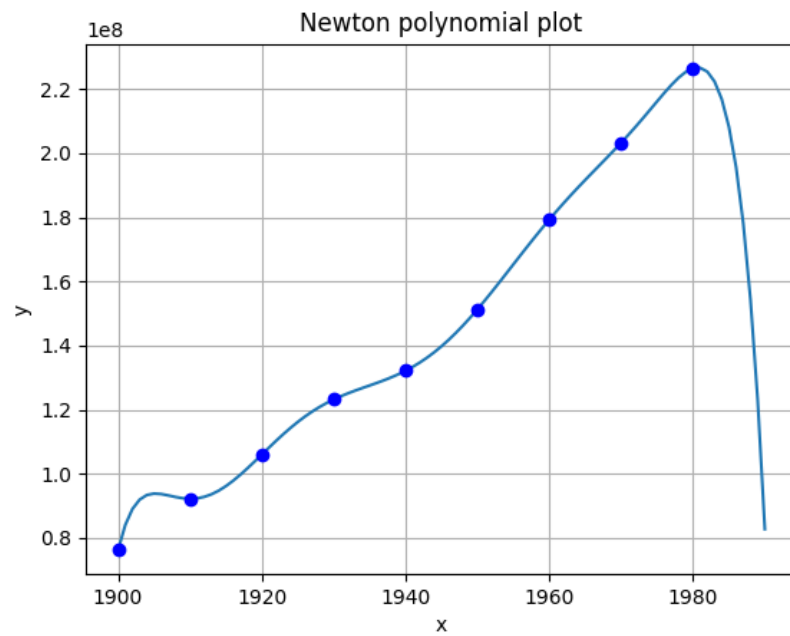


Na podstawie obliczonego wielomianu interpolacyjnego, wartość dla roku 1990 wynosi ≈ 82749141 , co w stosunku do prawdziwej wartości, równej 248709873, daje błąd względny na poziomie $\approx 66.73\%$.

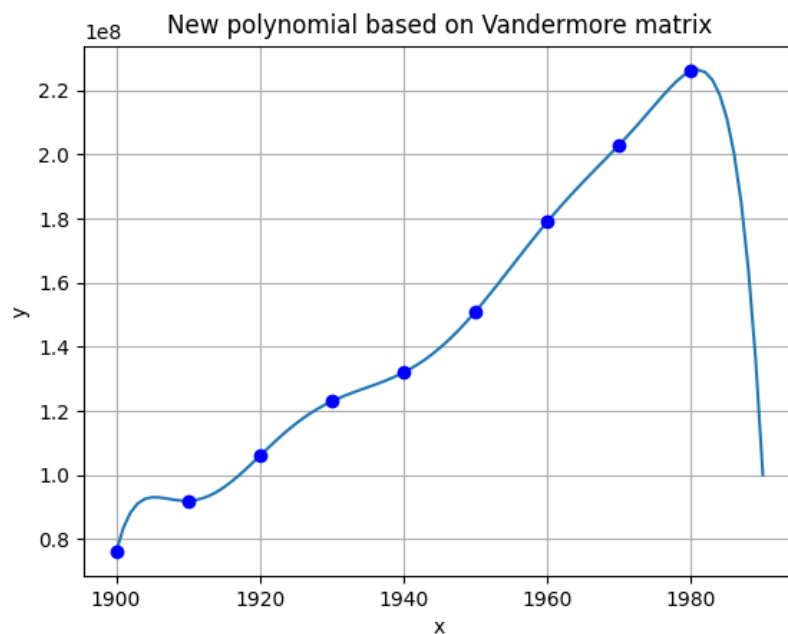
Wielomian interpolacyjny *Lagrange'a*:



Wielomian interpolacyjny *Newton*'a:



Po zaokrągleniu danych populacji dla każdego roku w tabeli, wciąż wykorzystując najlepiej uwarunkowaną bazę funkcji ϕ , otrzymujemy następujący wielomian interpolacyjny:



Wnioski

Pomimo zupełnie różnych sposobów reprezentacji wielomianu, wykresy prezentują się dokładnie tak samo.

Zaokrąglenie danych populacji w podpunkcie (g), doprowadziło do otrzymania mniejszego błędu względnego ekstrapolowanej wartości dla roku 1990. Błąd spadł z $\approx 66.7\%$ do $\approx 59.8\%$.

Źródła

- https://en.wikipedia.org/wiki/Newton_polynomial
- https://heath.cs.illinois.edu/scicomp/notes/cs450_chapt07.pdf