Laboratorium 11
Optymalizacja

Mateusz Król

15/06/2024 r.

Zadanie 1.

Wyznacz punkty krytyczne każdej z poniższych funkcji. Scharakteryzuj każdy znaleziony punkt jako minimum, maksimum lub punkt siodłowy. Dla każdej funkcji zbadaj, czy posiada minimum globalne lub maksimum globalne na zbiorze $\mathbb{R}$.

$$f_1(x,y) = x^2 - 4xy + y^2$$

$$f_2(x,y) = x^4 - 4xy + y^4$$

$$f_3(x,y) = 2x^3 - 3x^2 - 6xy(x-y-1)$$

$$f_4(x,y) = (x-y)^4 + x^2 - y^2 - 2x + 2y + 1$$

Dla funkcji f_1:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x - 4y = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -4x + 2y = 0$$

Punkty krytyczne:

$$(x,y) = (0,0)$$

Macierz Hessego:

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$det(H) = -12 < 0$$

Punkt $(0,0)$ jest punktem siodłowym.

Dla funkcji f_2:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 4x^3 - 4y = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = -4x + 4y^3 = 0$$

Punkty krytyczne:

$$(x, y) = (0,0), (1,1), (-1,-1)$$

Macierz Hessego:

$$H = \begin{bmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{bmatrix}$$

$$det(H(0,0)) = -16 < 0$$

Punkt $(0,0)$ jest punktem siodłowym.

$$det(H(1,1)) = 128 > 0$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(1,1) = 12 > 0$$

Punkt $(1,1)$ jest minimum lokalnym.

$$det(H(-1,-1)) = 128 > 0$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(-1,-1) = 12 > 0$$

Punkt $(-1,-1)$ jest minimum lokalnym.

Dla funkcji f_3:

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = 6x^2 - 6x - 12xy + 6y^2 + 6y = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} = -6x^2 + 6xy + 6x = 0$$

Punkty krytyczne:

$$(x, y) = (0,0), (t, t-1),\ t \in \mathbb{R}$$

Macierz Hessego:

$$H = \begin{bmatrix} 12x - 6 - 12y & -12x + 12y + 6 \\ -12x + 12y + 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$det(H(0,0)) = -36 < 0$$

Punkt $(0,0)$ jest punktem siodłowym.

$$det(H(t, t-1)) = -36 < 0$$

Punkty $(t, t-1)$, $t \in \mathbb{R}$ śa punktami siodłowymi.

Dla funkcji f_4:

$$\frac{\partial f_4}{\partial x} = 4(x - y)^3 + 2x - 2 = 0$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial y} = -4(x-y)^3 - 2y + 2 = 0$$

Punkty krytyczne:

$$(x, y) = (1, 1)$$

Macierz Hessego:

$$H = \begin{bmatrix} -12(x-y)^2 + 2 & -12(x-y)^2 \\ -12(x-y)^2 & 12(x-y)^2 - 2 \end{bmatrix}$$

$$det(H(1,1)) = -4 < 0$$

Punkt $(1, 1)$ jest punktem siodłowym.

Zadanie 2.

Należy wyznaczyć najkrótszą ścieżkę robota pomiędzy dwoma punktami $x^{(0)}$ i $x^{(n)}$.
Problemem są przeszkody usytuowane na trasie robota, których należy unikać.
Zadanie polega na minimalizacji funkcja kosztu, która sprowadza problem nieliniowej optymalizacji z ograniczeniami do problemu nieograniczonej optymalizacji.

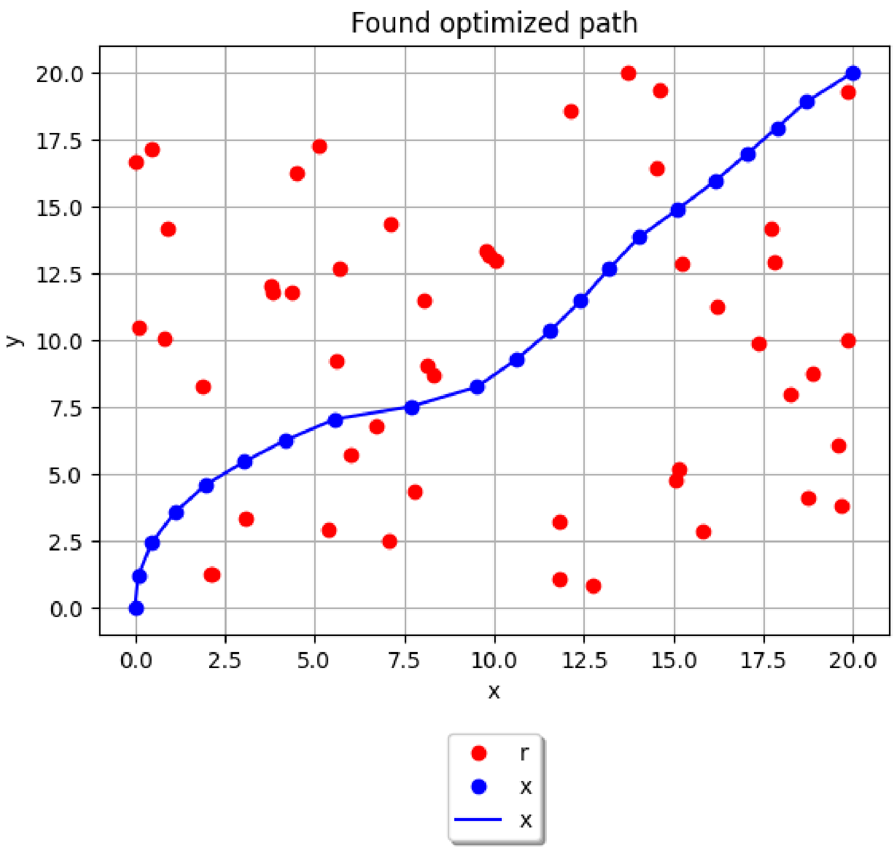
Algorytm największego spadku z przeszukiwaniem liniowym (ang. *Gradient Descent with Line Search*) iteracyjnie znajduje minimum funkcji celu poprzez poruszanie się w kierunku przeciwnym do obliczonego na podstawie gradientu funkcji. Do przeszukiwania liniowego wykorzystuję metodę złotego podziału (ang. *Golden Section Search*), która znajduje optymalny krok α wzdłuż kierunku gradientu.

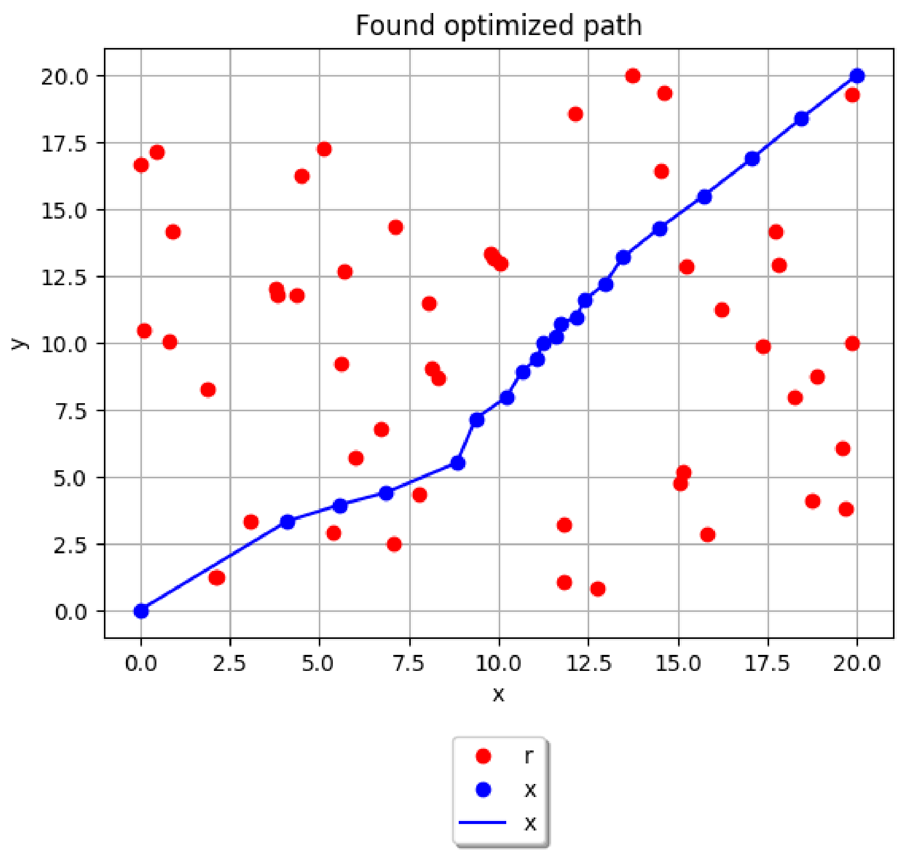
Kroki algorytmu:

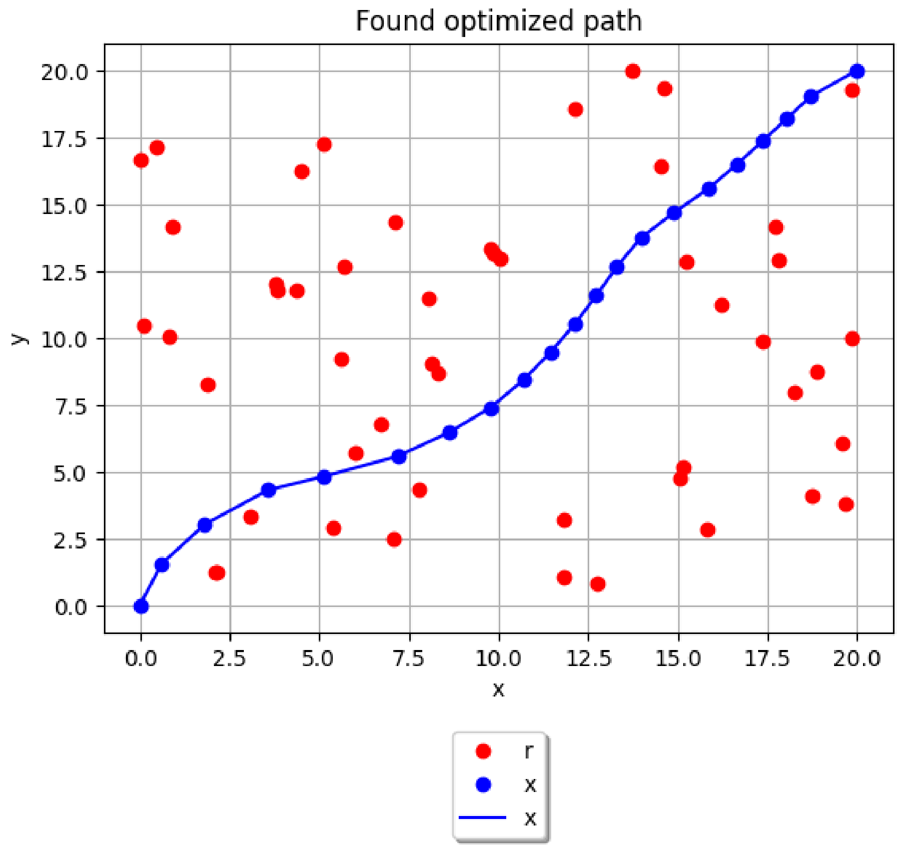
- punkty początkowe: x
- przedział poszukiwań dla α
- iteracyjnie: obliczenie gradientu, znalezienie optymalnego α dla funkcji $F(x_k - \alpha \cdot grad(F(x_k)))$, aktualizacja $x_{k+1} = x_k - \alpha \cdot grad(F(x_k))$

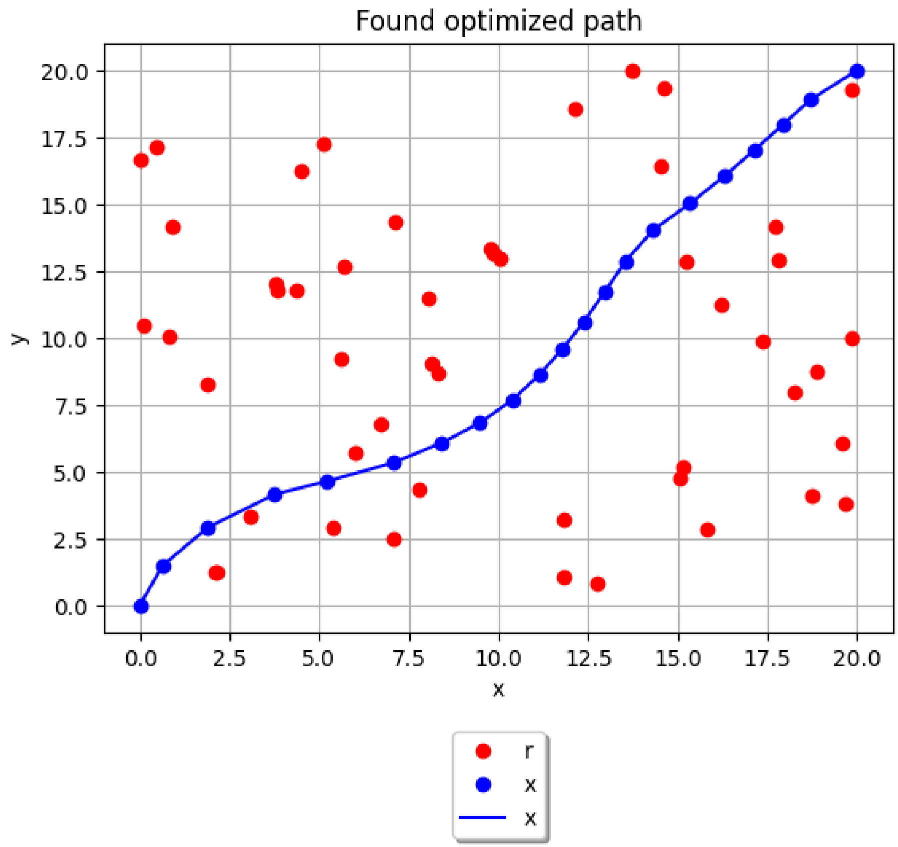
Pięcio krotnie wylosowałem początkowe wartości x z rozkładu jednostajnego z przedziału $(0; 20)$.
Poniżej znajdują się wykresy odpowiadające końcowym wartościom x, czyli

ścieżce *wybranej* przez robota:

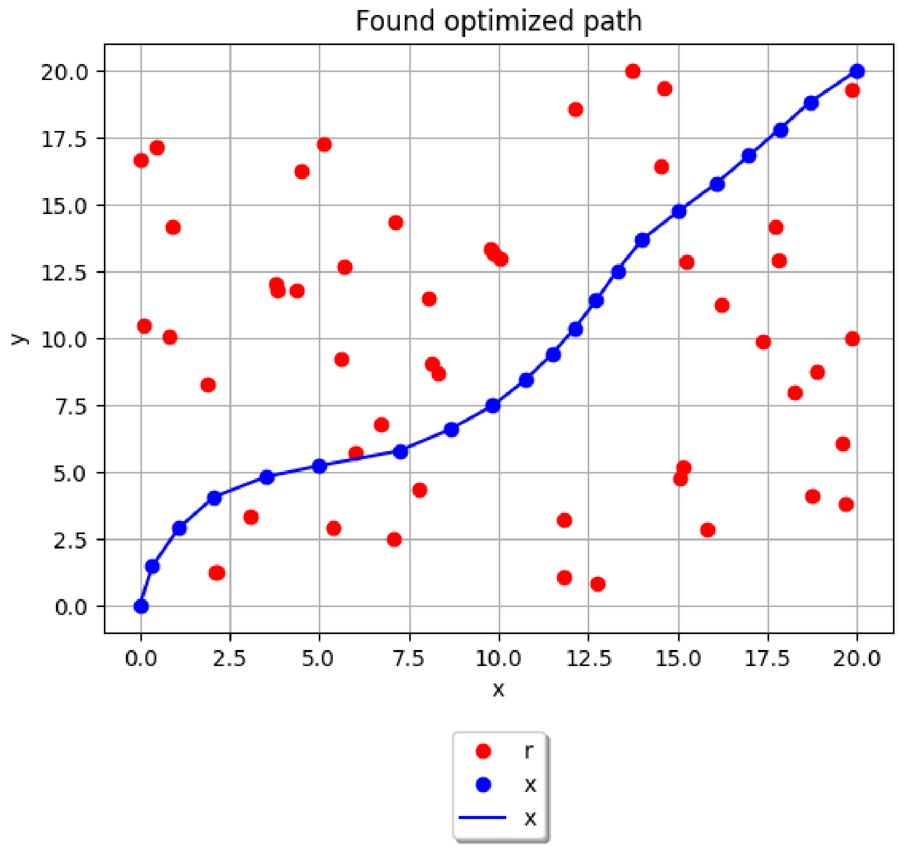



Found optimized path
20.0
17.5
15.0
12.5
10.0
7.5
5.0
2.5
0.0
y
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0
x
r
x
x


Found optimized path
y
x
20.0
17.5
15.0
12.5
10.0
7.5
5.0
2.5
0.0
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0
r
x
x

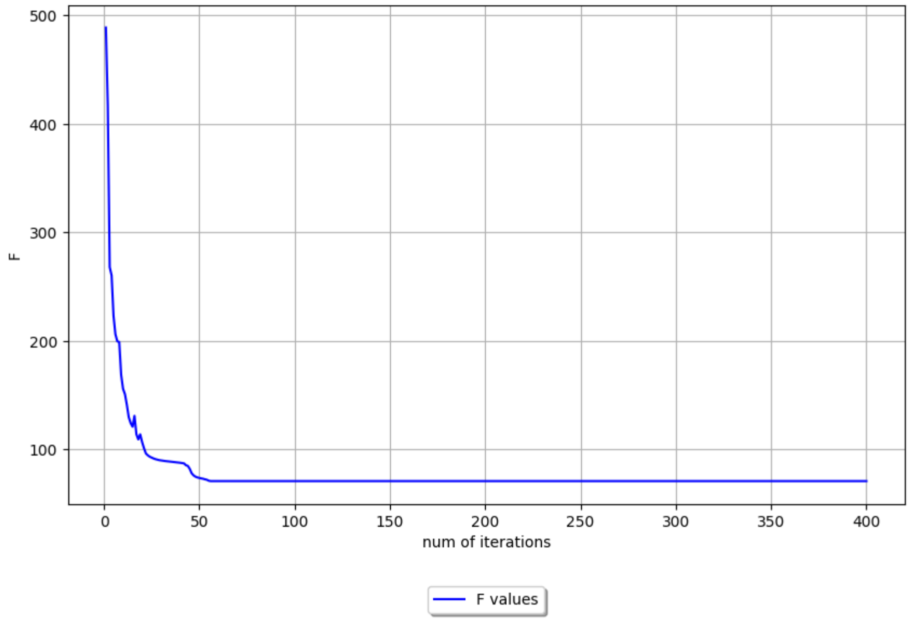


Found optimized path
20.0
17.5
15.0
12.5
10.0
7.5
5.0
2.5
0.0
y
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0
x
r
x
x



Found optimized path
y
x
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0
r
x
x

Poniżej znajduje się wykres wartości funkcji kosztu F w zależności od dotychczasowej liczby iteracji:



Wartości funkcji F bardzo szybko maleją, wydają się zbiegać do wartości ≈ 70.78.