Laboratorium 1 - Analiza błędów

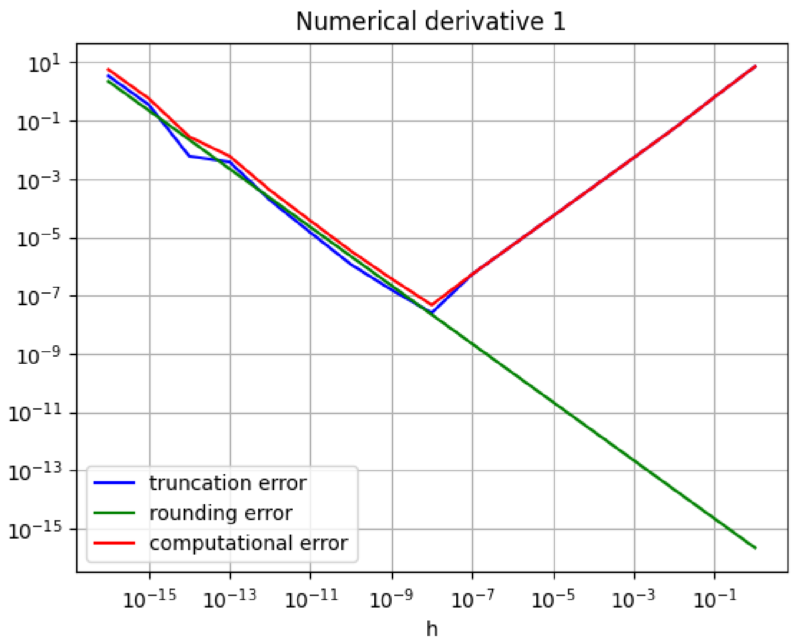
Mateusz Król

06/03/2024 r.

Zadanie 1.

Oblicz przybliżoną wartość pochodnej funkcji tan(x) dla x = 1.

Dla wzoru $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, błędy prezentują się następująco:



Wyznaczona wartość: $h_{min} = 10^{-8}$
Wartość otrzymana ze wzoru $h_{min} \approx 2 \cdot \sqrt{\epsilon/M}$, gdzie $M \approx |f''(x)|$:

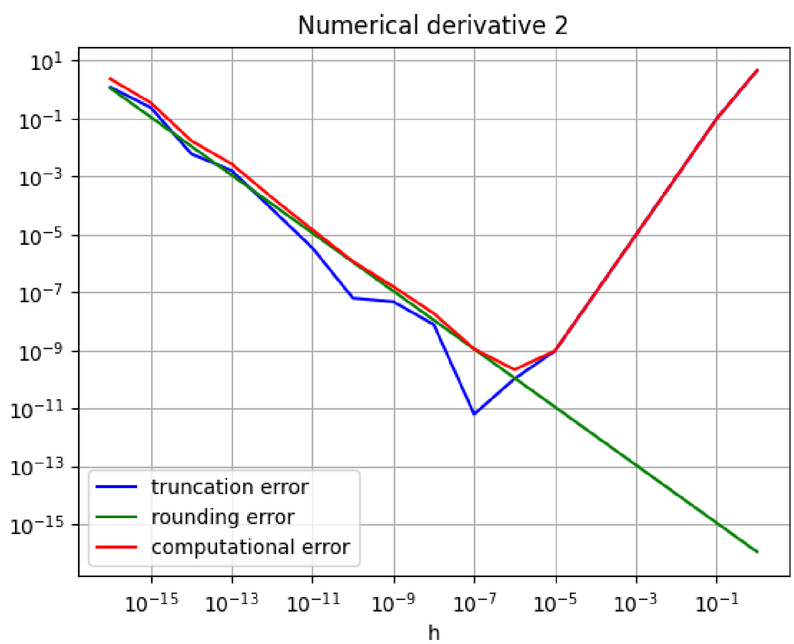
$$M \approx \left| \frac{2 \cdot sin(x)}{cos^3(x)} \right| \approx \left| \frac{2 \cdot sin(1)}{cos^3(1)} \right| \approx 10.67$$

$$h_{min} \approx 2 \cdot \sqrt{2^{-53}/10.67} \approx 6.45 \cdot 10^{-9}$$

Otrzymane wartości są tego samego rzędu wielkości.

Korzystam z $\epsilon_{mach} = 2^{-53}$*, ze względu na wykorzystanie zmiennych posiadających podwójną precyzję.*

Dla wzoru $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$, błędy prezentują się następująco:



Wyznaczona wartość: $h_{min} = 10^{-6}$
Wartość otrzymana ze wzoru $h_{min} \approx \sqrt[3]{3 \cdot \epsilon / M}$, gdzie $M \approx |f'''(x)|$:

$$M \approx \left| \frac{32 \cdot cos^4(x)}{(1 + cos(2x))^4} + \frac{16 \cdot cos^2(x) \cdot sin^2(2x)}{(1 + cos(2x))^4} \right| \approx 56.7$$

$$h_{min} \approx \sqrt[3]{3 \cdot 2^{-53} / 56.7} \approx 1.8 \cdot 10^{-6}$$

Otrzymane wartości są tego samego rzędu wielkości.

Wnioski

Z obliczeń wynika, że lepszą dokładność - mniejszą wartość błędu obliczeniowego zapewniła druga wykorzystana metoda.

Wyznaczona wartość h_{min} była bliższa wartości obliczonej na podstawie wzoru dla drugiej metody.

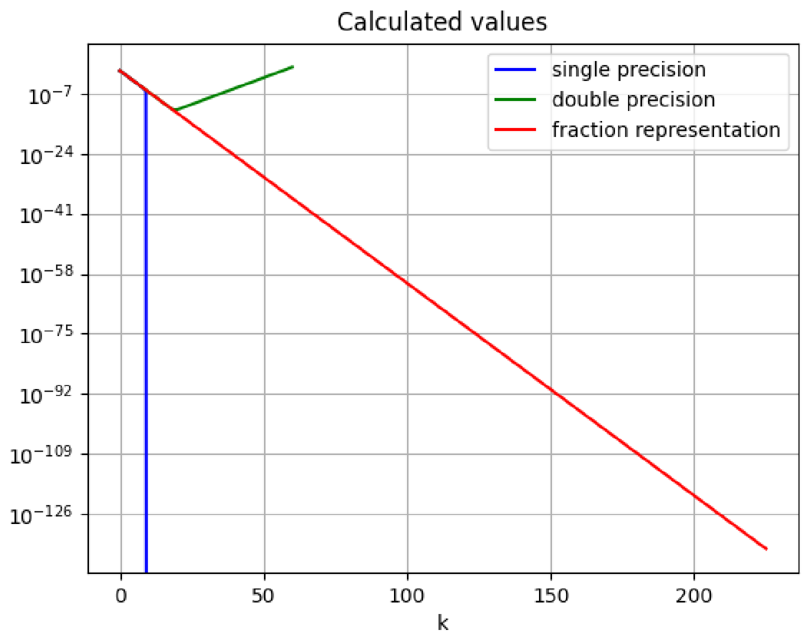
Zadanie 2.

Napisz program generujący pierwsze n wyrazów ciągu zdefiniowanego równaniem różnicowym:

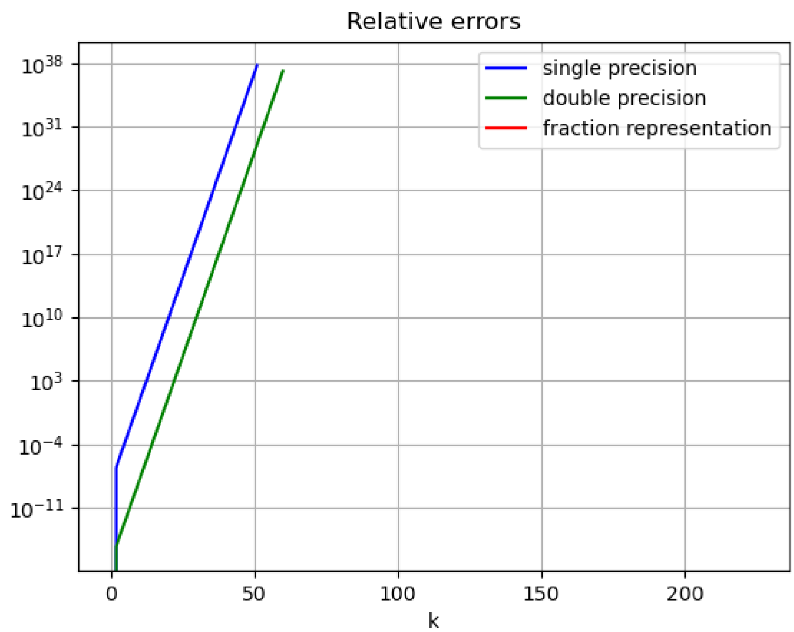
$$x_{k+1} = 2.25 \cdot x_k - 0.5 \cdot x_{k-1},$$

gdzie $x_0 = \frac{1}{3}$, $x_1 = \frac{1}{12}$**.**

Poniższy wykres przedstawia obliczone wartości kolejnych wyrazów ciągu dla reprezentacji liczb niecałkowitych korzystając z pojedynczej, podwójnej precyzji (odpowiednio *numpy.single* oraz *numpy.double* z biblioteki *NumPy*) oraz z obiektów *Fraction* z biblioteki *fractions*.



Poniższy wykres przedstawia obliczone wartości błędów względnych.



Wnioski

Reprezentując liczby niecałkowite jako ułamki proste, kolejne wyrazy ciągu zachowywały się tak samo jak wartości wyznaczone w sposób jawny. Z tego powodu nie da się odczytać błędu korzystając ze skali logarytmicznej - wynosi on 0.

Pojedyncza precyzja - 32-bit'owa wersja float'a, przeznacza 23 bity na mantysę, co daje dokładność około 7.225 miejsc po przecinku. Jak można odczytać z wykresu - wartości pokrywają się z prawdziwymi mniej więcej do $x_k = 10^{-7}$. Próba obliczania kolejnych wartości powoduje, ze względu na niedokładności, przejście na wartości ujemne, a następnie na wartość *-inf* i wreszcie na *nan*, co prowadzi do wystąpienia *overflow*

Podwójna precyzja - 64-bit'owa wersja float'a, przeznacza 53 bity na mantysę, co daje dokładność około 15.955 miejsc po przecinku. Od elementów rzędu 10^{-11} wyrazy ciągu zaczynają rosnąć, zamiast maleć zgodnie z tym jak powinien się zachowywać zadany ciąg. Wynika to z tego, że brak dokładności w jednym z obliczeń kolejnego wyrazu ciągu powoduje, że element *k+1*-szy, ma wartość większą od elementu k-tego, co powoduje zmianę kierunku monotoniczności ciągu na przeciwny.

Źródła

- `https://en.wikipedia.org/wiki/Single-precision_floating-point_format`
- `https://en.wikipedia.org/wiki/Double-precision_floating-point_format`