Laboratorium 10
Równania różniczkowe - spectral bias

Mateusz Król

06/06/2024 r.

Zadanie 1.

Dane jest równanie różniczkowe zwyczajne

$$\frac{du(x)}{dx} = cos(\omega x) \textbf{ dla } x \in \Omega,$$

gdzie:
$x, \omega, u \in \mathbb{R}$,
x to położenie,
Ω **to dziedzina, na której rozwiązujemy równanie,**
$\Omega = \{x \mid -2\pi \leq x \leq 2\pi\}$,
$u(\cdot)$ **to funkcja, której postaci szukamy.**

Warunek początkowy zdefiniowany jest następująco:

$$u(0) = 0.$$

Analityczna postać rozwiązania równania z warunkiem początkowym jest następująca:

$$u(x) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega x)$$

Rozwiąż powyższe zagadnienie początkowe. Do rozwiązania użyj sieci neuronowych PINN (ang. *Physics-informed Neural Network*) Można wykorzystać szablon w pytorch-u lub bibliotekę DeepXDE.

Zadanie 2.

Dane jest równanie różniczkowe zwyczajne

$$y' = -5y$$

z warunkiem początkowym $y(0) = 1$. Równanie rozwiązujemy numerycznie z krokiem $h = 0.5$.

Poniższa tabela przedstawia wartości czynników amplifikacji dla zadanego równania różniczkowego, dla każdej z omówionych metod.
Wartości te świadczą o numerycznej stabilności tych metod.

Method	Amplification factor
Explicit Euler	-1.5
Implicit Euler	≈ 0.286
Trapezoidal	≈ -0.111
Modified Euler	1.625
RK4	≈ 0.648

Metody stabilne numerycznie dla zadanego równania to te, dla których wartość bezwzględna z czynnika amplifikacji jest mniejsza od 1.
Są to metody: Implicit Euler, Trapezoidal, RK4.

Jawna metoda *Euler*'a jest niestabilna numerycznie dla zadanego parametru $h = 0.5$.
Wzór iteracyjny:

$$y_{n+1} = y_n + h_n \lambda y_n$$

Wartość przybliżonego rozwiązania tą metodą dla $t = 0.5$ wynosi $y = -1.5$.

Niejawna metoda *Euler*'a jest stabilna numerycznie dla zadanego parametru $h = 0.5$.
Wzór iteracyjny:

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 - h_n \lambda}$$

Wartość przybliżonego rozwiązania tą metodą dla $t = 0.5$ wynosi $y \approx 0.286$.

Zadanie 3.

Model *Kermack*'a-*McKendrick*'a przebiegu epidemii w populacji opisany jest układem równań różniczkowych:

$$S' = -\beta IS$$

$$I' = \beta IS - \gamma I$$

$$R' = \gamma I$$

, gdzie:
S reprezentuje liczbę osób zdrowych, podatnych na zainfekowanie,

I reprezentuje liczbę osób zainfekowanych i roznoszących infekcję,
R reprezentuje liczbę osób ozdrowiałych.

Parametr β reprezentuje współczynnik zakaźności (ang. *transmission rate*).
Parametr γ reprezentuje współczynnik wyzdrowień (ang. *recovery rate*).
Wartość $\frac{1}{\gamma}$ reprezentuje średni czas choroby.

Założenia modelu:

$$L_1(\theta) = \sum_{t=0}^{T} (I_t - \hat{I}_t)^2$$

$$L_2(\theta) = -\sum_{t=0}^{T} I_t \cdot \ln(\hat{I}_t) + \sum_{t=0}^{T} \hat{I}_t$$

Tabela przedstawiająca wyznaczone wartości współczynników β i γ korzystając z metody *Rungego Kutty* dla różnych funkcji kosztu (przyjmując $N = 500$):

Cost function	β	γ	$R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$
L_1	≈ 1.568	≈ 0.283	≈ 5.547
L_2	≈ 1.583	≈ 0.330	≈ 4.811