Laboratorium 8
Rozwiązywanie równań nieliniowych

Mateusz Król

07/05/2024 r.

Zadanie 1.

Dla poniższych funkcji i punktów początkowych metoda *Newton*'a zawodzi. Wyjaśnij dlaczego. Następnie znajdź pierwiastki.

$$f_1(x) = x^3 - 5x,\ x_0 = 1$$

$$f_2(x) = x^3 - 3x + 1,\ x_0 = 1$$

$$f_3(x) = 2 - x^5,\ x_0 = 0.01$$

$$f_4(x) = x^4 - 4.29x^2 - 5.29,\ x_0 = 0.8$$

Wykorzystałem funkcję *scipy.optimize.newton* z modułu *SciPy*.

Dla funkcji f_1 metoda *Newton*'a działa - zwraca prawdziwy pierwiastek ($\approx 4.7 \cdot 10^{-24} \approx 0$). W celu zwrócenia innego pierwiastka, możnaby zmienić wartość początkową na bliższą odpowiedniej wartości (np. 2).

Dla reszty funkcji metoda *Newton*'a nie działa:

Dla funkcji f_2 odpowiednim x_0 byłoby 1.5, gdyż wartość 1 jest ekstremum lokalnym.
Dla funkcji f_3 lepszym wyborem x_0 byłoby 1.1, gdyż metoda *scipy.optimize.newton*, niezależnie od przekazanej do funkcji parametru liczby iteracji, stale pozostaje w punkcie 0.01.
Innym rozwiązaniem jest przekazanie do funkcji wartości parametru *tol* o przykładowej wartośći 0.01.
Dla funkcji f_3 odpowiednim x_0 byłoby 2.0 - wartość bliżej prawdziwego pierwiastka.

Zadanie 2.

Dane jest równanie:

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$$

Każda z następujących funkcji definiuje równoważny schemat iteracyjny:

$$g_1(x) = \frac{(x^2+2)}{3}$$
$$g_2(x) = \sqrt{3x-2}$$
$$g_3(x) = 3 - \frac{2}{x}$$
$$g_4(x) = \frac{(x^2-2)}{2x-3}.$$

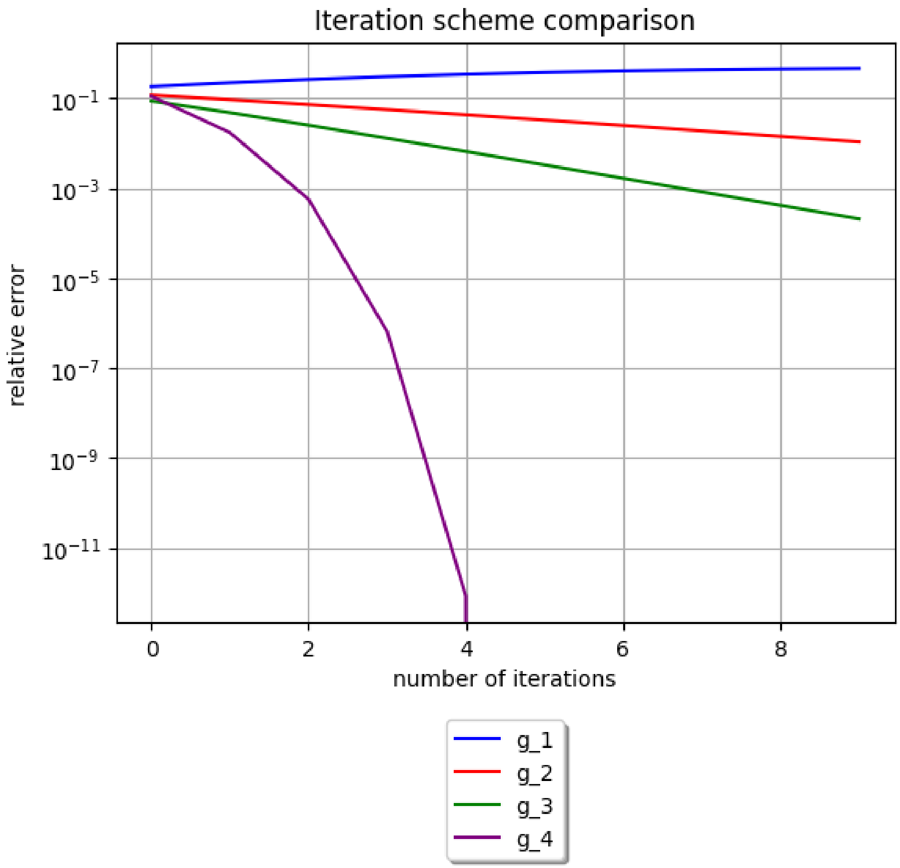
Funkcje pochodne funkcji $g_i(x)$:

$$g_1(x) = \frac{2x}{3}$$
$$g_2(x) = \frac{3}{2 \cdot \sqrt{3x-2}}$$
$$g_3(x) = \frac{2}{x^2}$$
$$g_4(x) = \frac{2(x^2-3x+2)}{(2x-3)^2}$$

Tabela z wartościami rzędów zbieżności schematów iteracyjnych odpowiadających funkcjom g_i:

Function	Order of convergence
g_1	≈ 1.33
g_2	0.75
g_3	0.5
g_4	0

Wykres przedstawiający porównanie wartości błędów względnych w zależności od liczby iteracji:



Wartości bezwzględne pochodnych funkcji: g_2, g_3, g_4 w punkcie $x_0 = 2$, wynoszą mniej od 1, z czego powinna wynikać zbieżność odpowiadających im schematów iteracyjnych, co pokrywa się z danymi odczytanymi z wykresu.

Wartość pochodnej g_4 w punkcie x_0 wynosi 0, co świadczy o conajmniej kwadratowej zbieżności schematu iteracyjnego, co zgadza się z obliczoną wartością rzędu zbieżności ≈ 1.9997.

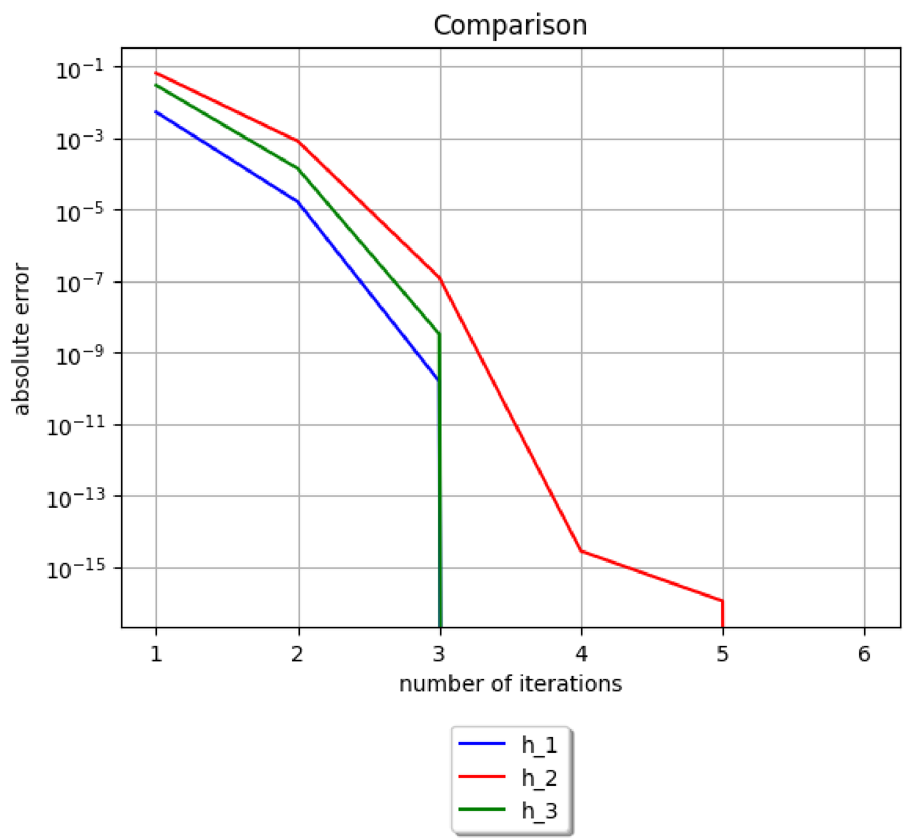
Zadanie 3.

Napisz schemat iteracji wg metody Newtona dla każdego z następujących równań nieliniowych:

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

$$e^{-x} = x$$

$$x \cdot \sin(x) = 1$$



Metoda *Newton*'a posiada kwadratowy rząd zbieżności, więc za każdą iteracją, wartość błędu dwukrotnie maleje, a co za tym idzie, dokładność na kolejnych bitach zwiększa się dwukrotnie.
Można to również wywnioskować na podstawie zamieszczonego wykresu.

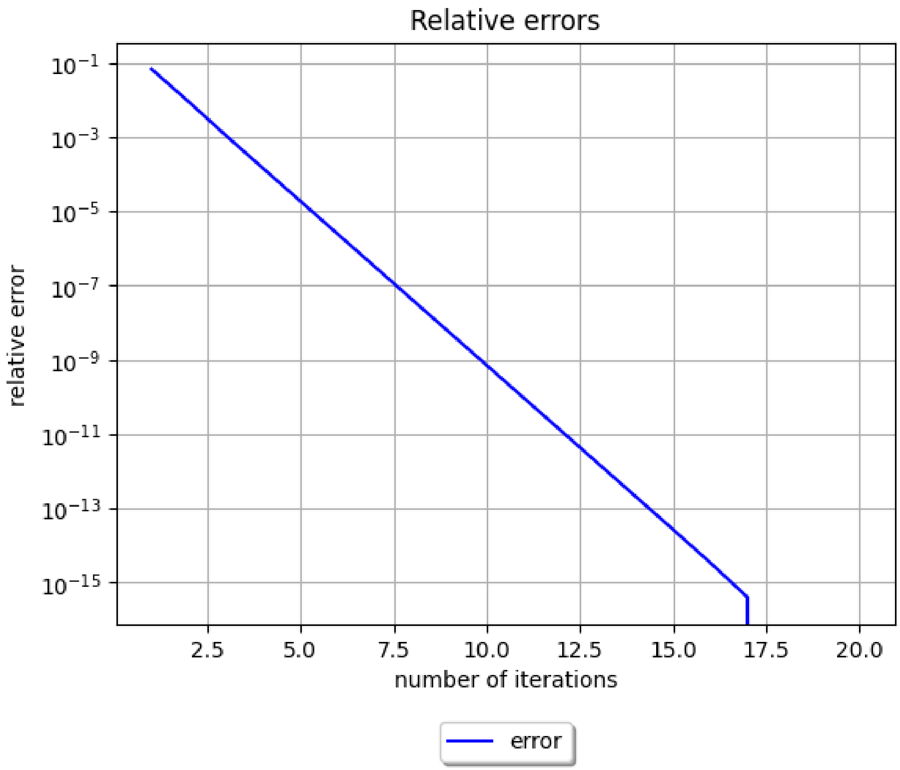
Zadanie 4.

Napisz schemat iteracji wg metody Newtona dla następującego układu równań nieliniowych:

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

$$x_1^2 - x_2 = 0$$

Wykres przedstawiający wartości błędu względnego obliczego rozwiązania układu równań, w zależności od liczby iteracji:



Relative errors
relative error
number of iterations
error