Algorytmy Macierzowe

Sprawozdanie nr 4

08.01.2025

Mateusz Król, Natalia Bratek

gr. 3

Spis treści

1. Polecenie

- Proszę wybrać ulubiony język programowania.
- Proszę wygenerować macierz o rozmiarze 2^{3k} dla k = 2, 3, 4 o strukturze opisującej topologię trójwymiarowej siatki zbudowanej z elementów sześciennych (wiersz = wierzchołek, niezerowe losowe wartości w kolumnach – sąsiadujące wierzchołki siatki)
- Proszę użyć rekurencyjną procedurę kompresji macierzy z zadania 3.
- Proszę narysować macierz skompresowaną używając rysowacza z zadania 3
- Proszę przemnożyć macierz skompresowaną przez wektor
- Proszę przemnożyć macierz skompresowaną przez samą siebie

2. Generowanie macierzy

2.1 Opis algorytmu

Algorytm generuje macierz, która reprezentuje topologię trójwymiarowej siatki zbudowanej z elementów sześciennych. Każdy wiersz odpowiada wierzchołkowi, a niezerowe wartości w kolumnach wskazują na jego sąsiadujące wierzchołki. Dla każdego punktu algorytm sprawdza czy ma sąsiadów po lewej, prawej, na górze, na dole, z przodu i z tyłu. Jeśli sąsiad istnieje, to odpowiednia komórka w macierzy zostaje wypełniona losową wartością z przedziału od 0.00000001 do 1. W rezultacie, otrzymujemy macierz, która zawiera informacje o połączeniach między elementami siatki.

2.2 Pseudokod

```
  generate_matrix(k):

     matrix = macierz wypełniona zerami o rozmiarze 2^3k x 2^3k
     a = 0.00000001
     b = 1.0
     for z od 0 do grid_size - 1:
        for y od 0 do grid_size - 1:
           for x od 0 do grid_size - 1:
              current_idx = z * 2^2k + y * 2^k+ x
              neighbors = sąsiedzi jako lista krotek:
              (x - 1, y, z), (x + 1, y, z), (x, y - 1, z), (x, y + 1, z),
(x, y, z - 1), (x, y, z + 1)
              for (nx, ny, nz):
                 if 0 <= nx < 2^k i 0 <= ny < 2^k i 0 <= nz < 2^k:
                    neighbor_idx = nz * 2^2k  + ny * 2^k + nx
                    Ustaw matrix[current_idx, neighbor_idx] na losową
wartość z przedziału (a, b)

     return matrix
```

2.3 Fragment kodu

```python
import numpy as np

def generate_matrix(k):
    grid_size = 2 ** k
    total_size = grid_size ** 3
    matrix = np.zeros((total_size, total_size), dtype=float)
    a, b = np.double(0.00000001), np.double(1.0)
    for z in range(grid_size):
        for y in range(grid_size):
            for x in range(grid_size):
                current_idx = z * grid_size * grid_size + y * grid_size +
x
                neighbors = [(x - 1, y, z), (x + 1, y, z),
                    (x, y - 1, z), (x, y + 1, z),
                    (x, y, z - 1), (x, y, z + 1)]
                for nx, ny, nz in neighbors:
                    if 0 <= nx < grid_size and 0 <= ny < grid_size and 0
```

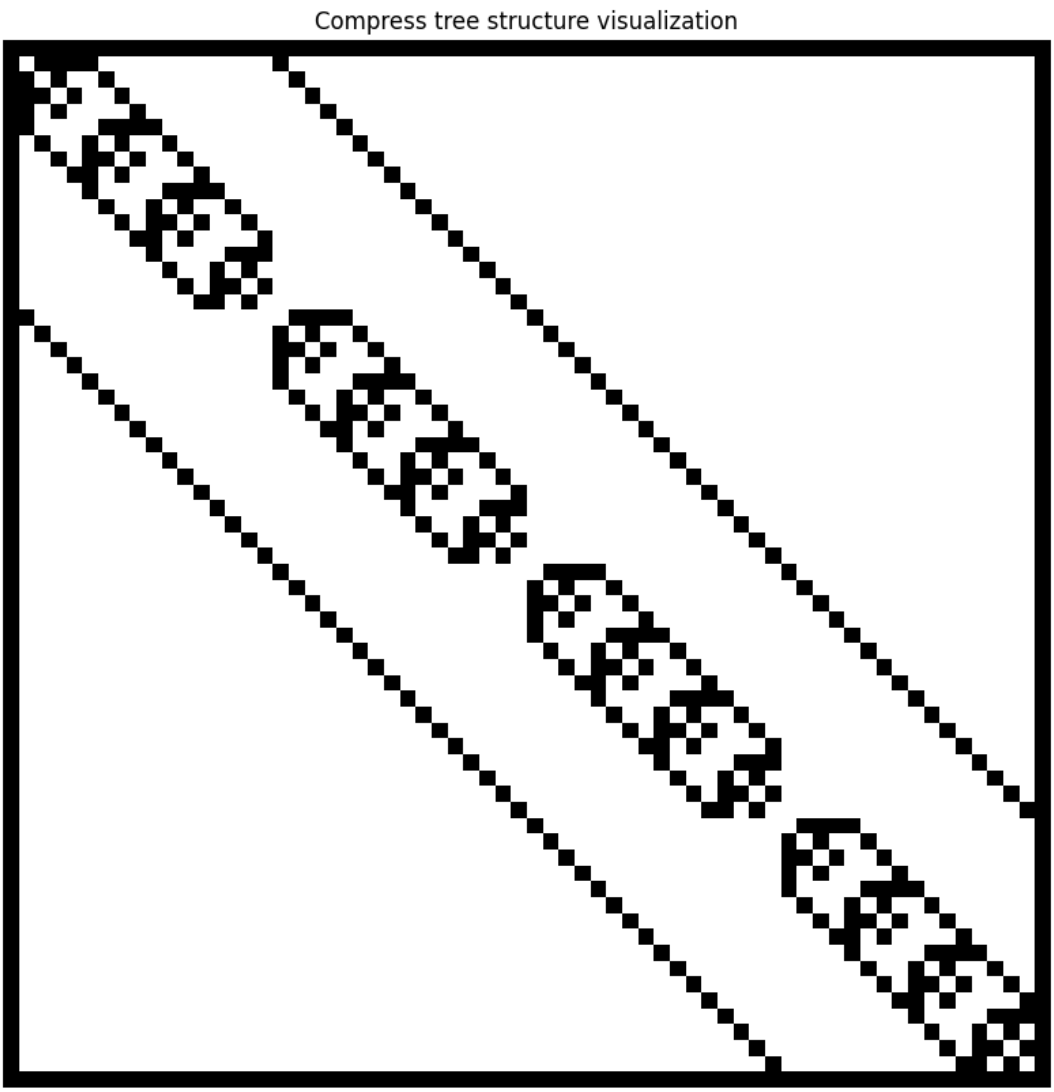
```
<= nz < grid_size:
                        neighbor_idx = nz * grid_size * grid_size + ny *
grid_size + nx
                        matrix[current_idx, neighbor_idx] = a + (b-a) *
np.random.random()
    return matrix
```

2.4 Rysunki

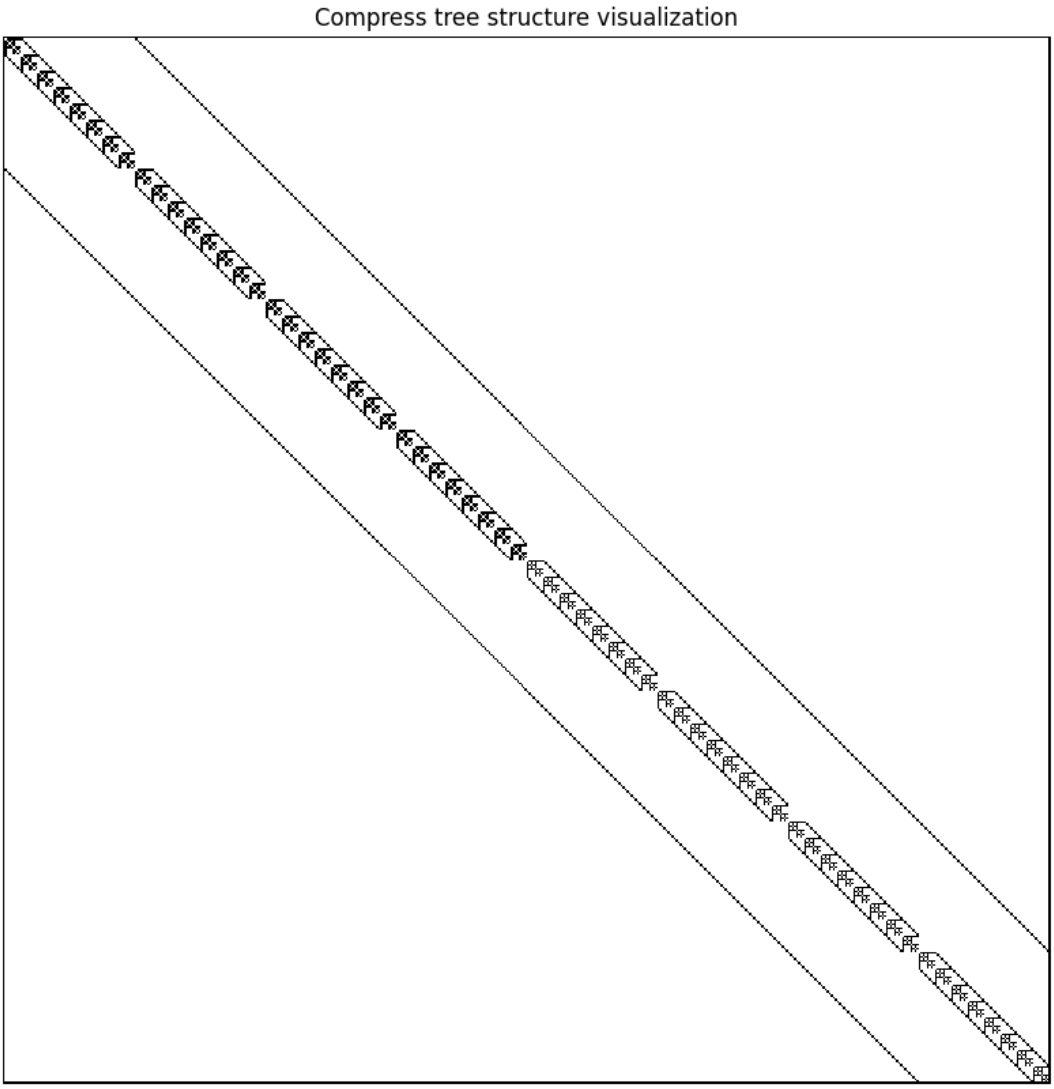
Rysunki przedstawiają reprezentację skompresowanych macierzy

- r = 1
- epsilon = 1e-7

k = 2



k = 3



k = 4

Compress tree structure visualization

3. Mnożenie macierzy skompresowanej przez wektor

3.1 Opis algorytmu

Algorytm wykonuje mnożenie macierzy przez wektor. Jeśli węzeł drzewa jest liściem i jeśli ranga liścia jest zerowa, funkcja zwraca wektor zer o wymiarach zgodnych z wektorem wejściowym X. W przeciwnym razie dokonywane jest mnożenie przez macierz, która jest zbudowana z wartości własnych (rozłożenie SVD) tego węzła. Dla węzłów z dziećmi, wektor wejściowy jest dzielony na dwie części, które są przekazywane rekurencyjnie dzieciom węzła. Wyniki z tych rekurencyjnych wywołań są sumowane i łączone i otrzymujemy ostateczny wynik mnożenia.

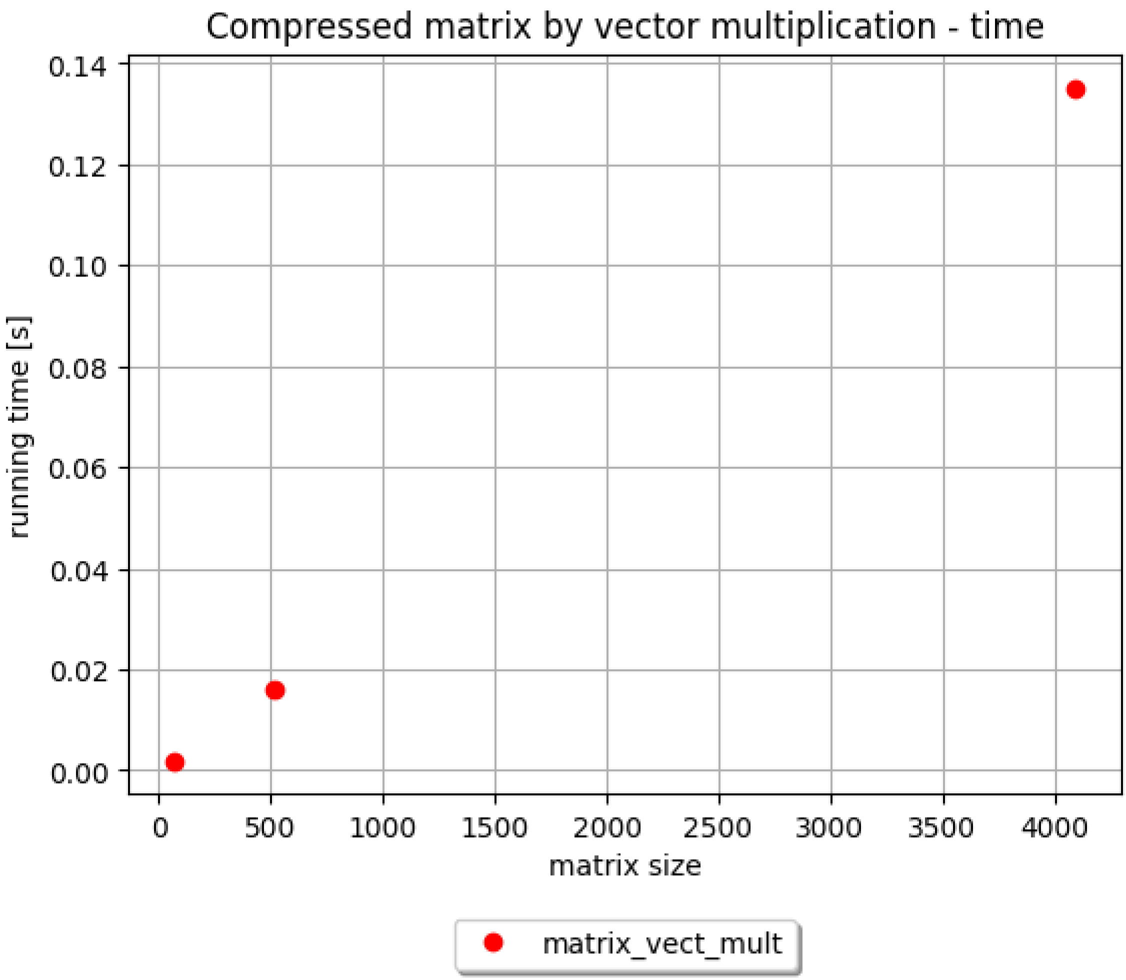
3.2 Pseudokod

```
matrix_vector_mult(v, X):

   if v nie ma dzieci:
      if v.rank jest równy 0:
         return zeros(size(A).rows)
      return v.U * v.V * X

   rows = size(X).rows
   Podziel X na dwie części
   X1 = X[1 : rows/2, *]
   X2 =  X[rows/2 + 1 : rows, *]
   Y11 = matrix_vector_mult(v.children(1), X1)
   Y12 = matrix_vector_mult(v.children(2), X2)
   Y21 = matrix_vector_mult(v.children(3), X1)
   Y22 = matrix_vector_mult(v.children(4), X2)

   Złącz wyniki Y11 + Y12 oraz Y21 + Y22 w pionie
   return wynik
```

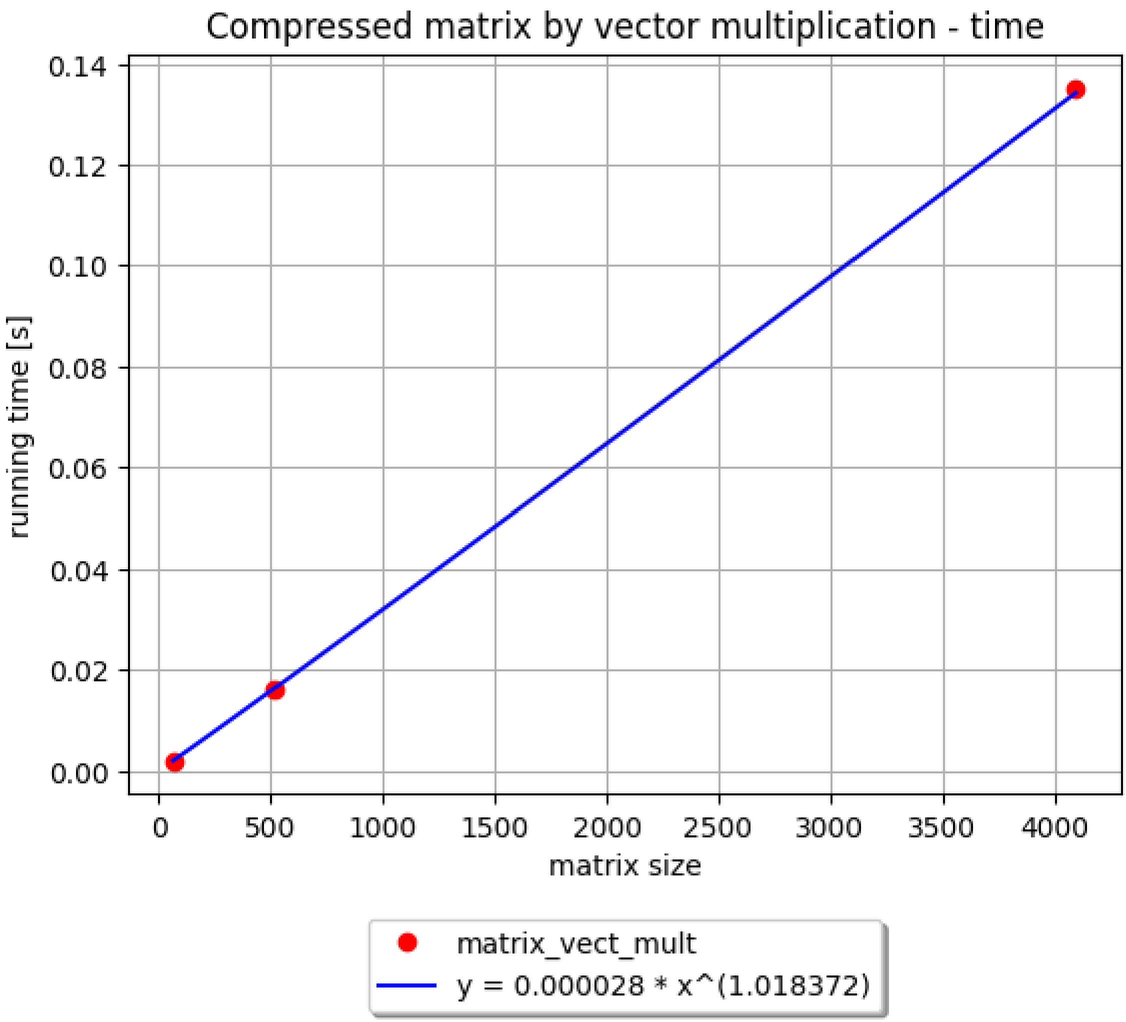
3.3 Fragment kodu

```python
import numpy as np

def matrix_vector_mult(v, X):
    if not v.children:
        if v.rank == 0:
            return np.zeros(X.shape)
        return v.U @ np.diag(v.S) @ (v.V @ X)
    rows = X.shape[0]
    X1 = X[:rows // 2, :]
    X2 = X[rows // 2:, :]
    Y11 = matrix_vector_mult(v.children[0], X1)
    Y12 = matrix_vector_mult(v.children[1], X2)
    Y21 = matrix_vector_mult(v.children[2], X1)
    Y22 = matrix_vector_mult(v.children[3], X2)

    return np.vstack((Y11 + Y12, Y21 + Y22))
```

3.4 Wykres



Compressed matrix by vector multiplication - time
running time [s]
0.14
0.12
0.10
0.08
0.06
0.04
0.02
0.00
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
4000
matrix size
matrix_vect_mult



3.5 Norma Frobeniusa

Norma została obliczona na podstawie macierzy gęstej i wektora o wartościach z przedziału (0.00000001, 1.0)

matrix size	Frobenius norm
2	0.0
4	0.0
8	1.602e-31
16	3.944e-30
32	2.682e-29
64	3.282e-28
128	1.578e-27
256	1.217e-26
512	1.349e-25

4. Mnożenie macierzy skompresowanej przez samą siebie

4.1 Opis algorytmu

Funkcja matrix_matrix_add służy do dodawania dwóch macierzy. Sprawdza, czy jedna z macierzy jest pusta, a w takim przypadku zwraca drugą macierz jako wynik. Jeśli obie macierze są liśćmi drzewa i mają rangę zero, zwraca nowy, pusty węzeł. Jeśli obie macierze są liśćmi, ale mają niezerowe rangi, wykonuje na nich dodawanie za pomocą rSVDofCompressed. Jeśli jedna z macierzy nie ma dzieci, a druga również nie ma dzieci, funkcja używa split_compressed_matrix do podzielenia tej macierzy, która nie ma dzieci, na mniejsze podmacierze i rekurencyjnie dodaje odpowiadające sobie podmacierze. Funkcja add_rec rekurencyjnie dodaje dwie macierze. Funkcja mult_rec rekurencyjnie mnoży dwie skompresowane macierze. Generuje nowe węzły, które są wynikiem mnożenia i sumowania ich poszczególnych podmacierzy. Funkcja matrix_matrix_mult realizuje mnożenie dwóch macierzy. Jeśli jedna z macierzy jest pusta, zwracana jest macierz pusta. W przypadku, gdy obie macierze są liśćmi i co najmniej jedna z nich ma rangę zero, zwracana jest również macierz pusta. Gdy obie macierze są liśćmi i mają niezerowe rangi, funkcja oblicza nowe macierze U,S i V. Jeśli macierze mają dzieci, funkcja wywołuje siebie rekurencyjnie. Gdy jedna z macierzy nie posiada dzieci, a druga posiada dzieci, funkcja używa split_compressed_matrix do podzielenia macierzy bez dzieci na mniejsze podmacierze, a następnie rekurencyjnie mnoży te podmacierze z odpowiadającymi im częściami drugiej macierzy. Funkcja rSVDofCompressed łączy dwie macierze skompresowane i stosuje zredukowaną dekompozycję wartości osobliwych, a następnie kompresuje wynikową macierz do określonej rangi.

4.2 Pseudokod

```
  add_rec(v, w):
     node = nowy węzeł CompressTree (None, v.t_min, v.t_max, v.s_min,
v.s_max)
     ustaw node.rank na v.rank
     for vc in v oraz wc in w:
        dodaj do node.children wynik matrix_matrix_add(vc, wc)



  matrix_matrix_add(v, w):

     if v.zeros:
        return w
     if w.zeros:
        return v
     if v.oraz w nie mają dzieci:
        if v.rank = 0 and w.rank = 0:
           node = nowy węzeł CompressTree (None, v.t_min, v.t_max,
v.s_min, v.s_max)
           ustaw node.zeros na true
        if v.rank != 0 and w.rank != 0:
           return rSVDofCompressed(v, w)
     if v i w mają dzieci:
        return add_rec(v, w)
     if v nie ma dzieci:
        Podziel macierz v
```

```
        u = split_compressed_matrix(v)
        Rekurencyjnie dodaj odpowiadające sobie segmenty
        return matrix_matrix_add(u, w)
     if w nie ma dzieci:
        Podziel macierz w
        u = split_compressed_matrix(w)
        Rekurencyjnie dodaj odpowiadające sobie segmenty
        return matrix_matrix_add(v, u)
     W przeciwnym przypadku:
        return wynik wywołania add_rec(w, v)

  mult_rec(v, w):
   node = nowy węzeł CompressTree(None, v.t_min, v.t_max, w.s_min,
w.s_max)
   Ustaw node.rank na v.rank
   Ustaw node.children jako tablica, gdzie każdy element jest wynikiem
dodawania wyników mnożenia odpowiednich dzieci:
       matrix_matrix_add(matrix_matrix_mult(v.children[0], w.children[0]),
matrix_matrix_mult(v.children[1], w.children[2]))
       matrix_matrix_add(matrix_matrix_mult(v.children[0], w.children[1]),
matrix_matrix_mult(v.children[1], w.children[3]))
       matrix_matrix_add(matrix_matrix_mult(v.children[2], w.children[0]),
matrix_matrix_mult(v.children[3], w.children[2]))
       matrix_matrix_add(matrix_matrix_mult(v.children[2], w.children[1]),
matrix_matrix_mult(v.children[3], w.children[3]))


  matrix_matrix_mult(v, w):
     if v.zeros lub w.zeros:
        node = nowy węzeł CompressTree (None, v.t_min, v.t_max, w.s_min,
w.s_max)
        Ustaw node.zeros na True
     if v i w nie mają dzieci:
        if v.rank = 0 lub w.rank = 0:
           node = nowy węzeł CompressTree(None, v.t_min, v.t_max, w.s_min,
w.s_max)
           Ustaw node.zeros na True
        W przeciwnym razie:
           Oblicz nowe U, S, V:
           new_U = v.U
           new_S = v.S * w.S
           new_V = (v.V * w.U) * w.V
           node = nowy węzeł CompressTree(None, v.t_min, v.t_max, w.s_min,
w.s_max)
           Ustaw liść node z new_U, new_S, new_V
           node.set_leaf(new_U, new_S, new_V)
           Ustaw node.rank na v.rank
    if v i w mają dzieci:
        return wynik rekurencyjnego wywołania mult_rec(v, w)
    if v nie ma dzieci:
        u = podzielony v za pomocą split_compressed_matrix(v)
```

```
        return wynik matrix_matrix_mult(u, w)
    if w nie ma dzieci:
         u = podzielony w za pomocą split_compressed_matrix(w)
         return wynik matrix_matrix_mult(v, u)
    W przeciwnym przypadku:
        wywołanie symetryczne
        return matrix_matrix_mult(w, v)


  rSVDofCompressed(v, w, epsilon):
      n = size(U).rows macierzy v
      k = size(V).columns macierzy v
      original_rank = v.rank
      U_stacked = połącz poziomo macierze U macierzy v i w
      V_stacked = połącz pionowo macierze V macierzy v i w
      S_stacked = połącz wartości S macierzy v i w
      node = nowy węzeł CompressTree(None, 0, n, 0, k)
      Ustaw liść dla node z U_stacked, S_stacked, V_stacked
      node.set_leaf(U_stacked, S_stacked, V_stacked)
      Dekompresuj macierz w node
      node.decompress()
      Skompresuj macierz w node do original_rank z epsilon
      node.compress(original_rank, epsilon)



  split_compressed_matrix(v):
     if v.rank = 1:
        Ustaw S_1 i S_2 na S macierzy v
        S_1 = v.S
        S_2 = v.S
     W przeciwnym razie:
        Podziel S macierzy v na dwie połowy
        S_1 = v.S[: liczba_wierszy / 2]
        S_2 = v.S[liczba_wierszy / 2 :]
      Podziel U macierzy v poziomo na dwie równe części
      U_upper = v.U[: liczba_wierszy / 2, :]
      U_lower = v.U[liczba_wierszy / 2 :, :]
      Podziel V macierzy v pionowo na dwie równe części
      V_left =  v.V[:, : liczba_kolumn / 2]
      V_right = v.V[:, liczba_kolumn / 2 :]
      node = now węzeł CompressTree(None, v.t_min, v.t_max, v.s_min,
v.s_max)
      Inicjalizuj dzieci node na [None, None, None, None]

      Utwórz i ustaw dzieci węzła node:
       node.children[0] = nowy węzeł CompressTree(None, v.t_min, v.t_min +
U_upper.rows, v.s_min, v.s_min + V_left.columns)
       Ustaw liść dla dziecka 0
       node.children[0].set_leaf(U_upper, S_1, V_left)
```

```
        node.children[1] = nowy węzeł CompressTree(None, v.t_min, v.t_min + 
U_upper.rows, v.s_min + V_left.columns, v.s_max)
        Ustaw liść dla dziecka 1
        node.children[1].set_leaf(U_upper, S_2, V_right)

        node.children[2] = nowy węzeł CompressTree(None, v.t_min + 
U_upper.rows, v.t_max, v.s_min, v.s_min + V_left.columns)
        Ustaw liść dla dziecka 2
        node.children[2].set_leaf(U_lower, S_1, V_left)

        node.children[3] = nowy węzeł CompressTree(None, v.t_min + 
U_upper.rows, v.t_max,
                     v.s_min + V_left.columns, v.s_max)
        Ustaw liść dla dziecka 3
        node.children[3].set_leaf(U_lower, S_2, V_right)
```

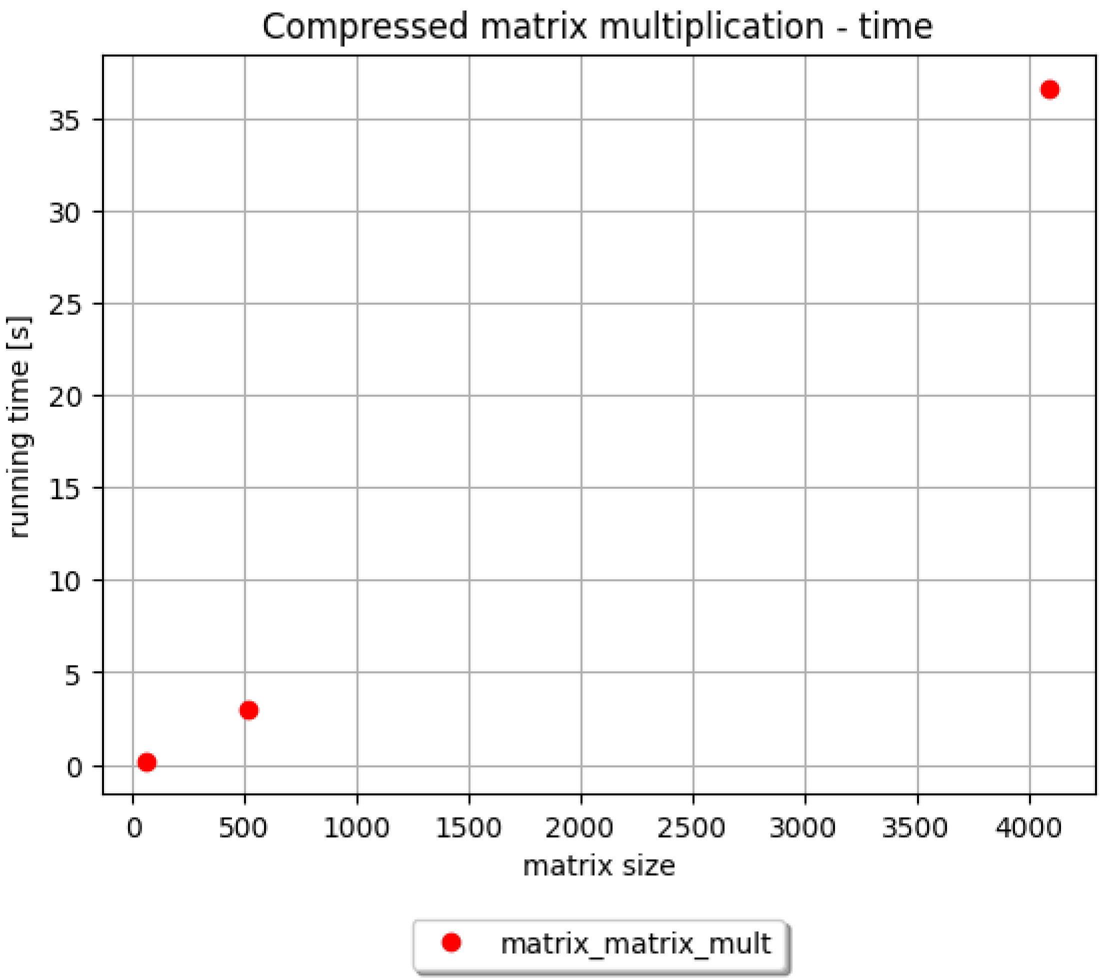
4.3 Fragmenty kodu

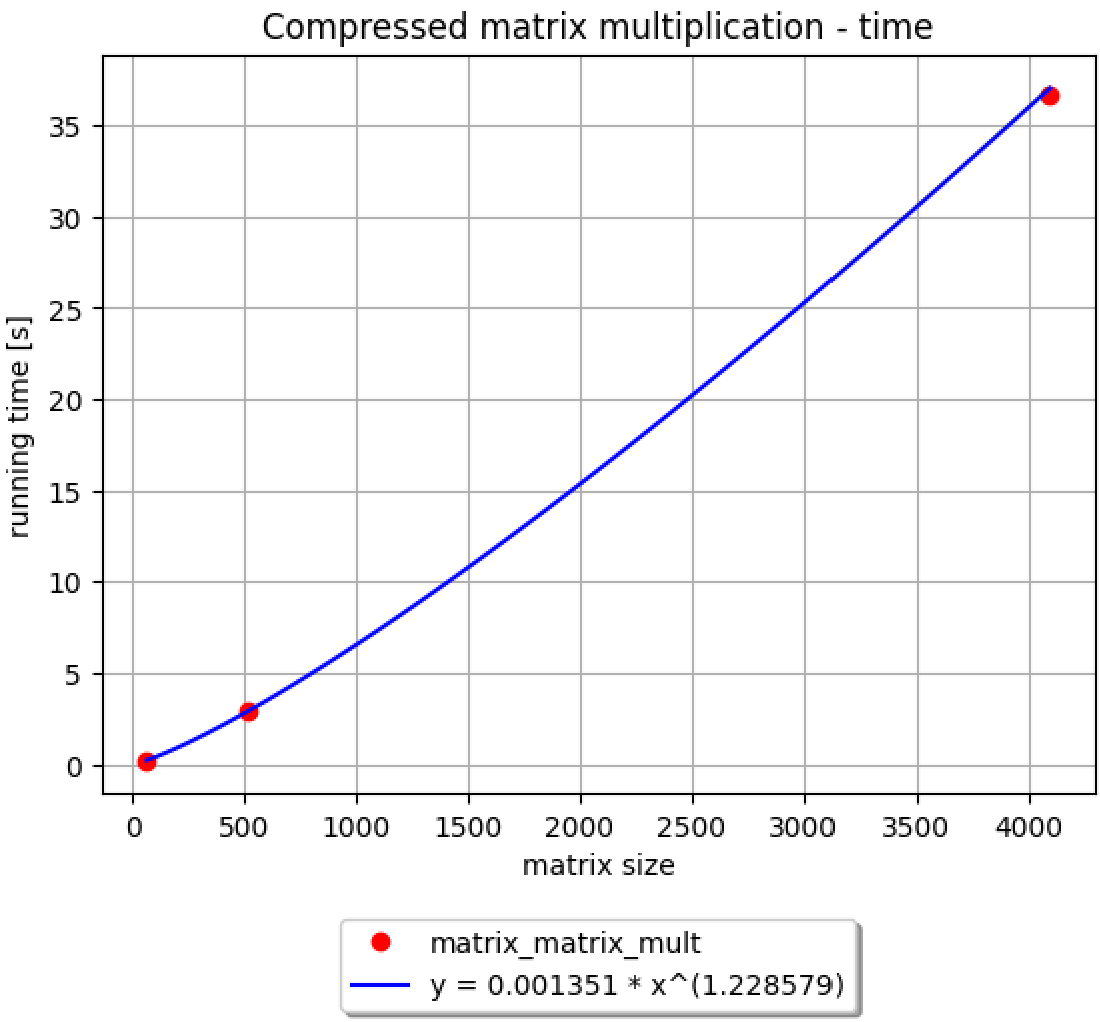
```python
import numpy as np
from src.compression.compress_tree import CompressTree

def rSVDofCompressed(v, w, epsilon=1e-7):
    n, k = v.U.shape[0], v.V.shape[1]
    original_rank = v.rank
    U_stacked = np.hstack((v.U, w.U))
    V_stacked = np.vstack((v.V, w.V))
    S_stacked = np.concatenate((v.S, w.S))
    node = CompressTree(None, 0, n, 0, k)
    node.set_leaf(U_stacked, S_stacked, V_stacked)
    node.matrix = node.decompress()
    node.compress(original_rank, epsilon)
    return node

def add_rec(v, w):
    node = CompressTree(None, v.t_min, v.t_max, v.s_min, v.s_max)
    node.rank = v.rank
    node.children = [matrix_matrix_add(vc, wc) for vc, wc in 
zip(v.children, w.children)]
    return node

def matrix_matrix_add(v, w):
    if v.zeros:
        return w
    if w.zeros:
        return v
    if not v.children and not w.children and v.rank == 0 and w.rank == 0:
        node = CompressTree(None, v.t_min, v.t_max, v.s_min, v.s_max)
        node.zeros = True
        return node
    if not v.children and not w.children and v.rank != 0 and w.rank != 0:
```

```
            return rSVDofCompressed(v, w)
        if v.children and w.children:
            return add_rec(v, w)
        if not v.children:
            return matrix_matrix_add(split_compressed_matrix(v), w)
        if not w.children:
            return matrix_matrix_add(v, split_compressed_matrix(w))
        return add_rec(v, w)

    def mult_rec(v, w):
        node = CompressTree(None, v.t_min, v.t_max, w.s_min, w.s_max)
        node.rank = v.rank
        node.children = [
            matrix_matrix_add(
                matrix_matrix_mult(v.children[0], w.children[0]),
                matrix_matrix_mult(v.children[1], w.children[2])),
            matrix_matrix_add(
                matrix_matrix_mult(v.children[0], w.children[1]),
                matrix_matrix_mult(v.children[1], w.children[3])),
            matrix_matrix_add(
                matrix_matrix_mult(v.children[2], w.children[0]),
                matrix_matrix_mult(v.children[3], w.children[2])),
            matrix_matrix_add(
                matrix_matrix_mult(v.children[2], w.children[1]),
                matrix_matrix_mult(v.children[3], w.children[3]))]
        return node

    def matrix_matrix_mult(v, w):
        if v.zeros or w.zeros:
            node = CompressTree(None, v.t_min, v.t_max, w.s_min, w.s_max)
            node.zeros = True
            return node
        if not v.children and not w.children:
            if v.rank == 0 or w.rank == 0:
                node = CompressTree(None, v.t_min, v.t_max, w.s_min, w.s_max)
                node.zeros = True
                return node
            new_U = v.U
            new_S = v.S * w.S
            new_V = (v.V @ w.U) @ w.V
            node = CompressTree(None, v.t_min, v.t_max, w.s_min, w.s_max)
            node.set_leaf(new_U, new_S, new_V)
            node.rank = v.rank
            return node
        if v.children and w.children:
            return mult_rec(v, w)
        if not v.children:
            return matrix_matrix_mult(split_compressed_matrix(v), w)
        if not w.children:
            return matrix_matrix_mult(v, split_compressed_matrix(w))
        return matrix_matrix_mult(w, v)

    def split_compressed_matrix(v) -> CompressTree:
        if v.rank == 1:
```

```
        S_1 = v.S
        S_2 = v.S
    else:
        S_1 = v.S[:v.S.shape[0] // 2]
        S_2 = v.S[v.S.shape[0] // 2:]
    U_upper = v.U[:v.U.shape[0] // 2, :]
    U_lower = v.U[v.U.shape[0] // 2:, :]
    V_left = v.V[:, :v.V.shape[1] // 2]
    V_right = v.V[:, v.V.shape[1] // 2:]
    node = CompressTree(None, v.t_min, v.t_max, v.s_min, v.s_max)
    node.rank = v.rank
    node.children = [None for _ in range(4)]
    node.children[0] = CompressTree(None, v.t_min, v.t_min +
U_upper.shape[0], v.s_min,
                        v.s_min + V_left.shape[1])
    node.children[0].rank = v.rank
    node.children[0].set_leaf(U_upper, S_1, V_left)
    node.children[1] = CompressTree(None, v.t_min, v.t_min +
U_upper.shape[0],
                        v.s_min + V_left.shape[1], v.s_max)
    node.children[1].rank = v.rank
    node.children[1].set_leaf(U_upper, S_2, V_right)
    node.children[2] = CompressTree(None, v.t_min + U_upper.shape[0],
v.t_max, v.s_min,
                        v.s_min + V_left.shape[1])
    node.children[2].rank = v.rank
    node.children[2].set_leaf(U_lower, S_1, V_left)
    node.children[3] = CompressTree(None, v.t_min + U_upper.shape[0],
v.t_max,
                        v.s_min + V_left.shape[1], v.s_max)
    node.children[3].rank = v.rank
    node.children[3].set_leaf(U_lower, S_2, V_right)
    return node
```

3.4 Wykres


Compressed matrix multiplication - time
running time [s]
0
5
10
15
20
25
30
35
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
4000
matrix size
matrix_matrix_mult



3.5 Norma Frobeniusa

Norma została obliczona na podstawie macierzy gęstych o wartościach z przedziału (0.00000001, 1.0)

matrix size	Frobenius norm
2	4.930e-32
4	6.163e-32
8	2.798e-30
16	8.761e-29
32	2.029e-27
64	5.119e-26
128	1.593e-24
256	4.656e-23

5. Wnioski

- Czas wykonania mnożenia macierzy przez wektor rośnie prawie liniowo wraz ze wzrostem rozmiaru macierzy.

- Normy Frobeniusa dla mnozenia macierzy przez wektor są bardzo niskie. To może sugerować wysoką dokładność algorytmu.
- Czas wykonania mnożenia macierzy przez samą siebie rośnie nieliniowo
- Normy Frobeniusa dla mnożenia macierzy przez samą siebie są dalej bardzo niskie dla różnych rozmiarów macierzy.