Algorytmy Macierzowe

Sprawozdanie nr 2

06.11.2024

Mateusz Król, Natalia Bratek

gr. 3

Spis treści

1. Polecenie

Proszę wybrać ulubiony język programowania, wygenerować macierze losowe o wartościach z przedziału otwartego (0.00000001, 1.0) i zaimplementować:

- Rekurencyjne odwracanie macierzy
- Rekurencyjna eliminacja Gaussa
- Rekurencyjna LU faktoryzacja

- Rekurencyjne liczenie wyznacznika

Proszę zliczać liczbę operacji zmiennoprzecinkowych (+-*/ liczb) wykonywanych podczas mnożenia macierzy.

2. Rekurencyjne odwracanie macierzy

2.1 Opis algorytmu

Rekurencyjne odwracanie macierzy polega na podzieleniu macierzy A na 4 podmacierze A11, A12, A21, A22 i wyznaczeniu odwrotności macierzy A11. Kolejnym krokiem jest obliczenie tzw. macierzy *Schura* S22, która także jest odwracana rekurencyjnie. Wykorzystując algorytm Bineta z poprzedniego laboratorium, wykonujemy mnożenia na poszczególnych podmacierzach, aby uzyskać ostateczne bloki odwrotności: B11, B12, B21 oraz B22. Na koniec wszystkie bloki są składane w jedną macierz wynikową, która stanowi odwrotność macierzy A.

2.2 Pseudokod

```
inverse(matrix)
   Jeżeli matrix ma rozmiar 1
      zwróć 1/matrix

   Podziel matrix na bloki A11, A12, A21, A22

   Rekurencyjnie wywołaj inverse na A11
          A11_inv = inverse(A11)
   Oblicz pomocniczą macierz  S22
          S22 = A22 − (A21 ∗ A11_inv ∗ A12)
   Rekurencyjnie oblicz odwrotność macierzy S22
         S22_inv = inverse(S22)
   Oblicz bloki B11, B12, B21, B22
          B11 = A11_inv + (A11_inv ∗ A12 ∗ S22_inv ∗ A21 ∗ A11_inv)
          B12 = −A11_inv ∗ A12 ∗ S22_inv
          B21 = −S22_inv ∗ A21 ∗ A11_inv
          B22 = S22_inv
   Zwróć połączone bloki B11, B12, B21, B22
```

2.3 Fragmenty kodu

```python
def __rec_inverse(self, A):
    if A.shape[0] == 1:
        return self.calc.inverse_one_by_one_matrix(A)

    A11, A12, A21, A22 = self.calc.split_into_block_matrices(A)

    A11_inv = self.__rec_inverse(A11)

    A11_inv_A12 = self.binet.mul(A11_inv, A12)
    A21_A11_inv = self.binet.mul(A21, A11_inv)
    S = self.calc.subtract(A22, self.binet.mul(A21_A11_inv, A12))

    S_inv = self.__rec_inverse(S)

    B11 = self.calc.add(A11_inv, self.binet.mul(self.binet.mul(A11_inv_A12, S_inv),
A21_A11_inv))
    B12 = self.calc.negate(self.binet.mul(A11_inv_A12, S_inv))
    B21 = self.calc.negate(self.binet.mul(S_inv, A21_A11_inv))
    B22 = S_inv

    return self.calc.connect_block_matrices(B11, B12, B21, B22)
```

```python
def assert_matrix_inversion_is_correct(matrix, inverse_matrix):
    epsilon = 1e-9
    n = matrix.shape[0]
    expected_inverse_matrix = scipy.linalg.inv(matrix)
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            assert abs(expected_inverse_matrix[i, j] - inverse_matrix[i, j]) < epsilon,
f"Matrix inversion wasn't successful: expected_inverse_matrix[{i},{j}] =
{expected_inverse_matrix[i,j]} != inverse_matrix[{i},{j}] = {inverse_matrix[i,j]}"
    print("Matrix inversion was successful!")
```

3. Eliminacja Gaussa

3.1 Opis algorytmu

Rekurencyjna eliminacja *Gaussa* rozwiązuje układ równań liniowych, dzieląc macierz A na mniejsze bloki i upraszczając układ przez eliminację. W każdym kroku wykonuje się faktoryzację LU dla bloku A11, a następnie oblicza się macierz *Schura* S, która zawiera zaktualizowane elementy pozostałe po eliminacji. Proces powtarzany jest rekurencyjnie dla S, aż cały układ zostanie sprowadzony do postaci trójkątnej.

3.2 Pseudokod

```
Gauss(A, b)
    Jeżeli matrix ma rozmiar 1
        Zwróć A, b

    Podziel macierz A na bloki A11, A12, A21, A22
    Podziel wektor b na b1 i b2

    Wykonaj faktoryzację LU dla bloku A11
    L11, U11 = lu(A11)
    Oblicz odwrotności L11 i U11
        L11_inv = inverse(L11)
        U11_inv = inverse(U11)
    Oblicz macierz S
        S = A22 - (A21 * U11_inv * L11_inv * A12)
    Wykonaj faktoryzację LU macierzy S i oblicz odwrotność L:
        L_S, U_S = self.lu.lu(S)
        L_S_inv = self.inv.inverse(L_S)
    Zaktualizuj wektory b1, b2
    b1_new = L11_inv * b_1
        b2_new = L_S_inv*b2 - L_S_inv*(A21 * U11_inv * L11_inv * b1)
    Zaktualizuj bloki macierzy A
        A11_new = U11
        A12_new  = L11_inv * A12
        A21_new = macierz_zerowa o odpowiednich wymiarach

    Rekurencyjne wywołanie dla zredukowanej macierzy S i zaktualizowanego wektora b_2
        A22_new, b2_new = gauss(U_S, b2_new)

    Połącz bloki macierzy A i wektora b
        A_new =(A11_new, A12_new, A21_new, A22_new)
        b_new = (b1_new, b2_new)

    Zwróć A_new, b_new
```

3.3 Fragmenty kodu

```
def __rec(self, A, b):
    n = len(A)
    if n == 1:
        return A, b

    n_half = n // 2
    A_11, A_12, A_21, A_22 = self.calc.split_into_block_matrices(A)
    b_1, b_2 = self.calc.split_into_block_vectors(b)

    L_11, U_11 = self.lu.lu(A_11)

    L_11_inv = self.inv.inverse(L_11)
    U_11_inv = self.inv.inverse(U_11)

    tmp = self.mul(self.mul(A_21, U_11_inv), L_11_inv)
    S = self.calc.subtract(A_22, self.mul(tmp, A_12))

    L_S, U_S = self.lu.lu(S)
    L_S_inv = self.inv.inverse(L_S)

    b_1_new = self.mul(L_11_inv, b_1)
    b_2_new = self.calc.subtract(self.mul(L_S_inv, b_2), self.mul(L_S_inv, self.mul(tmp,
b_1)))

    A_11_new = U_11
    A_12_new = self.mul(L_11_inv, A_12)
    A_21_new = np.zeros((n-n_half, n_half))
    A_22_new, b_2_new = self.__rec(U_S, b_2_new)

    A_new = self.calc.connect_block_matrices(A_11_new, A_12_new, A_21_new, A_22_new)
    b_new = self.calc.connect_block_vectors(b_1_new, b_2_new)

    return A_new, b_new

def assert_gauss_elimination_is_correct(expected_A, expected_b, A, b):
    epsilon = 1e-9
    n = len(A)
    expected_x = np.linalg.solve(expected_A, expected_b)
    x = np.linalg.solve(A, b)
    for i in range(n):
        for j in range(i-1, -1, -1):
            assert abs(A[i, j]) < epsilon, f"Error: A[{i}, {j}] = {A[i, j]} != 0"
        assert abs(x[i, 0] - expected_x[i, 0]) < epsilon, f"Error: x[{i}, 0] = {x[i, 0]}
!= expected_x[{i}, 0] = {expected_x[i, 0]}"
    print("Success!")
```

4. LU Faktoryzacja

4.1 Opis algorytmu

Rekurencyjny algorytm LU faktoryzacji dzieli macierz A na mniejsze bloki i rekursywnie oblicza macierze dolną L i górną U, tak aby A = LU. Wykorzystamy algorytm Bineta do mnożenia macierzy oraz rekurencyjne odwracanie macierzy.

4.2 Pseudokod

```
LU(matrix)
   Jeżeli matrix ma rozmiar 1
```

```
        zwróć macierz jednostkową oraz matrix

     Podziel matrix na bloki A11, A12, A21, A22

     Oblicz L11 i U11 przez rekurencyjne wywołanie LU(A11)
        L11, U11 = LU(A11)
     Oblicz odwrotność U11 i L11
        U11_inv = inverse(U11)
        L11_inv = inverse (L11)
     Oblicz L21 oraz U12
        L21 = A21* U11_inv
        U12 = L11_inv * A12
     Oblicz pomocniczą macierz
        S = A22 -  L21 * U12
     Wykonaj rekurencyjną faktoryzację LU dla S
        Ls, Us = LU(S)
     Połącz bloki dla macierzy U i L:
        L = (L11, macierz zerowa o rozmiarze U12xL11, L21, Ls)
        U = (U11, U12, macierz zerowa o rozmiarze L21xU11, Us)

  Zwróć L, U
```

4.3 Fragmenty kodu

```python
def lu_factorization(self, A):
    n = len(A)
    if n == 1:
        L = np.array([[1]])
        U = np.array([[A[0, 0]]])
        return L, U

    A11, A12, A21, A22 = self.calc.split_into_block_matrices(A)

    L11, U11 = self.lu_factorization(A11)

    L21 = self.mul(A21, self.inversion.inverse(U11))
    U12 = self.mul(self.inversion.inverse(L11), A12)

    S = self.calc.subtract(A22, self.mul(L21, U12))

    L22, U22 = self.lu_factorization(S)

    L = self.calc.connect_block_matrices(L11, np.zeros_like(U12), L21, L22)
    U = self.calc.connect_block_matrices(U11, U12, np.zeros_like(L21), U22)

    return L, U

def assert_lu_factorization_is_correct(matrix, L, U):
    epsilon = 1e-9
    n = matrix.shape[0]
    expected = L @ U
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            assert abs(expected[i, j] - matrix[i, j]) < epsilon, f"LU factorization
wasn't successful: expected[{i},{j}] = {expected[i,j]} != matrix[{i},{j}] =
{matrix[i,j]}"
    print("LU factorization was successful!")
```

5. Obliczanie wyznacznika

5.1 Opis algorytmu

Aby obliczyć wyznacznik macierzy A za pomocą faktoryzacji LU, rozkładamy macierz A na macierze trójkątną dolną L i trójkątną górną U. Następnie wykonujemy mnożenie elementów na przekątnej macierzy U.

5.2 Pseudokod

```
det(A)
   Wykonaj faktoryzację LU macierzy A
      L, U = det(A)
   Zwróć iloczyn elementów na przekątnej U
```

5.3 Fragmenty kodu

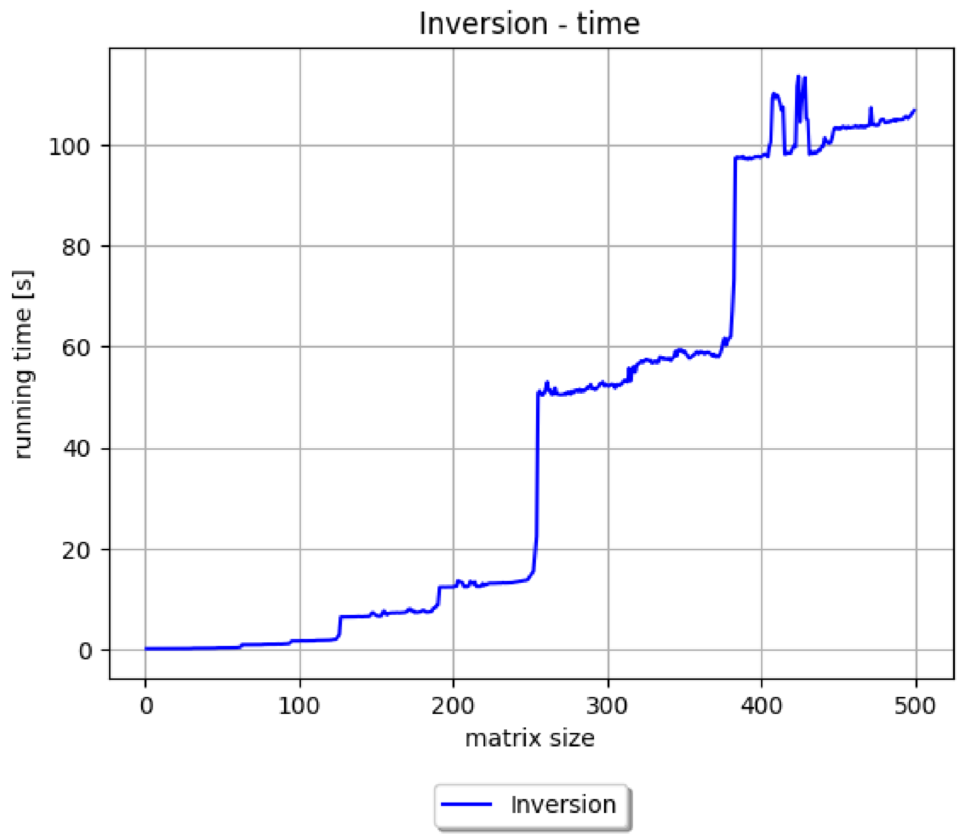
```python
def __calculate_determinant(self, A):
    n = A.shape[0]
    if n == 1:
        return A[0, 0]
    _, U = self.lu.lu(A)
    U_diag = np.diagonal(U).tolist()
    k = n
    U_1 = U_diag
    U_2 = []
    while k > 1:
        u_1 = U_1.pop(0)
        u_2 = U_1.pop(-1)
        k -= 2
        U_2.append(u_1 * u_2)
        if k == 1:
            U_2.append(U_1[0])
        if k <= 1 and len(U_2) != 1:
            U_1 = U_2
            U_2 = []
            k = len(U_1)
    return U_2[0]

def assert_determinant_is_correct(A, det):
    epsilon = 1e-3
    assert abs(det - np.linalg.det(A)) < epsilon, f"Error: det = {det} != expected_det = 
{np.linalg.det(A)}"
    print("Success!")
```

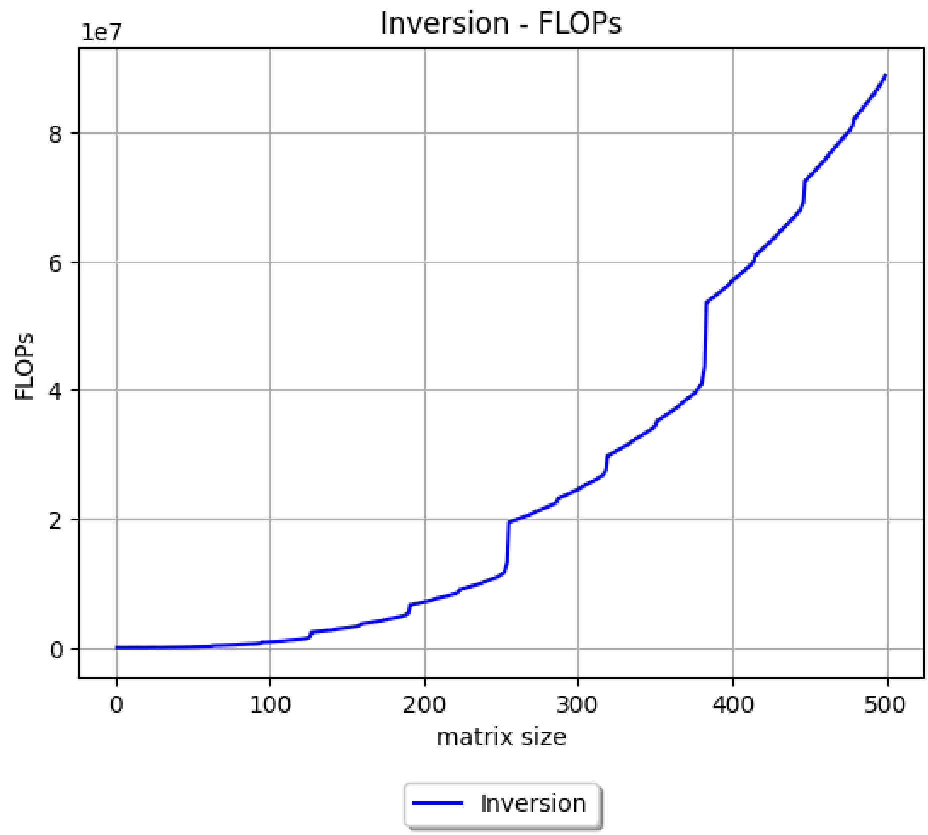
6. Wykresy

6.1 Wykres dla rekurencyjnego odwracania macierzy

Wykres czasu wykonania algorytmu w zależności od rozmiaru macierzy:

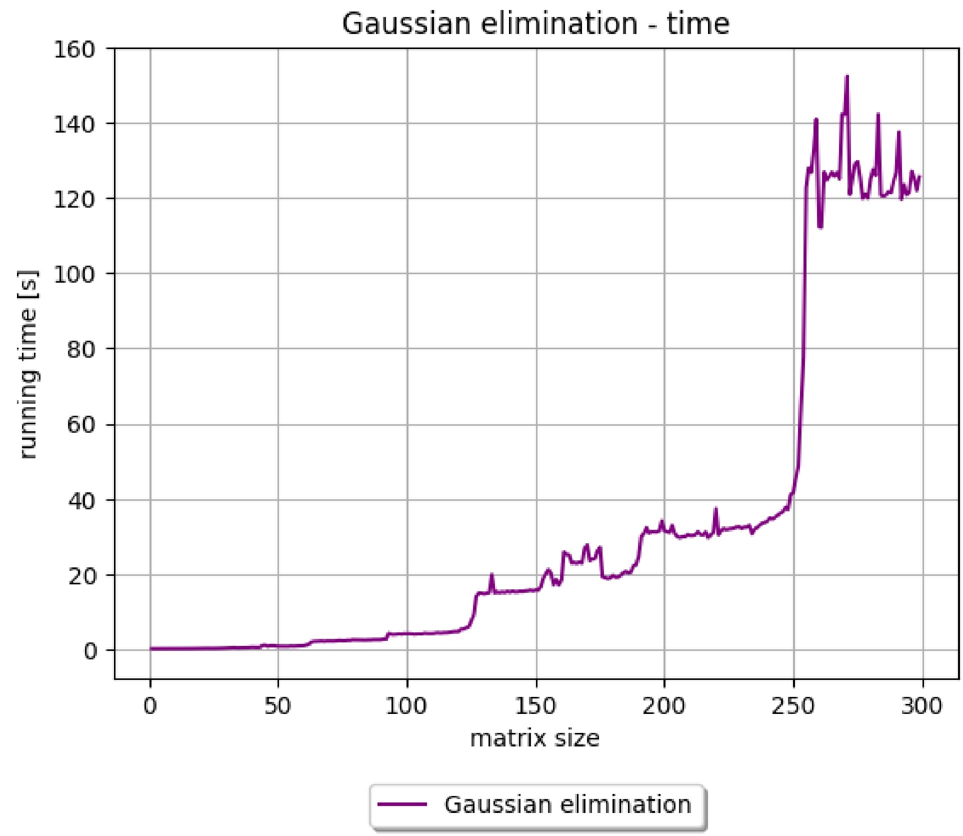


Wykres liczby operacji zmiennoprzecinkowych w zależności od rozmiaru macierzy:

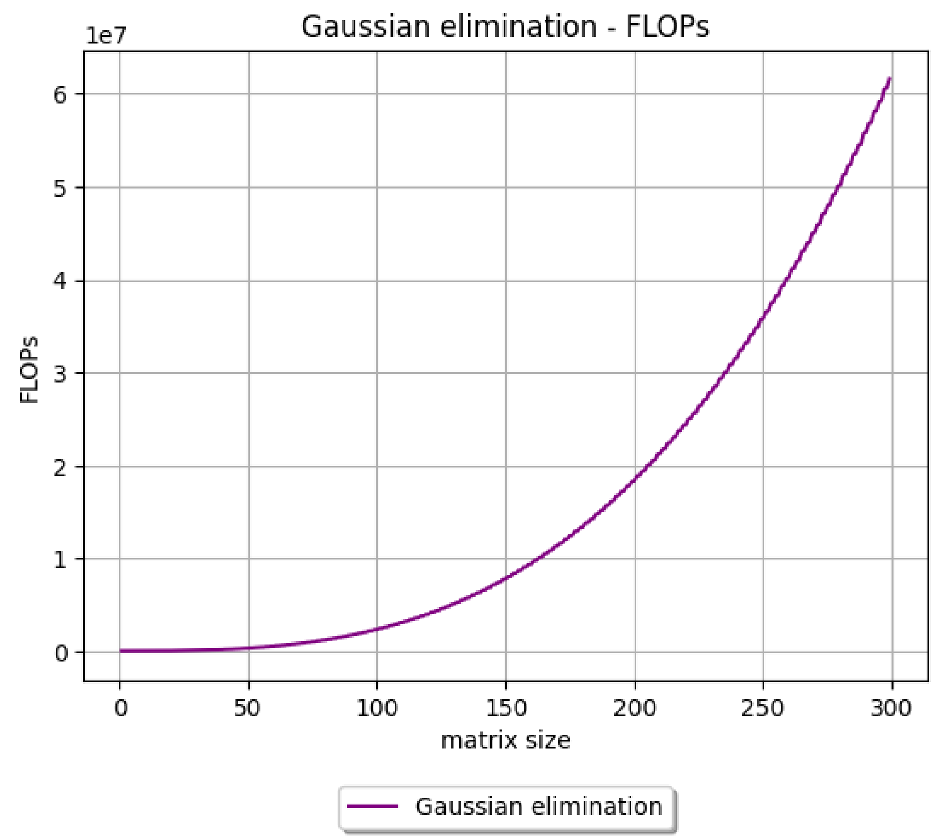


6.2 Wykresy dla rekurencyjnej eliminacji Gaussa

Wykres czasu wykonania algorytmu w zależności od rozmiaru macierzy:

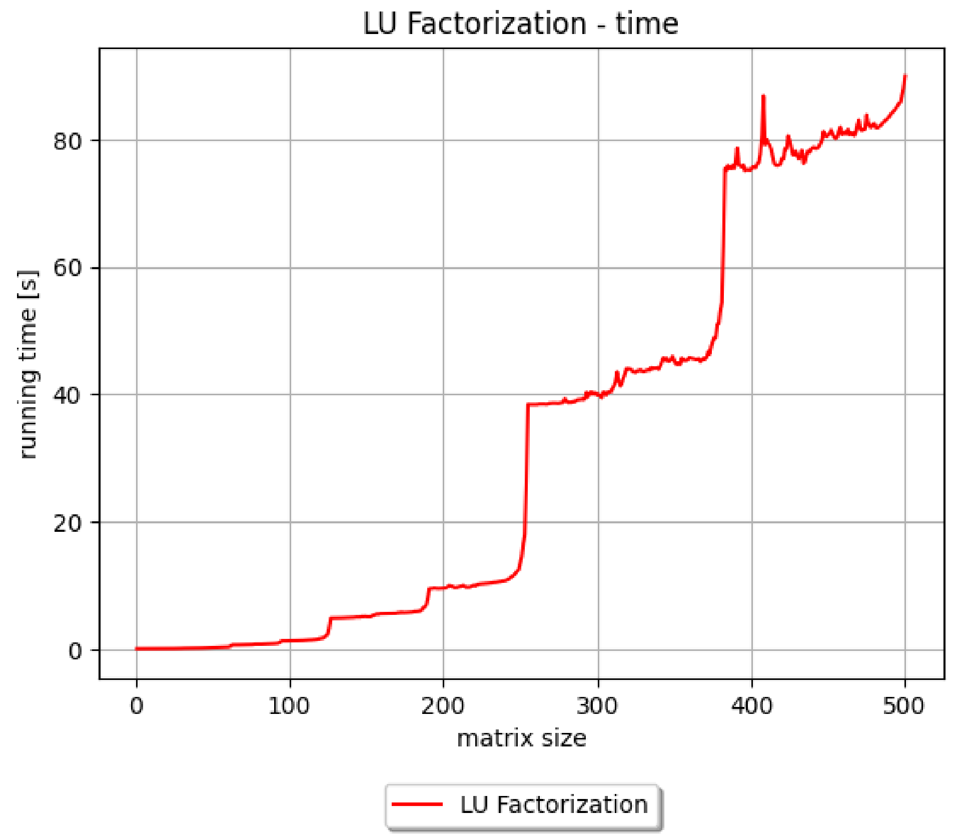


Wykres liczby operacji zmiennoprzecinkowych w zależności od rozmiaru macierzy:

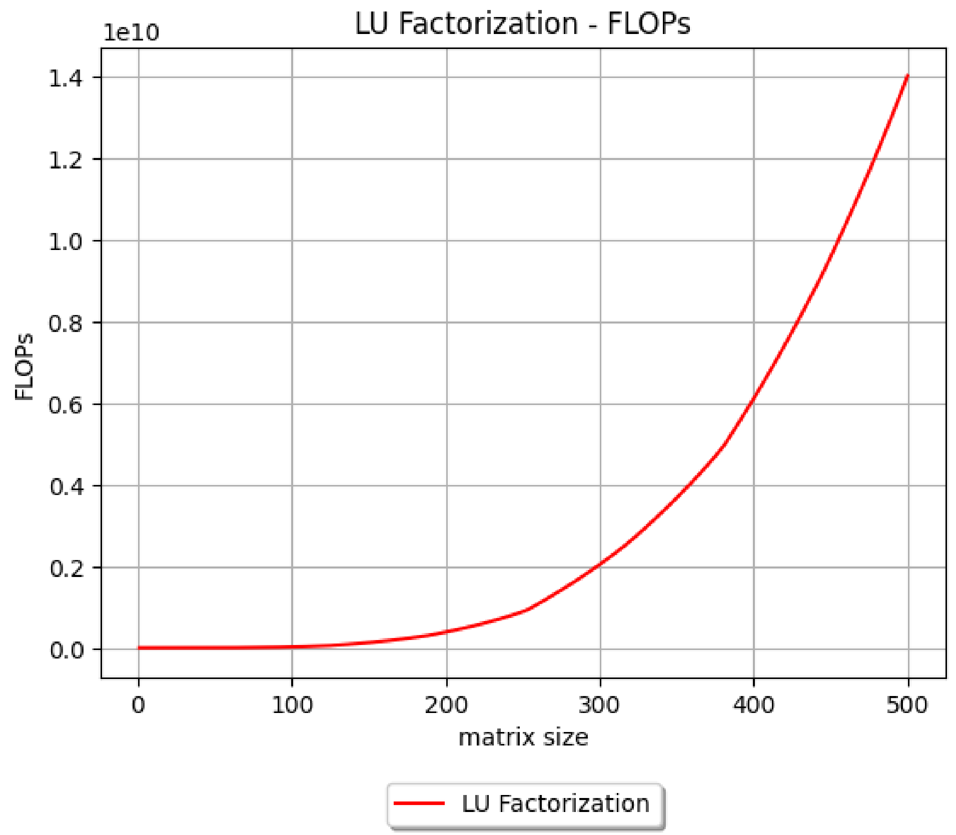


6.3 Wykresy dla rekurencyjnej LU faktoryzacji

Wykres czasu wykonania algorytmu w zależności od rozmiaru macierzy:

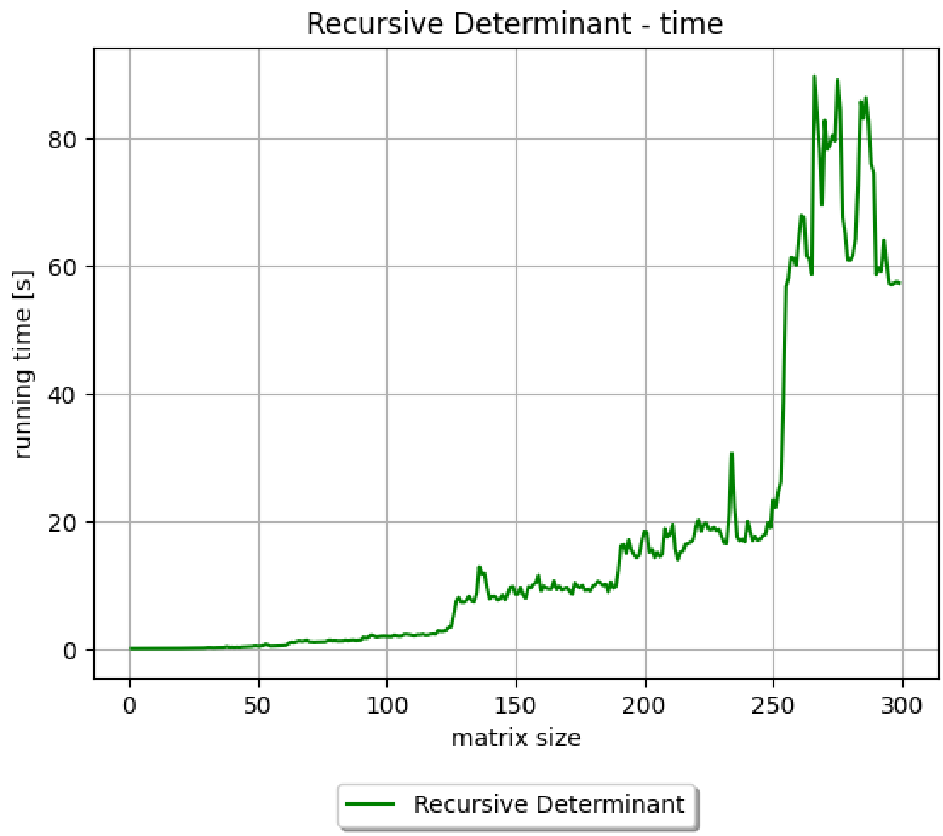


Wykres liczby operacji zmiennoprzecinkowych w zależności od rozmiaru macierzy:

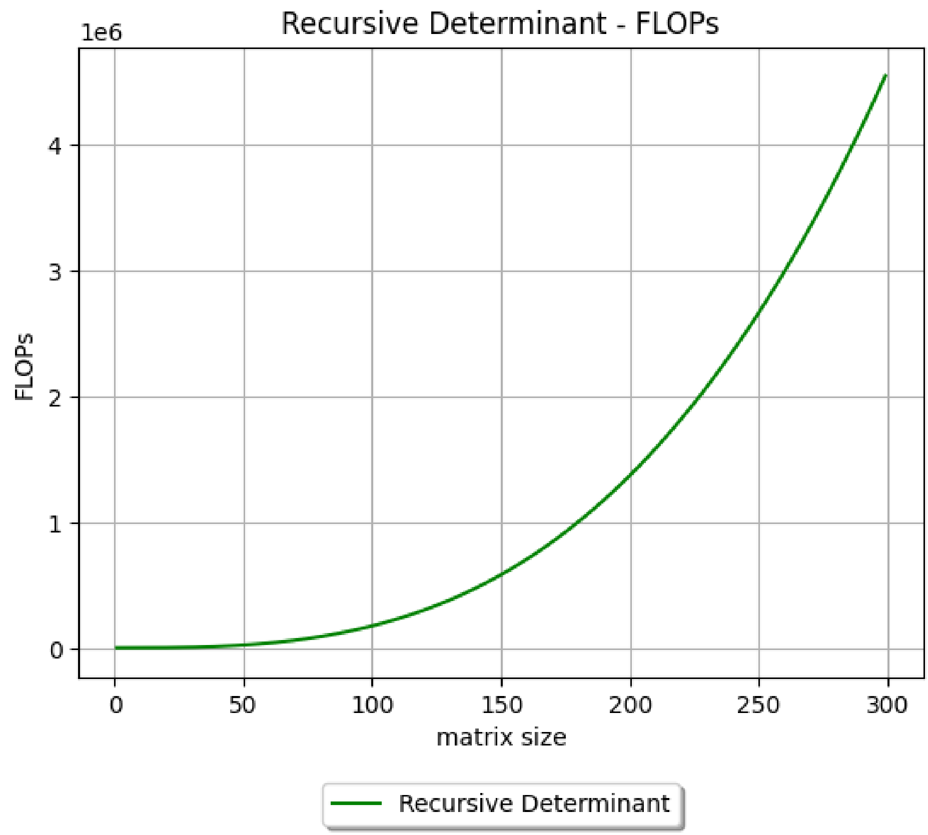


6.4 Wykres dla rekurencyjnego obliczania wyznacznika macierzy

Wykres czasu wykonania algorytmu w zależności od rozmiaru macierzy:



Wykres liczby operacji zmiennoprzecinkowych w zależności od rozmiaru macierzy:



7. Szacowanie złożoności obliczeniowej

7.1 Algorytm rekurencyjnego odwracania macierzy

Algorytm wykonuje dwa rekurencyjne wywołania dla macierzy o rozmiarze o połowe mniejszym, 7 rekurencyjnych mnożeń macierzy i 4 dodawania/odejmowania/negacje macierzy. $T(n) = 2 * T(n/2) + O(n^3) \Rightarrow T(n) = O(n^3)$

7.2 Eliminacja Gaussa

Algorytm wykonuje jedno rekurencyjne wywołanie dla macierzy A i b o rozmiarze o połowe mniejszym, dwa wywołania rekurencyjnego algorytmu faktoryzacji LU, trzy wywołania rekurencyjnego algorytmu odwracania macierzy, 8 rekurencyjnych mnożeń macierzy i 2 odejmowania macierzy. $T(n) = T(n/2) + O(n^3) \Rightarrow T(n) = O(n^3)$

7.3 Faktoryzacja LU

Algorytm wykonuje dwa rekurencyjne wywołania dla macierzy o rozmiarze o połowe mniejszym, dwa wywołania rekurencyjnego algorytmu odwracania macierzy, 3 rekurencyjne mnożenia i 1 odejmowanie macierzy. $T(n) = 2 * T(n/2) + O(n^3) \Rightarrow T(n) = O(n^3)$

7.4 Wyznacznik macierzy

Algorytm wykonuje jedno wywołanie rekurencyjnego algorytmu faktoryzacji LU, n mnożeń liczb zmiennoprzecinkowych. $T(n) = O(n^3) + O(n) \Rightarrow T(n) = O(n^3)$

8. Porównanie wyników z Matlabem

Przeprowadziliśmy testy dla poniższej macierzy A oraz wektora b.

```
A = [
    [0.54, 0.23, 0.67, 0.12, 0.45],
    [0.78, 0.34, 0.56, 0.91, 0.82],
    [0.13, 0.58, 0.44, 0.73, 0.27],
    [0.89, 0.62, 0.35, 0.29, 0.75],
    [0.48, 0.15, 0.92, 0.64, 0.51]
]

 b = [0.56, 0.23, 0.89, 0.45, 0.67]
```

8.1 Odwracanie macierzy

Dla rekurencyjnego odwracania macierzy otrzymaliśmy wyniki.

Wyniki otrzymane dla odwracania macierzy w MatLabie:

```
>> inverse
Odwrotność macierzy A:
  -38.3303  -20.9352   -8.3345   24.9965   35.1342
    0.4764   -0.9696    1.4969    0.7511   -0.7584
    1.3406   -0.6698    0.3404   -0.5886    0.5795
  -12.6103   -5.4824   -1.9627    6.8993   10.8347
   49.3419   28.0770    9.2530  -31.3431  -45.5255
```

Wyniki otrzymane dla odwracania macierzy z wykorzystaniem własnej implementacji:

```
[[-38.33034034 -20.93517304  -8.33454029  24.99652335  35.13417335]
 [  0.47639724  -0.96958554   1.49686293   0.75107228  -0.75838395]
 [  1.34059285  -0.66982442   0.34038395  -0.58862246   0.57951455]
 [-12.61032847  -5.48239124  -1.96268818   6.89926936  10.8346714 ]
 [ 49.34189916  28.07703872   9.25297471 -31.34312113 -45.52546805]]
```

8.2 Eliminacja Gaussa

Wyniki otrzymane dla eliminacji Gaussa w MatLabie:

```
Macierz trójkątna górna U:
    0.5400    0.2300    0.6700    0.1200    0.4500
         0    0.0078   -0.4078    0.7367    0.1700
         0         0   27.7843  -48.9888  -11.3052
         0         0         0   -1.7853   -0.4249
         0         0         0         0   -0.0220

Zaktualizowany wektor b po eliminacji Gaussa:
    0.5600
   -0.5789
   39.8026
    0.4441
    0.0501
```

Wyniki otrzymane dla eliminacji Gaussa z wykorzystaniem własnej implementacji:

```
[[ 5.40000000e-01  2.30000000e-01  6.70000000e-01  1.20000000e-01
   4.50000000e-01]
 [ 0.00000000e+00  7.77777778e-03 -4.07777778e-01  7.36666667e-01
   1.70000000e-01]
 [ 0.00000000e+00  0.00000000e+00  2.77842857e+01 -4.89888095e+01
  -1.13052381e+01]
 [ 0.00000000e+00  0.00000000e+00  0.00000000e+00 -1.78531587e+00
  -4.24889883e-01]
 [ 0.00000000e+00  0.00000000e+00  0.00000000e+00  0.00000000e+00
  -2.19657269e-02]]
[[ 0.56      ]
 [-0.57888889]
 [39.80261905]
 [ 0.4441057 ]
 [ 0.05012882]]
```

8.3 LU Faktoryzacja

Wyniki otrzymane dla faktoryzacji LU w MatLabie:

```
Macierz L:
    1.0000         0         0         0         0
    0.1461    1.0000         0         0         0
    0.5393   -0.3767    1.0000         0         0
    0.8764   -0.4155    0.4726    1.0000         0
    0.6067   -0.2987    0.6537   -0.5690    1.0000

Macierz U:
    0.8900    0.6200    0.3500    0.2900    0.7500
         0    0.4894    0.3889    0.6876    0.1604
         0         0    0.8777    0.7426    0.1660
         0         0         0    0.5906    0.1509
         0         0         0         0    0.0203
```

Wyniki otrzymane dla faktoryzacji LU z wykorzystaniem własnej implementacji:

```
L=
[[ 1.          0.          0.          0.          0.        ]
 [ 1.44444444  1.          0.          0.          0.        ]
 [ 0.24074074 67.45238095  1.          0.          0.        ]
 [ 1.64814815 30.97619048  0.42747699  1.          0.        ]
 [ 0.88888889 -7.         -0.09105867 -0.68847444  1.        ]]
U=
[[ 5.40000000e-01  2.30000000e-01  6.70000000e-01  1.20000000e-01
   4.50000000e-01]
 [ 0.00000000e+00  7.77777778e-03 -4.07777778e-01  7.36666667e-01
   1.70000000e-01]
 [ 0.00000000e+00  0.00000000e+00  2.77842857e+01 -4.89888095e+01
  -1.13052381e+01]
 [ 0.00000000e+00  0.00000000e+00  0.00000000e+00 -1.78531587e+00
  -4.24889883e-01]
 [ 0.00000000e+00  0.00000000e+00  0.00000000e+00  0.00000000e+00
  -2.19657269e-02]]
```

8.4 Wyznacznik macierzy

```
Wyznacznik macierzy A:
    0.0046
```

Wyniki otrzymane dla wyznacznika macierzy w MatLabie:

Wyniki otrzymane dla wyznacznika macierzy z wykorzystaniem własnej implementacji:

```
0.0045762440000000026
```

9. Wnioski

- Nasze implementacje opierały się na algorytmie mnożenia macierzy *Bineta*, którego implementacja okazała się być skuteczniejsza od algorytmu *Strassena*. Algorytm okazał się być przydatny przy realizacji operacji związanych z odwracaniem macierzy, obliczaniem wyznaczników oraz faktoryzacją LU.
- Zastosowanie podejścia rekurencyjnego sprawiło, że implementacje były przejrzyste i intuicyjne oraz pozwoliły na rozkładanie problemów na mniejsze, łatwiejsze do przetworzenia bloki.
- Algorytmy, które zaimplementowaliśmy, wymagały dużej liczby operacji arytmetycznych, co przekładało się na większą złożoność obliczeniową niż w przypadku standardowych funkcji bibliotecznych.
- Algorytm rekurencyjnego obliczania wyznacznika macierzy produkuje bardzo duże błędy dla macierzy o rozmiarach nie będącymi potęgami 2, ze względu na wykonywanie mnożenia liczb zmiennoprzecinkowych o różnych rzędach wielkości.

10. Bibliografia

- Wykłady prof. dr hab. Macieja Paszyńskiego (https://home.agh.edu.pl/~paszynsk/RM/RachunekMacierzowy1.pdf)