Вполне упорядоченные множества

10 июня 2021 г.

Пусть имеется множество X с отношением $< \subseteq X^2$. Это отношение называется отношением *(строгого) частичного порядка*, если

1. $\neg\exists x \in X\,(x < x)$ (оно иррефлексивно) и

2. $\forall x, y, z \in X\,(x < y \land y < z \to x < z)$ (транзитивно).

С отношением строгого частичного порядка $<$ можно естественным образом связать отношение нестрогого порядка $\leqslant$:

$$x \leqslant y \rightleftharpoons (x < y) \lor (x = y),$$

как легко видеть, действительно, рефлексивное, транзитивное и антисимметричное (т. е. $(x \leqslant y \land y \leqslant x) \to x = y$). Пара $(X, <)$ называется *частично упорядоченным множеством* (ч. у. м.). Зная отношение $<$, мы позволим себе называть частично упорядоченным и самое множество X.

Пусть $Y \subseteq X$. Элемент $x \in Y$ *максимальный в* Y, если $\forall y \in Y\,\neg(x < y)$, и *наибольший в* Y, если $\forall y \in Y\,(y \leqslant x)$. Если $x \in X$ и $\forall y \in Y\,(y \leqslant x)$, то x есть верхняя грань множества Y. Наименьшая среди верхних граней Y обозначается $\sup Y$. Очевидно, если таковая существует, то она единственна. Аналогично определяются минимальные и наименьшие элементы, нижняя грань и inf.

Частично упорядоченные множества $(X_1, <_1)$ и $(X_2, <_2)$ *изоморфны*, если существует биекция $\varphi\colon X_1 \to X_2$, такая что

$$\forall x, y \in X_1\,(x <_1 y \leftrightarrow \varphi(x) <_2 \varphi(y)).$$

В таком случае пишем $X_1 \cong X_2$ или $X_1 \overset{\varphi}{\cong} X_2$. Ясно, что $\cong$ является отношением эквивалентности на классе[1] частично упорядоченных множеств. Обозначим $[X] = \{Y \mid Y \cong X\}$ класс эквивалентности или *порядковый тип* множества X.

Порядок $<$ называется *линейным*, если

$$\forall x, y \in X\,(x < y \lor y < x \lor x = y).$$

Иными словами, в линейно упорядоченном множестве любые два элемента сравнимы. Примерами служат множества $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ с естественным порядками. В линейно упорядоченных множествах минимальные и наименьшие (максимальные и наибольшие) элементы суть одни и те же.

[1] *Классами* считаются «произвольные совокупности» объектов (множеств), удовлетворяющие какому-либо свойству (формуле): $C = \{x \mid \varphi(x, a_1, \dots, a_n)\}$, где a_i некоторые множества. Множества же разрешается получать из уже имеющихся по более скромным правилам («объединение множеств есть множество», «существует множество элементов *данного множества*, удовлетворяющих такому-то свойству» и т. п.).

Наши высказывания о классах будут однозначно переводиться в высказывания о множествах: например, $x \in C_1 \cap C_2$ означает $\varphi_1(x) \land \varphi_2(x)$, а $C_1 \subseteq C_2$ значит $\forall x\,(\varphi_1(x) \to \varphi_2(x))$.

Любое множество a является классом: $a = \{x \mid x \in a\}$. Мы говорим, что класс C является множеством, если существует множество b, т. ч. $\forall y\,(y \in b \leftrightarrow \varphi(y, a_1, \dots, a_n))$. Класс множеств $\{x \mid x \notin x\}$ множеством не является (парадокс Рассела), т. е. является *собственным*.

Вполне упорядоченные множества

Среди линейно упорядоченных множеств выделяют исключительно важный для математической практики класс вполне упорядоченных множеств, таких как $\mathbb{N}$. Интуиция состоит в том, что вполне упорядоченные множества можно *пересчитать*, выстроить в порядке $<$ пусть и «за бесконечное время», но так, что на каждом шаге определен *следующий* элемент, «первый» во множестве еще не пересчитанных. Пересчет позволяет доказывать утверждения об элементах множества «по индукции».

Порядок $<$ на множестве X *фундирован* (или *множество* X *фундировано*), если во всяком непустом $Y \subseteq X$ существует минимальный элемент. Множество *вполне упорядоченно*, если оно линейно и фундировано. При этом, конечно, минимальные и наименьшие элементы совпадают.

Пример 1. Множество $\mathbb{N}^k$, $k \in \mathbb{N}_+$, с каноническим порядком

$$(a_1, \dots a_k) < (b_1, \dots b_k) \rightleftharpoons \exists s\, (a_s < b_s \wedge \forall t \in (s,k]\, (a_t = b_t)).$$

является вполне упорядоченным. Наименьший кортеж в подмножестве Y ищется так: выделяем множество $Y_k \subseteq Y$ кортежей с наименьшим последним элементом, затем $Y_{k-1} \subseteq Y_k$ с наименьшим в Y_k предпоследним элементом и т. д. При этом оказывается, что все кортежи из Y_i суть нижние грани $Y \setminus Y_i$. Очевидно, что если начинать сравнение слева, а не справа, то все равно получиться упорядочение вполне.

Также ясно, что вместо $\mathbb{N}$ можно взять любое другое вполне упорядоченное множество.

Пример 2. Пусть $(A, <)$ линейно упорядоченное множество. Тогда определим на множестве

$$A^* \rightleftharpoons \{\varepsilon\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} A^n$$

слов в алфавите A, где ε пустое слово длины 0, *лексикографический порядок*

$$(a_1, \dots a_n) <_L (b_1, \dots b_m) \rightleftharpoons (n < m \wedge \forall k \in [1,n]\, a_k = b_k) \vee \\ \exists s\, (a_s < b_s \wedge \forall t \in [1,s)\, (a_t = b_t)).$$

Легко видеть, что такой порядок является линейным. Тем не менее, если $|A| \geqslant 2$, то $<_L$ не фундирован. Действительно, пусть $A = \{a, b\}$, $a < b$. Тогда $b >_L ab >_L aab >_L \dots >_L a^n b >_L a^{n+1} b >_L \dots$, т. е. множество $\{a^n b \mid n \in \mathbb{N}\} \subset A^*$ не имеет минимального элемента.

Упражнение 3. Не привлекая аксиомы выбора, докажите, что на любом множестве существует фундированный порядок.

Отметим простые свойства вполне упорядоченных множеств (в. у. м.).

Лемма 4. *Пусть* $(X, <)$ *непустое в. у. м. и* $Y \subseteq X$.

1. *В* X *есть наименьший элемент (обозначаемый* 0 *или* 0_X*).*
2. Y *есть в. у. м. относительно* $<\!|_{Y^2}$.
3. *Если* $Y \neq \varnothing$*, то существует* $\inf Y$.

4. *Если $x < s$, то существует и единствен y, называемый* последователем x *(обозначение $y = x + 1$), т. ч. $x < y$ и $\forall z > x\,(y \leqslant z)$ (эквивалентно, $y = \min\{z \mid z > x\}$).*

5. *Если существует верхняя грань Y, то существует (и единствен) $\sup Y$.*

Доказательство. В третьем пункте за инфимум берем $\min Y$. В двух последних пунктах нужно рассмотреть множество $\{z \mid z > x\}$ и множество верхних граней Y, непустые по условию, и взять их наименьшие элементы. □

Упражнение 5. Пусть $(X, <)$ в. у. м. Найдите $\sup \varnothing$. Каково множество нижних граней $\varnothing$ в X? Когда существует $\inf \varnothing$?

Упражнение 6. Пусть X некоторое множество. Известно, что существует в. у. м. Y, большее или равное X по мощности. Не привлекая аксиомы выбора, докажите, что множество X может быть вполне упорядоченно (т. е. на X существует фундированный линейный порядок).

Индукция

Подмножество $Z \subseteq X$ называется *прогрессивным*, если выполнено свойство

$$Prog(Z) \rightleftharpoons \forall x \in X\,(\forall y < x\,(y \in Z) \to x \in Z).$$

Вместо подмножества мы, конечно, могли бы говорить о формуле $\varphi(x)$, т. ч. $\forall x \in X\,(\varphi(x) \leftrightarrow x \in Z)$. Для всякого Z можно принять $\varphi \rightleftharpoons (x \in Z)$, а для произвольной формулы $\varphi(x)$ аксиомы теории множеств обеспечивают, что класс $Z = \{x \mid x \in X \wedge \varphi(x)\}$ является множеством, поскольку он состоит из элементов данного *множества* X.

Теорема 7. *Пусть $(X, <)$ ч. у. м. Тогда следующие условия равносильны.*

1. *Порядок $<$ фундирован.*

2. *Не существует бесконечной убывающей цепи*[2] *элементов X: $x_0 > x_1 > \ldots > x_n > \ldots$*

3. *Если $Z \subseteq X$, то $Prog(Z) \to \forall x \in X\,(x \in Z)$ или иначе,*

$$Prog(Z) \to Z = X.$$

Доказательство. Равносильность первых двух пунктов почти очевидна. Впрочем, вывод существования бесконечной убывающей последовательности из нефундированности, строго говоря, использует принцип зависимого выбора: для каждого элемента, раз он не минимальный в некотором подмножестве, можно выбрать меньший — *значит*, есть и бесконечная последовательность таких выборов, которая, собственно, определяет нашу цепь.

Покажем, что третий пункт — *принцип трансфинитной индукции* — равносилен фундированности. Действительно, допустим $Prog(Z)$ и $Z \neq X$. Тогда множество $A = X \setminus Z \subseteq X$ непусто. В нем есть минимальный элемент

[2]Более формально, бесконечная убывающая цепь это отображение $f\colon \mathbb{N} \to X$, т. ч. $\forall n, m \in \mathbb{N}\,(n < m \to f(n) > f(m))$.

$x' \in A$, т. ч. $\forall a \in A \neg(a < x')$. Значит, для любого $y \in X$ если $y < x'$, то $y \notin A$ и $y \in Z$. Иными словами, $\forall y < x' \, (y \in Z)$. По прогрессивности заключаем $x' \in Z$, что не так.

Обратно, пусть есть множество $A \subseteq X$, не имеющее минимальных элементов. Возьмем $Z = X \setminus A$. Проверим «индукционный переход», т. е. установим $Prog(Z)$. Предположим противное: $\forall y < x \, (y \in X \setminus A)$ и $x \notin X \setminus A$ для некоторого $x \in X$. Получается, что $\forall y < x \, (y \notin A)$ и $x \in A$, т. е. x минимален A, что не так. Поэтому $Prog(Z)$ и, по принципу трансфинитной индукции, $Z = X$, т. е. $A = \varnothing$. □

Заметим, мы никак не используем, что X и Z именно множества, а не произвольные классы (не пытаемся рассмотреть $P \ni X$ и т. п.). Поэтому принцип трансфинитной индукции можно обобщить и на фундированные упорядоченные классы (отношение порядка тогда тоже оказывается классом).

Пример 8. Для в. у. м. $X = \mathbb{N}$ принцип индукции обычно формулируют несколько иначе. Именно, вместо $Prog(Z)$ используют формулу

$$N(Z) \rightleftharpoons 0 \in Z \wedge \forall y \in X \, (y \in Z \to y + 1 \in Z).$$

При этом принцип $N(Z) \to Z = \mathbb{N}$ оказывается равносильным фундированности $\mathbb{N}$. Учитывая, что всякий элемент $\mathbb{N}$ есть 0 или $y + 1$ для некоторого $y \in \mathbb{N}$, просто вывести наш принцип из фундированности (проделайте это).

Большей изобретательности требует обратная импликация. В самом деле, пусть $A \subseteq \mathbb{N}$ не содержит минимальных элементов. Рассмотрим $Z = \{x \mid \forall w < x \, (w \notin A)\}$. Проверим $N(Z)$. Очевидно, $0 \in Z$. Пусть $y \in Z$. Если $w < y + 1$, то либо $w < y$ и $w \notin A$ по предположению, либо $w = y$. Но если $y \in A$, то y окажется минимальным элементом A, что не так. Значит, для всех $w < y + 1$ имеем $w \notin A$, откуда $y + 1 \in Z$. Теперь применяем индукцию и получаем $Z = \mathbb{N}$. Тогда если $x \in A$, то $x < x + 1 \in Z$. Отсюда $x \notin A$. Противоречие доказывает, что $A = \varnothing$.

Упражнение 9. Пусть в счетном линейно упорядоченном множестве X есть наименьший элемент 0, у каждого элемента $x \in X$ есть последователь $x + 1 \in X$ и всякий элемент $x \neq 0$ является последователем некоторого $y \in X$: верно $x = y + 1$. Изоморфно ли X множеству $\mathbb{N}$? Фундировано ли X?

Элементы вполне упорядоченного множества

Для элемента x в. у. м. $(X, <)$ введем обозначение $[0, x) \rightleftharpoons \{y \mid y < x\}$. Элемент x называется *предельным* (обозначение $x \in Lim$ или $x \in Lim_X$), если $x = \sup[0, x)$ и $x \neq 0$. Наименьший элемент в. у. м. 0 тоже иногда считают предельным, поскольку $0 = \sup \varnothing = \sup[0, 0)$; мы не станем этого делать, но обозначим $Lim^* = Lim \cup \{0\}$.

Лемма 10. *Следующие условия равносильны:*

1. *$x \in Lim^*$;*

2. *$\forall y \neg(y + 1 = x)$;*

3. $\forall y < x\,(y+1 < x)$.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Пусть $x \in Lim^*$. Допустим найдется y, т. ч. $y+1 = x$, откуда $y < x$. Тогда y является верхней гранью $[0, x)$: если $z > y$, то по определению последователя $z \geqslant y+1 = x$ и $z \notin [0, x)$. Это противоречит тому, что x — *наименьшая* верхняя грань.

$2 \Rightarrow 3$. Пусть $y < x$. По определению последователя, $y + 1 \leqslant x$. Имеем $y + 1 < x$.

$3 \Rightarrow 1$. Пусть $\forall y < x\,(y+1 < x)$. Допустим, существует $z < x$ — верхняя грань множества $[0, x)$. Но тогда $z < z+1 \in [0, x)$. Противоречие. $\square$

Обозначим через $x+n$, $n \in \mathbb{N}$, результат n-кратного перехода к последователю (если он определен). В частности, $x + 0 = x$.

Лемма 11. *Всякий элемент $x \in X$ однозначно представим в виде $x = y + n$, где $y \in Lim^*$.*

Доказательство. Если $x = 0$, то все доказано. Пусть $x > 0$. Рассмотрим множество $C = \{z \in X \mid \exists k \in \mathbb{N}_+\,(z + k = x)\}$. Если $C = \varnothing$, то для всех $z \in X$ имеем $z + 1 \neq x$. В силу леммы 10, полагаем $y = x \in Lim$ и $n = 0$. Рассмотрим случай $C \neq \varnothing$. Тогда в C есть наименьший элемент z', и для некоторого $k' > 0$ верно $x = z' + k'$. Если $z' = 0$, то $y = 0, n = k'$. Иначе $z' \in Lim$. Действительно, очевидная индукция по $n \in \mathbb{N}$ показывает, что $(u+1)+n = u+(n+1)$. Поэтому, если $z' = z''+1$, то $z'' \in C$ и $z'' < z'$. Что не так вследствие леммы 10. Теперь можно взять $y = z'$ и $n = k'$.

Пусть $x = y_1 + n_1 = y_2 + n_2$. Легко показать, что $u + 1 = v + 1$ влечет $u = v$. Поэтому если $n_1 \neq n_2$, без ограничения общности (б. о. о.), $n_1 < n_2$, то имеем $y_1 = y_2 + (n_2 - n_1)$, что по лемме 10 влечет $y_1 \notin Lim$. Следовательно, $n_1 = n_2$, откуда $y_1 = y_2$. $\square$

Пример 12. В качестве следствия получаем полезную трихотомию. Всякий элемент в. у. м. есть либо 0 (наименьший), либо предельный, либо *последователь* (т. е. элемент вида $y + 1$).

Арифметика

В. у. м. (и вообще линейно упорядоченные множества) можно складывать и перемножать, естественным образом получая новое в. у. м. Мы уже сталкивались с умножением в примере 2. Вообще говоря, *произведением* AB в. у. м. $(A, <_A)$ и $(B, <_B)$ называется $(A \times B, <)$, где

$$(a_1, b_1) < (a_2, b_2) \rightleftharpoons (b_1 <_B b_2) \vee (b_1 = b_2 \wedge a_1 <_A a_2).$$

Проверка, что получается в. у. м. такая же, как в упомянутом примере.

Сумма в. у. м. $(A, <_A)$ и $(B, <_B)$ требует некоторых технических оговорок. Идея в том, чтобы считать все элементы второго слагаемого больше элементов первого, но возникает проблема пересечения A и B. Мы скажем, что *сумма* $A + B$ есть $(A \times \{0\} \cup B \times \{1\}, <)$, где

$$(x, \varepsilon) < (y, \delta) \rightleftharpoons (\varepsilon < \delta) \vee (\varepsilon = \delta = 0 \wedge x <_A y) \vee (\varepsilon = \delta = 1 \wedge x <_B y).$$

Вполне упорядоченность очевидна: если в подмножестве $A + B$ есть лишь элементы вида $(y, 1)$, то возьмем $<_B$-наименьший из y. В противном случае возьмем $<_A$-наименьший среди x, т. ч. $(x, 0)$ лежат в нашем подмножестве.

Такое определение суммы легко перенести на случай семейства в. у. м. A_i, индексированного в. у. м. I. Именно, $\sum\limits_{i\in I} A_i$ есть $(\bigcup\limits_{i\in I} A_i \times \{i\}, <)$, где

$$(x,\varepsilon) < (y,\delta) \rightleftharpoons (\varepsilon <_I \delta) \vee (\varepsilon = \delta = i \wedge x <_{A_i} y).$$

Заметим, что если все $A_i = A$, мы имеем $\sum\limits_{i\in I} A_i = AI$, т. е. сложение оказывается согласованным с умножением. В частности, $A + A = A2$, где $2 = \{0,1\}, 0 < 1$.

Пример 13. Ни сложение, ни умножение не коммутативны. Например, $2 + \mathbb{N} \cong \mathbb{N} \not\cong \mathbb{N} + 2$. Изоморфизм между $2 + \mathbb{N}$ и $\mathbb{N}$ легко строится непосредственно с помощью сдвига. Второго изоморфизма не может существовать, поскольку в $\mathbb{N}+2$ есть наибольший элемент в отличие от $\mathbb{N}$. Также легко проверить $2\mathbb{N} \cong \mathbb{N} \not\cong \mathbb{N}2$. Первый изоморфизм можно задать так: $(0,n) \mapsto 2n$, $(1,n) \mapsto 2n+1$. Последнего изоморфизма не существует потому, что в $\mathbb{N}2$ имеется предельный элемент, а в $\mathbb{N}$ его нет.

Пример 14. Опишем все в. у. м., где есть ровно два предельных элемента. Прежде всего заметим, что в конечном множестве предельных элементов быть не может в силу п. 3 леммы 10. Пусть у нас есть предельные элементы $y_1 < y_2$. По лемме 11, любой элемент имеет вид $0+n$ или y_i+n. Ясно также, что у нас имеются все элементы вида $0+n$ и все элементы вида y_1+n при $n \in \mathbb{N}$. Это следует из леммы 10 и доказывается по индукции: $0+n < y_1$ влечет $(0+n)+1 = 0+(n+1) < y_1$, а у каждого не наибольшего элемента в в. у. м. есть последователь. Порядок на элементах вида $0+n$ или y_1+n изоморфен $\mathbb{N}$. Элементов вида y_2+n у нас может быть как конечно, так и бесконечно много, но хотя бы один $y_2+0 = y_2$ имеется. Порядок на них изоморфен некоторому непустому начальному отрезку $\mathbb{N}$. В итоге получаем, что наше множество изоморфно

$$\mathbb{N} + \mathbb{N} + 1 + I,$$

где I произвольный н. о. множества $\mathbb{N}$.

Лемма 15. *Сложение и умножение обладают свойствами ассоциативности и левой дистрибутивности. Именно, для произвольных в. у. м. (и даже просто линейно упорядоченных множеств) A, B, C выполнены:*

1. $A + (B + C) \cong (A + B) + C$;
2. $A(BC) \cong (AB)C$;
3. $C(A + B) \cong CA + CB$.

Доказательство. Требуемые изоморфизмы несложно построить непосредственно. □

Пример 16. Выясним, как устроены в. у. м. без наибольшего элемента. Мы покажем, что каждое таковое состоит из копий натурального ряда. Точнее, если в. у. м. A не имеет наибольшего элемента, то $A \cong \mathbb{N} \cdot B$ для некоторого в. у. м. B.

Положим $B = Lim^*_A \subseteq A$. Согласно лемме 11, существует функция $f\colon A \to \mathbb{N} \times B$, т. ч. $f(a) = (n, y)$ влечет $a = y + n$. Очевидно, f является инъекцией и даже монотонной функцией. Действительно, если $a_1 = y_1 + n_1 < y_2 + n_2 = a_2$, то $y_2 < y_1$, по лемме 10, влекло бы $y_2 + n_2 < y_1$, что не так. Значит, $y_1 \leqslant y_2$, причем, если $y_1 = y_2$, очевидно, $n_1 < n_2$. Во всяком случае $f(a_1) = (n_1, y_1) < (n_2, y_2) = f(a_2)$.

Проверим сюръективность f. Допустим, что $y \in Lim^*_A$. Индукцией по n докажем, что все $y + n$ лежат в A. В самом деле, по условию элемент $y + n$ не максимален в A, а значит, имеет последователь $y + (n+1) \in A$. Но тогда $f(y + n) = (n, y)$ в силу условия единственности в лемме 11.

Итак, $f\colon A \to \mathbb{N} \times B$ есть монотонная биекция и, как легко заметить, искомый изоморфизм.

Изоморфизмы и начальные отрезки

Функция $f\colon A \to B$ из одного ч. у. м. в другое *монотонна*, если $\forall x, y \in A\,(x <_A y \to f(x) <_B f(y))$. Очевидно, изоморфизм есть монотонная функция. Монотонная биекция линейно упорядоченных множеств является их изоморфизмом.

Подмножество I в. у. м. X называется *начальным отрезком*, если оно «замкнуто вниз»: $\forall\, x \in I\ \forall y < x\,(y \in I)$. Если $I \neq X$, то это *собственный* начальный отрезок (н. о.).

Пример 17. Пусть A, B в. у. м., I (собственный) н. о. A и $f\colon A \to B$ изоморфизм. Тогда тогда $f(I)$ есть (собственный) н. о. B. Действительно, пусть $x \in I$ и $y < f(x)$. Существует z, т. ч. $f(z) = y$. Допущение, иное чем $z < x$, ведет к противоречию. Поэтому $z \in I$ и $y \in f(I)$. Вследствие инъективности, собственный н. о. переходит в собственный.

Лемма 18. *Пусть $(X, <)$ в. у. м.*

1. *X есть свой начальный отрезок.*
2. *Пусть I_a суть н. о. X при всех $a \in A$. Тогда $\bigcup\limits_{a\in A} I_a$ есть н. о. X.*
3. *Если $x \in X$, то $[0, x)$ есть н. о. X.*
4. *Если I собственный н. о. X, то существует и единственен $x \in X$, т. ч. $I = [0, x)$.*
5. *Пусть $\mathcal{I} = \{I \mid I \text{ н. о. } X\}$. Тогда $(\mathcal{I}, \subset)$ есть в. у. м.*[3]
6. *$(\mathcal{I}, \subset) \cong X + 1$, $(\mathcal{I} \setminus \{X\}, \subset) \cong X$.*

Доказательство. Проверим п. 2. Пусть $x \in \bigcup\limits_{a\in A} I_a$ и $y < x$. Тогда найдется н. о. $I_a \ni x$. Поэтому $y \in I_a \subseteq \bigcup\limits_{a\in A} I_a$.

П. 4. Имеем $X \setminus I \neq \varnothing$. Возьмем наименьший x элемент этого множества. Очевидно $y < x \to y \in I$. Пусть $y \in I$, но $x \leqslant y$. Тогда $x \in I$, что не так. Значит, $y < x \leftarrow y \in I$. Единственность следует из линейности $<$.

[3]Знак $\subset$ мы употребляем для *строгого* включения, когда подмножество не совпадает со всем множеством.

П. 5. Порядок $(\mathcal{I}, \subset)$ линеен: все собственные н. о. вложены в X и сравнимы между собой по предыдущему пункту. Выделим в семействе $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ наименьший элемент. Если $\mathcal{J} = \{X\}$, то все ясно. Иначе возьмем в непустом множестве $\{x \mid [0, x) \in \mathcal{J} \setminus \{X\}\}$ наименьший элемент x'. Ясно, что $[0, x') \in \mathcal{J}$ будет наименьшим в смысле $\subset$.

П. 6. Изоморфизм строится так: $[0, x) \mapsto x$ для всех $x \in X$, а X переходит в наибольший элемент множества $X + 1$. $\square$

Лемма 19. *Пусть* $(X, <)$ *в. у. м. и функция* $f \colon X \to X$ *монотонна. Тогда* $\forall x \in X\, (f(x) \geqslant x)$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда подмножество $\{x \mid f(x) < x\}$ непусто. Пусть x' его наименьший элемент. Имеем $f(x') < x'$ и по монотонности $f(f(x')) < f(x')$, т. е. $f(x')$ тоже лежит в этом подмножестве, что не так. $\square$

Пример 20. Какие возможны *автоморфизмы* (т. е. изоморфизмы в себя) у в. у. м. X? Пусть $f \colon X \to X$ изоморфизм. Тогда, очевидно, существует обратный изоморфизм f^{-1}. По лемме 19 для любого $x \in X$ имеем $f(x) \geqslant x$ и $f^{-1}(x) \geqslant x$. Из второго неравенства по монотонности $x = f(f^{-1}(x)) \geqslant f(x)$, что вместе с первым дает $f(x) = x$, т. е. $f = \mathrm{id}_X$

Упражнение 21. Докажите, что если в. у. м. A и B изоморфны, то существует единственный изоморфизм. (*Рассмотрите для изоморфизмов* f, g *композицию* $g^{-1} \circ f$.)

Лемма 22. *Пусть* I *собственный н. о. в. у. м.* $(X, <)$. *Тогда* $X \ncong I$.

Доказательство. По лемме 18, $I = [0, x)$ для некоторого $x \in X$. Пусть есть изоморфизм $f : X \to I$. По лемме 19 имеем $f(x) \geqslant x$. С другой стороны, $f(x) \in I$ и $f(x) < x$. $\square$

Пример 23. Из леммы 22 видно, что не может быть $A + B \cong A$ при $B \neq \varnothing$.

Для в. у. м. $(X, <)$ и $y \in X$ обозначим собственный н. о. $\{z \mid z < y\}$ через X_y.

Теорема 24. *Пусть имеются в. у. м.* $(A, <_A)$ *и* $(B. <_B)$. *Тогда выполнено ровно одно из трех:*

1. $A \cong B$;
2. $A \cong B_y$ *для некоторого* $y \in B$;
3. $B \cong A_x$ *для некоторого* $x \in A$.

Доказательство. Рассмотрим отношение (являющееся множеством, как подмножество $A \times B$)

$$f = \{(x, y) \in A \times B \mid A_x \cong B_y\}.$$

Это отношение является биекцией из какого-то $D \subseteq A$ в $R \subseteq B$. Действительно, возьмем $D = \{x \mid \exists y\, (x, y) \in f\}$ и $R = \{y \mid \exists x\, (x, y) \in f\}$. Проверим функциональность. Пусть $(x, y_1), (x, y_2) \in f$. Тогда $A_x \cong B_{y_1}$ и $A_x \cong B_{y_2}$, откуда $B_{y_1} \cong B_{y_2}$. Но одно из этих множеств есть н. о. другого. Согласно лемме 22, это возможно, лишь если они совпадают, т. е. $y_1 = y_2$. Аналогично проверим инъективность. Предполагаем $(x_1, y), (x_2, y) \in f$, откуда $A_{x_1} \cong A_{x_2}$ и $x_1 = x_2$.

Функция f монотонна. Действительно, пусть $A_{x_1} \overset{\psi}{\cong} B_{y_1}$, $A_{x_2} \overset{\varphi}{\cong} B_{y_2}$ и $x_1 <_A x_2$. Предположим, что $y_1 \geqslant_B y_2$. Образ $\varphi(A_{x_1})$ является собственным н. о. множества B_{y_2} (пример 17), а следовательно, и B_{y_1}. Этот н. о. под действием изоморфизма ψ^{-1} переходит в собственный н. о. A_{x_1}. Таким образом, A_{x_1} изоморфно собственному н. о. $\psi^{-1}(\varphi(A_{x_1}))$ множества A_{x_1}, что противоречит лемме 22. Значит, $y_1 <_B y_2$.

Итак, мы получили изоморфизм $D \overset{f}{\cong} R$. Если $D = A$ и $R = B$, то $A \cong B$ и все доказано.

Покажем, что R есть н. о. множества B. В самом деле, пусть $y_1 <_B y_2$ и $y_2 \in R$. Тогда найдется $x_2 \in A$ т. ч. $f(x_2) = y_2$, т. е. $A_{x_2} \overset{\varphi}{\cong} B_{y_2}$. Образом собственного н. о. B_{y_1} при изоморфизме φ^{-1} будет собственный н. о. $\varphi^{-1}(B_{y_1})$ множества A_{x_2}, который, в силу леммы 18, равен A_{x_1} для некоторого $x_1 <_A x_2$. Получаем $A_{x_1} \overset{\varphi}{\cong} B_{y_1}$, т. е. $f(x_1) = y_1$ и $y_1 \in R$. Аналогично доказывается, что D есть н. о. множества A.

Допустим, что $R \neq B$ и $D \neq A$. Тогда по лемме 18 $R = B_{y'}$ для некоторого $y' \in B$. Равно, $D = A_{x'}$ для какого-то $x' \in A$. Тогда $(x', y') \in f$ и $y' \in R$, что не так.

Поэтому возможен лишь случай, когда R собственный н. о. множества B, а $D = A$, и симметричный ему. Эти случаи соответствуют случаям 2 и 3 из условия.

Остается понять, почему случаи 1, 2, 3 попарно несовместны. Ответ дают лемма 22 и пример 17. $\square$

Сравнение в. у. м.

Теорема 24 позволяет нам сравнить вполне упорядоченные множества следующим образом:

$$A < B \rightleftharpoons A \text{ изоморфно собственному н. о. множества } B.$$

Получаем строгий частичный порядок (проверьте!). Формально говоря, он не линеен, поскольку изоморфные множества несравнимы:

$$A \ncong B \leftrightarrow (A < B \vee B < A).$$

Как мы знаем, изоморфизм есть отношение эквивалентности, согласованное с $<$, поэтому проблему можно решить отождествлением изоморфных в. у. м. Это делается в следующем разделе. Пока же определим отношение

$$A \leqslant B \rightleftharpoons (A < B \vee A \cong B).$$

Это отношение транзитивно и рефлексивно, но не антисимметрично: $A \leqslant B$ и $B \leqslant A$ дают лишь $A \cong B$, но не $A = B$. Транзитивные рефлексивные отношения называют *предпорядками.* Как легко видеть, $A \leqslant B \vee A > B$ для любых в. у. м. A и B.

Лемма 25. *Порядок $<$ на классе в. у. м. фундирован.*

Доказательство. Пусть дано непустое семейство в. у. м. X. Возьмем произвольное множество $A \in X$. Если оно минимальное в X, все доказано. В противном случае непусто семейство $X_A = \{B \in X \mid B < A\}$. По определению $<$, каждому $B \in X_B$ соответствует собственный н. о. $[0, x_B)$ множества A, причем изоморфным множествам соответствует один н. о. Среди элементов x_B имеется наименьший $x_{B'}$. Любое из соответствующих множеств B' является минимальным в X. $\square$

Посмотрим, как ведут себя сложение и умножение относительно порядка. Прежде всего, отметим, что эти операции инвариантны относительно изоморфизма.

Лемма 26. *Пусть A, B, A', B' в. у. м. и $A \cong A'$, $B \cong B'$. Тогда $A + B \cong A' + B'$ и $AB \cong A'B'$.*

Доказательство. Легко явно указать требуемые изоморфизмы. $\square$

Далее нам понадобится вспомогательное утверждение.

Лемма 27. *Пусть C в. у. м. и $B \subseteq C$. Тогда $B \leqslant C$.*

Доказательство. Допустим $B > C$. Тогда, по определению, $C \overset{f}{\cong} [0_B, b) \subset B$ для некоторого $b \in B$. Поскольку $b \in C$, имеем $f(b) < b$. С другой стороны, $f(b) \geqslant b$ по лемме 19. Противоречие. $\square$

Лемма 28. *Пусть A, B, C в. у. м. и $B < C$. Тогда*

1. *$A + B < A + C$;*
2. *$B + A \leqslant C + A$;*
3. *если $A \neq \varnothing$, то $AB < AC$;*
4. *$BA \leqslant CA$.*

Доказательство.

1. Имеем $B \overset{f}{\cong} [0_C, c)$. Строим отображение $(a, 0) \mapsto (a, 0)$ для $a \in A$ и $(b, 1) \mapsto (f(b), 1)$ для $b \in B$. Ясно, что оно задает изоморфизм $A + B$ и $A + [0_C, c) = [0_{A+C}, (c, 1))$ для некоторого $c \in C$.
2. Как и в п. 1, легко получаем $B + A \cong [0_C, c) + A$. Однако последнее подмножество множества $C + A$ может не быть н. о. Поэтому нам остается лишь применить лемму 27.
3. Если $B \overset{f}{\cong} [0_C, c)$, то отображение $(a, b) \mapsto (a, f(b))$ дает $AB \cong A[0_C, c)$. Понятно, что последнее множество есть собственный н. о. AC, если $A \neq \varnothing$.
4. Имеем $BA \cong [0_C, c)A$. Последнее подмножество множества CA может не быть н. о.: например, если $a_1 <_A a_2$, то $(c, a_1) <_{CA} (0_C, a_2) \in [0_C, c)A$, хотя $(c, a_1) \notin [0_C, c)A$.

$\square$

Как показывает пример 13, неравенства в пп. 2 и 4 нельзя усилить до строгих. Тем не менее в. у. м. можно в некотором смысле вычитать и делить с остатком.

Лемма 29. *Пусть $A \geqslant B$. Тогда существует единственное с точностью до изоморфизма множество C, т. ч. $B + C \cong A$.*

Доказательство. Имеем $B \overset{f}{\cong} [0_A, a)$ для $a \in A$. Рассмотрим в. у. м. $C = \{x \in A \mid x \geqslant a\}$. Отображение $(b, 0) \mapsto f(b)$ для $b \in B$, $(c, 1) \mapsto c$ для $c \in C$, очевидно, осуществляет искомый изоморфизм.

Пусть найдутся C_1, C_2 т. ч. $B + C_1 \cong B + C_2$, причем $C_1 \ncong C_2$. Тогда множества C_1, C_2 сравнимы. Пусть, б. о. о., $C_1 < C_2$. Тогда по лемме 28, $B + C_1 < B + C_2$. Противоречие. □

Пример 30. Теперь видно, что обозначение элемента-последователя $x+1$ в в. у. м. согласовано с операцией суммы в. у. м. Действительно, $A+1$ является последователем A в классе в. у. м. в следующем смысле:

$$A + 1 > A \wedge \forall B\,(B > A \to B \geqslant A + 1).$$

Нужно представить $B = A + C$ и заметить, что всякое непустое C имеет хотя бы один элемент, откуда $C \geqslant 1$.

Лемма 31. *Пусть в. у. м. $B \neq \varnothing$ (эквивалентно, $B \geqslant 1$). Тогда для любого в. у. м. A существуют единственные с точностью до изоморфизма в. у. м. C и $R < B$, т. ч. $BC + R \cong A$.*

Доказательство. Рассмотрим в. у. м. $X = B(A+1)$. В силу леммы 28, имеем $A < A + 1 \leqslant B(A + 1)$. Поэтому $A \cong [0_X, (b, \alpha))$, где $b \in B$. По определению произведения в. у. м., $(b', \alpha') <_X (b, \alpha)$ тогда и только тогда, когда $\alpha' <_{A+1} \alpha$ (причем $b' \in B$ любое) или же $\alpha' = \alpha$ и $b' <_B b$. Поэтому, как легко видеть,

$$[0_X, (b, \alpha)) \cong B\,[0_{A+1}, \alpha) + [0_B, b).$$

Остается положить $C = [0_{A+1}, \alpha)$ и $R = [0_B, b) < B$.

Проверим однозначность. Пусть $BC_1 + R_1 \cong BC_2 + R_2$. Если $C_1 \cong C_2$, то $R_1 \cong R_2$ вытекает из леммы 29. В противном случае, б. о. о., $C_1 < C_2$. Тогда по той же лемме 29 найдется D, т. ч. $C_2 \cong C_1 + D$. Ясно, что $D \neq \varnothing$, т. е. $D \geqslant 1$. Учитывая лемму 15, имеем

$$BC_1 + R_1 \cong BC_1 + BD + R_2.$$

По лемме 29, $BD + R_2 \cong R_1$. Но $R_1 < B$, а по лемме 28, $BD + R_2 \geqslant B + R_2 \geqslant B$. Противоречие. □

Ординалы

Представляет интерес рассмотрение вполне упорядоченных множеств с точностью до изоморфизма, отвлекаясь от природы их элементов. Обычным путем в таких случаях является факторизация по отношению изоморфизма, однако в случае вполне упорядоченных множеств получающиеся классы эквивалентности (кроме класса пустого множества) «слишком велики»: в формальной теории множеств (если она непротиворечива) нельзя доказать, что существует, например, множество всех одноэлементных множеств (очевидно, всякое одноэлементное множество может быть вполне упорядоченно, причем все упорядочения попарно изоморфны).[4]

Для решения этой проблемы можно выбрать из каждого класса по одному «каноническому» представителю-множеству, которые называются *ординалами*. В основе излагаемой далее общеупотребительной конструкции лежит вполне-упорядочение некоторых множеств отношением $\in$.

Заметную (хотя и не необходимую для определения ординалов) роль будет играть *аксиома основания* (или *фундирования*, или *регулярности*), утверждающая фундированность любого множества по отношению $\in$:

$$\forall x\,(\exists y\, y \in x \to \exists y\,(y \in x \wedge \forall z\,(z \in y \to z \notin x))).$$

Иными словами, в любом непустом множестве x есть элемент y, не пересекающийся с этим множеством. В присутствии аксиомы выбора, указанный принцип эквивалентен своему следствию: не существует бесконечных убывающих цепей $X_1 \ni X_2 \ni \ldots X_n \ni X_{n+1} \ni \ldots$

Множество α называется *транзитивным*, если выполняется свойство

$$Trans(\alpha) \rightleftharpoons \forall x \forall y\,((x \in y \wedge y \in \alpha) \to x \in \alpha).$$

Множество называется *наследственно транзитивным*, если оно и все его элементы транзитивны. По определению, множество α является *ординалом* (обозначение $\alpha \in \mathrm{On}$), если оно наследственно транзитивно:

$$\alpha \in \mathrm{On} \rightleftharpoons Trans(\alpha) \wedge \forall x\,(x \in \alpha \to Trans(x)).$$

Пример 32. Очевидно, $\varnothing \in \mathrm{On}$. Найдем все ординалы мощности 1. Итак, пусть $\alpha = \{x\}$. Допустим, что $y \in x$. В силу аксиомы регулярности, $y \neq x$ и $|\alpha| \geqslant 2$, что не так. Значит, $x = \varnothing$.

Упражнение 33. Найдите все ординалы мощности 2. Приведите пример транзитивного, но не наследственно транзитивного множества.

Лемма 34. *Для любых множеств α и β верно:*

1. *если $\alpha \in \mathrm{On}$ и $\beta \in \alpha$, то $\beta \in \mathrm{On}$;*
2. *если $\alpha \in \mathrm{On}$ и $\beta, \gamma \in \alpha$, то $\beta \in \gamma$, $\beta = \gamma$ или $\beta \in \gamma$;*
3. *если $\alpha, \beta \in \mathrm{On}$, то $\beta \in \alpha$ равносильно $\beta \subset \alpha$;*
4. *если $\alpha, \beta \in \mathrm{On}$, то $\alpha \in \beta$, $\alpha = \beta$ или $\beta \in \alpha$.*

Доказательство.

1. Утверждение легко следует из определений.

[4] Действительно, заметим, что противоречиво существование множества всех множеств V. Если таковое есть, то по аксиоме выделения существует множество $R = \{x \in V \mid x \notin x\}$. Поскольку $R \in V$, известный аргумент Рассела показывает, что оба предположения $R \in R$ и $R \notin R$ ложны. Допустим теперь, что существует множество всех одноэлементных множеств S. Для всякого множества x в силу аксиом существует множество $\{x\} \in S$. Также существует множество $\cup S$. Легко видеть, что $V = \cup S$, но класс V не есть множество.

2. Предположим противное и рассмотрим непустое множество

$$X = \{\gamma \in \alpha \mid \exists \delta \in \alpha\, (\delta \notin \gamma \wedge \delta \neq \gamma \wedge \gamma \notin \delta)\}$$

и, взяв, в силу аксиомы регулярности, некоторое $\xi \in X$, т. ч. $X \cap \xi = \varnothing$, непустое множество

$$Y = \{\delta \in \alpha \mid \delta \notin \xi \wedge \delta \neq \xi \wedge \xi \notin \delta\}.$$

Рассмотрим также некоторое $\eta \in Y$, т. ч. $Y \cap \eta = \varnothing$. Докажем теперь, что $\xi = \eta$, что, очевидно, не так. Пусть $\gamma \in \xi$. Тогда $\gamma \notin X$, т. е. γ и η сравнимы в смысле $\in$. Если $\eta \in \gamma$ или $\eta = \gamma$, то $\eta \in \xi$, что не так. Значит, $\gamma \in \eta$ и $\xi \subseteq \eta$.

Пусть теперь $\gamma \in \eta \setminus \xi$. Имеем $\gamma \notin Y$. Но тогда $\xi = \gamma$ или $\xi \in \gamma$, а значит, $\xi \in \eta$, что неверно. Следовательно, $\eta \setminus \xi = \varnothing$. Получаем $\xi = \eta$.

3. Пусть $\beta \in \alpha$ и $\gamma \in \beta$. Из $Trans(\alpha)$ получаем $\gamma \in \alpha$. Поэтому $\beta \subseteq \alpha$. Если $\alpha = \beta$, то $\alpha \in \alpha$, что противоречит аксиоме регулярности.

Обратно. Предположим, что $\beta \subset \alpha$. В силу аксиомы регулярности, в непустом множестве $\alpha \setminus \beta$ есть элемент ξ, т. ч. $\xi \cap (\alpha \setminus \beta) = \varnothing$. Докажем, что $\xi = \beta$. По первому утверждению, $\xi \in \mathrm{On}$. Если $\eta \in \xi$, то $\eta \in \alpha$, но $\eta \notin \alpha \setminus \beta$, а значит, $\eta \in \beta$. Если, наоборот, $\eta \in \beta$, то $\xi \notin \eta$ и $\xi \neq \eta$, так как иначе $\xi \in \beta$. В силу второго утверждения, тогда $\eta \in \xi$. Итак, $\beta = \xi \in \alpha$.

4. Рассмотрим $\gamma = \alpha \cap \beta$. Легко видеть, что $\gamma \in \mathrm{On}$. Используя третье утверждение, получаем $\gamma \in \alpha$ или $\gamma = \alpha$, а также $\gamma \in \beta$ или $\gamma = \beta$. Разбор случаев дает $\alpha = \beta$, $\alpha \in \beta$, $\beta \in \alpha$, или $\gamma \in \alpha \cap \beta = \gamma$. Последний случай противоречит аксиоме регулярности.

□

Таким образом, мы убедились, что отношение $\in$ на классе On транзитивно и линейно. Вследствие аксиомы регулярности, оно также иррефлексивно, т.е. является линейным порядком. Соответственно, мы обозначим

$$\alpha < \beta \rightleftharpoons \alpha \in \beta.$$

Убедимся, наконец, что этот порядок фундирован, т. е. в любом непустом классе $C \subseteq \mathrm{On}$ есть наименьший элемент. Пусть $\alpha \in C$. Если α не наименьший, то рассмотрим непустой класс

$$C_\alpha = \{\beta \in C \mid \beta < \alpha\}.$$

Однако, $C_\alpha = \{\beta \in \alpha \mid \beta \in C\}$. В силу аксиомы выделения, класс C_α является множеством, и по аксиоме регулярности в нем существует $\in$-минимальный элемент, являющийся, в силу линейной упорядоченности, наименьшим в C.

Теорема 35. *Класс* On *вполне упорядочен отношением* $<$, *причем* $\alpha = \{\beta \in \mathrm{On} \mid \beta < \alpha\}$ *для всех* $\alpha \in \mathrm{On}$.

Любое *множество* ординалов ограничено в классе On. Точнее, выполнено следующее.

Лемма 36. *Для любого множества* $X \subset \mathrm{On}$ *существует* $\sup X = \cup X$.

Доказательство. Напомним, что $\cup X = \{y \mid \exists z\,(z \in X \wedge y \in z)\}$. Аксиомы гарантируют, что для всякого множества X класс $\cup X$ является множеством. Проверим, что если $X \subset \mathrm{On}$, то $\cup X \in \mathrm{On}$. Пусть $y \in \cup X$. Тогда $y \in z \in X$ для некоторого z. Так как $z \in \mathrm{On}$, то $Trans(y)$. Также если $w \in y$, то $w \in z$ и $w \in \cup X$, т. е. $Trans(\cup X)$. Обозначим $\beta = \cup X$.

Пусть $\alpha \in X$. Тогда $\alpha \subseteq \beta$, что, в силу п. 3 леммы 34, дает $\alpha \in \beta$ или $\alpha = \beta$. Значит, $\alpha \leqslant \beta$. Согласно лемме 4, существует $\sup X \leqslant \beta$. С другой стороны, для всякого $\gamma < \beta$ имеем $\gamma \in \cup X$. Поэтому найдется $\alpha \in X$, т. ч. $\gamma \in \alpha$, т. е. $\gamma < \alpha$. Следовательно, $\sup X \geqslant \beta$. □

Предельные ординалы

В силу теоремы 35, существует наименьший ординал, обозначаемый 0, и для всякого $\alpha \in \mathrm{On}$ найдется *последователь* α

$$\alpha + 1 \rightleftharpoons \min\{\beta \in \mathrm{On} \mid \alpha < \beta\}.$$

Лемма 37. *Выполнено* $0 = \varnothing$ *и* $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ *для любого* $\alpha \in \mathrm{On}$.

Доказательство. Как мы видели, $\varnothing \in \mathrm{On}$. Имеем $\varnothing \subseteq \alpha$, а по п. 3 леммы 34, и $\varnothing \leqslant \alpha$ для любого $\alpha \in \mathrm{On}$.

Проверим, что $\alpha \cup \{\alpha\} \in \mathrm{On}$. Пусть $x \in \alpha \cup \{\alpha\}$. Тогда $x \in \alpha$ или $x = \alpha$. В обоих случаях $Trans(x)$. Если $y \in x$, то $y \in \alpha$ и $y \in \alpha \cup \{\alpha\}$, откуда $Trans(\alpha \cup \{\alpha\})$.

По п. 3 леммы 34, из $\alpha \subset \alpha \cup \{\alpha\}$ (включение строгое, т. к. $\alpha \notin \alpha$) заключаем $\alpha < \alpha \cup \{\alpha\}$. Допустим, что $\alpha < \beta$. Имеем $\alpha \in \beta$ и $\alpha \subset \beta$, откуда $\alpha \cup \{\alpha\} \subseteq \beta$ и $\alpha \cup \{\alpha\} \leqslant \beta$. □

Пример 38. Класс On не является множеством, так как иначе можно рассмотреть ординал $\sup \mathrm{On} + 1$ и сравнить его с $\sup \mathrm{On}$.

Лемма 39. *Пусть* $\alpha \in \mathrm{On}$. *Тогда равносильны условия:*

1. $\alpha = \sup \alpha$;
2. $\forall \beta \in \mathrm{On}\, \neg(\beta + 1 = \alpha)$;
3. $\forall \beta < \alpha\, (\beta + 1 < \alpha)$.

Доказательство. Аналогично лемме 10. □

Любое из приведенных эквивалентных условий можно считать определением *предельного* ординала. Ординал 0 часто исключают из числа предельных, поскольку он единственный из них является конечным множеством. Видим, что всякий ординал α либо равен нулю, либо предельный ненулевой, либо *ординал-последователь*, т. е. $\exists \beta\, (\alpha = \beta + 1)$, причем эти возможности попарно несовместны.

Класс предельных ординалов обозначим Lim и положим $Lim_+ = Lim \setminus \{0\}$.

Почему существуют предельные ординалы, отличные от 0? Или, содержательно, почему существуют бесконечные множества? Оказывается, что в формальной теории множеств их существование необходимо постулировать.

Относительно простой способ сделать это таков. Множество X называется *индуктивным*, если

$$\varnothing \in X \wedge \forall y\,(y \in X \to y \cup \{y\} \in X).$$

Аксиома бесконечности гласит: существует индуктивное множество.

Лемма 40. *Пусть множество X индуктивное. Тогда* $\sup(X \cap \mathrm{On}) \in Lim_{+}$.

Доказательство. Ясно, что класс $Y = X \cap \mathrm{On} = \{y \in X \mid y \in \mathrm{On}\}$ является множеством. Покажем, что множество Y индуктивное. В самом деле, $\varnothing \in X \cap \mathrm{On}$ в силу определений. Пусть $\beta \in Y$. По определению индуктивного множества, $\beta \cup \{\beta\} \in X$. По лемме 37, $\beta \cup \{\beta\} \in \mathrm{On}$. Итак, $\beta \cup \{\beta\} \in Y$.

По лемме 36, существует ординал $\alpha = \sup Y$, причем $\alpha = \cup Y$. Допустим, что $\beta < \alpha$, и докажем $\beta + 1 < \alpha$. Имеем $\beta \in \cup Y$, а значит, найдется $\gamma \in Y$, т. ч. $\beta \in \gamma$, т. е. $\beta < \gamma$. По определению последователя, $\beta + 1 \leqslant \gamma < \gamma + 1$, откуда $\beta + 1 \in \gamma + 1$. С другой стороны, $\gamma + 1 = \gamma \cup \{\gamma\} \in Y$ в силу индуктивности Y. Следовательно, $\beta + 1 \in \cup Y$, т. е. $\beta + 1 < \alpha$.

Итак, $\alpha \in Lim$. Вследствие индуктивности, $\varnothing \cup \{\varnothing\} \in Y$, откуда $0 = \varnothing \in \cup Y = \alpha$. Значит, $\alpha > 0$. □

Определим $\omega \rightleftharpoons \min Lim_{+}$. Ординалы, меньшие ω, называются *конечными* ординалами, или *натуральным числами.*[5] По определению,

$$1 = 0 + 1,\ 2 = 1 + 1,\ 3 = 2 + 1 \text{ и т. д.}$$

Трансфинитная индукция и рекурсия

Теорему 35 легко переформулировать в следующем виде (ср. с теоремой 7):

> если для некоторого класса ординалов C выполнено $\forall \alpha \in \mathrm{On}\,(\forall \beta < \alpha\,(\beta \in C) \to \alpha \in C)$, то $C = \mathrm{On}$.

С учетом того, что всякий ординал есть последователь или предельный, можно дать и другую эквивалентную формулировку, наиболее удобную практически:

Теорема 41 (трансфинитная индукция)**.** *Пусть C есть некоторый класс ординалов, причем*

- $0 \in C$*;*
- $\forall \xi \in \mathrm{On}\,(\xi \in C \to \xi + 1 \in C)$*;*
- $\forall \lambda \in Lim_{+}\,(\forall \eta < \lambda\,(\eta \in C) \to \lambda \in C)$,

[5]Разумеется, здесь присутствует некоторая трудность философского порядка: до сих пор мы развивали наш курс, свободно используя натуральные числа, а теперь мы *определяем* их как множества специального вида. Пути полного искоренения этой трудности едва ли существуют. Мы предлагаем читателю примириться с мыслью, что у нас были некие *внешние*, или *содержательные* натуральные числа, которые мы никак не определяли, но и свойства которых использовали лишь *самые очевидные* (что бы это ни значило!). Теперь же мы определили (в теории первого порядка, вообще говоря) *внутренние*, или *формальные* натуральные числа, свойства которых сможем вывести из аксиом нашей теории. Предлагается поверить в то, что для определения нашей теории от натуральных числе нужно *совсем мало*, а всю прочую математику, знакомую нам и незнакомую, можно-де развить в рамках формальной теории множеств. . .

то $C = \mathrm{On}$.

Доказательство. В противном случае, по теореме 35, найдется наименьший ординал в классе $\mathrm{On} \setminus C$, который должен быть нулем, предельным ненулевым ординалом, либо последователем. $\square$

В случае натуральных чисел, мы по индукции доказывали существование и единственность функции, определенной «рекурсивно»: через несколько своих предшествующих значений. Аналогичным образом, возможна *трансфинитная рекурсия* на классе ординалов. В теории множеств мы, однако, не ограничены одним или несколькими предыдущими значениями, а можем использовать весь уже определенный кусок графика нашей функции.

Пусть A и B суть некоторые классы. Класс F называется *функцией* из A в B, если выполнено следующее:

- $\forall w\, (w \in F \to \exists x \exists y\, (x \in A \wedge y \in B \wedge w = (x, y))$;
- $\forall x\, (x \in A \to \exists y\, (y \in B \wedge (x, y) \in F))$;
- $\forall x \forall y \forall z (((x, y) \in F \wedge (x, z) \in F) \to y = z)$.

(Как видим, это требование состоять из пар нужного вида и обычные условия тотальности и функциональности.) Если $F\colon A \to B$ и C некоторый класс, то по определению $F(C) \rightleftharpoons \{y \mid \exists x\, (x \in C \wedge (x, y) \in F)\}$ и $F \restriction C \rightleftharpoons \{(x, y) \mid x \in C \wedge (x, y) \in F\}$. *Схема аксиом по подстановки* утверждает, что для любой функции-класса F и любого *множества* X класс $F(X)$ является множеством: «образ множества есть множество».

Отсюда следует, что $F \restriction X$ также является множеством, поскольку $F \restriction X = \{(x, y) \in X \times F(X) \mid (x, y) \in F\}$, а существование декартова произведения множеств обеспечивают аксиомы.

Теорема 42 (трансфинитная рекурсия)**.** *Для произвольного отображения $G\colon V \to V$, где V есть класс всех множеств, существует и единственно отображение $F\colon \mathrm{On} \to V$, такое что*

$$F(\alpha) = G(F \restriction \alpha)$$

для всех $\alpha \in \mathrm{On}$.

Мы не станем приводить (не очень сложного) доказательства. Вместо него, приведем следствие, удобное для практического применения.

Теорема 43. *Для произвольного ординала γ, произвольных функций $S\colon V \to V$ и $L\colon V \to V$ существует и единственно отображение $F\colon \mathrm{On} \to V$, такое что*

- $F(0) = \gamma$;
- $F(\xi + 1) = S(F(\xi))$;
- $F(\lambda) = L(F \restriction \lambda)$

для всех $\alpha \in \mathrm{On}$ и $\lambda \in Lim_+$.

Ординальная арифметика

В силу теоремы 43, для любого $\alpha \in \mathrm{On}$ существует и единственна функция $x \mapsto \alpha + x$, определенная равенствами:

- $\alpha + 0 = \alpha$;
- $\alpha + (\xi + 1) = (\alpha + \xi) + 1$;
- $\alpha + \lambda = \sup\{\alpha + \eta \mid \eta < \lambda\}$ для $\lambda \in Lim_+$.

(Существование супремума следует из леммы 36.) Исследуем свойства сложения ординалов, используя трансфинитную индукцию.

Пример 44. Легко заметить, что сложение, взятие последователя и ординал $\mathbf{1} = 0 + 1$ (в этом примере мы намеренно выделили его) определены согласованным образом. В самом деле,

$$\alpha + \mathbf{1} = \alpha + (0 + 1) = (\alpha + 0) + 1 = \alpha + 1.$$

Лемма 45 (монотонность сложения)**.** *Для всех* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{On}$ *из* $\beta < \gamma$ *следует:*

1. $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$;
2. $\beta + \alpha \leqslant \gamma + \alpha$.

Доказательство.

1. Индукция по γ. Пусть $\gamma = 0$. Тогда $\forall \beta < 0\,(\alpha + \beta < \alpha + \gamma)$ тривиальным образом. Допустим, что $\gamma = \xi + 1$. Так как $\beta < \xi + 1$, то, по определению последователя, $\beta \not> \xi$, что влечет $\beta \leqslant \xi$ в силу линейности. По предположению индукции и определениям,

   $$\alpha + \beta \leqslant \alpha + \xi < (\alpha + \xi) + 1 = \alpha + (\xi + 1) = \alpha + \gamma.$$

   Пусть теперь $\gamma = \lambda$. Имеем $\beta < \lambda = \sup \lambda$, а значит, найдется $\eta < \lambda$, т. ч. $\beta < \eta$. По предположению индукции и определениям получаем

   $$\alpha + \beta < \alpha + \eta \leqslant \sup\{\alpha + \eta \mid \eta < \lambda\} = \alpha + \lambda.$$

2. Индукция по α. Пусть $\alpha = 0$. Тогда $\beta + 0 = \beta \leqslant \gamma = \gamma + 0$. Пусть $\alpha = \xi + 1$. Имеем $\beta + (\xi + 1) = (\beta + \xi) + 1$ и $\gamma + (\xi + 1) = (\gamma + \xi) + 1$. По предположению индукции, $\gamma + \xi \leqslant \beta + \xi$. Легко понять, что $x \leqslant y$ влечет $x + 1 \leqslant y + 1$, так как из $x + 1 > y + 1$ следует $y + 1 \leqslant x \leqslant y$.

   Остается случай $\alpha = \lambda$. Для каждого $\eta < \lambda$ по предположению индукции имеем $\beta + \eta \leqslant \gamma + \eta \leqslant \sup\{\gamma + \eta \mid \eta < \lambda\} = \gamma + \lambda$. Таким образом, $\gamma + \lambda$ является верхней гранью множества $\{\beta + \eta \mid \eta < \lambda\}$. Поэтому

   $$\beta + \lambda = \sup\{\beta + \eta \mid \eta < \lambda\} \leqslant \gamma + \lambda.$$

□

Упражнение 46. Докажите, что $0 + \alpha = \alpha$ для всех $\alpha \in \mathrm{On}$.

Строго говоря, мы не можем просто так отождествить ординалы, меньшие ω, с «содержательными» натуральными числами. Тем не менее, их естественные арифметические свойства легко установить с помощью трансфинитной индукции (или индукции по в. у. м. ω).

Упражнение 47. Докажите, что для любых $n, m < \omega$ верно:

1. $m + n < \omega$;
2. $(n+1) + m = (n+m) + 1$;
3. $n + m = m + n$.

Пример 48. Вычислим $k+\omega$ для $k < \omega$. Имеем $k+\omega = \sup\{k+n \mid n < \omega\}$. Поскольку $k + n < \omega$ при всех $n < \omega$, $\sup\{k + n \mid n < \omega\} \leqslant \omega$. С другой стороны, если $m < \omega$, то

$$m = 0 + m \leqslant k + m < (k+m) + 1 = k + (m+1),$$

причем $m + 1 < \omega$. Значит, $\sup\{k + n \mid n < \omega\} \geqslant \omega$. Итак, $k + \omega = \omega$.

Отсюда и из леммы 45 вытекает, что сложение не всегда коммутативно: $1 + \omega = \omega < \omega + 1$.

Лемма 49 (вычитание)**.** *Для всех* $\alpha, \beta \in \mathrm{On}$*, если* $\alpha \geqslant \beta$*, существует единственный* $\gamma \in \mathrm{On}$*, т. ч.* $\alpha = \beta + \gamma$.

Доказательство. Рассмотрим класс

$$X = \{\eta \in \mathrm{On} \mid \beta + \eta \leqslant \alpha\}.$$

По лемме 45, для всех $\delta \geqslant \alpha + 1$ имеем

$$\beta + \delta > \beta + \alpha \geqslant 0 + \alpha = \alpha,$$

т. е. $\delta \notin X$. Поэтому $\eta \in X$ влечет $\eta < \alpha+1$, откуда $X \subseteq \alpha+1$, и класс X является множеством. Значит, существует $\gamma = \sup X$. Покажем, предположив противное, что $\gamma \in X$, т. е. $\gamma = \max X$.

Пусть $\gamma = 0$. Тогда $\beta = \beta + 0 = \beta + \gamma > \alpha$, что не так. Пусть теперь $\gamma = \xi + 1$. Тогда для всех $\delta > \xi$ имеем $\beta + \delta \geqslant \beta + (\xi + 1) > \alpha$. Значит, $\delta \in X$ влечет $\delta \leqslant \xi$, и $\xi < \gamma$ является верхней гранью X, что не так. Наконец, допустим $\gamma = \lambda$. Но $\sup\{\beta + \eta \mid \eta < \lambda\} = \beta + \lambda > \alpha$ означает, что найдется $\theta < \lambda$, т. ч. $\beta + \theta > \alpha$. Как и в предыдущем случае, по лемме 45, отсюда вытекает, что $\theta < \gamma$ является верхней гранью множества X, что неверно.

Итак, получили $\beta + \gamma \leqslant \alpha$. С другой стороны, имеем $(\beta + \gamma) + 1 = \beta + (\gamma + 1) > \alpha$, откуда $\beta + \gamma \geqslant \alpha$.

Установим единственность. Пусть $\beta + \gamma_1 = \alpha = \beta + \gamma_2$. Если $\gamma_1 \neq \gamma_2$, то б. о. о. $\gamma_1 < \gamma_2$ и, в силу монотонности сложения, $\alpha < \alpha$. □

Лемма 50 (ассоциативность сложения)**.** *Для всех* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{On}$ *выполнено* $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

Доказательство. Индукция по γ. Если $\gamma = 0$, то $(\alpha + \beta) + 0 = \alpha + \beta = \alpha + (\beta + 0)$. Пусть $\gamma = \xi + 1$. Используя предположение индукции, имеем:

$$(\alpha + \beta) + (\xi + 1) = ((\alpha + \beta) + \xi) + 1 = (\alpha + (\beta + \xi)) + 1 = \alpha + ((\beta + \xi) + 1) = \alpha + (\beta + (\xi + 1)).$$

Пусть теперь $\gamma = \lambda$. По предположению индукции, имеем

$$(\alpha + \beta) + \lambda = \sup\{(\alpha + \beta) + \eta \mid \eta < \lambda\} = \sup\{\alpha + (\beta + \eta) \mid \eta < \lambda\}.$$

Покажем, что $\alpha + (\beta + \lambda)$ также является наименьшей верхней гранью множества $\{\alpha + (\beta + \eta) \mid \eta < \lambda\}$.

Для любого $\eta < \lambda$, $\alpha + (\beta + \eta) \leqslant \alpha + (\beta + \lambda)$ в силу монотонности. С другой стороны, пусть $\sigma < \alpha + (\beta + \lambda)$. Тогда σ не будет верхней гранью нужного множества. В самом деле, если $\sigma < \alpha$, то $\sigma < \alpha + 0 \leqslant \alpha + (\beta + \eta)$ для $\eta = 0 < \lambda$. Если же $\sigma \geqslant \alpha$, применим лемму 49: $\sigma = \alpha + \theta$, причем $\theta < \beta + \lambda = \sup\{\beta + \eta \mid \eta < \lambda\}$ по монотонности. Последнее означает, что найдется $\eta < \lambda$, т. ч. $\theta < \beta + \eta$ и $\sigma = \alpha + \theta < \alpha + (\beta + \eta)$. □

Аналогично, можно дать рекурсивное определение для функции $x \mapsto \alpha x$ умножения на α слева:

- $\alpha 0 = 0$;
- $\alpha(\xi + 1) = \alpha\xi + \alpha$;
- $\alpha\lambda = \sup\{\alpha\eta \mid \eta < \lambda\}$ для $\lambda \in Lim_+$.

Упражнение 51. Докажите, что $0\alpha = 0$ и $1\alpha = \alpha$ для всех $\alpha \in \mathrm{On}$.

Ординалы, меньшие ω, ожидаемо ведут себя в отношении умножения как натуральные числа.

Упражнение 52. Используя результаты упражнения 47, докажите, что для любых $n, m < \omega$ верно:

1. $mn < \omega$;
2. $(n + 1)m = nm + m$;
3. $nm = mn$.

Лемма 53 (монотонность умножения)**.** *Для всех* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{On}$ *из* $\beta < \gamma$ *следует:*

1. *если* $\alpha > 0$*, то* $\alpha\beta < \alpha\gamma$*;*
2. $\beta\alpha \leqslant \gamma\alpha$.

Доказательство.

1. Индукция по γ. Случай $\gamma = 0$ тривиален. Пусть $\gamma = \xi + 1$. Из $\beta < \xi + 1$ заключаем $\beta \leqslant \xi$. По предположению индукции и лемме 45,

$$\alpha\beta \leqslant \alpha\xi = \alpha\xi + 0 < \alpha\xi + \alpha = \alpha(\xi + 1) = \alpha\gamma.$$

Пусть теперь $\gamma = \lambda$. Поскольку $\beta < \lambda = \sup\lambda$, существует $\eta < \lambda$, т. ч. $\beta < \eta$. По предположению индукции,

$$\alpha\beta < \alpha\eta \leqslant \sup\{\alpha\eta \mid \eta < \lambda\} = \alpha\lambda.$$

2. Индукция по α. При $\alpha = 0$ имеем $\beta 0 = 0 = \gamma 0$. Пусть $\alpha = \xi + 1$. Используя предположение индукции и лемму 45, получаем:

$$\beta(\xi+1) = \beta\xi + \beta \leqslant \gamma\xi + \beta < \gamma\xi + \gamma = \gamma(\xi+1).$$

Пусть, наконец, $\alpha = \lambda$. Для любого $\eta < \lambda$, по предположению индукции,

$$\beta\eta \leqslant \gamma\eta \leqslant \sup\{\gamma\eta \mid \eta < \lambda\}.$$

Следовательно,

$$\beta\lambda = \sup\{\beta\eta \mid \eta < \lambda\} \leqslant \sup\{\gamma\eta \mid \eta < \lambda\} = \gamma\lambda.$$

□

Пример 54. Пусть $0 < k < \omega$. Вычислим $k\omega$. По определению, $k\omega = \sup\{kn \mid n < \omega\}$. Для любого $n < \omega$ имеем $kn < \omega$. С другой стороны, если $m < \omega$, то $m = 1m \leqslant km < km+k = k(m+1)$ в силу монотонности. Поэтому $\sup\{kn \mid n < \omega\} = \omega$.

Отсюда видно, что умножение не всегда коммутативно: $2\omega = \omega = \omega 1 < \omega 2$.

Лемма 55 (деление с остатком)**.** *Для всех $\alpha \in \mathrm{On}$ и всех $\beta > 0$, существуют единственные $\tau \in \mathrm{On}$ и $\rho < \beta$, т. ч. $\alpha = \beta\tau + \rho$.*

Доказательство. Рассмотрим класс

$$X = \{\eta \in \mathrm{On} \mid \beta\eta \leqslant \alpha\}.$$

По лемме 53, для всех $\delta \geqslant \alpha+1$ имеем $\beta\delta > \beta\alpha \geqslant 1\alpha = \alpha$, т. е. $\delta \notin X$. Поэтому $\eta \in X$ влечет $\eta < \alpha+1$, откуда $X \subseteq \alpha+1$, и класс X является множеством. Значит, существует $\tau = \sup X$. Покажем, предположив противное, что $\tau \in X$, т. е. $\tau = \max X$.

Пусть $\tau = 0$. Тогда $0 = \beta 0 > \alpha$, что не так. Пусть теперь $\tau = \xi + 1$. Тогда для всех $\delta > \xi$ имеем $\beta\delta \geqslant \beta(\xi+1) > \alpha$. Значит, $\delta \in X$ влечет $\delta \leqslant \xi$, и $\xi < \tau$ является верхней гранью X, что не так. Допустим, что $\tau = \lambda$. Но из $\alpha < \beta\lambda = \sup\{\beta\eta \mid \eta < \lambda\}$ следует, что найдется $\theta < \lambda$, т. ч. $\beta\theta > \alpha$. Вследствие монотонности, для любого $\delta > \theta$ имеем $\delta \notin X$. Значит, $\theta < \lambda$ есть верхняя грань множества X. Противоречие.

Мы показали, что $\beta\tau \leqslant \alpha$. Применяя лемму 49, видим, что существует ординал ρ, т. ч. $\alpha = \beta\tau + \rho$. Если $\rho \geqslant \beta$, то $\alpha \geqslant \beta\tau + \beta = \beta(\tau+1)$, а значит, $\tau + 1 \in X$ и $\tau \neq \sup X$. Поэтому $\rho < \beta$.

Установим теперь единственность. Пусть $\beta\tau_1 + \rho_1 = \alpha = \beta\tau_2 + \rho_2$, где $\rho_i < \beta$. Если $\tau_1 \neq \tau_2$, положим б. о. о., что $\tau_1 < \tau_2$. Тогда $\tau_1 + 1 \leqslant \tau_2$. Используя леммы 45 и 53, получаем

$$\beta\tau_1 + \rho_1 < \beta\tau_1 + \beta = \beta(\tau_1+1) \leqslant \beta\tau_2 = \beta\tau_2 + 0 \leqslant \beta\tau_2 + \rho_2,$$

откуда $\alpha < \alpha$, что не так. Значит, $\tau_1 = \tau_2$. В силу леммы 49, $\rho_1 = \rho_2$. □

Лемма 56.

1. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$*;*

2. $\gamma(\alpha+\beta) = \gamma\alpha + \gamma\beta$.

Используя свойства умножения, можно понять, как устроены предельные ординалы.

Лемма 57. *$\alpha \in Lim_+$ тогда и только тогда, когда $\exists \beta > 0\, (\alpha = \omega\beta)$.*

Доказательство. Пусть $\alpha = \omega\beta$ для некоторого $\beta > 0$. Установим $\alpha = \sup\alpha$. Достаточно для произвольного $\xi < \alpha$ указать η, т. ч. $\xi < \eta < \alpha$. Если $\beta = \gamma + 1$, имеем $\alpha = \omega(\gamma+1) = \omega\gamma + \omega = \sup\{\omega\gamma + n \mid n < \omega\}$. Поэтому найдется $m < \omega$, т. ч. $\xi < \omega\gamma + m < \alpha$. Берем $\eta = \omega\gamma + m$. Пусть теперь $\beta \in Lim_+$. Тогда $\alpha = \omega\beta = \sup\{\omega\theta \mid \theta < \beta\}$. Следовательно, существует $\chi < \beta$, т. ч. $\xi < \omega\chi < \alpha$. Берем $\eta = \omega\chi$.

Обратно. Допустим $\alpha \in Lim_+$. По лемме 55, найдутся β и $\rho < \omega$, т. ч. $\alpha = \omega\beta + \rho$. Если $\beta = 0$, то $\alpha = \rho < \omega = \min Lim_+$, что не так. Если $\rho > 0$, то $\rho = n + 1$ для некоторого $n < \omega$. Тогда $\alpha = \omega\beta + (n+1) = (\omega\beta + n) + 1$, т. е. $\alpha \notin Lim$. Следовательно, $\beta > 0$ и $\rho = 0$, что и требовалось. □

Трансфинитная рекурсия позволяет доказывать существование функций ординалов, для которых нелегко придумать наглядное представление через операции на в. у. м. Важнейшей из таковых является возведение в степень α^x.

1. $\alpha^0 = 1$;
2. $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta\alpha$;
3. $\alpha^\lambda = \sup\{\alpha^\gamma \mid \gamma < \lambda\}$ для $\lambda \in Lim_+$.

Лемма 58. *Пусть $\beta < \gamma$ и $\alpha > 1$. Тогда*

1. $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$;

2. $\beta^\alpha \leqslant \gamma^\alpha$.

Доказательство. Оба свойства доказываются трансфинитной индукцией.

1. Согласно лемме 49, достаточно показать, что $\alpha^\beta < \alpha^{\beta+\delta}$ для всех $\delta > 0$. Нам нужно обосновать «индукционный переход» (или проверить «прогрессивность» множества $\{\delta \mid \delta > 0 \wedge \alpha^\beta < \alpha^{\beta+\delta}\}$): установить для всех $\delta > 0$, что
$$\forall \eta < \delta\, (\alpha^\beta < \alpha^{\beta+\eta}) \to (\alpha^\beta < \alpha^{\beta+\delta}).$$
Допустим посылку этой импликации («предположение индукции») и выведем заключение. Если $\delta = \xi + 1$, то $\xi < \delta$ и $\alpha^\beta < \alpha^{\beta+\xi}$). Отсюда, опираясь на известные свойства сложения и умножения, а также на определение возведения в степень, имеем
$$\alpha^{\beta+\delta} = \alpha^{\beta+(\xi+1)} = \alpha^{(\beta+\xi)+1} = \alpha^{\beta+\xi}\alpha > \alpha^{\beta+\xi}1 = \\ \alpha^{\beta+\xi}(0+1) = \alpha^{\beta+\xi}0 + \alpha^{\beta+\xi} = 0 + \alpha^{\beta+\xi} = \alpha^{\beta+\xi} + 0 = \alpha^{\beta+\xi} > \alpha^\beta.$$
Теперь рассмотрим случай $\delta \in Lim$. Тогда $\beta + \delta \in Lim$ (проверьте!). Имеем $\alpha^{\beta+\delta} = \sup\{\alpha^\xi \mid \xi < \beta+\delta\}$. Ясно, что $1 < \delta$ и $\beta + 1 < \beta + \delta$. По предположению индукции $\alpha^{\beta+1} > \alpha^\beta$. Как супремум, $\alpha^{\beta+\delta} \geqslant \alpha^{\beta+1} > \alpha^\beta$.

2. Индукцией по α установим $\beta^\alpha \leqslant \gamma^\alpha$ для всех α. Если $\alpha = 0$, то $\beta^0 = 1 = \gamma^0$ по определению. Если $\alpha = \xi+1$, то по предположению индукции $\beta^\xi \leqslant \gamma^\xi$ имеем
$$\beta^{\xi+1} = \beta^\xi\beta < \beta^\xi\gamma \leqslant \gamma^\xi\gamma = \gamma^{\xi+1}.$$
Пусть теперь $\alpha \in Lim$. Нужно сравнить $\beta^\alpha = \sup\{\beta^\eta \mid \eta < \alpha\}$ и $\gamma^\alpha = \sup\{\gamma^\eta \mid \eta < \alpha\}$. Имеем $\gamma^\eta \leqslant \gamma^\alpha$ для всех $\eta < \alpha$. По предположению индукции отсюда получаем $\beta^\eta \leqslant \gamma^\alpha$ для всех $\eta < \alpha$. Значит, γ^α есть верхняя грань множества $\{\beta^\eta \mid \eta < \alpha\}$ и $\beta^\alpha \leqslant \gamma^\alpha$.

□

Индукцией также легко проверить, что $1^\alpha = 1$ для любого α.

Упражнение 59. Как ведет себя 0^α? А если $\alpha \in Lim$?

Упражнение 60. Верно ли, что $\beta^\alpha < \gamma^\alpha$, если $1 < \beta < \gamma$ и $0 < \alpha$? Сравните 2^ω и 3^ω.

Пример 61. Вычислим $\alpha = \omega^2 5 + \omega^\omega + (\omega+1)^2$.

По определению, $\omega^\omega = \sup\{\omega^n \mid n < \omega\}$. В частности, $\omega^\omega \geqslant \omega^3$. По лемме 49, $\omega^\omega = \omega^3 + \gamma$ для некоторого γ. С другой стороны, $\omega^2 5 + \omega^3 = \omega^2(5+\omega)$. Для всякого $n < \omega$, $n + \omega = \sup\{n + m \mid m < \omega\} \leqslant \omega$. Очевидно, для всякого $k < \omega$ верно $k < n + (k+1) < \omega$. Поэтому $n + \omega = \omega$. Отсюда $\omega^2 5 + \omega^3 = \omega^2\omega = \omega^3$ и $\omega^2 5 + \omega^\omega = \omega^2 5 + (\omega^3 + \gamma) = (\omega^2 5 + \omega^3) + \gamma = \omega^3 + \gamma = \omega^\omega$. Значит, $\alpha = \omega^\omega + (\omega+1)^3$. Попутно мы, по существу, установили, что $\omega^m + \omega^n = \omega^n$ при $m < n < \omega$.

Далее, $(\omega+1)^2 = (\omega+1)\omega + \omega + 1$. Имеем $(\omega+1)\omega = \sup\{(\omega+1)n \mid n < \omega\}$. Индукцией по $n < \omega$ (таковая осмыслена, поскольку W_ω есть в.у.м.) установим $(\omega+1)n = \omega n + 1$ для всех $n > 0$. Случай $n = 1$ тривиален. Допустим $(\omega+1)n = \omega n + 1$. Тогда $(\omega+1)(n+1) = (\omega+1)n + \omega + 1 = \omega n + 1 + \omega + 1 = \omega n + \omega + 1 = \omega(n+1) + 1$. Получили $(\omega+1)\omega = \sup\{\omega n + 1 \mid n < \omega\}$. Последний супремум равен ω^2. Действительно, $\omega n + 1 < \omega n + \omega = \omega(n+1) < \omega^2$ для любого $n < \omega$. Пусть теперь $\xi < \omega^2 = \sup\{\omega n \mid n < \omega\}$. Это означает, что $\xi < \omega m < \omega m + 1$ для некоторого $m < \omega$. Итак, $(\omega+1)\omega = \omega^2$ и $(\omega+1)^2 = \omega^2 + \omega + 1$.

Окончательно, $\alpha = \omega^\omega + \omega^2 + \omega + 1$.

Упражнение 62. Докажите, что $(\omega+1)^n = \omega^n + \omega^{n-1} + \ldots + \omega + 1$ для всех $n < \omega$. (*Индукция по* $n < \omega$).

Пример 63. $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta\alpha^\gamma$ при $\alpha > 0$.
Случай $\alpha = 1$ тривиален. Предположим $\alpha > 1$. Ведем индукцию по γ. Нам нужно для любого γ установить
$$\forall \eta < \gamma\,(\alpha^{\beta+\eta} = \alpha^\beta\alpha^\eta) \to (\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta\alpha^\gamma).$$
Допускаем, что выполнена посылка, и разбираем возможные случаи. Если $\gamma = 0$, то $\alpha^{\beta+0} = \alpha^\beta = \alpha^\beta 1 = \alpha^\beta\alpha^0$. Пусть $\gamma = \xi + 1$. Имеем $\alpha^{\beta+\xi} = \alpha^\beta\alpha^\xi$, откуда
$$\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta+(\xi+1)} = \alpha^{(\beta+\xi)+1} = \alpha^{(\beta+\xi)}\alpha =$$
$$(\alpha^\beta\alpha^\xi)\alpha = \alpha^\beta(\alpha^\xi\alpha) = \alpha^\beta\alpha^{\xi+1} = \alpha^\beta\alpha^\gamma.$$

Допустим теперь, что $\gamma \in Lim$. Имеем $\alpha^\beta\alpha^\gamma = \alpha^\beta \sup\{\alpha^\eta \mid \eta < \gamma\}$. С другой стороны, поскольку $\beta+\gamma \in Lim$, $\alpha^{\beta+\gamma} = \sup\{\alpha^\xi \mid \xi < \beta+\gamma\}$. Покажем, что супремум не измениться, если удалить из множества собственный начальный отрезок:

$$\sup\{\alpha^\xi \mid \xi < \beta+\gamma\} = \sup\{\alpha^{\beta+\eta} \mid \eta < \gamma\}.$$

Действительно, пусть $c \geqslant \alpha^\xi$ при всех $\xi < \beta+\gamma$. В частности, это верно при $\xi_\eta = \beta+\eta < \beta+\gamma$ для всех $\eta < \gamma$. Обратно, пусть $c \geqslant \alpha^{\beta+\eta}$ при всех $\eta < \gamma$. Тогда $c \geqslant \alpha^\beta \geqslant \alpha^\xi$ для всех $\xi < \beta$. Последнее неравенство следует из леммы 58. Если $\beta \leqslant \xi < \beta+\gamma$, то $\xi = \beta+\eta$ для некоторого $\eta < \gamma$. Поэтому и тогда $c \geqslant \alpha^\xi$. Итак множества верхних граней совпадают, следовательно, совпадают и супремумы. По предположению индукции,

$$\alpha^{\beta+\gamma} = \sup\{\alpha^{\beta+\eta} \mid \eta < \gamma\} = \sup\{\alpha^\beta\alpha^\eta \mid \eta < \gamma\}.$$

Остается доказать, что $\sup\{\alpha^\beta\alpha^\eta \mid \eta < \gamma\} = \alpha^\beta \sup\{\alpha^\eta \mid \eta < \gamma\}$. Имеем $\alpha^\eta \leqslant \sup\{\alpha^\eta \mid \eta < \gamma\}$ и, следовательно, $\alpha^\beta\alpha^\eta \leqslant \alpha^\beta \sup\{\alpha^\eta \mid \eta < \gamma\}$ для всех $\eta < \gamma$. Пусть $\sigma < \alpha^\beta \sup\{\alpha^\eta \mid \eta < \gamma\}$. Тогда по лемме 55, найдутся τ и $\rho < \alpha^\beta$, т. ч. $\sigma = \alpha^\beta\tau + \rho$. Ясно, что $\tau < \sup\{\alpha^\eta \mid \eta < \gamma\}$, поэтому найдется $\theta < \gamma$, для которого $\tau < \alpha^\theta$. Имеем

$$\sigma = \alpha^\beta\tau + \rho \leqslant \alpha^\beta\alpha^\theta + \rho < \alpha^\beta\alpha^\theta + \alpha^\beta = \alpha^\beta(\alpha^\theta + 1) \leqslant \alpha^\beta\alpha^{\theta+1}.$$

Последнее неравенство следует из леммы **??**: если $\alpha^{\theta+1} > \alpha^\theta$, по определению последователя, имеем $\alpha^{\theta+1} \geqslant \alpha^\theta + 1$. Так как $\gamma \in Lim$, то $\theta+1 < \gamma$ и мы нашли элемент множества $\{\alpha^\beta\alpha^\eta \mid \eta < \gamma\}$, превосходящий σ.

Упражнение 64. Верно ли это утверждение при $\alpha = 0$? В частности, что если $\beta = 1$ и $\gamma = \omega$?

Упражнение 65. Докажите, что $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$ для $\alpha > 0$. Исследуйте случай $\alpha = 0$.

Упражнение 66. Верно ли, что $(\beta\gamma)^\alpha = \beta^\alpha\gamma^\alpha$? В частности, $(\omega 2)^2 = \omega^2 2^2$? (*Используйте ассоциативность умножения.*)

Неподвижные точки

Функция $f\colon \mathrm{On} \to \mathrm{On}$ называется *нормальной*, если она монотонна и *непрерывна*: для любого непустого множества $X \subseteq \mathrm{On}$ верно $\sup f(X) = f(\sup X)$.

Лемма 67. *Пусть функция f нормальная. Тогда для любого α существует $\beta \geqslant \alpha$, т. ч. $f(\beta) = \beta$. Такие β называются* неподвижными точками *функции f.*

Доказательство. Положим $\beta_0 = \alpha$ и $\beta_{n+1} = f(\beta_n)$ для всех $n < \omega$. Класс $\{\beta_n \mid n < \omega\}$ является счетным множеством по аксиоме подстановки (см. пример **??**). Согласно лемме 36, существует $\beta = \sup\{\beta_n \mid n < \omega\} \geqslant \alpha$. Имеем

$$f(\beta) = f(\sup\{\beta_n \mid n < \omega\}) = \sup\{f(\beta_n) \mid n < \omega\} = \sup\{\beta_{n+1} \mid n < \omega\} = \beta.$$

В последнем переходе мы применяем монотонность и ее следствие: $f(\gamma) \geqslant \gamma$ (лемма 19). $\square$

Дадим более удобную характеризацию нормальных функций.

Лемма 68. *Пусть функция f монотонна. В этом случае f непрерывна тогда и только тогда, когда $f(\lambda) = \{f(\eta) \mid \eta < \lambda\}$ для всех $\lambda \in Lim$.*

Доказательство. Пусть f непрерывна. По определению, $\lambda = \sup W_\lambda = \sup\{\eta \mid \eta < \lambda\}$. Поэтому, взяв $X = W_\lambda \neq \varnothing$, имеем

$$f(\lambda) = f(\sup W_\lambda) = \sup f(W_\lambda) = \sup\{f(\eta) \mid \eta \in W_\lambda\} = \sup\{f(\eta) \mid \eta < \lambda\}.$$

В другую сторону. Пусть дано множество $X \neq \varnothing$. По лемме 36, существует $\sup X$. Если $\sup X = 0$, то $X = \{0\}$. Имеем $\sup f(X) = \sup\{f(0)\} = f(0) = f(\sup X)$. Если $\sup X = \beta + 1$ для некоторого β, то для $\beta < \beta + 1$ найдется $\tau \in X$, т. ч. $\tau > \beta$. Но тогда $\tau \geqslant \beta + 1$. С другой стороны, $\tau \leqslant \beta + 1$. Значит, $\beta + 1 = \tau \in X$ и $\beta + 1 = \max X$. В силу монотонности, $f(\beta + 1) = \max f(X)$. Тем более $f(\beta + 1) = \sup f(X)$. Таким образом, $f(\sup X) = f(\beta + 1) = \sup f(X)$. Остается случай $\sup X = \lambda \in Lim$.

Достаточно доказать, что $\sup f(X) = f(\lambda)$. Поскольку $\forall x \in X\,(x \leqslant \lambda)$, монотонность дает $f(x) \leqslant f(\lambda)$ для всех $x \in X$. Пусть $\sigma < f(\lambda)$. В силу $f(\lambda) = \sup\{f(\eta) \mid \eta < \lambda\}$, найдется $\xi < \lambda$, т. ч. $\sigma < f(\xi)$. Тогда также найдется $x_\xi \in X$, т. ч. $\xi < x_\xi$. По монотонности, $\sigma < f(\xi) < f(x_\xi)$. □

Пример 69. Функции $\alpha + x$, функции αx при $\alpha > 0$ и α^x при $\alpha > 1$ являются нормальными. Это следует из их рекурсивных определений и лемм 45, 53 и 58.

Пример 70. Функция $x + 1$ не является нормальной. Она монотонна вследствие определения последователя. Однако $x + 1$ не является непрерывной. Действительно, $\omega + 1 \neq \sup\{n + 1 \mid n < \omega\} = \omega$.

Пример 71. Из доказательства леммы 67 видно, как явно построить неподвижную точку нормальной функции ω^x. Таковой будет ординал

$$\varepsilon_0 = \sup\{0, 1, \omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \ldots\} = \sup\{\omega_n \mid n < \omega\},$$

где $\omega_0 = 0$ и $\omega_{n+1} = \omega^{\omega_n}$. Итак, $\omega^{\varepsilon_0} = \varepsilon_0$. Покажем, что это наименьшая неподвижная точка ω^x (отсюда индекс 0). Действительно, пусть $\alpha < \varepsilon_0$ и $\omega^\alpha = \alpha$. Имеем $\alpha < \omega_n$ для некоторого n. Возьмем N — наименьшее такое n; очевидно, $N > 0$. Имеем $\omega_{N-1} \leqslant \alpha$. Применим к этим ординалам монотонную функцию ω^x и получим $\omega_N \leqslant \omega^\alpha = \alpha < \omega_N$, что не так.

Упражнение 72. Найдите наименьшую неподвижную точку функции 2^x.

Канторова нормальная форма

Оказывается, ординалы можно однозначно выражать в определенной форме через сложение и функцию ω^x.

Лемма 73. *Пусть $\alpha > 1$. Для всякого $\beta > 0$ существует* $\max\{\eta \mid \alpha^\eta \leqslant \beta\}$.

Доказательство. По лемме 19, в силу монотонности α^x имеем $\alpha^{\beta+1+\delta} > \alpha^\beta \geqslant \beta$ для всех δ. Поэтому класс $X = \{\eta \mid \alpha^\eta \leqslant \beta\}$ ограничен и, как видно из примера **??**, является множеством. Существует $\gamma = \sup\{\eta \mid \alpha^\eta \leqslant \beta\}$. Нам достаточно показать, что $\gamma \in X$, т. е. $\alpha^\gamma \leqslant \beta$. Предположим $\alpha^\gamma > \beta$.

Так как $\beta > 0$, $\gamma > 0$. Пусть $\gamma = \xi + 1$. Тогда для любого $\delta > \xi$ имеем $\delta \geqslant \xi + 1$, откуда по монотонности, $\alpha^\delta \geqslant \alpha^\gamma > \beta$ и $\delta \notin X$. Видим, что ξ верхняя грань X и $\xi + 1 \neq \sup X$, что не так. Остается случай $\gamma \in Lim$. Имеем $\beta < \alpha^\gamma = \sup\{\alpha^\theta \mid \theta < \gamma\}$. Значит, найдется $\chi < \gamma$, т. ч. $\beta < \alpha^\chi$. В силу монотонности, для любого $\delta > \chi$ верно $\beta < \alpha^\delta$ и $\delta \notin X$. Получаем, что χ верхняя грань X и $\gamma \neq \sup X$. Противоречие. □

Полезно сравнить это доказательство с началом доказательства леммы 31.

Упражнение 74. Опираясь лишь на рекурсивное определение сложения и умножения, докажите, что для любых $\alpha > 0$ и β существует $\max\{\eta \mid \alpha\eta \leqslant \beta\}$. (*Вероятно, понадобится установить монотонность функции αx прямым рассуждением по индукции.*) Выведите отсюда лемму 55.

Теорема 75. *Пусть $\alpha > 1$. Каждый ординал $\beta > 0$ однозначно представляется в виде*

$$\beta = \alpha^{\gamma_1}k_1 + \alpha^{\gamma_2}k_2 + \ldots + \alpha^{\gamma_n}k_n,$$

где $n \geqslant 1$, $\beta \geqslant \gamma_1 > \gamma_2 > \ldots > \gamma_n$ и $0 < k_i < \alpha$ для всех i.

Доказательство. Доказательство существования проведем по индукции. Пусть для всех $\beta' < \beta$ такое представление существуют. По лемме 73, найдется $\gamma_1 = \max\{\eta \mid \alpha^\eta \leqslant \beta\}$. Применяя лемму 55, находим k_1 и $\beta' < \alpha^{\gamma_1}$ т. ч. $\beta = \alpha^{\gamma_1}k_1 + \beta'$. Если $k_1 = 0$, то $\beta = \beta' < \alpha^{\gamma_1}$, что не верно. Если $\gamma_1 > \beta$, то $\alpha^{\gamma_1} > \alpha^\beta \geqslant \beta$, что не так (последнее неравенство следует из леммы 19). Имеем $\alpha^{\gamma_1}k_1 \leqslant \beta$ и, следовательно, $\beta' < \alpha^{\gamma_1} \leqslant \alpha^{\gamma_1}k_1 \leqslant \beta$.

Допустим, что $k_1 \geqslant \alpha$. Тогда $\alpha^{\gamma_1}k_1 \geqslant \alpha^{\gamma_1}\alpha = \alpha^{\gamma_1+1}$. Следовательно, $\alpha^{\gamma_1+1} \leqslant \beta$, что противоречит $\gamma_1 = \max\{\eta \mid \alpha^\eta \leqslant \beta\}$. Итак, получили $0 < k_1 < \alpha$, $\gamma_1 \leqslant \beta$ и $\beta' < \beta$.

Если $\beta' = 0$, то существование доказано. Иначе, по предположению индукции, для β' верно

$$\beta' = \alpha^{\gamma_2}k_2 + \ldots + \alpha^{\gamma_n}k_n,$$

причем $\beta' \geqslant \gamma_2 > \ldots > \gamma_n$ и все $k_i \in (0, \alpha)$ (мы переобозначили индексы). Остается проверить $\gamma_2 < \gamma_1$. В противном случае, $\beta' \geqslant \alpha^{\gamma_2} \geqslant \alpha^{\gamma_1}$, что не так. Индукционный переход проверен, существование представления доказано.

Предположим

$$\alpha^{\gamma_1}k_1 + \alpha^{\gamma_2}k_2 + \ldots + \alpha^{\gamma_n}k_n = \alpha^{\delta_1}l_1 + \alpha^{\delta_2}l_2 + \ldots + \alpha^{\delta_m}l_m.$$

Допустим, что слева и справа стоят не ровно те же слагаемые. Пусть одна сумма является «собственным началом» другой. Тогда имеем $\xi = \xi + \alpha^{\eta_1}u_1 + \ldots + \alpha^{\eta_s}u_s$, где $s > 0$ и все $u_i > 0$. Поскольку $\alpha^\eta \geqslant 1^\eta = 1$ при $\alpha \geqslant 1$, имеем $\alpha^{\eta_1}u_1 + \ldots + \alpha^{\eta_s}u_s > 0$, что противоречит лемме **??**. Рассмотрим случай, когда какие-то слагаемые отличаются. Возьмем наименьший индекс v таких слагаемых:

$$\xi + \alpha^{\gamma_v}k_v + \ldots + \alpha^{\gamma_n}k_n = \xi + \alpha^{\delta_v}l_v + \ldots + \alpha^{\delta_m}l_m.$$

Идея состоит в том, что $\alpha^\eta > \alpha^{\eta_1}u_1 + \ldots + \alpha^{\eta_s}u_s$, если $\eta > \eta_1 > \ldots > \eta_s$ и все $u_i < \alpha$. Это доказывается по индукцией по s. Если $s = 1$, то $\alpha^{\eta_1}u_1 < \alpha^{\eta_1}\alpha = \alpha^{\eta_1+1} \leqslant \alpha^\eta$. Предположим, что $\alpha^{\eta_1} > \alpha^{\eta_2}u_2 + \ldots + \alpha^{\eta_s}u_s$. Имеем

$$\alpha^{\eta_1}u_1 + \alpha^{\eta_2}u_2 + \ldots + \alpha^{\eta_s}u_s < \alpha^{\eta_1}u_1 + \alpha^{\eta_1} = \alpha^{\eta_1}(u_1 + 1) \leqslant \alpha^{\eta_1}\alpha = \alpha^{\eta_1+1} \leqslant \alpha^\eta.$$

Вернемся к исходной задаче. Если $\delta_v \neq \gamma_v$, то $\delta_v > \gamma_v$ б. о. о. Имеем

$$\xi + \alpha^{\delta_v} l_v + \ldots + \alpha^{\delta_m} l_m \geqslant \xi + \alpha^{\delta_v} > \xi + \alpha^{\gamma_v} k_v + \ldots + \alpha^{\gamma_n} k_n,$$

что не так. Значит, $\delta_v = \gamma_v$ и $l_v \neq k_v$. Б. о. о., $l_v > k_v$. Получаем

$$\xi + \alpha^{\delta_v} l_v + \ldots + \alpha^{\delta_m} l_m \geqslant \xi + \alpha^{\delta_v} l_v \geqslant \xi + \alpha^{\gamma_v}(k_v + 1) =$$
$$\xi + \alpha^{\gamma_v} k_v + \alpha^{\gamma_v} > \xi + \alpha^{\gamma_v} k_v + \alpha^{\gamma_{v+1}} k_{v+1} + \ldots + \alpha^{\gamma_n} k_n.$$

Противоречие. □

Если $\alpha < \omega$, мы, по существу, доказали, что любой ординал однозначно представим в системе счисления с основанием α, где k_i суть «цифры», а γ_i — номера разрядов. Например, $5 = 2^2 1 + 2^0 1 = 101_2$, но (проверьте!) $\omega = 2^\omega = 1\underbrace{0\ldots0}_{\omega}{}_2$ (последнее равенство неформальное) — т. е. «число» хотя и состоит из конечного числа ненулевых цифр, имеет, если достаточно велико, «трансфинитные разряды».

В случае $\alpha = \omega$ полученное представление называется *канторовой нормальной формой* (к. н. ф.) ординала β. Заметим, что тогда умножение на k_i может быть заменено $(k_i - 1)$-кратным сложением, поскольку k_i суть положительные натуральные числа.

Пример 76. К. н. ф. и знак 0 являются естественными обозначениями для ординалов, больших ω (для меньших тоже, но для них у нас есть последовательности обычных цифр). Примеры: $1 = \omega^0$, $2 = \omega^0 + \omega^0$, $\omega = \omega^{\omega^0}$, $\omega^{\omega^2 + \omega^1 3} + \omega^\omega$. Если бы всегда было $\beta > \gamma_1$, мы могли бы любой ординал выразить через меньшие γ_i в виде конечной формулы, а в силу фундированности, выражая сами γ_i и т. д., просто через 0, ω^x и $+$.

Очевидно, впрочем, что такой план несостоятелен. Иначе существовало бы лишь счетно много ординалов, что противоречит наличию несчетных ординалов (вполне упорядочим $\mathbb{R}$ по теореме Цермело) и лемме **??**. Более явный аргумент состоит в том, что единственная к. н. ф ординала ε_0 имеет вид ω^{ε_0}.

Упражнение 77. Докажите, что всякий $\beta < \varepsilon_0$ выражается через меньшие ординалы, т. е. для к. н. ф. выполнено $\beta > \gamma_1$.

Упражнение 78. Докажите, что ординал ε_0 является счетным.

Для ординалов, больших ε_0, но меньших определенных больших ординалов, существуют свои системы ординальных обозначений. Вопрос о «естественных» ординальных обозначениях не является вполне проясненным.

Отметим еще одно любопытное свойство ординалов вида ω^α. Ординал $\alpha > 0$ называется *аддитивно неразложимым*, если для любых $\xi, \eta < \alpha$ выполнено $\xi + \eta < \alpha$.

Лемма 79. *Для любого α ординал ω^α аддитивно неразложим.*

Доказательство. Пусть $\xi < \omega^\alpha$ и $\eta < \omega^\alpha$. Согласно лемме 73, найдутся $\beta = \max\{\theta \mid \omega^\theta \leqslant \xi\}$ и $\gamma = \max\{\theta \mid \omega^\theta \leqslant \eta\}$. Тогда $\xi < \omega^{\beta+1}$ и $\eta < \omega^{\gamma+1}$, а также $\beta+1 \leqslant \alpha$ и $\gamma+1 \leqslant \alpha$, поскольку $\beta, \gamma < \alpha$ вследствие монотонности. Положив $\delta = \max\{\beta, \gamma\}$, имеем

$$\xi, \eta < \omega^{\delta+1} = \omega^\delta \omega = \sup\{\omega^\delta n \mid n < \omega\}.$$

Значит, $\xi < \omega^\delta n$ и $\eta < \omega^\delta m$ для некоторых $n, m < \omega$. Получаем

$$\xi + \eta \leqslant \omega^\delta n + \eta < \omega^\delta n + \omega^\delta m = \omega^\delta(n+m) < \omega^\delta \omega = \omega^{\delta+1} \leqslant \omega^\alpha.$$

□

Упражнение 80. В доказательстве этого утверждения обойдитесь без леммы 73.

Упражнение 81. Докажите, что если $\alpha > 1$ аддитивно неразложим, то $\alpha \in Lim$.

Упражнение 82. Докажите, что ординал α аддитивно неразложим тогда и только тогда, когда $\forall \xi < \alpha\, (\xi + \alpha = \alpha)$.

Упражнение 83. Докажите, что всякий аддитивно неразложимый ординал имеет вид ω^α. (*Пусть β не имеет вида ω^α. Как выглядит к. н. ф. ординала β?*)

Конечные множества

Напомним, что множества X и Y называются *равномощными* (или *эквивалентными*), если существует биекция из X в Y. Тогда пишем $X \sim Y$. Легко проверить, что $\sim$ является отношением эквивалентности на классе всех множеств.

Кардиналы

Как мы уже отмечали, можно сравнивать ординалы с другими множествами по мощности:

$$[A] \lesssim C \rightleftharpoons A \lesssim C, \quad C \lesssim [A] \rightleftharpoons C \lesssim A.$$

Теорема 24 показывает, что если сравнить их по мощности друг с другом, имеет место линейность: $[A] \lesssim [B] \vee [B] \lesssim [A]$. Действительно, если $[A] < [B]$, то A изоморфно собственному н. о. множества B, тем более равномощно этому отрезку, т. е. $A \lesssim B$ и $[A] \lesssim [B]$. Если же $[A] = [B]$, то $A \simeq B$, откуда $[A] \lesssim [B]$ и $[B] \lesssim [A]$. Теорема Цермело, позволяющая вполне упорядочить любое множество, по существу, утверждает, что всякое множество равномощно некоторому ординалу. Следовательно, любые два множества сравнимы по мощности.

Следует помнить, что отношение $\lesssim$ формально не является порядком (тем более строгим), поскольку может быть $\alpha \lesssim \beta$ и $\beta \lesssim \alpha$ (что эквивалентно $\alpha \simeq \beta$ по теореме Кантора-Бернштейна), даже если $\alpha \neq \beta$. Например, $\omega+1 \simeq \omega$ (проверьте!). Более того, как мы знаем из упражнения 78, $\varepsilon_0 \simeq \omega$. Понятно, что тогда $\alpha \lesssim \omega$ для всех $\alpha < \varepsilon_0$. Тем не менее очевидно, что $\lesssim$ есть предпорядок.

Упражнение 84. Существует ли наибольший счетный ординал?

Упражнение 85. Докажите, что $\alpha \simeq W_\alpha$.

Упражнение 86. Докажите, что класс всех счетных ординалов несчетен. (*Можно использовать лемму 36, заметив что, будь этот класс счетным, он был бы множеством.*[6] *Или еще можно рассмотреть наименьший несчетный ординал* ω_1, *который существует в силу теоремы Цермело и теоремы Кантора о несчетности множества подмножеств счетного множества. А затем исследовать* W_{ω_1}.)

Для произвольного ординала α определим

$$\bar{\bar{\alpha}} \rightleftharpoons \min\{\beta \mid \beta \simeq \alpha\}.$$

Этот ординал называется *мощностью* ординала α. Очевидно, $\bar{\bar{\alpha}} \leqslant \alpha$. Если $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$, то α называется *кардиналом.*

Пример 87. Какие кардиналы нам хорошо знакомы? Очевидно, это ω, поскольку все меньшие ординалы конечны. И еще натуральные числа! Действительно, если $m < n$, то $n \not\lesssim m$. Ведь в противном случае n равномощно своему собственному подмножеству. Чтобы придать наукообразие этому замечанию, мы докажем следующее.

Лемма 88. *Пусть $B \subset A$ и $A \simeq B$. Тогда A бесконечно (т. е. $\mathbb{N} \lesssim A$).*

Доказательство. Пусть имеется биекция $\varphi\colon A \to B$. Обозначим $A_0 = A$ и $A_{n+1} = \varphi(A_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, в частности, $A_1 = B$. Индукцией по n установим $A_{n+1} \subset A_n$. Для $n = 0$ используем условие. Предположим $n > 0$ и $A_{k+1} \subset A_k$ для всех $k < n$. В частности, $A_n \subset A_{n-1}$. Имеем $A_{n+1} = \varphi(A_n) \subseteq \varphi(A_{n-1}) = A_n$. Допустим $\varphi(A_n) = \varphi(A_{n-1})$. Возьмем $x \in A_{n-1} \setminus A_n \neq \varnothing$. В силу допущения, $\varphi(x) \in \varphi(A_n)$ и найдется $y \in A_n$, т. ч. $\varphi(y) = \varphi(x)$. Получаем $x \neq y$, что противоречит биективности φ. Значит, $A_{n+1} \subset A_n$.

Теперь можно для каждого $n \in \mathbb{N}$ выбрать $x_n \in A_n \setminus A_{n+1}$. Пусть $x_n = x_m$ при $m < n$. Тогда $x_n \in A_n \subseteq A_{m+1}$ и $x_n \in A_m \setminus A_{m+1}$. Противоречие. Значит, $\mathbb{N} \simeq \{x_n\} \subseteq A$. □

Упражнение 89. Докажите, что каждый бесконечный кардинал является предельным ординалом. (*Попробуйте* аккуратно *показать, что для бесконечного множества A верно $A \simeq A + 1$.*)

Пример 90. Понятно, что можно отождествить мощности произвольных множеств и кардиналы. Однако следует иметь в виду, что арифметические операции над мощностями, возможно, определявшиеся на лекциях, не то же самое, что операции ординальной арифметики над кардиналами. Например, возведение в степень для мощностей множеств A и B определяют как мощность множества A^B всех функций из B в A. При этом оказывается, например, что $2^{\mathbb{N}}$ (множество счетных последовательностей нулей и единиц) несчетно, в то время как $2^\omega = \omega$. Рассогласование вызвано тем обстоятельством, что множество A^B не всегда является представителем ординала $[A]^{[B]}$.

[6] Это последнее соображение вытекает из аксиомы подстановки (см. пример **??**). Счетный, т. е. находящийся во взаимно однозначном соответствии с *множеством* $\mathbb{N}$, класс сам является (счетным) множеством.

Мы не станем долго говорить о кардиналах, но лишь приведем любопытную теорему, которую на семинарах мы доказывали с помощью леммы Цорна, а теперь установим прямым применением трансфинитной рекурсии.

Теорема 91. *Пусть множество A бесконечно. Тогда $A \times A \simeq A$.*

Доказательство. Очевидно, что $A \lesssim A^2$.[7] Вследствие теоремы Кантора-Бернштейна, достаточно проверить $A^2 \lesssim A$. Применив теорему Цермело, снабжаем A упорядочением вполне и находим $\alpha_1 = [A]$. Нас будет интересовать ординал $\alpha = \bar{\bar{\alpha}}_1$. Поскольку $A \simeq \alpha \simeq W_\alpha$, достаточно доказать $W_\alpha \simeq W_\alpha \times W_\alpha$. Очевидно, что $W_\alpha \lesssim W_\alpha^2$. В силу теоремы Кантора-Бернштейна остается проверить $W_\alpha^2 \lesssim W_\alpha$. Для этого рассмотрим *каноническое* упорядочение класса $\mathrm{On} \times \mathrm{On}$.

$$\begin{aligned}(\beta, \gamma) < (\beta', \gamma') \rightleftharpoons (&\max\{\beta, \gamma\} < \max\{\beta', \gamma'\}) \lor \\ &(\max\{\beta, \gamma\} = \max\{\beta', \gamma'\} \land \beta < \beta') \lor \\ &\qquad(\max\{\beta, \gamma\} = \max\{\beta', \gamma'\} \land \beta = \beta' \land \gamma < \gamma').\end{aligned}$$

Менее формально, плоскость On^2 разбивается на непересекающиеся «уголки»

$$\{(x, c) \mid x \leqslant c\} \cup \{(c, x) \mid x \leqslant c\} = \{(x, y) \mid \max\{x, y\} = c\}.$$

Для двух пар сначала сравниваются c их уголков; если уголок один, сравниваются «абсциссы»; если и они совпадают, то сравниваем «ординаты».

Упражнение 92. Проверьте, что введенный порядок линейный и фундированный.

Согласно теореме 43 о трансфинитной рекурсии, существует отображение $\varphi\colon \mathrm{On} \to \mathrm{On}^2$ со свойством

$$\varphi(\beta) = \min\{(\xi, \eta) \mid (\xi, \eta) \notin \varphi(W_\beta)\}$$

для всех $\beta \in \mathrm{On}$. (Замечаем, что $\varphi(W_\beta) = \varphi \upharpoonright \beta$, а в качестве G можно взять любое отображение, ставящее каждому подмножеству X класса On^2 в соответствие наименьший элемент класса $\mathrm{On}^2 \setminus X$, существующий в силу упорядоченности вполне.) Легко видеть, что φ монотонно и тем более инъективно. Кроме того, множество $\varphi(W_\beta)$ является н. о. класса On^2. Действительно, пусть $(\theta, \chi) < (\xi, \eta) \in \varphi(W_\beta)$ и $(\theta, \chi) \notin \varphi(W_\beta)$. Тогда $\varphi(\gamma) = (\xi, \eta)$ для некоторого $\gamma < \beta$, однако $(\xi, \eta) \neq \min\{(\xi', \eta') \mid (\xi', \eta') \notin \varphi(W_\gamma)\}$, поскольку $(\theta, \chi) \notin \varphi(W_\gamma) \subseteq \varphi(W_\beta)$. Противоречие с рекурсивным определением φ.

Лемма 93. *Для всякого кардинала $\beta \geqslant \omega$ верно $W_\beta^2 \subseteq \varphi(W_\beta)$.*

Доказательство. Предположим противное и рассмотрим наименьший бесконечный кардинал σ со свойством $\varphi(W_\sigma) \subset W_\sigma^2$. Найдется точка $(\xi, \eta) \in W_\sigma^2 \setminus \varphi(W_\sigma)$, для которой $\xi, \eta < \sigma$. Положим $\tau = \max\{\xi, \eta\} + 1$. Так как бесконечный кардинал σ предельный, выполняется $\tau < \sigma$. С другой стороны, по свойству φ, для всех $(\theta, \chi) \in \varphi(W_\sigma)$ верно $(\theta, \chi) < (\xi, \eta)$, откуда

[7] Ясно, что такое обозначение для $A \times A$ согласовано с пониманием A^2 как множества функций из $2 = \{0, 1\}$ в A.

$\max\{\theta, \chi\} < \tau$ и $\varphi(W_\sigma) \subseteq W_\tau^2$. Поскольку $\tau < \sigma$, $\rho = \bar{\bar{\tau}} \leqslant \tau < \sigma$. Если кардинал ρ конечен, то конечен τ и конечно множество W_τ^2. Однако, используя инъективность φ, имеем

$$\omega \lesssim \sigma \simeq W_\sigma \simeq \varphi(W_\sigma) \lesssim W_\tau^2,$$

поэтому $\rho \geqslant \omega$. Значит, $W_\rho^2 \subseteq \varphi(W_\rho)$. Поскольку $W_\rho \simeq W_\tau$, получаем

$$\sigma \lesssim W_\tau^2 \simeq W_\rho^2 \lesssim \varphi(W_\rho) \simeq W_\rho \simeq \rho.$$

Но $\rho \lesssim \sigma$, так как $\rho < \sigma$. По теореме Кантора-Бернштейна, $\rho \simeq \sigma$, что противоречит $\bar{\bar{\sigma}} = \sigma$. $\square$

Остается применить эту лемму к α. Имеем $W_\alpha^2 \subseteq \varphi(W_\alpha) \simeq W_\alpha$, т. е. $W_\alpha^2 \lesssim W_\alpha$, что и требовалось. $\square$