Языки первого порядка

17 июня 2018 г.

Синтаксис. Формулы и термы.

Сигнатурой называется пара произвольных непересекающихся множеств символов, в которой символы из первого множества считаются *функциональными*, а из второго — *предикатными*, причем каждому символу поставлено в соответствие натуральное число (включая нуль), называемое *валентностью*. Символ с валентностью n называется n-*местным*. Мы будем рассматривать лишь счетные, преимущественно, конечные сигнатуры. Счетную (или конечную) сигнатуру σ можно обозначить так:

$$(\{\mathbf{f}_1^{(a_1)}, \ldots, \mathbf{f}_n^{(a_n)}, \ldots\}, \{\mathbf{P}_1^{(b_1)}, \ldots, \mathbf{P}_m^{(b_m)}, \ldots\})$$

или еще так:

$$(\mathbf{f}_1^{(a_1)}, \ldots, \mathbf{f}_n^{(a_n)}, \ldots; \mathbf{P}_1^{(b_1)}, \ldots, \mathbf{P}_m^{(b_m)}, \ldots).$$

Здесь $\mathbf{f}_i$ и $\mathbf{P}_j$ суть функциональный и предикатный символ соответственно, а a_i и b_j — их валентности.

Кроме того, мы считаем, что задано счетное множество *индивидных,* или *предметных переменных*

$$\mathrm{Var} = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \ldots\}.$$

Мы будем использовать также буквы x, y, z, w, u, v и другие (быть может, с индексами, штрихами и т. п.) как имена для наших переменных (как метапеременные). (Подобно пропозициональному случаю, где у нас *в формальном языке* имелись переменные $p_1, p_2, \ldots$, но мы свободно рассуждали о *каких-то* переменных p, q, r.)

Мы будем строить термы с помощью предметных переменных и функциональных символов, а формулы — с помощью термов, предикатных символов, булевых связок, предметных переменных и особых знаков *кванторов*: квантора *всеобщности* $\forall$ и квантора *существования* $\exists$.[1] Связки и кванторы не зависят от сигнатуры и считаются *логическими символами.*

Определим множество Tm_σ *термов* сигнатуры σ как наименьшее множество, удовлетворяющее условиям:

1. $\mathrm{Var} \subseteq \mathrm{Tm}_\sigma$;

2. если $a_i = \mathbf{0}$, то $\mathbf{f}_i \in \mathrm{Tm}_\sigma$; если $t_1, \ldots, t_{a_j} \in \mathrm{Tm}_\sigma$, то $\mathbf{f}_j(t_1, \ldots, t_{a_j}) \in \mathrm{Tm}_\sigma$.

Определим множество Fm_σ *формул* сигнатуры σ как наименьшее множество, удовлетворяющее условиям:

1. если $b_i = \mathbf{0}$, то $\mathbf{P}_i \in \mathrm{Fm}_\sigma$; если $t_1, \ldots, t_{b_j} \in \mathrm{Tm}_\sigma$, то $\mathbf{P}_j(t_1, \ldots, t_{b_j}) \in \mathrm{Fm}_\sigma$; такие формулы называются *атомарными*;

2. если $\varphi, \psi \in \mathrm{Fm}_\sigma$, то $\neg\varphi, (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \to \psi) \in \mathrm{Fm}_\sigma$;

3. если $\varphi \in \mathrm{Fm}_\sigma$ и $x \in \mathrm{Var}$, то $\forall x\, \varphi \in \mathrm{Fm}_\sigma$ и $\exists x\, \varphi \in \mathrm{Fm}_\sigma$.

Итак, язык сигнатуры σ определен.[2] Мы предполагаем, что для формул и термов имеет место однозначность разбора.[3] Выстроив логические символы по убыванию силы связывания: $\forall, \exists, \neg, \wedge, \vee, \to$, мы *будем свободно опускать излишние скобки* (или добавлять их, что может быть технически удобно).

Будем также, когда это не вызывает двусмысленностей, писать функциональные и предикатные символы в инфиксной записи: например, $x < y$ вместо $<(x, y)$ или $x + y$ вместо $+(x, y)$.

Для каждой формулы или терма индукцией по построению можно определить множество V переменных, которые туда *входят*, а также множество FV *свободных переменных* или *параметров*.

Полагаем $V(x) = \{x\}$, $V(\mathbf{f}_i) = \varnothing$ при $a_i = \mathbf{0}$ и $V(\mathbf{f}_j(t_1, \ldots, t_{a_j})) = V(t_1) \cup \ldots \cup V(t_{a_j})$. Для всякого терма t положим $FV(t) = V(t)$.

Полагаем $FV(\mathbf{P}_i) = V(\mathbf{P}_i) = \varnothing$ при $b_i = \mathbf{0}$ и $FV(\mathbf{P}_j(t_1, \ldots, t_{b_j})) = V(\mathbf{P}_j(t_1, \ldots, t_{b_j})) = V(t_1) \cup \ldots \cup V(t_{b_j})$. Также $FV(\neg\psi) = FV(\psi)$, $V(\neg\psi) = V(\psi)$ и, если $\varphi \in \{\psi_1 \wedge \psi_2, \psi_1 \vee \psi_2, \psi_1 \to \psi_2\}$, то $FV(\varphi) = FV(\psi_1) \cup FV(\psi_2)$ и $V(\varphi) = V(\psi_1) \cup V(\psi_2)$.

Принципиален случай квантора: $V(\forall x\, \varphi) = V(\exists x\, \varphi) = V(\varphi) \cup \{x\}$, однако $FV(\forall x\, \varphi) = FV(\exists x\, \varphi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}$.

---

[1] Кроме того, будут использоваться служебные символы: скобки и запятая.

[2] Внимательный читатель заметил, что мы употребляем метапеременные не только для предметных переменных — пишем, например, y вместо $\mathbf{x}_{2012}$ — но также для формул и термов. Действительно, мы преспокойно обозначаем через φ формулу $\exists \mathbf{x}_8 \mathbf{P}_6(\mathbf{x}_5)$. В частности, может так статься, что разные метапеременные обозначают одно и то же выражение нашего языка: $\varphi = \psi = (\mathbf{P}_5(\mathbf{x}_7, \mathbf{x}_8) \wedge \mathbf{P}_4(\mathbf{x}_9))$ или $w = z' = \mathbf{x}_{2011}$ (о последнем тж. см. ниже).

[3] На самом деле, это зависит от сигнатуры. Например, пусть σ состоит из двух одноместных предикатных символов: $\{\upharpoonleft^{(1)}, \neg\upharpoonleft^{(1)}\}$. Тогда, очевидно, формула $\neg\upharpoonleft(x_1)$ может быть разобрана двояко: как атомарная или как начинающаяся с отрицания.

Содержательно, параметры формулы — это такие переменные, которые имеют вхождения, *не связанные никаким квантором.* Одна и та же переменная может иметь как связанные, так и свободные вхождения в данную формулу. Иногда мы будем обозначать формулы выражениями вида $\varphi(y_1, \dots, y_n)$, имея в виду, что $FV(\varphi) \subseteq \{y_1, \dots, y_n\}$.

Важное соглашение. *В формулах первого порядка, если особо не оговорено противное, мы считаем, что разные буквы обозначают* **разные** *предметные переменные. То есть* **в формулах** *полагаем $x \neq y$, $z' \neq w$ и т. д., если не указано иное.*

Пример 1. Написана формула вида $\forall z \forall y\, \psi$. Мы **подразумеваем**, что $y \neq z$. Сказано: «если z и y предметные переменные, то в любой сигнатуре найдется формула, куда они входят». Мы **не предполагаем**, что обязательно $z \neq y$.

Пример 2. Пусть P, Q, R суть некоторые предикатные, а f, g функциональные символы подходящей валентности. Тогда имеем формулы:

- $\varphi = \exists z \forall x\, P(x, y)$; причем $V(\varphi) = \{x, y, z\}$, $FV(\varphi) = \{y\}$;
- $\varphi = Q(y) \to \forall y \exists y\, P(y, y)$; причем $V(\varphi) = \{y\}$, $FV(\varphi) = \{y\}$;
- $\varphi = \forall x\, P(x, f(y)) \vee \exists y\, R(x, g(y))$; причем $V(\varphi) = \{x, y\}$, $FV(\varphi) = \{x, y\}$;
- $\varphi = \forall y\, (P(g(x), y) \to (Q(y) \vee \forall y\, R(y, w')))$; причем $V(\varphi) = \{x, y, w'\}$, $FV(\varphi) = \{x, w'\}$.

Семантика. Интерпретации и оценки.

Поговорим о смысле формул первого порядка. Скажем, что определена *интерпретация* I сигнатуры σ, если указана тройка множеств

$$(M, \{f_1, \dots, f_n, \dots\}, \{P_1, \dots, P_m, \dots\}),$$

причем:

- $M \neq \varnothing$; это множество называется *носителем* интерпретации I.
- каждому символу $\mathbf{f}_j$ поставлена в соответствие функция $f_j \colon M^{a_j} \to M$ при $a_j > 0$; если $a_j = 0$, мы ставим в соответствие $f_j \in M$, т. е. константу. Обозначение: $[\mathbf{f}_j] = f_j$;
- каждому символу $\mathbf{P}_j$ поставлен в соответствие предикат $P_j \colon M^{b_j} \to \mathbb{B}$ при $b_j > 0$; если $b_j = 0$, мы ставим в соответствие $P_j \in \mathbb{B}$, т. е. истинностную константу. Обозначение: $[\mathbf{P}_j] = P_j$.

Пример 3. В сигнатуре $\sigma = (0^{(0)}; <^{(2)})$ имеется нуль-местный (константный) символ 0 и двухместный предикатный символ $<$. В качестве интерпретации можно взять тройку $(\mathbb{N}; 8;$ «x делит y»$)$, состоящую из множества натуральных чисел, константы 8, и двухместного предиката «быть делителем».

Зададимся некоторой интерпретацией I. *Оценкой* переменных мы назовем произвольное отображение $\pi \colon \mathrm{Var} \to M$. Определим *значение* $[t](\pi) \in M$ *терма* $t \in \mathrm{Tm}_\sigma$ *при оценке* π (в интерпретации I):

1. если $t = x \in \mathrm{Var}$, то $[t](\pi) = \pi(x)$;
2. если $t = \mathbf{f}_i$ (при $a_i = 0$), то $[t](\pi) = [\mathbf{f}_i] = f_i$; если $t = \mathbf{f}_j(t_1, \dots, t_{a_j})$, то $[t](\pi) = [\mathbf{f}_j]([t_1](\pi), \dots, [t_{a_j}](\pi)) = f_j([t_1](\pi), \dots, [t_{a_j}](\pi))$.

Пусть θ некоторая оценка, z любая предметная переменная и $m \in M$. Определим оценку $\theta + (z \mapsto m)$ следующим образом:

$$(\theta + (z \mapsto m))(x) \quad = \quad \begin{cases} \theta(x), & \text{если } x \neq z; \\ m, & \text{если } x = z. \end{cases}$$

Упражнение 4. Какие значения принимает отображение $\theta + (z \mapsto m) + (z \mapsto l)$? В частности, в точке z? Пусть $z \neq w$. Докажите, что $\theta + (z \mapsto m) + (w \mapsto l) = \theta + (w \mapsto l) + (z \mapsto m)$.

Определим теперь *значение* $[\varphi](\pi) \in \mathbb{B}$ *формулы* $\varphi \in \mathrm{Fm}_\sigma$ *при оценке* π (в интерпретации I):

1. если $\varphi = \mathbf{P}_i$ (при $b_i = 0$), то $[\varphi](\pi) = [\mathbf{P}_i] = P_i$; если $\varphi = \mathbf{P}_j(t_1, \dots, t_{b_j})$, то $[\varphi](\pi) = [\mathbf{P}_j]([t_1](\pi), \dots, [t_{b_j}](\pi)) = P_j([t_1](\pi), \dots, [t_{b_j}](\pi))$;

2. (a) если $\varphi = \neg\psi$, то $[\varphi](\pi) =$
   $1 - [\psi](\pi)$;
   (b) если $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$, то $[\varphi](\pi) = \min([\psi_1](\pi), [\psi_2](\pi))$;
   (c) если $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$, то $[\varphi](\pi) = \max([\psi_1](\pi), [\psi_2](\pi))$;
   (d) если $\varphi = \psi_1 \to \psi_2$, то $[\varphi](\pi) = \max(\mathbf{1} - [\psi_1](\pi), [\psi_2](\pi))$ (проверьте — это то же, что $IMP([\psi_1](\pi), [\psi_2](\pi))$);
3. (a) если $\varphi = \exists x\psi$, то $[\varphi](\pi) = \max\limits_{m\in M}[\psi](\pi + (x \mapsto m))$;[4]
   (b) если $\varphi = \forall x\psi$, то $[\varphi](\pi) = \min\limits_{m\in M}[\psi](\pi + (x \mapsto m))$.

Здесь мы предположили, что на множестве $\mathbb{B}$ задана функция $x \mapsto \mathbf{1} - x = NEG(x)$, а также естественный порядок $< = \{(\mathbf{0}, \mathbf{1})\}$. Заметим, что мы могли бы вместо максимумов, минимумов и вычитаний из единицы написать знакомые логические функции OR, AND, NEG соответственно. Однако тогда пришлось бы вводить для кванторов булевы функции бесконечного числа аргументов; мы предпочтем этого не делать.

Для данной интерпретации значение формулы φ при оценке π зависит только от того, какие значения принимает π на параметрах φ. Точнее, имеет место

Лемма 5. *Для произвольных оценок π_1, π_2, терма t и формулы φ выполнены:*

1. *если $\pi_1(x) = \pi_2(x)$ для всех $x \in V(t)$, то $[t](\pi_1) = [t](\pi_2)$;*
2. *если $\pi_1(x) = \pi_2(x)$ для всех $x \in FV(\varphi)$, то $[\varphi](\pi_1) = [\varphi](\pi_2)$.*

Доказательство. Прежде докажем первое утверждение. Индукция по построению терма t. Если $t = z$, то $[t](\pi_1) = \pi_1(z) = \pi_2(z) = [t](\pi_2)$. Если $t = \mathbf{f}_i$, то $[t](\pi_1) = f_i = [t](\pi_2)$. Если $t = \mathbf{f}_j(t_1, \ldots, t_{a_j})$, то

$$[t](\pi_1) = f_j([t_1](\pi_1), \ldots, [t_{a_j}](\pi_1)) = f_j([t_1](\pi_2), \ldots, [t_{a_j}](\pi_2)) = [t](\pi_2),$$

в силу $V(t_k) \subseteq V(t)$ по предположению индукции. Утверждение доказано.

Теперь проведем индукцию по построению φ. Если $\varphi = \mathbf{P}_i$, то $[\varphi](\pi_1) = P_i = [\varphi](\pi_2)$. Если $\varphi = \mathbf{P}_j(t_1, \ldots, t_{b_j})$, то для каждого из термов t_k имеем $V(t_k) \subseteq FV(\varphi)$, поэтому к ним применимо предыдущее утверждение: получаем $[t_k](\pi_1) = [t_k](\pi_2)$. Отсюда

$$[\varphi](\pi_1) = P_j([t_1](\pi_1), \ldots, [t_{b_j}](\pi_1)) = P_j([t_1](\pi_2), \ldots, [t_{b_j}](\pi_2)) = [\varphi](\pi_2).$$

Если $\varphi = \neg\psi$, то $[\varphi](\pi_1) = \mathbf{1} - [\psi](\pi_1) = \mathbf{1} - [\psi](\pi_2) = [\varphi](\pi_2)$ по предположению индукции и в силу $FV(\psi) = FV(\varphi)$. Если $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$, то $FV(\psi_i) \subseteq FV(\varphi)$, откуда по предположению индукции

$$[\varphi](\pi_1) = \min([\psi_1](\pi_1), [\psi_2](\pi_1)) = \min([\psi_1](\pi_2), [\psi_2](\pi_2)) = [\varphi](\pi_2).$$

Случаи других связок аналогичны.

Содержательны случаи кванторов. Пусть $\varphi = \forall z\,\psi$. Имеем $[\varphi](\pi_1) = \min\limits_{m\in M}[\psi](\pi_1 + (z \mapsto m))$. Ясно, что $FV(\psi) \subseteq FV(\varphi) \cup \{z\}$ (z не обязана входить в ψ!). Посмотрим, как работает $\pi_1 + (z \mapsto m)$ на множестве $FV(\varphi) \cup \{z\}$. Если $y \in FV(\varphi)$, то, поскольку $z \notin FV(\varphi)$, $y \neq z$. Следовательно,

$$(\pi_1 + (z \mapsto m))(y) = \pi_1(y) = \pi_2(y) = (\pi_2 + (z \mapsto m))(y).$$

Если $y = z$, то, очевидно, $(\pi_1 + (z \mapsto m))(y) = m = (\pi_2 + (z \mapsto m))(y)$. Таким образом, для всякого $y \in FV(\psi)$ имеем $(\pi_1 + (z \mapsto m))(y) = (\pi_2 + (z \mapsto m))(y)$. Применяем предположение индукции и заключаем, что

$$[\psi](\pi_1 + (z \mapsto m)) = [\psi](\pi_2 + (z \mapsto m))$$

для любого $m \in M$. Отсюда легко следует $[\varphi](\pi_1) = [\varphi](\pi_2)$. Случай квантора существования разбирается аналогично. $\square$

[4] Эта запись, как известно, означает $\max\{[\psi](\pi + (x \mapsto m)) \mid m \in M\}$. Заметьте, что множество значений формулы ψ при разных m, максимум которого здесь берется, является непустым подмножеством множества $\mathbb{B}$. Непустота вытекает из $M \neq \varnothing$.

Общезначимость и эквивалентность.

Иногда мы будем говорить о *формулах первого порядка*, не уточняя, в какой именно сигнатуре они являются формулами. Тогда мы просто предполагаем, что какая-то сигнатура выбрана, но ее конкретный вид нас не интересует.

Формула, значение которой равно единице (т. е. она *истинна*) в любой интерпретации при любой оценке, называется *общезначимой*. Формула, для которой существуют интерпретация и оценка такие, что значение этой формула равно единице, называется *выполнимой*.

Упражнение 6. Выполнимо ли отрицание общезначимой формулы? Общезначима ли формула, отрицание которой невыполнимо?

Формулы φ и ψ называются *эквивалентными* (обозначение: $\varphi \equiv \psi$), если их значения совпадают в любой интерпретации при любой оценке. Или иначе, если общезначима формула $\varphi \leftrightarrow \psi$ (как вы помните, $\varphi \leftrightarrow \psi$ это обозначение для формулы $(\varphi \to \psi) \land (\psi \to \varphi)$).

Упражнение 7. Докажите, что для любых формул φ, ψ, θ выполнены условия:

1. $\varphi \equiv \varphi$;
2. если $\varphi \equiv \theta$ и $\theta \equiv \psi$, то $\varphi \equiv \psi$;
3. если $\varphi \equiv \psi$, то $\psi \equiv \varphi$.

Таким образом, $\equiv$ действительно определяет некоторое отношение эквивалентности на множестве Fm_σ.

Упражнение 8. Пусть $\varphi \equiv \psi$ и формула φ общезначима. Докажите, что ψ общезначима.

Формула φ называется *замкнутой*, если $FV(\varphi) = \varnothing$.

Упражнение 9. Докажите, что значение замкнутой формулы в любой интерпретации не зависит от оценки.

Пример 10. Пусть $x \notin FV(\varphi)$. Тогда $\varphi \equiv \forall x\, \varphi$.

Действительно, установим, что в произвольной интерпретации значения этих формул при любой оценке равны. Имеем $[\forall x\, \varphi](\pi) = \min\limits_{m \in M} [\varphi](\pi + (x \mapsto m))$. Поскольку $x \notin FV(\varphi)$, для всех $m \in M$ для всех $y \in FV(\varphi)$ выполнено $(\pi + (x \mapsto m))(y) = \pi(y)$. Применяя лемму 5, заключаем $[\varphi](\pi + (x \mapsto m)) = [\varphi](\pi)$ для всех $m \in M$. Отсюда

$$[\forall x\, \varphi](\pi) = \min_{m \in M} [\varphi](\pi + (x \mapsto m)) = \min_{m \in M} [\varphi](\pi) = [\varphi](\pi).$$

Упражнение 11. Пусть $x \notin FV(\varphi)$. Докажите, что тогда $\varphi \equiv \exists x\, \varphi$.

Пример 12. Формула φ общезначима тогда и только тогда, когда общезначима формула $\forall y\, \varphi$.

Рассмотрим произвольную интерпретацию. Если формула φ общезначима, то $[\varphi](\pi) = \mathbf{1}$ для всех оценок π, в частности, для всех оценок вида $(\pi' + (y \mapsto m))$ для произвольного $m \in M$. Поэтому $[\forall y\, \varphi](\pi') = \mathbf{1}$ для всех π'. Обратно, пусть общезначима $\forall y\, \varphi$. Тогда для всех π' и для всех $m \in M$ верно $[\varphi](\pi' + (y \mapsto m)) = \mathbf{1}$. Однако для любой π имеем $\pi = (\pi + (y \mapsto \pi(y)))$. Поэтому $[\varphi](\pi) = \mathbf{1}$ для всех π.

Упражнение 13. Формула φ выполнима тогда и только тогда, когда выполнима формула $\exists y\, \varphi$.

Пусть $FV(\varphi) = \{y_1, \ldots, y_n\}$. *Замыканием* формулы φ называется формула $\forall y_1 \ldots \forall y_n\, \varphi$. Очевидно, она замкнута.

Упражнение 14. Докажите, что формула общезначима тогда и только тогда, когда общезначимо ее замыкание.

Таким образом, вопрос об общезначимости произвольной формулы сводится к такому вопросу для некоторой замкнутой.

Выразимость и имена переменных

Зададимся некоторой интерпретацией I некоторой сигнатуры σ. Мы видели, что предикатным символам сигнатуры ставятся в соответствие заданные в нашей интерпретации предикаты: $[\mathbf{P}_j] = P_j$. Можно естественным образом поставить в соответствие всякой формуле сигнатуры σ некоторый предикат. Пусть $FV(\varphi) \subseteq \{y_1, \ldots, y_k\}$. Зададим произвольную оценку π и определим предикат $P_\varphi : M^k \to \mathbb{B}$. Для всякого набора $(m_1, \ldots, m_k) \in M^k$ полагаем

$$P_\varphi(m_1, \ldots, m_k) = [\varphi](\pi + (y_1 \mapsto m_1) + \ldots + (y_k \mapsto m_k)).$$

На первый взгляд не очевидно, что это определение *корректно*, т. е. задает предикат по формуле однозначно, ибо в определении участвует некая π. Однако лемма 5 обеспечивает, что $[\varphi](\pi_1 + (y_1 \mapsto m_1) + \ldots + (y_k \mapsto m_k)) = [\varphi](\pi_2 + (y_1 \mapsto m_1) + \ldots + (y_k \mapsto m_k))$ для любых оценок π_1 и π_2 для любых $(m_1, \ldots, m_k) \in M^k$.

Говорят, что предикат P *выразим* в интерпретации I сигнатуры σ, если найдется $\varphi \in \mathrm{Fm}_\sigma$, такая что $P = P_\varphi$. (Еще P_φ удобно обозначить через $[\varphi]$, если это не вызывает путаницы.)

Пример 15. Рассмотрим сигнатуру $(+^{(2)}; =^{(2)})$ и ее естественную интерпретацию с носителем $\mathbb{N}$ («плюс значит сложение, а равно значит равенство»). Предикат «быть четным» выразим в этой интерпретации: достаточно рассмотреть формулу $\varphi \rightleftharpoons \exists x\,(x + x = y)$.

Однако, что можно сказать о формулах $\psi \rightleftharpoons \exists z\,(z + z = y)$ и $\theta \rightleftharpoons \exists x\,(x + x = w)$? Как легко видеть, всем трем формулам соответствует один и тот же предикат четности. Однако эквивалентны ли они?

То что $\varphi \equiv \psi$, нетрудно усмотреть непосредственно. Также легко показать, что $\varphi \not\equiv \theta$: достаточно для нашей интерпретации взять оценку, отображающую y и w в числа разной четности.

Теперь мы видим, *переименование свободных переменных может привести к формуле, не эквивалентной исходной.*

Переименование связанной переменной

Так насколько же существенны конкретные переменные, стоящие в формулах? Когда можно производить *эквивалентную* замену? Следующая лемма дает практически полезные достаточные условия для переименования *связанных* переменных.

Лемма 16. *Пусть $y \notin V(\varphi)$ (т. е. y в φ* вообще отсутствует*). Тогда*

$$\forall x\,\varphi \equiv \forall y\,\varphi(y/x),$$

где выражение $\varphi(y/x)$ означает результат замены всех свободных вхождений *переменной x в формулу φ на y.*

Доказательство. Для доказательства прежде всего уточним смысл выражения $\varphi(y/x)$. Именно, дадим индуктивное определение такой *подстановки* для термов и формул:

- если $t \rightleftharpoons z \in \mathrm{Var}$ и $z \neq x$, то $t(y/x) \rightleftharpoons z$; если же $t \rightleftharpoons x$, то $t(y/x) \rightleftharpoons y$;
- если $t \rightleftharpoons \mathbf{f}_i$, то $t(y/x) \rightleftharpoons \mathbf{f}_i$; если $t \rightleftharpoons \mathbf{f}_j(t_1, \ldots, t_{a_j})$, то $t(y/x) \rightleftharpoons \mathbf{f}_j(t_1(y/x), \ldots, t_{a_j}(y/x))$;
- если $\varphi \rightleftharpoons \mathbf{P}_i$, то $\varphi(y/x) \rightleftharpoons \mathbf{P}_i$; если $\varphi \rightleftharpoons \mathbf{P}_j(t_1, \ldots, t_{b_j})$, то $\varphi(y/x) \rightleftharpoons \mathbf{P}_j(t_1(y/x), \ldots, t_{b_j}(y/x))$;
- если $\varphi \rightleftharpoons \neg\psi$, то $\varphi(y/x) \rightleftharpoons \neg(\psi(y/x))$; если $\varphi \rightleftharpoons \psi_1 \wedge \psi_2$, то $\varphi(y/x) \rightleftharpoons \psi_1(y/x) \wedge \psi_2(y/x)$; аналогично для других связок;
- если $\varphi \rightleftharpoons \forall z\,\psi$ и $z \neq x$, то $\varphi(y/x) \rightleftharpoons \forall z\,(\psi(y/x))$; если же $z \rightleftharpoons x$, то $\varphi(y/x) \rightleftharpoons \forall x\,\psi \rightleftharpoons \varphi$ (т. е. формула не изменяется!). Случай квантора существования аналогичен.

Пример 17. Пусть $\varphi \rightleftharpoons \exists v\,(P(f(x), v) \to \forall x\,R(x, z))$. Тогда $\varphi(y/x) \rightleftharpoons \exists v\,(P(f(y), v) \to \forall x\,R(x, z))$. Обратите внимание, что необязательно $\varphi \equiv \varphi(y/x)$.

Лемма 18. *Для любого терма t и любой формулы φ, если $y \notin V(\varphi)$, то для всякой оценки π верно*

$$[t(y/x)](\pi) = [t](\pi + (x \mapsto \pi(y))) \text{ и}$$

$$[\varphi(y/x)](\pi) = [\varphi](\pi + (x \mapsto \pi(y))).$$

Доказательство. Проведем индукцию по построению. Действительно, пусть $t \rightleftharpoons z \neq x$. Имеем $[t(y/x)](\pi) = \pi(z) = [t](\pi + (x \mapsto \pi(y)))$. Если же $t \rightleftharpoons x$, то $[t(y/x)](\pi) = \pi(y) = [t](\pi + (x \mapsto \pi(y)))$. Случай $t \rightleftharpoons \mathbf{f}_i$ тривиален.

Если $t \rightleftharpoons \mathbf{f}_j(t_1, \ldots, t_{a_j})$, то по предположению индукции

$$[t(y/x)](\pi) = f_j([t_1(y/x)](\pi), \ldots, [t_{a_j}(y/x)](\pi)) = \\ f_j([t_1](\pi + (x \mapsto \pi(y))), \ldots, [t_{a_j}](\pi + (x \mapsto \pi(y)))) = [t](\pi + (x \mapsto \pi(y))).$$

Случай $\varphi \rightleftharpoons \mathbf{P}_i$ тривиален. Если $\varphi \rightleftharpoons \mathbf{P}_j(t_1, \ldots, t_{b_j})$, то по предположению индукции,

$$[\varphi(y/x)](\pi) = P_j([t_1(y/x)](\pi), \ldots, [t_{b_j}(y/x)](\pi)) = \\ P_j([t_1](\pi + (x \mapsto \pi(y))), \ldots, [t_{b_j}](\pi + (x \mapsto \pi(y)))) = [\varphi](\pi + (x \mapsto \pi(y))).$$

Случаи связок также нетрудны. Рассмотрим лишь случай, когда $\varphi \rightleftharpoons \psi_1 \wedge \psi_2$. Имеем

$$[\varphi(y/x)](\pi) = \min([\psi_1(y/x)](\pi), [\psi_2(y/x)](\pi)) = \\ \min([\psi_1](\pi + (x \mapsto \pi(y))), [\psi_2](\pi + (x \mapsto \pi(y)))) = [\varphi](\pi + (x \mapsto \pi(y)))$$

по предположению индукции. Рассмотрим теперь случай квантора всеобщности (с квантором существования все аналогично). Итак, пусть $\varphi = \forall z\,\psi$. Предположим, что $z \neq x$. Тогда, используя предположение индукции для $\pi' = \pi + (z \mapsto m)$ (мы доказываем утверждение для любой оценки), затем учитывая $V(\varphi) \ni z \neq y \notin V(\varphi)$ и, наконец, результат упражнения 4, получаем

$$\begin{aligned}
&[\varphi(y/x)](\pi) = [\forall z\,(\psi(y/x))](\pi) = \\
&\quad \min_{m\in M}[\psi(y/x)](\pi + (z \mapsto m)) = \min_{m\in M}[\psi](\pi + (z \mapsto m) + (x \mapsto (\pi + (z \mapsto m))(y))) = \\
&\quad \min_{m\in M}[\psi](\pi + (z \mapsto m) + (x \mapsto \pi(y))) = \min_{m\in M}[\psi](\pi + (x \mapsto \pi(y)) + (z \mapsto m)) = \\
&\quad [\forall z\,\psi](\pi + (x \mapsto \pi(y))) = [\varphi](\pi + (x \mapsto \pi(y))).
\end{aligned}$$

Остается предположить, что $z = x$. Тогда, в силу $x \notin FV(\varphi)$, применима лемма 5. Имеем

$$[\varphi(y/x)](\pi) = [\varphi](\pi) = [\varphi](\pi + (x \mapsto \pi(y))).$$

□

Теперь мы можем завершить доказательство леммы 16. Действительно, в любой интерпретации при произвольной оценке π по лемме 18 и, в силу $y \notin FV(\varphi)$, по лемме 5 имеем

$$\begin{aligned}
&[\forall y\,\varphi(y/x)](\pi) = \min_{m\in M}[\varphi(y/x)](\pi + (y \mapsto m)) = \min_{m\in M}[\varphi](\pi + (y \mapsto m) + (x \mapsto (\pi + (y \mapsto m))(y))) = \\
&\quad \min_{m\in M}[\varphi](\pi + (y \mapsto m) + (x \mapsto m)) = \min_{m\in M}[\varphi](\pi + (x \mapsto m)) = [\forall x\,\varphi](\pi).
\end{aligned}$$

□

Упражнение 19. Пусть $y \notin V(\varphi)$. Докажите, что $\exists x\,\varphi \equiv \exists y\,\varphi(y/x)$.

Пример 20. Условия доказанной леммы *достаточны, но не необходимы* для возможности переименования переменных, сохраняющего эквивалентность формул. Действительно, пусть $\forall x\,\varphi = \forall x\,(P(x,z) \wedge \exists y\,Q(y))$. Лемма 16 не позволяет переименовать x в y, однако, как нетрудно проверить, имеет место цепочка эквивалентностей (осмысленная вследствие упражнения 7):

$$\forall x\,(P(x,z) \wedge \exists y\,Q(y)) \equiv \forall x\,P(x,z) \wedge \exists y\,Q(y) \equiv \forall y\,P(y,z) \wedge \exists y\,Q(y) \equiv \forall y\,(P(y,z) \wedge \exists y\,Q(y))).$$

Можно сформулировать более общие условия возможности переименования переменных. См., напр., [Верещагин-Шень, ч. 2, гл. 4, п. 6].

Тавтологии первого порядка.

Пусть имеется некоторая *пропозициональная* формула $A(p_1,\ldots,p_n)$, не содержащая иных переменных, кроме указанных. Пусть также $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ суть некоторые формулы первого порядка. Тогда формула первого порядка, получаемая заменой p_i на φ_i всюду в формуле $A(p_1,\ldots,p_n)$, обозначается $A(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$. Если $A(p_1,\ldots,p_n)$ тавтология, то формула $A(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ также называется *тавтологией.*

Пример 21. Формула $\exists z\,Q(z) \vee \neg\exists z\,Q(z)$ получается из пропозициональной формулы $(p_1 \vee \neg p_1)$ подстановкой формулы $\varphi_1 = \exists z\,Q(z)$ вместо p_1.

Лемма 22. *Всякая тавтология общезначима.*

Доказательство. Напомним, что всякой пропозициональной формуле мы ставили в соответствие булеву функцию, возвращающую истинностное значение формулы по значению ее переменных. Пусть для $A(p_1,\ldots,p_n)$ это функция $f_A\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$. Индукция по построению формулы $A(p_1,\ldots,p_n)$ показывает, что для любой оценки π

$$[A(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)](\pi) = f_A([\varphi_1](\pi),\ldots,[\varphi_n](\pi)).$$

Например, в случае $A(p_1,\ldots,p_n) = (B_1(p_1,\ldots,p_n) \to B_2(p_1,\ldots,p_n))$ имеем, используя предположение индукции,

$$\begin{aligned}
&[A(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)](\pi) = \max(\mathbf{1} - [B_1(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)](\pi), [B_2(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)](\pi)) = \\
&\quad IMP([B_1(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)](\pi), [B_2(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)](\pi)) = IMP(f_{B_1}([\varphi_1](\pi),\ldots,[\varphi_n](\pi)), f_{B_2}([\varphi_1](\pi),\ldots,[\varphi_n](\pi))) = \\
&\quad f_A([\varphi_1](\pi),\ldots,[\varphi_n](\pi)).
\end{aligned}$$

Поэтому, если $A(p_1,\ldots,p_n)$ тавтология, то для любых π имеем

$$[A(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)](\pi) = f_A([\varphi_1](\pi),\ldots,[\varphi_n](\pi)) = \mathbf{1}.$$

Это имеет место в каждой интерпретации. Поэтому формула $A(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ общезначима. □

Пример 23. Каковы бы ни были (первопорядковые) формулы φ и ψ, общезначимы формулы: $(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\psi \wedge \varphi)$, $\varphi \vee \neg\varphi$, $\varphi \to \varphi$, $\varphi \to \varphi \vee \psi$, $(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi)$, $((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi$.

Кванторы и связки. Важнейшие эквивалентности.

Пример 24. Для произвольных формул φ и ψ выполнено нижеследующее.

1. Пусть $x \notin FV(\psi)$. Тогда
   (a) $\forall x\, (\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x\, \varphi \wedge \psi$;
   (b) $\exists x\, (\varphi \wedge \psi) \equiv \exists x\, \varphi \wedge \psi$;
   (c) $\exists x\, (\varphi \vee \psi) \equiv \exists x\, \varphi \vee \psi$;
   (d) $\forall x\, (\varphi \vee \psi) \equiv \forall x\, \varphi \vee \psi$;
2. $\forall x\, (\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x\, \varphi \wedge \forall x\, \psi$;
3. $\exists x\, (\varphi \vee \psi) \equiv \exists x\, \varphi \vee \exists x\, \psi$;
4. $\neg\forall x\, \varphi \equiv \exists x\, \neg\varphi$;
5. $\neg\exists x\, \varphi \equiv \forall x\, \neg\varphi$;

Докажем некоторые из этих эквивалентностей.

П. 1a. Предполагаем $x \notin FV(\psi)$. По определению в произвольной интерпретации при всякой оценке π имеем

$$[\forall x\, (\varphi \wedge \psi)](\pi) = \min_{m \in M} \min([\varphi](\pi + (x \mapsto m)), [\psi](\pi + (x \mapsto m))) \text{ и}$$

$$[\forall x\, \varphi \wedge \psi](\pi) = \min(\min_{m \in M} [\varphi](\pi + (x \mapsto m)), [\psi](\pi)).$$

Поскольку $x \notin FV(\psi)$, то для всех $w \in FV(\psi)$ имеем $\pi(w) = (\pi + (x \mapsto m))(w)$, и можем применить лемму 5, получая для любых $m \in M$:

$$[\psi](\pi + (x \mapsto m)) = [\psi](\pi).$$

Значит,

$$[\forall x\, (\varphi \wedge \psi)](\pi) = \min_{m \in M} \min([\varphi](\pi + (x \mapsto m)), [\psi](\pi)).$$

Разберем возможные случаи. Если $[\psi](\pi) = \mathbf{0}$, то, очевидно,

$$[\forall x\, (\varphi \wedge \psi)](\pi) = \mathbf{0} = [\forall x\, \varphi \wedge \psi](\pi).$$

Если же $[\psi](\pi) = \mathbf{1}$, то

$$[\forall x\, (\varphi \wedge \psi)](\pi) = \min_{m \in M} [\varphi](\pi + (x \mapsto m)) = [\forall x\, \varphi \wedge \psi](\pi).$$

Мы, таким образом, в произвольной интерпретации для всех оценок π установили

$$[\forall x\, (\varphi \wedge \psi)](\pi) = [\forall x\, \varphi \wedge \psi](\pi).$$

Следовательно, соответствующие формулы эквивалентны.

П. 1d. Действуя как выше, получаем

$$[\forall x\, (\varphi \vee \psi)](\pi) = \min_{m \in M} \max([\varphi](\pi + (x \mapsto m)), [\psi](\pi)) \text{ и}$$

$$[\forall x\, \varphi \vee \psi](\pi) = \max(\min_{m \in M} [\varphi](\pi + (x \mapsto m)), [\psi](\pi)).$$

Разберем возможные случаи. Если $[\psi](\pi) = \mathbf{1}$, то, очевидно,

$$[\forall x\, (\varphi \vee \psi)](\pi) = \mathbf{1} = [\forall x\, \varphi \vee \psi](\pi).$$

Если же $[\psi](\pi) = \mathbf{0}$, то

$$[\forall x\, (\varphi \vee \psi)](\pi) = \min_{m \in M} [\varphi](\pi + (x \mapsto m)) = [\forall x\, \varphi \vee \psi](\pi).$$

П. 2. По определению в произвольной интерпретации при всякой оценке π имеем

$$[\forall x\, (\varphi \wedge \psi)](\pi) = \min_{m \in M} \min([\varphi](\pi + (x \mapsto m)), [\psi](\pi + (x \mapsto m))) \text{ и}$$

$$[\forall x\,\varphi \wedge \forall x\,\psi](\pi) = \min(\min_{m\in M}[\varphi](\pi + (x \mapsto m)), \min_{m\in M}[\psi](\pi + (x \mapsto m))).$$

Разберем возможные случаи. Если $[\forall x\,(\varphi \wedge \psi)](\pi) = \mathbf{1}$, то для всех $m \in M$ верно $\min([\varphi](\pi + (x \mapsto m)), [\psi](\pi + (x \mapsto m))) = \mathbf{1}$, т.е. $[\varphi](\pi + (x \mapsto m)) = [\psi](\pi + (x \mapsto m)) = \mathbf{1}$. Очевидно, что тогда $[\forall x\,\varphi \wedge \forall x\,\psi](\pi) = \mathbf{1}$.

Пусть, напротив, $[\forall x\,(\varphi \wedge \psi)](\pi) = \mathbf{0}$. Тогда найдется элемент $k \in M$, такой что

$$\min([\varphi](\pi + (x \mapsto k)), [\psi](\pi + (x \mapsto k))) = \mathbf{0}.$$

Хотя бы одно из этих значений равно $\mathbf{0}$. Здесь возникают два симметричных случая. Разберем один из них. Пусть $[\varphi](\pi + (x \mapsto k)) = \mathbf{0}$. Тогда $\min\limits_{m\in M}[\varphi](\pi + (x \mapsto m)) = \mathbf{0}$ и, разумеется, $[\forall x\,\varphi \wedge \forall x\,\psi](\pi) = \mathbf{0}$.

П. 4. По определению в произвольной интерпретации при всякой оценке π имеем

$$[\neg\forall x\,\varphi](\pi) = \mathbf{1} - \min_{m\in M}[\varphi](\pi + (x \mapsto m)) \text{ и}$$

$$[\exists x\,\neg\varphi](\pi) = \max_{m\in M}(\mathbf{1} - [\varphi](\pi + (x \mapsto m))).$$

В принципе, тут все ясно, но для большей наглядности опять разберем возможные случаи. Если $[\neg\forall x\,\varphi](\pi) = \mathbf{0}$, то $\min\limits_{m\in M}[\varphi](\pi + (x \mapsto m)) = \mathbf{1}$, т.е. для всех $m \in M$ имеем $[\varphi](\pi + (x \mapsto m)) = \mathbf{1}$ и, соответственно,

$$\mathbf{1} - [\varphi](\pi + (x \mapsto m)) = \mathbf{0}.$$

Поэтому $[\exists x\,\neg\varphi](\pi) = \mathbf{0}$. Пусть теперь $[\neg\forall x\,\varphi](\pi) = \mathbf{1}$ и $\min\limits_{m\in M}[\varphi](\pi + (x \mapsto m)) = \mathbf{0}$, т.е. найдется $k \in M$, такой что $[\varphi](\pi + (x \mapsto k)) = \mathbf{0}$ и, соответственно,

$$\mathbf{1} - [\varphi](\pi + (x \mapsto k)) = \mathbf{1}.$$

Поэтому $[\exists x\,\neg\varphi](\pi) = \mathbf{1}$.

Упражнение 25. Доказать оставшиеся эквивалентности.

Замена подформулы на эквивалентную. Кванторы и импликация.

Лемма 26. *Пусть φ произвольная формула, а $\psi \equiv \psi'$. Тогда выполнено нижеследующее.*

1. $(\varphi \wedge \psi) \equiv (\varphi \wedge \psi')$;
2. $(\varphi \vee \psi) \equiv (\varphi \vee \psi')$;
3. $(\varphi \to \psi) \equiv (\varphi \to \psi')$;
4. $(\psi \to \varphi) \equiv (\psi' \to \varphi)$;
5. $(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv (\varphi \leftrightarrow \psi')$;
6. $\neg\psi \equiv \neg\psi'$;
7. $\forall x\,\psi \equiv \forall x\,\psi'$;
8. $\exists x\,\psi \equiv \exists x\,\psi'$.

Доказательство. Проверка первых шести пунктов тривиальна. Разберем п. 7 (п. 8 аналогичен). Рассмотрим произвольную интерпретацию. Имеем, что для всех оценок π' верно $[\psi](\pi') = [\psi'](\pi')$. В частности, для любой оценки π и любого $m \in M$ имеем

$$[\psi](\pi + (x \mapsto m)) = [\psi'](\pi + (x \mapsto m)).$$

Отсюда

$$[\forall x\,\psi](\pi) = \min_{m\in M}[\psi](\pi + (x \mapsto m)) = \min_{m\in M}[\psi'](\pi + (x \mapsto m)) = [\forall x\,\psi'](\pi).$$

□

Эта лемма приводит нас к важном выводу: *если в формуле заменить какое-либо вхождение некоторой подформулы на эквивалентную этой подформуле формулу, мы получим формулу, эквивалентную исходной.*

Точнее, нужно определить, что такое подформула, вхождение подформулы, замена вхождения подформулы на данную формулу. Мы не станем этого делать, но будем использовать интуитивное понятие, дав предварительно пример.

Пример 27. Пусть $\varphi \rightleftharpoons \exists y\,(Q(y) \to \forall z(R(z,y) \wedge Q(z))) \vee Q(z)$, где R, Q суть предикатные символы. Каковы подформулы формулы φ? Вот они:

$$\exists y\,(Q(y) \to \forall z(R(z,y) \wedge Q(z))) \vee Q(z),$$

$$\exists y\,(Q(y) \to \forall z(R(z,y) \wedge Q(z))),\ Q(z),$$

$$Q(y) \to \forall z(R(z,y) \wedge Q(z)),\ Q(y),\ \forall z(R(z,y) \wedge Q(z)),$$

$$R(z,y) \wedge Q(z),\ R(z,y).$$

Подформула $Q(z)$ имеет два различных вхождения. Все остальные — ровно по одному.

Упражнение 28. Множество $SF(\varphi)$ подформул формулы φ можно определить индуктивно: $SF(\psi_1 \to \psi_2) = \{\psi_1 \to \psi_2\} \cup SF(\psi_1) \cup SF(\psi_2)$, $SF(\forall x\,\psi) = \{\forall x\,\psi\} \cup SF(\psi)$ и т.д. Приведите это определение полностью.

Задача 29. Содержательно, подформулы φ — это подслова φ, являющихся формулами. Проверьте, равносильно ли такое «содержательное» определение индуктивному определению множества $SF(\varphi)$. (Здесь может понадобиться однозначность разбора.)

Лемма 30. *Пусть $\psi \equiv \psi'$ и формула φ' получена из φ заменой некоторых вхождений подформулы ψ на ψ'. Тогда $\varphi \equiv \varphi'$.*

Доказательство. Очевидно, достаточно рассмотреть случай замены ровно одного вхождения (когда хотя бы одно есть). Проведем индукцию по построению φ. Рассмотрим лишь один из случаев. Пусть $\varphi \rightleftharpoons \theta_1 \to \theta_2$. Тогда подформула ψ либо совпадает с φ, и все доказано, либо рассматриваемое вхождение будет вхождением либо в θ_1, либо в θ_2. Применим к соответствующему θ_i предположение индукции, получив, например, $\varphi' = \theta_1' \to \theta_2$ и $\theta_1' \equiv \theta_1$. Далее используем подходящее утверждение леммы 26 и заключаем $\varphi \equiv \varphi'$. $\square$

Задача 31. Дайте строгое определение замены вхождения подформулы на данную формулу и проведите доказательство леммы 30.

Пример 32. Пусть снова $\varphi \rightleftharpoons \exists y\,(Q(y) \to \forall z\,(R(z,y) \wedge Q(z))) \vee Q(z)$. По лемме 16 имеем

$$\forall z\,(R(z,y) \wedge Q(z)) \equiv \forall w\,(R(w,y) \wedge Q(w)).$$

Из результатов примера 24 видно, что

$$\forall w\,(R(w,y) \wedge Q(w)) \equiv \forall w\,R(w,y) \wedge \forall w\,Q(w).$$

Применяя упражнение 7, получаем

$$\forall z\,(R(z,y) \wedge Q(z)) \equiv \forall w\,R(w,y) \wedge \forall w\,Q(w).$$

Теперь, используя лемму 30, заменим единственное вхождение формулы слева в φ на формулу справа и получим окончательно:

$$\varphi \equiv \exists y\,(Q(y) \to (\forall w\,R(w,y) \wedge \forall w\,Q(w))) \vee Q(z).$$

Пример 33. Пусть φ и ψ суть некоторые формулы, причем $x \notin FV(\psi)$. Тогда выполнено нижеследующее.

1. $(\forall x\,\varphi \to \psi) \equiv \exists x\,(\varphi \to \psi)$;
2. $(\exists x\,\varphi \to \psi) \equiv \forall x\,(\varphi \to \psi)$;
3. $(\psi \to \forall x\,\varphi) \equiv \forall x\,(\psi \to \varphi)$;
4. $(\psi \to \exists x\,\varphi) \equiv \exists x\,(\psi \to \varphi)$.

Прежде всего, отметим эквивалентность $(\sigma \to \tau) \equiv (\neg\sigma \vee \tau)$, выполненную для любых формул σ и τ. Ее можно получить из соответствующей пропозициональной тавтологии по лемме 22. С ее помощью легко установить требуемые эквивалентности, применяя результаты примера 24 и лемму 30. Действительно, имеем, например,

$$\exists x\,\varphi \to \psi \equiv \neg\exists x\,\varphi \vee \psi \equiv \forall x\,\neg\varphi \vee \psi \equiv \forall x\,(\neg\varphi \vee \psi) \equiv \forall x\,(\varphi \to \psi).$$

Упражнение 34. Объясните каждый переход в цепочке эквивалентностей выше. Докажите остальные эквивалентности из этого примера.

Предваренная нормальная форма

Говорят, что формула φ *предваренная* или *пренексная*, если

$$\varphi = Q_1\, y_1\, \ldots\, Q_n\, y_n\, \psi,$$

где каждый Q_i есть некоторый квантор, а в формуле ψ кванторы отсутствуют вовсе (т. е. она *бескванторная*). Пусть φ произвольная. Если некоторая формула φ' предваренная и $\varphi' \equiv \varphi$. то φ' называется *предваренной* (или *пренексной*) *нормальной формой* формулы φ. Такая форма может быть не единственной, однако она всегда существует.

Пример 35. Пусть дана формула $\varphi = \forall x\, Q(x) \vee \exists y\, S(y)$, где Q, S суть предикатные символы. Тогда можно построить две различные предваренные нормальные формы для этой формулы:

$$\forall x\, \exists y\, (Q(x) \vee S(y)) \equiv \varphi \equiv \exists y\, \forall x\, (Q(x) \vee S(y)).$$

Лемма 36. *Для всякой формулы φ найдется предваренная формула φ', такая что $\varphi \equiv \varphi'$.*

Доказательство. Проводится индукция по построению формулы φ. Опишем основную идею. Если φ атомарная, то она предваренная. Если φ начинается с квантора, то по предположению индукции заменяем формулу под этим квантором на эквивалентную предваренную. Если φ начинается с отрицания, то по предположению индукции заменяем формулу под отрицанием на эквивалентную предваренную. Затем проносим отрицание вовнутрь, переменяя кванторы. Если в φ главная связка бинарная, то по предположению индукции заменяем каждую из формул под этой связкой на эквивалентную предваренную. Затем переименовываем связанные переменные так, чтобы можно было вынести все кванторы наружу. Выносим их.

Эквивалентность переходов обеспечивают примеры 24 и 33, а также леммы 16 и 30. □

Упражнение 37. Проведите это рассуждение подробно.

Пример 38. Пусть A, B, C, D предикатные символы подходящей валентности и

$$\varphi = \neg((\neg\exists y\, \forall z\, C(y,z) \wedge \exists z\, D(y,z)) \to (\exists x\, A(x,y) \to \forall x\, B(x,y))).$$

Приведем формулу φ к предваренной нормальной форме.

Начать можно с кратчайших непредваренных подформул. Имеем

$$\neg\exists y\, \forall z\, C(y,z) \equiv \forall y\, \neg\forall z\, C(y,z) \equiv \forall y\, \exists z\, \neg C(y,z).$$

Заметьте здесь, что мы заменяем подформулу $\neg\forall z\, C(y,z)$ на эквивалентную ей $\exists z\, \neg C(y,z)$. Затем

$$\exists x\, A(x,y) \to \forall x\, B(x,y) \equiv \forall x\, (A(x,y) \to \forall x\, B(x,y)) \equiv \forall x\, (A(x,y) \to \forall x'\, B(x',y)) \equiv \forall x\, \forall x'\, (A(x,y) \to B(x',y)).$$

Вначале мы можем вынести квантор, так как $x \notin FV(\forall x\, B(x,y))$. После мы вынуждены переименовать связанную переменную. Удобно выбирать такие новые имена переменных, которые не встречаются ни в φ, ни в уже преобразованных формулах. Далее,

$$\begin{aligned}&\neg\exists y\, \forall z\, C(y,z) \wedge \exists z\, D(y,z) \equiv \forall y\, \exists z\, \neg C(y,z) \wedge \exists z\, D(y,z) \equiv \\ &\quad \exists z\, (\forall y\, \exists z\, \neg C(y,z) \wedge D(y,z)) \equiv \exists z\, (\forall y'\, \exists z\, \neg C(y',z) \wedge D(y,z)) \equiv \exists z\, \forall y'\, (\exists z\, \neg C(y',z) \wedge D(y,z)) \equiv \\ &\qquad \exists z\, \forall y'\, (\exists z'\, \neg C(y',z') \wedge D(y,z)) \equiv \exists z\, \forall y'\, \exists z'\, (\neg C(y',z') \wedge D(y,z)).\end{aligned}$$

Теперь видно, что

$$\begin{aligned}\varphi &\equiv \neg(\exists z\, \forall y'\, \exists z'\, (\neg C(y',z') \wedge D(y,z)) \to \forall x\, \forall x'\, (A(x,y) \to B(x',y))) \equiv \\ &\quad \neg\forall z\, \exists y'\, \forall z'\, ((\neg C(y',z') \wedge D(y,z)) \to \forall x\, \forall x'\, (A(x,y) \to B(x',y))) \equiv \\ &\quad \neg\forall z\, \exists y'\, \forall z'\, \forall x\, \forall x'\, ((\neg C(y',z') \wedge D(y,z)) \to (A(x,y) \to B(x',y))) \equiv \\ &\qquad \exists z\, \forall y'\, \exists z'\, \exists x\, \exists x'\, \neg((\neg C(y',z') \wedge D(y,z)) \to (A(x,y) \to B(x',y))).\end{aligned}$$

Здесь мы позволили себе не расписывать шаги при выносе целой последовательности кванторов и при переносе отрицания через такую последовательность.

Пример 39. В предыдущем примере не обязательно было считать A, B, C, D предикатными символами. Если эти буквы обозначают какие-то бескванторные формулы, мы все равно получим указанным способом предваренную нормальную форму. Однако тогда нужно обратить внимание на переименование переменных: мы должны заменить их свободные вхождения всюду внутри этих формул. Например, вместо $C(y',z')$ в этом случае нужно написать $C(y'/y)(z'/z)$ (сначала заменяем в формуле C все свободные вхождения y на y', затем все свободные вхождения z на z'). Разумеется, нужно следить и за эквивалентностью преобразований (см. лемму 16): достаточно, впрочем, обеспечивать $y', z' \notin V(C)$ и т. д. Новым переменным лучше быть действительно новыми!

Упражнение 40. Пусть φ произвольная формула и переменные y, z, y', z' попарно различны. Верно ли, что $\varphi(y'/y)(z'/z) = \varphi(z'/z)(y'/y)$?

Примеры общезначимых формул.

Поговорим о некоторых частных вопросах, включая обсуждавшиеся на семинарах.

Пример 41. Общезначима ли формула $\forall x\, \varphi \to \exists x\, \varphi$ при любых φ? (Здесь нужно понимать, что на самом деле это выражение определяет целый класс формул схожей структуры, которые, вообще говоря, могут обладать разными свойствами при разных φ.)

Как обычно, для произвольных интерпретации и оценки вычислим значение данной формулы. Имеем

$$[\forall x\, \varphi \to \exists x\, \varphi](\pi) = \max(\mathbf{1} - [\forall x\, \varphi](\pi), [\exists x\, \varphi](\pi)).$$

Ясно, что если $[\forall x\, \varphi](\pi) = \mathbf{0}$, то $[\forall x\, \varphi \to \exists x\, \varphi](\pi) = \mathbf{1}$. Пусть

$$[\forall x\, \varphi](\pi) = \min_{m \in M}[\varphi](\pi + (x \mapsto m)) = \mathbf{1}.$$

Тогда, очевидно, для всех $m \in M$ верно $[\varphi](\pi + (x \mapsto m)) = \mathbf{1}$. Тем более,

$$\mathbf{1} = \max_{m \in M}[\varphi](\pi + (x \mapsto m)) = [\exists x\, \varphi](\pi).$$

Поэтому $[\forall x\, \varphi \to \exists x\, \varphi](\pi) = \mathbf{1}$. Выходит, наша формула общезначима.

Пример 42. Общезначима ли формула $\forall x\, \varphi \to \varphi$ при любых φ?

Действуя как в предыдущем примере, рассматриваем случай $[\forall x\, \varphi](\pi) = \mathbf{1}$. Тогда для всякого $m \in M$ верно $[\varphi](\pi + (x \mapsto m)) = \mathbf{1}$. В частности, для $m = \pi(x)$. Поскольку $\pi = (\pi + (x \mapsto \pi(x)))$, имеем $[\varphi](\pi) = \mathbf{1}$. Поэтому наша формула общезначима.

Упражнение 43. Докажите, что при любых φ общезначима формула $\varphi \to \exists x\, \varphi$.

Пример 44. Общезначима ли формула $\exists x\, \forall y\, \varphi \to \forall y\, \exists x\, \varphi$ при любых φ?

Воспользуемся примером 33. Имеем

$$\exists x\, \forall y\, \varphi \to \forall y\, \exists x\, \varphi \equiv \forall x\, (\forall y\, \varphi \to \forall y\, \exists x\, \varphi) \equiv \forall x\, \forall y\, (\forall y\, \varphi \to \exists x\, \varphi).$$

Что можно сказать о формуле $\forall y\, \varphi \to \exists x \varphi$? Ее общезначимость при любых φ легко следует из общезначимости формул $\forall y\, \varphi \to \varphi$ и $\varphi \to \exists x \varphi$ при любых φ. Действительно, пусть в произвольной интерпретации мы имеем $[\forall y\, \varphi](\pi) = \mathbf{1}$. Тогда $[\varphi](\pi) = \mathbf{1}$ и $[\exists x\, \varphi](\pi) = \mathbf{1}$. Используя пример 12, далее заключаем, что общезначима формула

$$\forall x\, \forall y\, (\forall y\, \varphi \to \exists x\, \varphi),$$

а с тем и наша исходная.

Дадим более прямое доказательство. Итак, предполагаем $[\exists x\, \forall y\, \varphi](\pi) = \mathbf{1}$ для произвольной π. Тогда имеем

$$\max_{m \in M} \min_{l \in M}[\varphi](\pi + (x \mapsto m) + (y \mapsto l)) = \mathbf{1}.$$

Таким образом, существует $d \in M$, такой что для всех $l \in M$

$$[\varphi](\pi + (x \mapsto d) + (y \mapsto l)) = \mathbf{1}.$$

Вспоминая упражнение 4, мы, поскольку предполагаем в наших формулах $x \neq y$ (см. первый раздел), для всех $l \in M$ имеем

$$[\varphi](\pi + (y \mapsto l) + (x \mapsto d)) = \mathbf{1}.$$

С другой стороны,

$$[\forall y\, \exists x\, \varphi](\pi) = \min_{n \in M} \max_{k \in M}[\varphi](\pi + (y \mapsto n) + (x \mapsto k)).$$

Понятно, что $\max\limits_{k \in M}[\varphi](\pi + (y \mapsto n) + (x \mapsto k)) = \mathbf{1}$ для всех $n \in M$ (возьмем $k = d$). Отсюда $[\forall y\, \exists x\, \varphi](\pi) = \mathbf{1}$.

Пример 45. Общезначима ли формула $\exists x\, \forall x\, \varphi \to \forall x\, \exists x\, \varphi$ при любых φ?

Вспомнив пример 10, мы заключаем $\exists x\, \forall x\, \varphi \equiv \forall x\, \varphi$ и $\forall x\, \exists x\, \varphi \equiv \exists x\, \varphi$. Затем, заменяя подформулы исходной формулы на эквивалентные (лемма 30), получаем

$$\exists x\, \forall x\, \varphi \to \forall x\, \exists x\, \varphi \equiv \forall x\, \varphi \to \exists x\, \varphi.$$

Последняя формула, как мы знаем, общезначима. Тогда такова же и первая.

Пример 46. Верно ли, что $\forall x\,\forall y\,\varphi \equiv \forall y\,\forall x\,\varphi$ при любых φ?

Имеем
$$[\forall x\,\forall y\,\varphi](\pi) = \min_{m\in M}\min_{l\in M}[\varphi](\pi + (x\mapsto m) + (y\mapsto l)).$$
С другой стороны,
$$[\forall y\,\forall x\,\varphi](\pi) = \min_{n\in M}\min_{k\in M}[\varphi](\pi + (y\mapsto n) + (x\mapsto k)).$$
Если $[\forall x\,\forall y\,\varphi](\pi) = \mathbf{1}$, то при всех $m, l \in M$, с учетом упражнения 4, верно
$$[\varphi](\pi + (x\mapsto m) + (y\mapsto l)) = \mathbf{1} = [\varphi](\pi + (y\mapsto l) + (x\mapsto m)).$$
Т. е. $[\varphi](\pi + (y\mapsto n) + (x\mapsto k)) = \mathbf{1}$ при всех $n, k \in M$. Отсюда $[\forall y\,\forall x\,\varphi](\pi) = \mathbf{1}$. Пусть теперь $[\forall x\,\forall y\,\varphi](\pi) = \mathbf{0}$. Тогда найдутся $d, e \in M$, такие что
$$[\varphi](\pi + (x\mapsto d) + (y\mapsto e)) = \mathbf{0} = [\varphi](\pi + (y\mapsto e) + (x\mapsto d)).$$
Взяв $n = e$ и $k = d$, убедимся, что $[\forall y\,\forall x\,\varphi](\pi) = \mathbf{0}$. Во всяком случае, $[\forall x\,\forall y\,\varphi](\pi) = [\forall y\,\forall x\,\varphi](\pi)$.

Пример 47. Верно ли, что $\exists x\,\exists y\,\varphi \equiv \exists y\,\exists x\,\varphi$ при любых φ?

Сведем задачу к предыдущей. Так как в последней мы не накладывали ограничений на φ, можем считать, что эта формула начинается с $\neg$:
$$\forall x\,\forall y\,\neg\varphi \equiv \forall y\,\forall x\,\neg\varphi.$$
Используя пример 24 и лемму 30, получаем
$$\neg\exists x\,\exists y\,\varphi \equiv \neg\exists y\,\exists x\,\varphi.$$
Отсюда легко следует требуемое.

Пример 48. Общезначима ли формула $(\varphi \to \psi) \to (\forall x\,\varphi \to \forall x\,\psi)$ при любых φ, ψ?

На первый взгляд может показаться, что это так. Однако, можно указать конкретную формулу такого вида (т. е. указать φ и ψ), которая общезначимой не будет. Пусть имеется сигнатура $\sigma = (;\mathbf{T}^{(0)}, \mathbf{Z}^{(1)})$ (два предикатных символа). И определена интерпретация с двухэлементным носителем $\mathcal{B} = \{a, b\}$. Предикатным символам поставлены в соответствие предикаты $T = \mathbf{1}$ (константа) и Z, такой что $Z(a) = \mathbf{1}$, $Z(b) = \mathbf{0}$. Определим оценку π так, что $\pi(y) = a$ для всех $y \in \mathrm{Var}$. Положим $\varphi = \mathbf{T}$ и $\psi = \mathbf{Z}(x)$. Тогда наша формула примет вид
$$\theta = (\mathbf{T} \to \mathbf{Z}(x)) \to (\forall x\,\mathbf{T} \to \forall x\,\mathbf{Z}(x)).$$
Имеем
$$[\mathbf{T} \to \mathbf{Z}(x)](\pi) = \max(\mathbf{1} - [\mathbf{T}](\pi), [\mathbf{Z}(x)](\pi)) = \max(0, Z([x](\pi))) = Z(\pi(x)) = Z(a) = \mathbf{1}.$$
С другой стороны,
$$\begin{aligned}[\forall x\,\mathbf{T} \to \forall x\,\mathbf{Z}(x)](\pi) &= \max(\mathbf{1} - [\forall x\,\mathbf{T}](\pi), [\forall x\,\mathbf{Z}(x)](\pi)) = \\ \max(\mathbf{1} - \min_{m\in\mathcal{B}}[\mathbf{T}](\pi + (x\mapsto m)), &\min_{m\in\mathcal{B}}[\mathbf{Z}(x)](\pi + (x\mapsto m))) = \max(\mathbf{0}, \min_{m\in\mathcal{B}} Z([x](\pi + (x\mapsto m)))) = \\ &\min(Z((\pi + (x\mapsto a))(x)), Z((\pi + (x\mapsto b))(x))) = \min(Z(a), Z(b)) = \min(\mathbf{1}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}.\end{aligned}$$
Ясно, что тогда $[\theta](\pi) = \mathbf{0}$. Значит, формула θ ложна в заданной интерпретации при оценке π. Поэтому она не общезначима.

Упражнение 49. В условиях предыдущего примера придумайте φ, ψ и опровергающую оценку для сигнатуры $(1^{(0)}; \leqslant^{(2)})$ и ее стандартной интерпретации с носителем $\mathbb{N}$.

Пример 50. Общезначима ли формула $(\forall x\,\varphi \to \forall x\,\psi) \to (\varphi \to \psi)$ при любых φ, ψ?

Ответ отрицательный. В этом можно убедиться, немного изменив предыдущий пример. Именно, нужно вместо $\mathbf{T}$ взять предикатный символ $\mathbf{F}$ и интерпретировать его как тождественно ложный предикат $F = \mathbf{0}$. Положив $\varphi = \mathbf{Z}(x)$ и $\psi = \mathbf{F}$, имеем формулу
$$\theta' = (\forall x\,\mathbf{Z}(x) \to \forall x\,\mathbf{F}) \to (\mathbf{Z}(x) \to \mathbf{F}).$$
Взяв ту же самую оценку π, получаем
$$[\forall x\,\mathbf{Z}(x)](\pi) = \mathbf{0}; \quad [\forall x\,\mathbf{F}](\pi) = \mathbf{0};$$
$$[\mathbf{Z}(x)](\pi) = Z(a) = \mathbf{1}; \quad [\mathbf{F}](\pi) = \mathbf{0}.$$
Отсюда $[\theta'](\pi) = \mathbf{0}$.

Пример 51. Общезначима ли формула $(\forall x\,\varphi \to \forall x\,\psi) \to \forall x\,(\varphi \to \psi)$ при любых φ, ψ?

Допустим, что общезначима. Однако, как мы знаем, при всех φ общезначима $\forall x\,\varphi \to \varphi$. В частности, общезначима формула

$$\forall x\,(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \psi).$$

Из последнего обстоятельства и нашего предположения легко получим общезначимость формулы

$$(\forall x\,\varphi \to \forall x\,\psi) \to (\varphi \to \psi),$$

что, по предыдущему примеру, не так. Противоречие.

Пример 52. Общезначима ли формула $\forall x\,(\varphi \to \psi) \to (\forall x\,\varphi \to \forall x\,\psi)$ при любых φ, ψ?

В отличие от ряда предыдущих примеров, все такие формулы общезначимы. Установим это обычным способом, предположив в произвольной интерпретации при оценке π, что $[\forall x\,(\varphi \to \psi)](\pi) = \mathbf{1}$. Если окажется, что $[\forall x\,\varphi](\pi) = \mathbf{0}$, то заключение внешней импликации будет истинным. Рассмотрим случай $[\forall x\,\varphi](\pi) = \mathbf{1}$. Имеем тогда $[\varphi](\pi + (x \mapsto m)) = \mathbf{1}$ для всех $m \in M$. С другой стороны, для всех $m \in M$ выполнено

$$\mathbf{1} = \max(\mathbf{1} - [\varphi](\pi + (x \mapsto m)), [\psi](\pi + (x \mapsto m))) = \max(\mathbf{0}, [\psi](\pi + (x \mapsto m))) = [\psi](\pi + (x \mapsto m)).$$

Поэтому $[\forall x\,\psi](\pi) = \mathbf{1}$, и исходная формула в этом случае истинна. Видим, таким образом, что она истинна при любой оценке и общезначима.

Упражнение 53. Общезначима ли формула $\forall x\,(\varphi \to \psi) \to (\exists x\,\varphi \to \exists x\,\psi)$ при любых φ, ψ?

Пример 54. Общезначима ли формула $\forall x\,\exists y\,\forall z\,\varphi \to \exists z\,\forall x\,\exists y\,\varphi$ при любых φ?

Если немного подумать над смыслом кванторов («для любого x найдется y_x такое, что для всякого $z \ldots$ — тогда для всяких z, x можно взять то самое y_x как значение для y»), то можно понять, что это так. Проведем доказательство, использующее уже известные нам результаты. Формула

$$\exists y\,\forall z\,\varphi \to \forall z\,\exists y\,\varphi$$

общезначима. Согласно примеру 12, тогда общезначима и формула

$$\forall x\,(\exists y\,\forall z\,\varphi \to \forall z\,\exists y\,\varphi).$$

Как мы уже знаем, общезначимы формулы

$$\forall x\,(\exists y\,\forall z\,\varphi \to \forall z\,\exists y\,\varphi) \to (\forall x\,\exists y\,\forall z\,\varphi \to \forall x\,\forall z\,\exists y\,\varphi)$$

и, следовательно,

$$\forall x\,\exists y\,\forall z\,\varphi \to \forall x\,\forall z\,\exists y\,\varphi.$$

Кроме того, общезначимы формулы

$$\forall x\,\forall z\,\exists y\,\varphi \to \forall z\,\forall x\,\exists y\,\varphi \text{ и}$$

$$\forall z\,\forall x\,\exists y\,\varphi \to \exists z\,\forall x\,\exists y\,\varphi.$$

Отсюда легко получить общезначимость формулы

$$\forall x\,\exists y\,\forall z\,\varphi \to \exists z\,\forall x\,\exists y\,\varphi.$$

Пример 55. Общезначима ли формула $\theta = \forall x\,\exists y\,\forall z\,\varphi \to \exists x\,\forall y\,\exists z\,\varphi$ при любых φ?

Если закрыть глаза на x и z, мы увидим формулу вида

$$\exists y\,\psi \to \forall y\,\psi,$$

явно не всегда общезначимую. «Закрывание глаз» будет эквивалентными преобразованием, если $x, z \notin FV(\varphi)$ (см. пример 10). В этом случае просто выберем сигнатуру с одним предикатным символом $Q^{(1)}$ и положим $\varphi = Q(y)$. Наша исходная формула окажется эквивалентной формуле $\exists y\,Q(y) \to \forall y\,Q(y)$, которая ложна при любой оценке в интерпретации с носителем $\mathcal{B} = \{a, b\}$ и предикатом $[Q](m) = \mathbf{1} \Leftrightarrow m = a$.

Но усложним слегка задачу: пусть $\varphi = P(x, y, z)$, где P некоторый предикатный символ. Тогда выберем интерпретацию, где предикат $[P]$ зависит только от второго аргумента и принимает оба значения. Возьмем $\mathbb{N}$ за носитель (очевидно, достаточно уже множества $\mathcal{B}$) и положим $[P](l, m, n) = \mathbf{1} \Leftrightarrow m = 0$.

Все уже ясно, но на всякий случай распишем подробно. Для произвольной оценки π получаем[5]

$$[\forall x\,\exists y\,\forall z\,P(x,y,z)](\pi) = \min_{l\in\mathbb{N}}\max_{m\in\mathbb{N}}\min_{n\in\mathbb{N}}[P(x,y,z)](\pi+(x\mapsto l)+(y\mapsto m)+(z\mapsto n)) =$$
$$\min_{l\in\mathbb{N}}\max_{m\in\mathbb{N}}\min_{n\in\mathbb{N}}[P](l,m,n) \geqslant \min_{l\in\mathbb{N}}\min_{n\in\mathbb{N}}[P](l,\mathbf{0},n) = \mathbf{1}.$$

Отсюда $[\forall x\,\exists y\,\forall z\,P(x,y,z)](\pi)=\mathbf{1}$. С другой стороны, имеем

$$[\exists x\,\forall y\,\exists z\;P(x,y,z)](\pi) = \max_{l\in\mathbb{N}}\min_{m\in\mathbb{N}}\max_{n\in\mathbb{N}}[P(x,y,z)](\pi+(x\mapsto l)+(y\mapsto m)+(z\mapsto n)) =$$
$$\max_{l\in\mathbb{N}}\min_{m\in\mathbb{N}}\max_{n\in\mathbb{N}}[P](l,m,n) \leqslant \max_{l\in\mathbb{N}}\max_{n\in\mathbb{N}}[P](l,\mathbf{1},n) = \mathbf{0}.$$

Получаем $[\exists x\,\forall y\,\exists z\,P(x,y,z)](\pi)=\mathbf{0}$, и для нашей исходной формулы $[\theta](\pi)=\max(\mathbf{1}-\mathbf{1},\mathbf{0})=\mathbf{0}$.

Пример 56. Верно ли, что в предыдущем примере *нельзя* подобрать φ так, чтобы формула $\forall x\,\exists y\,\forall z\,\varphi \to \exists x\,\forall y\,\exists z\,\varphi$ была общезначимой?

Нет, не верно. Достаточно сделать φ независимой от y. Действительно, пусть $y\notin FV(\varphi)$. Используя пример 10, получаем

$$\exists y\,\forall z\,\varphi \equiv \forall z\,\varphi \text{ и}$$
$$\forall y\,\exists z\,\varphi \equiv \exists z\,\varphi.$$

Теперь лемма 30 дает нам

$$(\forall x\,\exists y\,\forall z\,\varphi \to \exists x\,\forall y\,\exists z\,\varphi) \equiv (\forall x\,\forall z\,\varphi \to \exists x\,\exists z\,\varphi).$$

Формула справа общезначима при любых φ, в чем легко убедиться непосредственно. Формула слева эквивалентна ей, если $y\notin FV(\varphi)$. Заключаем, что формула слева, наша исходная, общезначима, если $y\notin FV(\varphi)$.

Пример 57. Общезначима ли формула $\theta \rightleftharpoons (\forall x\,\varphi \to \forall x\,\psi) \to \exists x\,(\varphi\to\psi)$ при любых φ,ψ?

Как мы знаем, формула $(\sigma\to\tau)\leftrightarrow(\neg\tau\to\neg\sigma)$ для любых формул σ,τ является тавтологией и потому общезначима (лемма 22). Поэтому

$$\theta \equiv \neg\exists x\,(\varphi\to\psi) \to \neg(\forall x\,\varphi \to \forall x\,\psi).$$

В последней формуле, помня тавтологию $\neg(\sigma\to\tau)\leftrightarrow(\sigma\wedge\neg\tau)$, мы можем заменить некоторые подформулы на эквивалентные (лемма 30) и получить

$$\theta \equiv \forall x\,(\varphi\wedge\neg\psi) \to (\forall x\,\varphi \wedge \exists x\,\neg\psi).$$

Снова используя пример 24, имеем

$$\theta \equiv (\forall x\,\varphi \wedge \forall x\,\neg\psi) \to (\forall x\,\varphi \wedge \exists x\,\neg\psi).$$

Теперь общезначимость очевидна. Действительно, рассмотрим тавтологию $(\sigma\to\tau)\to((\rho\wedge\sigma)\to(\rho\wedge\tau))$ для подходящих формул ρ,σ,τ:

$$(\forall x\,\neg\psi \to \exists x\,\neg\psi) \to ((\forall x\,\varphi\wedge\forall x\,\neg\psi) \to (\forall x\,\varphi\wedge\exists x\,\neg\psi)) \equiv (\forall x\,\neg\psi\to\exists x\,\neg\psi)\to\theta.$$

Последняя формула общезначима. Ее посылка тоже общезначима, как нам известно. Легко видеть, что тогда общезначимо и заключение, наша формула θ.

Свойства общезначимости. Правила.

Пример 58. Рассматривая предыдущие примеры, можно сделать несколько интересных наблюдений. Для любых φ,ψ,θ верно:

1. если формулы φ и $\varphi\to\psi$ общезначимы, то общезначима ψ;
2. если формулы $\varphi\to\theta$ и $\theta\to\psi$ общезначимы, то общезначима $\varphi\to\psi$;
3. если формула φ общезначима, то общезначима $\forall x\,\varphi$;
4. если формула $\varphi\to\psi$ общезначима, то общезначима $\forall x\,\varphi\to\forall x\,\psi$;
5. если формула $\varphi\to\psi$ общезначима, то общезначима $\exists x\,\varphi\to\exists x\,\psi$;

[5] Формально говоря, по свойствам максимумов и минимумов в конечных непустых линейно упорядоченных множествах.

6. если формула $\psi \to \varphi$ общезначима и $x \notin FV(\psi)$, то общезначима $\psi \to \forall x\,\varphi$;

7. если формула $\varphi \to \psi$ общезначима и $x \notin FV(\psi)$, то общезначима $\exists x\,\varphi \to \psi$.

Утверждения пунктов 6 и 7 известны как *правила Бернайса* (а п. 1, очевидно, выражает правило modus ponens). Проверим первое из них. Если $\psi \to \varphi$ общезначима, то, по п. 4, общезначима и $\forall x\,\psi \to \forall x\,\varphi$. Используя пример 10 и лемму 30, получаем

$$\forall x\,\psi \to \forall x\,\varphi \equiv \psi \to \forall x\,\varphi.$$

Следовательно, формула справа также общезначима.

Упражнение 59. Доказать все утверждения последнего примера.

Упражнение 60. Пусть формула $\psi \to \varphi$ общезначима. Доказать, что общезначима формула $\psi \to \exists x\,\varphi$. (*Вспомнить упражнение 43.*)

В дальнейшем, взяв определенный запас общезначимых формул за аксиомы и превратив некоторые утверждения примера 83 в правила вывода (например, п. 1 в modus ponens), мы получим *исчисление предикатов*, где будут выводится все общезначимые формулы и только они.

Дополнительные примеры

В нижеследующих примерах заглавные латинские буквы обозначают не произвольные формулы, а предикатные символы. (Т. е. выражение $A(x, y)$ это атомарная формула.) В решениях даны неформальные пояснения.

Пример 61. Общезначима ли формула

$$\varphi = ((\exists x\,A(x) \vee \exists x\,B(x)) \to \forall x\,C(x)) \to \forall x\,((A(x) \vee B(x)) \to C(x))?$$

Попробуем преобразовать посылку:

$$\theta = ((\exists x\,A(x) \vee \exists x\,B(x)) \to \forall x\,C(x)) \equiv$$
$$(\exists x\,(A(x) \vee B(x)) \to \forall x\,C(x)) \equiv \forall x\,((A(x) \vee B(x)) \to \forall x\,C(x)) = \theta'.$$

Как видим, последняя формула отличается от заключения φ наличием квантора $\forall$ в заключении. Есть потому основания думать, что θ сильнее заключения φ и, следовательно, φ общезначима.

Тут уже можно помахать руками. «Проверяем заключение φ. Берем любой x со свойством $A(x) \vee B(x)$. Тогда по θ' мы знаем, что $\forall x\,C(x)$. Тем более, для нашего конкретного x верно $C(x)$». Это рассуждение можно изложить более строго, если представить его как вычисление значения заключения формулы φ при произвольной оценке π в предположении $[\theta'](\pi) = \mathbf{1}$.

Однако воспользуемся уже известными нам результатами. Всякая формула вида $(\sigma \to \tau) \to ((\rho \to \sigma) \to (\rho \to \tau))$ является тавтологией и поэтому общезначима. Формула $\forall x\,C(x) \to C(x)$ также общезначима, как мы знаем. Берем $\sigma = \forall x\,C(x)$, $\tau = C(x)$ и $\rho = A(x) \vee B(x)$. Заключаем, что общезначима формула

$$((A(x) \vee B(x)) \to \forall x\,C(x)) \to ((A(x) \vee B(x)) \to C(x)).$$

Как нам известно, можно навесить кванторы и вновь получить общезначимую формулу

$$\forall x\,((A(x) \vee B(x)) \to \forall x\,C(x)) \to \forall x\,((A(x) \vee B(x)) \to C(x)).$$

Посылка этой формулы θ' эквивалентна θ, а вся формула эквивалентна φ. Следовательно, последняя общезначима.

Пример 62. Общезначима ли формула

$$\varphi = (\forall x\,A(x) \to (\exists x\,B(x) \wedge \exists x\,C(x))) \to \exists x\,(A(x) \to (B(x) \wedge C(x)))?$$

Преобразуем посылку:

$$\theta = (\forall x\,A(x) \to (\exists x\,B(x) \wedge \exists x\,C(x))) \equiv \exists x\,(A(x) \to (\exists x\,B(x) \wedge \exists x\,C(x))) = \theta'.$$

Уже теперь видно, что формула φ не общезначима. Для доказательства разумно искать такую интерпретацию, где $[B]$ и $[C]$ никогда вместе не истинны для одного значения аргумента, но каждый из этих предикатов истинен для какого-то значения. Предикат $[A]$ для простоты можно сделать истинным всегда.

Более конкретно, возьмем интерпретацию с носителем $\mathbb{N}$ и положим $[A](n) = \mathbf{1}$, $[B](n) = \mathbf{1} \Leftrightarrow n = \mathbf{0}$ и $[C](n) = \mathbf{1} \Leftrightarrow n \neq 0$. Тогда для любой оценки π имеем

$$[\exists x\, B(x) \wedge \exists x\, C(x)](\pi) = \mathbf{1}; \quad [\theta](\pi) = [\theta'](\pi) = \mathbf{1};$$

$$[A(x)](\pi) = \mathbf{1}; \quad [B(x) \wedge C(x)](\pi) = \mathbf{0}; \quad [\exists x\, (A(x) \to (B(x) \wedge C(x)))](\pi) = \mathbf{0}.$$

Значит, и $[\varphi](\pi) = \mathbf{0}$.

Пример 63. Общезначима ли формула

$$\forall x\, \exists y\, \forall z\, P(x, y, z) \to \forall z\, \exists y\, \forall x\, P(x, y, z)?$$

Подобно примеру 55, мы смотрим, не делается ли с кванторами по одной или двум переменным чего-то подозрительного. Здесь, как видно, происходит некоторая перестановка кванторов. Мы знаем, что общезначима любая формула вида

$$\exists y\, \forall x\, \psi \to \forall x\, \exists y\, \psi.$$

Напротив, формула вида

$$\forall x\, \exists y\, \psi \to \exists y\, \forall x\, \psi$$

не всегда является общезначимой. Если бы не кванторы по z, перед нами был бы именно этот последний случай. Однако, ничто не мешает нам подобрать такую интерпретацию символа P, чтобы значение предиката $[P]$ никак не зависело от значения его третьего аргумента.

Например, мы можем взять $\mathbb{N}$ в качестве носителя и положить $[P](l, m, n) = \mathbf{1} \Leftrightarrow l \leqslant m$. Очевидно, для всякого натурального l найдется m, такое что $l \leqslant m$. Однако, конечно, нет m, для которого $l \leqslant m$ выполнялось бы при всех l.

Пример 64. Общезначима ли формула

$$\forall x\, \exists y\, \forall z\, P(x, y, z) \to \exists y\, \forall z\, \exists x\, P(x, y, z)?$$

Заметив, что ничего явно плохого с кванторами здесь не происходит, попытаемся доказать общезначимость этой формулы. Общезначимы формулы

$$\forall x\, \exists y\, \forall z\, P(x, y, z) \to \exists x\, \exists y\, \forall z\, P(x, y, z) \text{ и}$$

$$\exists x\, \exists y\, \forall z\, P(x, y, z) \leftrightarrow \exists y\, \exists x\, \forall z\, P(x, y, z).$$

Поэтому общезначима

$$\forall x\, \exists y\, \forall z\, P(x, y, z) \to \exists y\, \exists x\, \forall z\, P(x, y, z).$$

С другой стороны, общезначима

$$\exists x\, \forall z\, P(x, y, z) \to \forall z\, \exists x\, P(x, y, z).$$

Навешивая на нее кванторы, получаем общезначимую формулу

$$\exists y\, \exists x\, \forall z\, P(x, y, z) \to \exists y\, \forall z\, \exists x\, P(x, y, z).$$

Окончательно, имеем общезначимость формулы

$$\forall x\, \exists y\, \forall z\, P(x, y, z) \to \exists y\, \forall z\, \exists x\, P(x, y, z).$$

Пример 65. В лемме 26 мы видели, что для любых φ, ψ если $\varphi \equiv \psi$, то $\forall x\, \varphi \equiv \forall x\, \psi$. Однако верно ли обратное утверждение?

Неверно. Найдутся φ, ψ, такие что $\forall x\, \varphi \equiv \forall x\, \psi$, но $\varphi \not\equiv \psi$. Придумаем подходящие φ, ψ, интерпретацию и оценку. Кажется, мы могли бы сказать следующее. «Пусть $\varphi(x)$ выражает четность x, а $\psi(x)$ — нечетность. Не всякое число четно и не всякое нечетно. Поэтому $\forall x\, \varphi$ и $\forall x\, \psi$ обе ложны и, следовательно, равносильны. Но, конечно, $\varphi(x)$ не эквивалентно $\psi(x)$: любое число либо четно, либо нечетно.»

Трудность заключается в том, что те свойства «четности» (т. е. предикатов $[\varphi]$ и $[\psi]$), которыми мы пользовались для обоснования эквивалентности, не обязаны иметь место в произвольной интерпретации. Эту трудность можно преодолеть, вписав действительно нужные нам свойства в сами φ и ψ.

Вот как это сделать. Рассматриваем сигнатуру всего с одним предикатными символом $\mathbf{P}^{(1)}$. Полагаем

$$\theta \coloneqq \exists x\, \mathbf{P}(x) \wedge \exists x\, \neg \mathbf{P}(x);$$

$$\varphi = \theta \to \mathbf{P}(x); \quad \psi = \theta \to \neg\mathbf{P}(x).$$

Поскольку $x \notin FV(\theta)$, имеем

$$\forall x\, \varphi \equiv \theta \to \forall x\, \mathbf{P}(x) \quad \text{и} \quad \forall x\, \psi \equiv \theta \to \forall x\, \neg\mathbf{P}(x).$$

Рассматриваем произвольные интерпретацию и оценку π. Если $[\theta](\pi) = \mathbf{0}$, то $[\forall x\, \varphi](\pi) = \mathbf{1} = [\forall x\, \psi](\pi)$. Пусть $[\theta](\pi) = \mathbf{1}$. Тогда

$$[\exists x\, \mathbf{P}(x)](\pi) = \mathbf{1}, \quad [\forall x\, \neg\mathbf{P}(x)](\pi) = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad [\forall x\, \psi](\pi) = \mathbf{0},$$

а также

$$[\exists x\, \neg\mathbf{P}(x)](\pi) = \mathbf{1}, \quad [\forall x\, \mathbf{P}(x)](\pi) = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad [\forall x\, \varphi](\pi) = \mathbf{0}.$$

Итак, $\forall x\, \varphi \equiv \forall x\, \psi$. Чтобы доказать $\varphi \not\equiv \psi$, достаточно взять любую интерпретацию, где $[\theta] = \mathbf{1}$. Мы можем рассмотреть множество $\mathcal{B} = \{a, b\}$ в качестве носителя и положить $[\mathbf{P}](m) = \mathbf{1} \Leftrightarrow m = a$. Тогда, очевидно, $[\theta](\pi) = \mathbf{1}$ при любой оценке π. С другой стороны, при любой π имеем

$$[\mathbf{P}(x)](\pi) \neq [\neg\mathbf{P}(x)](\pi).$$

Таким образом, $\varphi \not\equiv \psi$.

Упражнение 66. Докажите утверждение последнего примера, используя фиктивные кванторы: $\varphi \equiv \forall x\, \varphi$, если $x \notin FV(\varphi)$ (см. пример 10).

Исчисление предикатов

Мы видели, что исчисление высказываний было некоторым (разрешимым) набором синтаксических правил, позволяющим образовать (в качестве теорем ИВ) все тавтологии и только их. Таким образом исчисление давало нам некоторое конечное описание множества тавтологий. Однако в случае пропозициональных формул множество тавтологий было очевидно разрешимым, и на роль его конечного описания мог притязать несложный разрешающий алгоритм.

В случае формул первого порядка, установление общезначимости которых может потребовать бесконечного перебора (вследствие наличия интерпретаций с бесконечным носителем), дело обстоит много сложнее. Известно, что множество общезначимых формул неразрешимо, но важный факт наличия (разрешимого) набора синтаксических правил, позволяющих получить все общезначимые формулы и только их, обеспечивает перечислимость этого множества.

С другой стороны, и на исчисление высказываний, и на исчисление предикатов (с гораздо большим правом) можно смотреть как на способ формализации действительно употребляемых в математике рассуждений, когда из множества «нелогических аксиом» (аксиом группы, упорядоченного множества, поля вещественных чисел и т. д.), определяющих рассматриваемый математический объект и принимаемых в качестве гипотез, чисто логически выводятся содержательные математические теоремы. Это обстоятельство открывает математической логике путь к исследованию математических рассуждений.

Зададимся некоторой сигнатурой σ, свойства которой, как мы увидим далее, зачастую несущественны. *Аксиомами* исчисления предикатов (ИП) являются, во-первых, все формулы первого порядка, получающиеся подстановкой формул сигнатуры σ вместо пропозициональных переменных в аксиомы ИВ. Точнее,

> если формула $A(p_1, \ldots, p_n) \in \mathrm{Fm}(p_1, \ldots, p_n)$ является аксиомой ИВ, то для любых $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathrm{Fm}_\sigma$ формула $A(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ является аксиомой ИП.

Имеет смысл также говорить, что аксиомами ИП будут все формулы сигнатуры σ схем A1-A11.

Пример 67. Путь σ содержит предикатные символы P, Q и функциональный символ f подходящей валентности. Тогда формула $(\forall x(P(x) \to \exists y\, Q(x, f(y))) \to (P(f(z)) \to \forall x(P(x) \to \exists y\, Q(x, f(y))))$ является аксиомой ИП схемы A11, а формула $\exists x P(x) \vee \neg\exists x P(x)$ является аксиомой ИП схемы A11.

Наряду со схемами A1-A11, в ИП имеются аксиомы, выражающие свойства кванторов. Однако, чтобы сформулировать их, нам понадобиться ряд технических понятий. Именно, мы дадим совместно индуктивное определение *подстановке терма в терм вместо переменной* $\cdot(\cdot/\cdot)\colon \mathrm{Tm}_\sigma \times \mathrm{Tm}_\sigma \times \mathrm{Var} \to \mathrm{Tm}_\sigma$ и *подстановке терма в формулу вместо переменной* $\cdot(\cdot/\cdot)\colon \mathrm{Fm}_\sigma \times \mathrm{Tm}_\sigma \times \mathrm{Var} \to \mathrm{Fm}_\sigma$ (это понятие обобщает понятие замены свободной переменной, которое встречалось нам ранее), а также *свойству терма быть свободным для переменной в формуле* $\cdot - \cdot - \cdot \subseteq \mathrm{Tm}_\sigma \times \mathrm{Var} \times \mathrm{Fm}_\sigma$. Определяем $\cdot(\cdot/\cdot)$, $\cdot(\cdot/\cdot)$ и $\cdot - \cdot - \cdot$ как наименьшие множества, для любых $\varphi \in \mathrm{Fm}_\sigma$, $s, t \in \mathrm{Tm}_\sigma$, $x \in \mathrm{Var}$ удовлетворяющие условиям:

- если $x \notin FV(\varphi)$, то $t - x - \varphi$;

- если $s = z \in \mathrm{Var}$ и $z \neq x$, то $s(t/x) = z$; если же $s = x$, то $s(t/x) = t$;
- если $s = \mathbf{f}_i$, то $s(t/x) = \mathbf{f}_i$; если $s = \mathbf{f}_j(s_1, \ldots, s_{a_j})$, то $s(t/x) = \mathbf{f}_j(s_1(t/x), \ldots, s_{a_j}(t/x))$;
- если $\varphi = \mathbf{P}_i$, то $\varphi(t/x) = \mathbf{P}_i$; если $\varphi = \mathbf{P}_j(s_1, \ldots, s_{b_j})$, то $\varphi(t/x) = \mathbf{P}_j(s_1(t/x), \ldots, s_{b_j}(t/x))$ и $t - x - \varphi$;
- если $\varphi = \neg\psi$, то $\varphi(t/x) = \neg(\psi(t/x))$, если также $t - x - \psi$, то $t - x - \varphi$;
  если $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$, то $\varphi(t/x) = \psi_1(t/x) \wedge \psi_2(t/x)$, если также $t - x - \psi_1$ и $t - x - \psi_2$, то $t - x - \varphi$;
  аналогично для других связок;
- если $\varphi = \forall z\, \psi$ и $z \neq x$, то $\varphi(t/x) = \forall z\, (\psi(t/x))$, если также $t - x - \psi$ и $z \notin V(t)$, то $t - x - \varphi$;
  если $\varphi = \forall x\, \psi$, то $\varphi(t/x) = \forall x\, \psi = \varphi$ (т. е. формула не изменяется);
  случай квантора существования аналогичен.

Неформально говоря, подстановка (t/x) означает простую замену всех *свободных* вхождений переменной x в формулу на терм t.

Упражнение 68. Докажите индукцией по построению φ, что $\varphi(t/x) = \varphi$, если $x \notin FV(\varphi)$.

Упражнение 69. Докажите, что $FV(\varphi) \subseteq FV(\varphi(t/x)) \cup \{x\}$.

Пример 70. Если $\varphi = \exists z\, (Q(z, x) \to P(f(x))) \vee \forall x\, (P(x) \wedge Q(f(x), y)$, то

$$\varphi(f(f(w))/x) = \exists z\, (Q(z, f(f(w)) \to P(f(f(f(w)))) \vee \forall x\, (P(x) \wedge Q(f(x), y).$$

Обратите внимание, что *связанные* вхождения переменной x в φ остаются без изменений. Предположим теперь, что у нас имеется язык арифметики с константами $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2} \ldots$ для всех натуральных чисел. Тогда формула $\varphi = \exists y\, (y + y = x + \bar{1})$, выражающая нечетность x, под действием подстановки $(\bar{5}/x)$ превратится в истинную в естественной интерпретации замкнутую формулу

$$\exists y\, (y + y = \bar{5} + \bar{1}).$$

Естественно ожидать, что если свойство, выраженное формулой φ, выполнено для всех значений x, то оно будет выполнено и для значения, выраженного любым конкретным термом t, т. е. формулы вида

$$\forall x\, \varphi \to \varphi(t/x) \quad \text{и, двойственным образом,}$$

$$\varphi(t/x) \to \exists x\, \varphi$$

должны быть общезначимы. Однако, это не всегда так вследствие неприятной особенности наших обозначений, возможности «коллизии переменных».

Пример 71. Рассмотрим формулу $\varphi = \exists y\, (x < y)$. Ясно, что формула $\forall x\, \varphi$ истинна в естественной интерпретации с носителем $\mathbb{N}$. Однако формула $\varphi(y/x) = \exists y\, (y < y)$ в этой интерпретации, очевидно, ложна. Следовательно, не все формулы вида $\forall x\, \varphi \to \varphi(t/x)$ общезначимы.

Легко понять, что проблема возникла из-за того, что некоторые переменные терма t после подстановки вместо x связались кванторами в формуле φ. Именно этот случай и призвано предотвратить условие $t - x - \varphi$ свободы терма t для переменной x в формуле φ. Неформально, его можно выразить так. Терм t свободен для переменной x в формуле φ, если *никакое свободное вхождение x в φ не попадает в область действия какого-либо квантора по переменной, входящей в t.*

Пример 72. Если

$$\varphi = \forall z\, (Q(f(x), f(z)) \vee \exists w\, (Q(x, z) \to P(w)) \vee \neg\exists y\, P(y)),$$

то $y - x - \varphi$ и $g(f(y), x) - x - \varphi$, но $\neg(z - x - \varphi)$ и $\neg(g(w, v) - x - \varphi)$. Обратите внимание, что $t - y - \varphi$, $t - z - \varphi$ и $t - w - \varphi$ для любого терма t, поскольку переменные y, z и w не имеют свободных вхождений вовсе. Также полезно иметь в виду, что $x - x - \varphi$ вообще для любой формулы φ, ибо *свободные* вхождения x никак не могут быть в области действия кванторов по этой переменной.

Лемма 73. *В любой интерпретации при любой оценке π для всех $\varphi \in \mathrm{Fm}_\sigma$, $t, s \in \mathrm{Tm}_\sigma$, и $x \in \mathrm{Var}$, если $t - x - \varphi$, то*

$$[s(t/x)](\pi) = [s](\pi + (x \mapsto [t](\pi))) \text{ и } [\varphi(t/x)](\pi) = [\varphi](\pi + (x \mapsto [t](\pi))).$$

Доказательство. Это обобщение леммы 18 доказывается похожей индукцией по построению s и φ. Рассмотрим лишь принципиальный случай, когда $\varphi = \forall z\, \psi$ и $z \neq x$. Из условия $t - x - \varphi$ вытекает $z \notin V(t)$ и $t - x - \psi$ или $x \notin FV(\varphi)$. В первом случае имеем, в силу предположения индукции и леммы 5,

$$\begin{aligned}
&[\varphi(t/x)](\pi) = [\forall z\, (\psi(t/x))](\pi) = \\
&\quad \min_{m\in M}[\psi(t/x)](\pi + (z \mapsto m)) = \min_{m\in M}[\psi](\pi + (z \mapsto m) + (x \mapsto [t](\pi + (z \mapsto m)))) = \\
&\quad \min_{m\in M}[\psi](\pi + (z \mapsto m) + (x \mapsto [t](\pi))) = \min_{m\in M}[\psi](\pi + (x \mapsto [t](\pi)) + (z \mapsto m)) = \\
&\qquad [\forall z\, \psi](\pi + (x \mapsto [t](\pi)))) = [\varphi](\pi + (x \mapsto [t](\pi))).
\end{aligned}$$

Во втором случае те же равенства выполняются вследствие $x \notin FV(\psi)$ (откуда и $t - x - \psi$): применяем предположение индукции, а для всех оценок π' и элементов $k, l \in M$ по лемме 5 имеем $[\psi](\pi' + (x \mapsto k)) = [\psi](\pi' + (x \mapsto l))$. □

Сказанное позволяет объявить аксиомами ИП все формулы из Fm_σ вида

(A12) $\forall x\, \varphi \to \varphi(t/x)$, если $t - x - \varphi$;

(A13) $\varphi(t/x) \to \exists x\, \varphi$, если $t - x - \varphi$.

Лемма 74. *Все формулы схем A12 и A13 общезначимы.*

Доказательство. Рассмотрим лишь первую схему. Задавшись произвольными интерпретацией и оценкой π, допустим $[\forall x\, \varphi](\pi) = \mathbf{1}$. Значит, $[\varphi](\pi + (x + m)) = \mathbf{1}$ для всех $m \in M$. В частности, взяв $m = [t](\pi)$, по лемме 73 получим

$$[\varphi(t/x)](\pi) = [\varphi](\pi + (x \mapsto [t](\pi))) = \mathbf{1}.$$

□

Кроме аксиом схем A1-A13 в ИП считают допустимыми следующие правила вывода: modus ponens

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$$

и два *правила Бернайса*

$$\frac{\psi \to \varphi}{\psi \to \forall x\, \varphi} \qquad \frac{\varphi \to \psi}{\exists x\, \varphi \to \psi},$$

где $x \notin FV(\psi)$. Подобно случаю ИВ, мы не останавливаемся на формальном смысле понятия правила вывода или его допустимости, но довольствуемся определением вывода в ИП.

Упражнение 75. Проверьте, что все аксиомы ИП общезначимы, а все правила сохраняют общезначимость в том, например, смысле, что если $x \notin FV(\psi)$ и формула $\psi \to \varphi$ общезначима, то общезначима и $\psi \to \forall x\, \varphi$. (*Вспомните лемму 22 и пример 83.*)

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}_\sigma$. Обозначим $FV(\Gamma) = \bigcup_{H\in\Gamma} FV(H)$. Тогда конечная последовательность $(C_1, \ldots, C_n) \in \mathrm{Fm}_\sigma^*$ называется *выводом (в исчислении высказываний) из (множества) гипотез* Γ, если для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ верно хотя бы одно из утверждений:

1. $C_i \in \Gamma$;
2. C_i является аксиомой ИВ;
3. существуют $j, k < i$, т. ч. $C_k = (C_j \to C_i)$;
4. существует $j < i$, т. ч. $C_j = \psi \to \varphi$, $C_i = \psi \to \forall x\, \varphi$, $x \notin FV(x) \cup FV(\Gamma)$.
5. существует $j < i$, т. ч. $C_j = \varphi \to \psi$, $C_i = \exists x\, \varphi \to \psi$, $x \notin FV(x) \cup FV(\Gamma)$.

Менее формально, вывод из множества гипотез Γ это конечная последовательность формул, в которой каждая лежит в Γ, или является аксиомой ИП, или может быть получена из некоторых предыдущих по правилу MP или по одному из правил Бернайса, причем *переменная, по которой навешивается квантор, не может входить свободно в какую-либо гипотезу.*

Понятия вывода формулы из гипотез, выводимости, теоремы ИП и т. д. получаются буквальным переносом определений для случая ИВ, при том, кончено, что мы рассматриваем формулы первого порядка и вывод в нашем новоопределенном смысле.

Пример 76. Поясним смысл ограничения на замыкание переменных кванторами. В его отсутствие последовательность

1.	$P(x)$	(гипотеза)
2.	$P(x) \to ((\exists x\, P(x) \lor \neg\exists x\, P(x)) \to P(x))$	(акс. сх. A1)
3.	$\exists x\, P(x) \lor \neg\exists x\, P(x)$	(акс. сх. A11)
4.	$(\exists x\, P(x) \lor \neg\exists x\, P(x)) \to P(x)$	(MP(1, 2))
5.	$(\exists x\, P(x) \lor \neg\exists x\, P(x)) \to \forall x\, P(x)$	(Bernays(4))
6.	$\forall x\, P(x)$	(MP(3, 5))

окажется выводом формулы $\forall x\, P(x)$ из гипотезы $P(x)$. Существование такого вывода противоречит здравому смыслу, выраженному в понятии корректности ИП, о котором речь пойдет ниже. В самом деле, зная лишь, что некоторый неопределенный x обладает свойством P, мы едва ли можем заключить, что все x обладают таким свойством. (Иное дело, если бы мы *доказали* $P(x)$ исходя из некоторых не зависящих от x посылок. Тогда мы поняли бы это как доказательство для *произвольного* x и с чистой совестью навесили квантор всеобщности.)

Другой аргумент против рассматриваемой выводимости состоит в том, что в противном случае из теоремы о дедукции будет вытекать $\vdash P(x) \to \forall x\, P(x)$, а эта формула, очевидно, не общезначима. Но мы не желаем отказываться ни от теоремы о дедукции, ни — всего менее — от общезначимости теорем ИП.

Возможен иной путь решения названной проблемы, принятый в книге Верещагина и Шеня, но, как мы увидим, слишком ограничительный и неудобный технически: именно, можно считать, что $\Gamma \vdash \varphi$ имеет место, только если $FV(\Gamma) = \varnothing$, но в определении вывода не накладывать никаких ограничений на вхождение переменной из правил Бернайса в гипотезы.

Упражнение 77. Обозначим утверждение о существовании вывода указанном смысле знаком $\vdash^*$. Докажите, что если $FV(\Gamma) = \varnothing$, то $\Gamma \vdash \varphi$ равносильно $\Gamma \vdash^* \varphi$.

Почти дословно повторяя доказательство для случая ИВ, легко установить следующую полезную лемму.

Лемма 78. *Для произвольных* $\Gamma, \Delta \subseteq \mathrm{Fm}_\sigma$ *и* $\varphi, \psi \in \mathrm{Fm}_\sigma$

1. *если* $\Gamma \vdash \varphi$ *и* $\Gamma \subseteq \Delta$, *то* $\Delta \vdash \varphi$;
2. *если* $\Gamma \vdash \varphi$, *то найдется конечное множество* Γ', *т. ч.* $\Gamma' \subseteq \Gamma$ *и* $\Gamma' \vdash \varphi$;
3. *если* $\Gamma \vdash \varphi$ *и для каждой* $\psi \in \Gamma$ *верно* $\Delta \vdash \psi$, *то* $\Delta \vdash \varphi$.

Лемма 79. *Все тавтологии первого порядка выводимы в ИП без применения правил Бернайса и аксиом A12, A13.*

Пример 80. В ИП допустимо *правило обобщения* GEN

$$\frac{\varphi}{\forall x\, \varphi}$$

в следующем смысле: для любых $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}_\sigma$ и $\varphi \in \mathrm{Fm}_\sigma$, если $\Gamma \vdash \varphi$ и $x \notin FV(\Gamma)$, то $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi$. Напомним, что сего рода импликации мы позволили себе еще записывать в таком духе

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \forall x\, \varphi}, \quad x \notin FV(\Gamma).$$

В самом деле, пусть $\Gamma \vdash^d \varphi$. Рассмотрим какую-нибудь замкнутую формулу ψ, являющуюся аксиомой ИП, скажем, $\psi = \exists x\, P(x) \lor \neg\exists x\, P(x)$ (раз есть формула $\varphi \in \mathrm{Fm}_\sigma$, наша сигнатура содержит хотя бы один предикатный символ, и какую-нибудь замкнутую аксиому обязательно можно найти), как в примере 76. В духе того же примера положим

$$d' = d \cdot (\varphi \to (\psi \to \varphi), \psi, \psi \to \varphi, \psi \to \forall x\, \varphi, \forall x\, \varphi).$$

Однако в отличие от примера 76, перед нами вывод формулы $\forall x\, \varphi$ из гипотез Γ, поскольку $x \notin FV(\psi) \cup FV(\Gamma)$ и последнее применение правила Бернайса корректно. Применения, возможно, присутствовавшие в d, остаются корректными и в d', поскольку множество посылок не изменяется. Итак, $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi$.

Практическое доказательство выводимости

Как и в случае ИВ, мы станем пытаться получить выводимость одних формул из выводимости других, не предъявляя выводов непосредственно. По-прежнему, тем не менее по всякому нашему рассуждению такого рода вывод может быть восстановлен некоторым алгоритмом.

Главнейшим инструментом вновь будет теорема о дедукции.

Теорема 81 (о дедукции)**.** *Для произвольных* $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}_\sigma$ *и* $\varphi, \psi \in \mathrm{Fm}$ *выполнено* $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ *тогда и только тогда, когда* $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$*, причем* $\varphi \to \psi$ *можно вывести не применяя правила Бернайса к переменным, имеющим свободные вхождения в* φ*.*

Доказательство. Нетривиальна лишь импликация слева направо. Как и в случае ИВ, мы доказываем $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ индукцией по длине вывода ψ из Γ, φ. Итак, пусть $\Gamma, \varphi \vdash^d \psi$ и для всех выводов короче d утверждение верно. Если последняя в d формула была аксиомой, лежала в Γ, совпадала с φ или получалась из предшествующих по MP, мы почти дословно повторяем рассуждения для случая ИВ.

Пусть, однако, эта формула (т. е. ψ) получалась по правилу Бернайса для $\forall$ из предшествующей в d формулы $\eta \to \theta$. Тогда $\psi = \eta \to \forall x\, \theta$, причем $x \notin FV(\Gamma) \cup FV(\varphi) \cup FV(\eta)$. По предположению индукции есть вывод d'', т. ч. $\Gamma \vdash^{d''} \varphi \to (\eta \to \theta)$.

Ссылаясь на лемму 79, мы утверждаем, что у тавтологии $(\varphi \to (\eta \to \theta)) \to ((\varphi \wedge \eta) \to \theta)$ есть вывод d''' в ИП. Такой вывод несложно, хотя и утомительно, выписать непосредственно. Аналогично, есть и вывод d'''' тавтологии $((\varphi \wedge \eta) \to \forall x\, \theta) \to (\varphi \to (\eta \to \forall x\, \theta))$. Теперь полагаем

$$d' = d'' \cdot d''' \cdot ((\varphi \wedge \eta) \to \theta, (\varphi \wedge \eta) \to \forall x\, \theta)) \cdot d'''' \cdot (\varphi \to (\eta \to \forall x\, \theta)).$$

Легко заметить, что $\Gamma \vdash^{d'} \varphi \to \psi$. Ключевое соображение состоит в допустимости применения правила Бернайса: действительно, $x \notin FV(\Gamma) \cup FV(\varphi \wedge \eta)$.

Если формула ψ получалась по правилу Бернайса для $\exists$ из предшествующей в d формулы $\theta \to \eta$, то $\psi = \exists x\, \theta \to \eta$, причем $x \notin FV(\Gamma) \cup FV(\varphi) \cup FV(\eta)$. По предположению индукции есть вывод d'', т. ч. $\Gamma \vdash^{d''} \varphi \to (\theta \to \eta)$.

Вновь используя лемму 79, мы находим вывод d''' тавтологии $(\varphi \to (\theta \to \eta)) \to (\theta \to (\varphi \to \eta))$ и вывод d'''' тавтологии $(\exists x\, \theta \to (\varphi \to \eta)) \to (\varphi \to (\exists x\, \theta \to \eta))$. Теперь полагаем

$$d' = d'' \cdot d''' \cdot (\theta \to (\varphi \to \eta), \exists x\, \theta \to (\varphi \to \eta)) \cdot d'''' \cdot (\varphi \to (\exists x\, \theta \to \eta)).$$

Ясно, что $\Gamma \vdash^{d'} \varphi \to \psi$, поскольку $x \notin FV(\Gamma) \cup FV(\varphi \to \eta)$. $\square$

Упражнение 82. Докажите, что если $\Gamma \vdash \varphi$, то найдутся $H_1, \ldots, H_n \in \Gamma$, т. ч. $\vdash^* H_1 \to (H_2 \to (\ldots (H_n \to \varphi) \ldots))$, и обратно.

Теперь мы можем сформулировать утверждения, удобные для практического доказательства выводимости в ИП.

Лемма 83. *Для произвольных* $\Gamma, \Delta \subseteq \mathrm{Fm}_\sigma$ *и* $\varphi, \psi, \theta \in \mathrm{Fm}_\sigma$

$$\varphi \vdash \varphi \quad (Ax) \qquad\qquad \neg\varphi, \varphi \vdash \psi \quad (Ax\neg)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Delta, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \Delta \vdash \psi}\,(Cut) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \psi \vdash \varphi}\,(W)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \theta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \theta}\,(L\wedge) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}\,(R\wedge)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \theta \qquad \Gamma, \psi \vdash \theta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \theta}\,(L\vee) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi} \quad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\,(R\vee)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma, \psi \vdash \theta}{\Gamma, \varphi \to \psi \vdash \theta}\,(L\to) \qquad\qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}\,(R\to)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi \qquad \Gamma, \neg\varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}\,(tnd) \qquad\qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi \qquad \Gamma, \varphi \vdash \neg\psi}{\Gamma \vdash \neg\varphi}\,(ra)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi(t/x) \vdash \psi}{\Gamma, \forall x\, \varphi \vdash \psi}, \text{ если } t - x - \varphi\ (L\forall) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi(t/x)}{\Gamma \vdash \exists x\, \varphi}, \text{ если } t - x - \varphi\ (R\exists)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \exists x\, \varphi \vdash \psi}, \text{ если } x \notin FV(\Gamma) \cup FV(\psi)\ (L\exists) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \forall x\, \varphi}, \text{ если } x \notin FV(\Gamma)\ (R\forall)$$

Доказательство. Все утверждения, кроме последних четырех, доказываются почти дословным повторением рассуждений для случая ИВ. Принципиальное значение имеют при этом схемы A1-A11 и теорема дедукции, в чьей формулировки меняется лишь понятие выводимости, но дополнительных ограничений на свободные переменные в гипотезах не накладывается.

Установим $(L\forall)$. Пусть $\Gamma, \varphi(t/x) \vdash^{d} \psi$ и $t - x - \varphi$. Заменим в d каждое вхождение формулы $\varphi(t/x)$ на последовательность $(\forall x\, \varphi \to \varphi(t/x), \forall x\, \varphi, \varphi(t/x))$. Поскольку $FV(\forall x\, \varphi) \subseteq FV(\varphi(t/x))$ в силу упражнения 69, все применения правил Бернайса, которые могли быть в d, остаются корректными, а новых не добавляется. Схема A12 показывает, что полученная последовательность d' будет выводом ψ из $\Gamma, \forall x\, \varphi$.

Установим $(R\exists)$. Пусть $\Gamma \vdash^{d} \varphi(t/x)$ и $t - x - \varphi$. Положим $d' = d \cdot (\varphi(t/x) \to \exists x\, \varphi, \exists x\, \varphi)$. Схема A13 показывает, что $\Gamma \vdash^{d'} \exists x\, \varphi$.

Утверждение $(R\forall)$ мы, по существу, уже доказали в примере 80. Проверим утверждение $(L\exists)$. Пусть $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ и $x \notin FV(\Gamma) \cup FV(\psi)$. По теореме о дедукции найдется вывод d'', т. ч. $\Gamma \vdash^{d''} \varphi \to \psi$. Положим $d' = d'' \cdot (\exists x\, \varphi \to \psi, \exists x\, \varphi, \psi)$. Ясно, что $\Gamma, \exists x\, \varphi \vdash^{d'} \psi$. Действительно, применения правил Бернайса в d'' остаются корректными в d', поскольку $FV(\exists x\, \varphi) \subseteq FV(\varphi)$. Последнее применение правила Бернайса корректно, поскольку $x \notin FV(\Gamma) \cup FV(\exists x\, \varphi) \cup FV(\psi)$.

□

Заметим, что если использовать иное понятие выводимости $\vdash^{*}$, то в качестве теоремы о дедукции удастся доказать лишь следующее:

> для произвольных $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}_{\sigma}$ и $\varphi, \psi \in \mathrm{Fm}$, если $FV(\Gamma) \cup FV(\varphi) = \varnothing$, то $\Gamma, \varphi \vdash^{*} \psi$ равносильно $\Gamma \vdash^{*} \varphi \to \psi$.

В таком случае мы должны будем запретить посылки со свободными переменными и, например, утверждение, $(L\exists)$ утратит смысл. В итоге все это усложнит наши доказательства выводимости.