Вычислимость

13 сентября 2020 г.

В нижеследующих примерах и упражнениях мы *официально* предполагаем выбранной некоторую формальную модель алгоритмов — машины Тьюринга. Но *практически* предпочитаем держаться от нее подальше даже ценою известной нестрогости рассуждений.

Частичные функции

Пусть A и B некоторые множества. *Частичной функцией* из A в B называется произвольное подмножество $f \subseteq A \times B$, удовлетворяющее свойству

$$(a, b_1) \in f \wedge (a, b_2) \in f \to b_1 = b_2$$

для всех $a \in A$ и $b_1, b_2 \in B$.[1] Обозначение частичной функции $f\colon A \xrightarrow{p} B$. Определим для f *область определения*

$$\operatorname{dom} f = \{a \in A \mid \exists b\, (a, b) \in f\}$$

и *область значений*

$$\operatorname{rng} f = \{b \in B \mid \exists a\, (a, b) \in f\}.$$

Если $a \in \operatorname{dom} f$, мы, как всегда, обозначаем $f(a)$ тот единственный $b \in B$, для которого $(a, b) \in f$. Если $a \notin \operatorname{dom} f$, то выражение $f(a)$ имеет смысл только в контексте $f(a) \simeq \varphi$ или $!\, f(a)$. Именно, пусть $g\colon C \xrightarrow{p} D$. Будем писать $f(a) \simeq g(c)$, если $a \in \operatorname{dom} f \wedge c \in \operatorname{dom} g \wedge f(a) = g(c)$ или $a \notin \operatorname{dom} f \wedge c \notin \operatorname{dom} g$.

Далее, пишем $!\, f(a)$, если $a \in \operatorname{dom} f$. Если $\operatorname{dom} f = A$, функция f всюду определенная, или *тотальная*.

Легко видеть, что $f = g$, функции равны как множества, тогда и только тогда, когда $\forall x\, (f(x) \simeq g(x))$.

Для $X \subseteq A$ обозначаем $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ и для $Y \subseteq B$, $f^{-1}(Y) = \{x \mid f(x) \in Y\}$. Ясно, что $\operatorname{rng} f = f(\operatorname{dom} f)$ и $\operatorname{dom} f = f^{-1}(\operatorname{rng} f)$.

Пример 1. Множество $f = \{(n, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}_+\}$ является частичной функцией $\mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{Q}$, $\mathbb{N} \xrightarrow{p} [0, 1]$, $\mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \xrightarrow{p} \mathbb{Q}$, $\mathbb{N}_+ \xrightarrow{p} [0, 1]$ и т. д.

Композицией частичных функций $f\colon A \xrightarrow{p} B$ и $g\colon B \xrightarrow{p} C$ называется множество

$$g \circ f = \{(x, z) \mid \exists y\, ((x, y) \in f \wedge (y, z) \in g)\}.$$

Легко проверить, что $g \circ f$ является частичной функцией $A \xrightarrow{p} C$. Мы пишем $g(f(x))$ вместо $(g \circ f)(x)$.

Пример 2. Для функции f из предшествующего примера $\operatorname{dom} f = \mathbb{N}_+$ и $f(0) \simeq f(0) + 1$.

[1] Иногда удобно считать частичной функцией не само множество пар, а тройку (A, f, B), но мы этого делать не станем.

Упражнение 3. Докажите, что $\operatorname{dom}(g \circ f) = f^{-1}(\operatorname{dom} g)$, а $\operatorname{rng}(g \circ f) = g(\operatorname{rng} f)$.

Упражнение 4. (*не очень формальное; для любителей алгебры*) Придумайте соответствие t, которое каждому множеству A сопоставляет пару (tA, ξ_{tA}), где tA множество и $\xi_{tA} \in tA$ какой-то отмеченный в нем элемент, и соответствие τ, которое каждой частичной функции $f\colon A \xrightarrow{p} B$ сопоставляет тотальную функцию $\tau f\colon tA \to tB$, т. ч. $\tau f(\xi_{tA}) = \xi_{tB}$ (т. е. отмеченные элементы сохраняются). При этом должны выполняться свойства: $\tau \operatorname{id}_A = \operatorname{id}_{tA}$ и $\tau(f \circ g) = \tau f \circ \tau g$.

Добейтесь, чтобы соответствия t и τ были взаимно-однозначными: у каждого множества с отмеченным элементом и у каждой функции, сохраняющей отмеченные элементы, должен быть ровно один прообраз (здесь функции $f\colon A \xrightarrow{p} B$ и $f'\colon A' \xrightarrow{p} B'$ считаются различными, если $A \neq A'$ или $B \neq B'$).

Проделав это, убедитесь, что все рассуждения о частичных функциях можно заменить рассуждениями о тотальных функциях множеств с отмеченным элементом, сохраняющих последний.

Ограничения наших рассуждений

Считается, что любая функция, вычисление которой можно описать на естественном языке, вычислима в любой формальной модели алгоритмов. Точнее, *доказано*, что что множества вычислимых функций относительно известных формальных моделей: машин Тьюринга, машин Поста, нормальных алгорифмов Маркова, λ-исчисления, рекурсивных функций и др. — совпадают. Затем высказывается некий неформальный тезис, например, в следующей форме:

> **Тезис Тьюринга-Чёрча.** Всякая функция, интуитивно, вычислимая, вычисляется некоторой машиной Тьюринга.

Этот тезис, по сю пору никем не опровергнутый,[2] мы — вслед многим другим — будем использовать *для очистки совести*, когда вместо машины Тьюринга или иной формальной программы для функции будем приводить краткий рассказ о том, как та машина (программа) должна работать.

И еще одна условность. Ниже мы почти всегда будем иметь в виду множества натуральных чисел или конечных наборов натуральных чисел, а также соответствующие функции.

Строго говоря, что́ вычислимо, зависит от того, объекты каких типов допускает наша формальная модель (например, язык C имеет типы данных для *ограниченных* целых чисел и вещественных чисел *ограниченного* числа разрядов). Однако естественно считать, что с натуральными числами *и всем, что ими можно закодировать:* наборами натуральных чисел, целыми, рациональными и вещественными числами ограниченной точности — вообще, с *конечными словами счетных алфавитов*, наша модель работать умеет. К реальным моделям, вроде языка C, мы тогда добавляем лишь абстракцию неограниченной памяти (имеется в виду, однако, что каждое

[2] Что могло бы быть легче, чем доказать его, поскольку про каждое конкретное словесное описание кажется легче понять, задает ли оно вычисление, чем предложить удовлетворяющий всех общий критерий таких описаний.

конкретное вычисление на каждый конкретный момент использовало лишь конечный объем памяти).

Иное дело, например, вещественные числа в целом. Легко понять, что найдется вещественное число, которое, (даже) работая неограниченно долго, никакая программа на языке C просто не сможет выписать: ведь программ лишь счетно много. С другой стороны, какие-то числа, скажем, $0 \in \mathbb{R}$ или e, легко выписать с любой заданной точностью.

Вычислимость, разрешимость и перечислимость

Функция $f\colon A \xrightarrow{p} B$ *вычислима*, если существует программа (на C, на ассемблере, машина Поста, машина Тьюринга и т. п.), которая на любом входе $x \in \operatorname{dom} f$ выписывает $f(x)$ и завершается, а на любом входе $x \in A \setminus \operatorname{dom} f$ не завершатся ни за какое конечное количество шагов.

Пример 5. Пусть σ произвольное утверждение, истинность которого не зависит от x. Функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, для всех $x \in \mathbb{N}$ удовлетворяющая условию

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma; \\ 0, & \text{если } \neg\sigma, \end{cases}$$

вычислима. Безотносительно того, есть ли алгоритм проверки истинности σ. В самом деле, если σ истинно, то $f(x) = 1$ для всех $x \in \mathbb{N}$, а константа, очевидно, вычислима. В случае ложности σ получаем вычислимую константу 0. Таким образом, функцию f непременно вычисляет один из двух простых алгоритмов, хотя мы можем не знать, какой именно.[3]

Упражнение 6. Пусть для некоторого конечного $A = \{a_0, \ldots, a_n\} \subseteq \mathbb{N}$, такого что $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n$, и множества $C = \{c_0, \ldots, c_n\} \subseteq \mathbb{N}$ функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такова, что при всех $k < n$ верно

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} c_k, & \text{если } a_k \leqslant x < a_{k+1}; \\ c_n, & \text{если } x \geqslant a_n. \end{cases}$$

Иными словами, f кусочно-постоянна и «кусков» имеется конечное число. Убедитесь, что f вычислима.

Множество A *разрешимо*, если его *характеристическая функция*

$$\chi_A(x) \quad = \quad \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A; \\ 0, & \text{если } x \notin A \end{cases}$$

вычислима. Иными словами, если есть программа, по входу определяющая, принадлежит ли этот вход множеству A; выдающая 1, если принадлежит, и 0 в противном случае.

[3] Если читателя это смущает, то он не одинок. Кажется довольно странным утверждать наличие алгоритма для чего-либо, в принципе не имея возможности его указать. Однако таково естественное следствие классической логики: «*утверждение σ истинно или ложно*; в каждом из случаев есть алгоритм; следовательно, есть алгоритм». В этом и последующих подобных примерах легко ощутить осмысленность позиции «интуиционистов» и «конструктивистов», отвергающих закон исключенного третьего.

Множество A *перечислимо*, если есть программа, на пустом входе последовательно выписывающая все элементы A и только их.[4] Можно сформулировать это определение проще, не привлекая программ, которые что-то неограниченно долго выписывают.

Действительно, множество A перечислимо тогда и только тогда, когда $A = \varnothing$ или найдется вычислимая тотальная функция $f\colon \mathbb{N} \to A$, т. ч. $\operatorname{rng} f = A$. Если такая f есть, все элементы A выпишет программа, последовательно вычисляющая $f(0), f(1), f(2), \dots$ Обратно, пусть элементы A выписывает программа p и $A \neq \varnothing$. Тогда положим

$$f(0) = \text{«первый выписанный } p \text{ (на } k\text{-ом шаге) элемент»},$$
$$f(n+1) = \text{«последний выписанный } p \text{ элемент после выполнения } k+n+1 \text{ шага»}.$$

Пусть дано множество $A \subseteq \mathbb{N}^n$. Тогда для $i \in \{1, \dots, n\}$ *проекцией* множества A (на i-ую координату) называется множество

$$\operatorname{pr}^i A = \{x \mid \exists x_1 \dots \exists x_{i-1} \exists x_{i+1} \dots \exists x_n \; (x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) \in A\}.$$

Лемма 7.

1. *если A разрешимо, то оно перечислимо;*
2. *если A, B разрешимы, то разрешимы $A \cup B$, $A \cap B$, $A \times B$ и $\bar{A}$;*
3. *если A, B перечислимы, то перечислимы $A \cup B$, $A \cap B$, $A \times B$ и $\operatorname{pr}^i A$.*

Доказательство. Покажем, например, что множество $A \times B$ перечислимо, если перечислимы A и B. Станем попеременно выполнять по шагу перечисляющих алгоритмов для A и для B, раздельно выписывая куда-либо всякий получаемый элемент каждого из этих множеств. Как только получен очередной элемент $a \in A$, выдадим на выход пары (a, b_i) для всех накопленных к этому моменту элементов $b_1, \dots, b_k \in B$. Аналогично поступим с очередным элементом множества B. Если $(a, b) \in A \times B$, то элементы a и b попадут в наш «накопитель», причем один из них попадет туда позже другого. Пусть, без ограничения общности, это будет a. Тогда b уже содержится в накопителе, и мы выпишем пару (a, b). Также очевидно, что никаких лишних пар мы не выписываем. □

Лемма 8. *Множество A разрешимо тогда и только тогда, когда A и $\bar{A}$ перечислимы.*

Доказательство. Импликация слева направо легко следует из предыдущей леммы. Допустим, что A и $\bar{A}$ перечислимы. Как мог бы работать разрешающий A алгоритм? Ясно, что, получив на вход $n \in \mathbb{N}$, достаточно попеременно выполнять по шагу перечисляющих алгоритмов для A и для $\bar{A}$, ожидая, пока n не будет выписан тем или другим. Поскольку $n \in A$ или $n \in \bar{A}$, описанная процедура завершится. □

[4] Уточняя это понятие, можно заметить, что выписывание каждого элемента может занимать несколько шагов. Важно потребовать, чтобы промежуточные записи не считались выписанными элементами — для этого достаточно сказать, что элемент выписан, если он написан на ленте и программа находится в некотором выделенном состоянии. Тогда перечислимость означает, что для каждого элемента A найдется шаг исполнения программы, когда этот элемент написан на ленте (возможно, вместе с другими) и программа в выделенном состоянии.

Упражнение 9. Пусть множества A и B перечислимы, а множество C разрешимо, причем $A \cap B = \varnothing$ и $A \subseteq C \subseteq A \cup B$. Докажите, что A разрешимо.

Лемма 10. *Пусть $A \subseteq \mathbb{N}$. Тогда равносильны условия*

1. *A перечислимо;*
2. *существует вычислимая $f\colon \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$, т. ч. $A = \operatorname{dom} f$;*
3. *существует вычислимая $f\colon \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$, т. ч. $A = \operatorname{rng} f$;*
4. *$A = \varnothing$ или существует вычислимая тотальная $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, т. ч. $A = \operatorname{rng} f$;*
5. *существует разрешимое $B \subseteq \mathbb{N}^2$, т. ч. $A = \mathrm{pr}^1 B$.*

Доказательство. Рассмотрим п. 2 леммы, чтобы продемонстрировать важный прием. Очевидно, для перечислимого A вычислима *полухарактеристическая* функция

$$\bar{\chi}_A(x) \quad \simeq \quad \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A; \\ \text{неопр.}, & \text{если } x \notin A, \end{cases}$$

для которой $\operatorname{dom} \bar{\chi}_A = A$. Обратно, пусть f вычислима. Перечислим $\operatorname{dom} f$.

Мы считаем, что у нас имеется вычислимое тотальное биективное кодирование пар натуральных чисел $\langle \cdot, \cdot \rangle\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. Его нетрудно предъявить, вспомнив про обход диагоналей в построении биекции $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}^2$:

$$\langle n, m \rangle = \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + n$$

В силу биективности, вычислимыми тотальными будут и обратные функции $\pi^i\colon \langle x_1, x_2 \rangle \mapsto x_i$ для $i \in \{1, 2\}$.

Исполним следующую программу. В бесконечном цикле по $n \in \mathbb{N}$ станем вычислять $x = \pi^1(n)$ и $k = \pi^2(n)$, а затем выполнять k шагов программы для f на входе x. Если при этом мы обнаружим, что вычисление $f(x)$ закончилось не более, чем за k шагов, выпишем x. Вследствие биективности кодирования пар, мы обязательно обнаружим все пары (x, k), соответствующие заканчивающимся вычислениям f.

Равносильность п. 3 и п. 1 устанавливается с помощью той же конструкции. П. 4 был, по существу, нами рассмотрен выше.

Также мы видим, как найти B для п. 5. Можно взять вычислимую функцию f, т. ч. $A = \operatorname{dom} f$, и рассмотреть множество

$$B = \{(x, k) \mid \text{«программа для } f \text{ на входе } x \text{ завершается за } k \text{ шагов»}\}.$$

Разрешающая процедура для B должна просто выполнить k (или менее, если останов случится раньше) шагов программы для f на x. $\square$

Пример 11. Всякое конечное множество $A \subseteq \mathbb{N}$ разрешимо. Как и в примере 5, мы не знаем, каков именно алгоритм для функции χ_A, но ясно, что достаточно вычислить значение дизъюнкции $(x = a_1) \vee \ldots \vee (x = a_n)$ для $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

Неформально говоря, полное описание конечного множества — например, список его элементов — может быть «зашито» в текст программы, поскольку это также объект конечный.

Упражнение 12. Докажите, что непустое множество $A \subseteq \mathbb{N}$ разрешимо тогда и только тогда, когда существует вычислимая тотальная *неубывающая* функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, т. ч. $A = \operatorname{rng} f$.

Упражнение 13. Докажите, что во всяком бесконечном перечислимом множестве найдется бесконечное разрешимое подмножество.

Лемма 14.

1. *Функция* $f\colon \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ *вычислима тогда и только тогда, когда ее* график $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \operatorname{dom} f\}$ *перечислим.*

2. *Пусть* $A \subseteq \mathbb{N}$ *перечислимо и вычислима функция* $f\colon \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$*. Тогда* $f(A)$ *и* $f^{-1}(A)$ *перечислимы.*

Доказательство. Установим первое утверждение. Пусть график Γ_f перечислим. Тогда, чтобы вычислить значение $f(n)$, достаточно выписывать элементы Γ_f и проверять, совпадает ли первая координата пары с n. Если совпадает, выдавать вторую координату. Этот процесс завершается тогда и только тогда, когда $n \in \operatorname{dom} f$.

Обратно, пусть f вычислима. Но тогда по лемме 10 перечислимо множество $\operatorname{dom} f$ и, следовательно, есть вычислимая функция g, т. ч. $\operatorname{rng} g = \operatorname{dom} f$. Рассмотрим функцию $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$, т. ч. $h(n) \simeq (g(n), f(g(n)))$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Она вычислима, причем

$$(x, y) \in \operatorname{rng} h \leftrightarrow (x \in \operatorname{rng} g \wedge f(x) = y) \leftrightarrow (x \in \operatorname{dom} f \wedge f(x) = y) \leftrightarrow (x, y) \in \Gamma_f$$

для всех $x, y \in \mathbb{N}$. Значит, $\Gamma_f = \operatorname{rng} h$, и график оказывается перечислимым в силу простого обобщения леммы 10.

Теперь легко получить второе утверждение. Имеем

$$f(A) = \operatorname{pr}^2(\Gamma_f \cap (A \times \mathbb{N}));$$
$$f^{-1}(A) = \operatorname{pr}^1(\Gamma_f \cap (\mathbb{N} \times A)).$$

В силу первого утверждения и леммы 7, эти множества перечислимы. $\square$

Пример 15. Пусть множество $U \subseteq \mathbb{N}^2$ перечислимо. Тогда существует вычислимая функция $f\colon \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$, т. ч. $\operatorname{dom} f = \operatorname{pr}^1 U$ и $\Gamma_f \subseteq U$. Иными словами, из любого перечислимого множества пар можно выделить вычислимую функцию, определенную на всех первых координатах пар.

Интуитивно ясно, откуда взять f. Нужно для всякого $n \in \operatorname{pr}^1 U$ выбрать ровно одно такое m, что $(n, m) \in U$, и положить $f(n) = m$. Однако важно сделать это вычислимым образом.

Задавшись числом n, можно брать в качестве m *вторую* компоненту первой встретившейся в перечислении U пары с *первой* компонентой n. Если никакая пара с первой компонентой n не встретится в перечислении, то описанная процедура не завершается, что и нужно: тогда $n \notin \operatorname{pr}^1 U$.

Упражнение 16. Докажите, что для любой вычислимой функции $f\colon \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ найдется вычислимая $g\colon \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$, т. ч. $f(g(f(x))) \simeq f(x)$ для всех $x \in \mathbb{N}$, причем если f инъективна, то также выполнено $g(f(x)) = x$ для всех $x \in \operatorname{dom} f$. Какова g для нигде не определенной функции f?

Пример 17. (*теорема о нормальной форме*) Для любой вычислимой функции $f\colon \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ найдется разрешимое множество $G \subseteq \mathbb{N}^2$, т.ч. для всех $x \in \mathbb{N}$ выполнено

$$f(x) \simeq \pi^1(\min\{z \mid (x,z) \in G\}).$$

В самом деле, по лемме 14, множество Γ_f перечислимо, а в силу леммы 10, обобщенной на множества наборов натуральных чисел, найдется разрешимое множество $G' \subseteq \mathbb{N}^3$, т. ч. $(x,y) \in \Gamma_f \leftrightarrow \exists k\,(x,y,k) \in G'$ для всех $x,y \in \mathbb{N}$. Положим

$$G = \{(x,z) \mid (x,\pi^1(z),\pi^2(z)) \in G'\};$$

поскольку функции π^i вычислимые тотальные, множество G разрешимо. Если $x \notin \operatorname{dom} f$, то не существует y и k, для которых $(x,y,k) \in G'$. Поэтому нет и z, т. ч. $(x,z) \in G$. Значит, правая часть требуемого равенства не определена, как и левая. Пусть теперь $x \in \operatorname{dom} f$. Тогда $(x,y) \in \Gamma_f$ для некоторого y; также найдется k, т. ч. $(x,y,k) \in G'$. Следовательно, $(x,\langle y,k\rangle) \in G$, и существует $z' = \min\{z \mid (x,z) \in G\}$. Имеем $(x,\pi^1(z'),\pi^2(z')) \in G'$, откуда $(x,\pi^1(z')) \in \Gamma_f$. Получаем $\pi^1(z') = f(x) = y$, т. е. требуемое равенство вновь выполнено.

Пример 18. Пусть $V\colon \mathbb{N}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{N}$. Функции $V_n\colon \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ для $n \in \mathbb{N}$ называются *сечениями* V, если $\forall x\,(V_n(x) \simeq V(n,x))$. Если V вычислима, то вычислима и каждая V_n. Обратное, как мы увидим, неверно.

Универсальная вычислимая функция

Функция $U\colon \mathbb{N}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ называется *универсальной вычислимой*, если она вычислима и для всякой вычислимой функции $f\colon \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ найдется число $n \in \mathbb{N}$, называемое *индексом* функции f относительно U, т. ч. $U_n = f$, т. е.

$$\forall x\,(f(x) \simeq U(n,x)).$$

Таким образом, U *нумерует* все вычислимые функции и только их: отображение $n \mapsto U_n$ является (тотальной) сюръекцией из $\mathbb{N}$ в класс вычислимых функций одного аргумента. Поэтому универсальные вычислимые функции мы также будем называть *нумерациями* (подразумевается: нумерациями вычислимых функций). Задавшись некоторой U, мы будем писать $\{n\}$ вместо f, если $f = U_n$; если же при этом нумерация не вполне ясна из контекста, будем уточнять: $\{n\}_U$. Ясно, что может быть $\{n\} = \{m\}$ при $n \neq m$.

Вспомним теперь о нашей модели вычислений. Программы — это конечные слова конечного алфавита Σ. Естественно считать, что множество программ перечислимо (или даже разрешимо: компилятор, как мы знаем, находит все синтаксические ошибки). Следовательно, как обсуждалось выше, существует вычислимая тотальная нумерация программ $\Pi\colon \mathbb{N} \to \Sigma^*$. Т. е. мы можем взять программу с номером n и, например, вычислить ее длину. Это будет вычислимая тотальная функция $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Теорема 19. *Существует универсальная вычислимая функция.*

Доказательство. Универсальную вычислимую функцию U будет вычислять программа-«интерпретатор», получающая номер n и входное значение x, вычисляющая текст программы $\Pi(n)$, и начинающая шаг за шагом исполнять полученную программу на входе x.

Можно утверждать существование такой программы, сославшись на тезис Тьюринга-Чёрча, или непосредственно предъявить ее для нашей модели вычислений. Скажем, указать *универсальную машину Тьюринга* $\mathcal{U}$, которая принимает на вход два натуральных числа (т. е. их коды) n и x. После этого $\mathcal{U}$ запускает машину Тьюринга, вычисляющую нумерацию Π, на входе n, которая перерабатывает этот вход в как-либо закодированную программу машины Тьюринга M_n. Затем машина $\mathcal{U}$ последовательно применяет инструкции машины M_n ко входу x. Если машина M_n должна перейти в заключительное состояние, машина $\mathcal{U}$ стирает с ленты все, кроме результата работы M_n, и тоже переходит в заключительное состояние. Если M_n продолжает работать неопределенно долго, универсальная машина делает это вместе с нею. □

Будем считать, что для каждой у. в. ф. U фиксирован какой-либо алгоритм $\mathcal{U}$ (например, машина Тьюринга), который ее вычисляет.

Лемма 20. *Для каждой у. в. ф. U разрешимы множества*

$$T' = \{(n, x, y, k) \mid \textit{алгоритм } \mathcal{U} \textit{ останавливается на входе } (n, x) \textit{ ровно за } k \textit{ шагов и оставляет на выходе } y\} \textit{ и}$$
$$T = \{(n, x, k) \mid \textit{алгоритм } \mathcal{U} \textit{ останавливается на входе } (n, x) \textit{ ровно за } k \textit{ шагов}\}.$$

Доказательство. Неформально, нужно просто остановить алгоритм $\mathcal{U}$ на входе (x, n) после k шагов и посмотреть, завершился ли он и, если завершился, что подал на выход. Или констатировать, что алгоритм $\mathcal{U}$ остановился раньше, чем за k шагов. □

Мы будем писать $T(n, x, k)$ вместо $(n, x, k) \in T$, отождествляя предикат (т. е. свойство) T и множество троек, этим свойством обладающих. При необходимости указать, для какой у. в. ф. берется предикат, пишем T_U. Аналогично и для T'.

Содержательно, $T(n, x, k)$ говорит, что программа номер n на входе x останавливается ровно за k шагов.

Пример 21. Покажем, что произвольные перечислимые множества $A, B \subseteq \mathbb{N}$ можно разделить на перечислимые непересекающиеся части. Именно, существуют перечислимые A', B', такие что $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$, $A' \cup B' = A \cup B$ и $A' \cap B' = \varnothing$.

Проблема в том, как поделить между множествами A и B их пересечение. Отдать все одному из множеств не всегда возможно: $A \setminus B$ не обязано быть перечислимым. Однако можно, например, посмотреть, в перечислении какого из множеств элемент $n \in A \cap B$ встретится на шаге с меньшим номером — тому множеству его и отдать. При этом все элементы, скажем, $A \setminus B$ заведомо будут «раньше» выписаны в перечислении A.

Лемма 10 позволяет пересказать эту же идею в терминах вычислимых функций, чьими областями определения являются наши множества. Действительно, пусть $A = \mathrm{dom}\{f\}$ и $B = \mathrm{dom}\{g\}$ (обратите внимание, $f, g \in \mathbb{N}$ — это индексы, а не сами функции). Положим

$$A' = \{n \mid \exists k\, (T(f, n, k) \wedge \forall m < k\, \neg T(g, n, m))\} \text{ и}$$
$$B' = \{n \mid \exists l\, (T(g, n, l) \wedge \forall m \leqslant l\, \neg T(f, n, m))\}.$$

(Несимметричность в определении этих множеств вызвана нуждой отнести ровно к одному из них элементы n, т. ч. $T(f, n, k) \wedge T(g, n, k)$ для некоторого k — т. е. вычисление обеих функций завершается на n за одинаковое число шагов.) Множества A' и B' перечислимы, поскольку являются проекциями разрешимых множеств:

$$A' = \mathrm{pr}^1\{(n, k) \mid T(f, n, k) \wedge \forall m < k\, \neg T(g, n, m)\}$$

(чтобы узнать, лежит ли (n, k) в последнем множестве, нужно проверить разрешимые условия $T(g, n, 0), \ldots, T(g, n, k{-}1), T(f, n, k)$). Ясно, что $A' \subseteq A$ и $B' \subseteq B$: ведь из $\exists k\, (T(f, n, k) \wedge \varphi)$ следует $\exists k\, T(f, n, k)$, т. е. $n \in \mathrm{dom}\{f\}$. Если $n \in A \cup B$, то

$$\exists k\, T(f, n, k) \vee \exists l\, T(g, n, l),$$

причем, конечно, программа f за меньшее k число шагов не останавливается (то же для g). Сравним k и l. Если $k < l$, то $n \in A'$; если $k > l$, то $n \in B'$. Если же $k = l$, то $n \in A' \setminus B'$. Значит, $A \cup B \subseteq A' \cup B' \subseteq A \cup B$. Допустим теперь, что $n \in A' \cap B'$. Тогда

$$\exists k \exists l\, (T(f, n, k) \wedge T(g, n, l) \wedge \forall m \leqslant l\, \neg T(f, n, m) \wedge \forall m < k\, \neg T(g, n, m)).$$

Снова сравним k и l. Если $k \leqslant l$, то $T(f, n, k) \wedge \neg T(f, n, k)$, что не так. Если $l < k$, то $T(g, n, l) \wedge \neg T(g, n, l)$, что также невозможно. Следовательно, $A' \cap B' = \varnothing$.

Главные нумерации

Философски говоря, мы можем вообще всякий «язык программирования» отождествить с его интерпретатором, т. е. с вычислимым преобразованием «программ» в вычислимые функции. В абстрактных математических рассуждениях удобно пользоваться весьма экономными «языками», где «программами» являются всевозможные натуральные числа. Это и будут универсальные вычислимые функции.

Следует, однако, иметь в виду, что «естественная» для данной модели вычислений универсальная вычислимая функция (назовем ее *канонической*), где индексами являются номера программ в заданной нумерации Π, — например, функция, вычисляемая универсальной машиной Тьюринга, — вовсе не единственна. Тем не менее «хорошие» нумерации допускают «перевод» в себя любых нумераций.

Вычислимая функция $U\colon \mathbb{N}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ называется *главной у. в. ф.*, если для любой вычислимой функции $V\colon \mathbb{N}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ найдется вычислимая тотальная функция $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, т. ч. $V_n = \{s(n)\}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, т. е.

$$\forall x\, \forall n\, V(n, x) \simeq U(s(n), x),$$

или, как еще можно это записать, $V_n = U_{s(n)}$.

В частности, если V есть у. в. ф., s обеспечивает вычислимый перевод с «языка программирования V» на «язык программирования U». Убедимся, что главная у. в. ф. необходимо является у. в. ф., т. е. избранная нами терминология вполне естественна.

Лемма 22. *Если U г. у. в. ф., то U есть также и у. в. ф.*

Доказательство. Вычислимость U уже есть. Проверим универсальность. Пусть функция $f\colon \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ вычислима. Рассмотрим функцию $V\colon \mathbb{N}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{N}$, т. ч. $V(n,x) \simeq f(x)$ для всех $n, x \in \mathbb{N}$. Очевидно, V вычислима. Как видим, все сечения V_n функции V совпадают с f. В силу главности, найдется вычислимая функция $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, т. ч. $U_{s(n)} = V_n = f$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому f будет иметь, например, индекс $s(0)$ относительно U. $\square$

Естественные нумерации, включая каноническую для машин Тьюринга, оказываются главными. Действительно, в случае последней, «зная» текст программы с двумя аргументами для V, функция s просто выдает по n номер программы с одним аргументом «написать на ленте n перед аргументом; выполнить инструкции машины для V». Однако, можно обойтись и без ссылок на конкретное уточнение понятия алгоритма.

Теорема 23. *Существует главная универсальная вычислимая функция.*

Доказательство. Пусть U какая-либо у. в. ф. Рассмотрим функцию $W\colon \mathbb{N}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{N}$, т. ч.

$$W(n,x) \simeq U(\pi^1(n), \langle \pi^2(n), x\rangle),$$

для всех $n, x \in \mathbb{N}$. Очевидно, W вычислима.

Проверим теперь, что W является г у. в. ф. Пусть $V\colon \mathbb{N}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ произвольная вычислимая функция. Функция V', т. ч. $V'(x) \simeq V(\pi^1(x), \pi^2(x))$, очевидно, тоже вычислимая. Имеем $V' = \{l\}_U$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$.

Мы положим $s(n) = \langle l, n\rangle$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что функция $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ вычислимая тотальная. Далее, для любых n, x имеем

$$\begin{aligned} W(s(n),x) &\simeq W(\langle l,n\rangle, x) \simeq U(\pi^1(\langle l,n\rangle), \langle \pi^2(\langle l,n\rangle), x\rangle) \simeq \\ &U(l, \langle n,x\rangle) \simeq V'(\langle n,x\rangle) \simeq V(\pi^1(\langle n,x\rangle), \pi^2(\langle n,x\rangle)) \simeq V(n,x), \end{aligned}$$

что и требовалось. $\square$

Проблема остановки

Зададимся произвольной универсальной вычислимой функцией U.

Теорема 24. *Множества $S = \{(n,x) \mid\ !\{n\}(x)\}$ и $K = \{n \mid\ !\{n\}(n)\}$ перечислимы, но не разрешимы.*

Доказательство. Перечислимость очевидна, поскольку $S = \operatorname{dom} U$ и $K = \operatorname{dom} d$, где вычислимая функция $d\colon \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ такова, что $d(x) \simeq U(x,x)$ для всех $x \in \mathbb{N}$.

Установим неразрешимость K. Предположим противное. Тогда вычислима функция

$$r(n) \quad \simeq \quad \begin{cases} 1, & \text{если } n \notin K; \\ \text{неопр.}, & \text{если } n \in K. \end{cases}$$

Действительно, ведь $r = \bar{\chi}_{\bar{K}}$, а множество $\bar{K}$ в силу предположения перечислимо (и даже разрешимо). Тогда найдется m, т. ч. $r = \{m\}$ или, иными словами,

$$\forall x\, U(m, x) \simeq r(x).$$

В частности, $\{m\}(m) \simeq U(m, m) \simeq r(m)$. Лежит ли m в K? Если $m \notin K$, то $r(m) = 1$ и $!\{m\}(m)$, откуда $m \in K$. Противоречие. Значит, $m \in K$. Но и это утверждение противоречиво: имеем тогда $\neg\, !\, r(m)$, т. е. $\neg\, !\{m\}(m)$, и $m \notin K$. Остается заключить, что наше предположение ложно и множество K неразрешимо.

Допустим теперь, что разрешимо S. Но, как легко видеть, для любого n

$$n \in K \leftrightarrow (n, n) \in S.$$

Следовательно, мы можем построить алгоритм, разрешающий K, что не так. □

Заметим, что множество $\bar{K}$ неперечислимо — иначе K оказалось бы разрешимым.

«Проблема» (т. е. задача) определения по любым данным n и x, лежит ли (n, x) в S, называется *проблемой остановки*. Не следует, впрочем, думать, что для *какой-либо конкретной* пары (n, x) «ничего нельзя узнать» о ее принадлежности к S. Утверждается лишь, что не может быть алгоритма, который мог бы решить этот вопрос для *любой* пары, какую ни подать ему на вход.

Наличие примера неразрешимого множества позволяет явно указывать невычислимые функции и неразрешимые множества с различными свойствами. При этом рассуждения обычно ведутся от противного: если функция вычислима (множество разрешимо), то множество K разрешимо, что не так. Формализованная схема подобных рассуждений называется *сведением*, и будет рассмотрена позже.

Пример 25. Рассмотрим функцию

$$V(n, x) \quad = \quad \begin{cases} 1, & \text{если } n \in K; \\ 0, & \text{если } n \notin K. \end{cases}$$

Каждое ее сечение V_n есть одна из констант 0 или 1 и потому вычислимо. Вместе с тем, $\forall x\, \forall n\, (V(n, x) \simeq \chi_K(n))$ для неразрешимого K. Следовательно, V невычислима.

В примере 17 мы видели, что всякая вычислимая функция является композицией функции, возвращающей минимальный элемент, удовлетворяющий подходящему разрешимому условию, и вычислимой тотальной функции π^1. Оказывается, обойтись одним минимумом нельзя.

Упражнение 26. Найдите вычислимую функцию $f\colon \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$, т. ч. ни для какого разрешимого множества G не верно, что для всех $x \in \mathbb{N}$

$$f(x) \simeq \min\{z \mid (x,z) \in G\}.$$

Упражнение 27. Докажите, что существует невычислимая (всюду определенная) биекция $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Упражнение 28. Найдите невычислимые функции f и g, т. ч. функция h, для которой $h(x) \simeq f(x) + g(x)$ при всех $x \in \mathbb{N}$, вычислима.

Упражнение 29. Найдите невычислимые функции f и g, удовлетворяющие условию предыдущего упражнения, т. ч. существует (тотальная) биекция $b\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, для которой $b(f(x), g(x)) = x$ при всех $x \in \mathbb{N}$.

Если $\operatorname{dom} f \subseteq \operatorname{dom} g$ и $f(x) = g(x)$ для всех $x \in \operatorname{dom} f$, то функция g *продолжает* функцию f.

Пример 30. Существует вычислимая функция, не имеющая вычислимого тотального продолжения. Более того, функция d обладает этим свойством.

Функция d, как мы помним, вычислима. Предположим, что вычислимая тотальная функция g продолжает d. Тогда функция h, т. ч. $h(x) = g(x) + 1$ для всех $x \in \mathbb{N}$, также будет вычислимой тотальной. Пусть $h = \{n\}$. Если $n \notin \operatorname{dom} d$, то $\neg\,!\,U(n,n)$. Однако, $U(n,n) \simeq \{n\}(n)$, а функция $\{n\}$ определена всюду. Значит, $n \in \operatorname{dom} d$. Но тогда $U(n,n) = \{n\}(n) = h(n) = g(n)+1 = d(n)+1 = U(n,n)+1$, что не верно. Следовательно, вычислимого тотального продолжения функции d не существует.

Упражнение 31. Докажите, что для любой вычислимой f найдется x, т.ч. $f(x) \simeq d(x)$.

Упражнение 32. Проверьте, что функция $d'(x) = d(x) + 1$ не имеет вычислимого тотального продолжения.

Упражнение 33. Пусть вычислимая функция f не имеет вычислимого тотального продолжения. Докажите, что множество $\operatorname{dom} f$ перечислимо, но не разрешимо.

Упражнение 34. Докажите, что существует вычислимая функция f, не имеющая вычислимого тотального продолжения, т. ч. $\operatorname{rng} f = \{0,1\}$.

Множество C *отделяет* множество A от множества B, если $A \subseteq C$ и $B \subseteq \bar{C}$.

Пример 35. Существуют перечислимые множества $A, B \subseteq \mathbb{N}$, т. ч. $A \cap B = \varnothing$, но никакое разрешимое множество C не отделяет A от B.

Рассмотрим вычислимую функцию f из предыдущего упражнения и положим $A = f^{-1}(\{1\})$ и $B = f^{-1}(\{0\})$. По лемме 14, оба множества перечислимы и, очевидно, не пересекаются. Если C отделяет A от B, то тотальная функция χ_C продолжает f (поскольку $\operatorname{dom} f = A \cup B$). Если C разрешимо, то χ_C будет вычислимым тотальным продолжением, коего нет.

Упражнение 36. Пусть множества $A, B \subseteq \mathbb{N}$ таковы, что $\bar{A}$ и $\bar{B}$ перечислимы, а $A \cap B = \varnothing$. Докажите, что некоторое разрешимое множество C отделяет A от B. (*Используйте пример 21.*)

Пример 37. Существует счетно много перечислимых множеств, попарно не пересекающихся и попарно не отделимых никакими разрешимыми множествами.

Положим $A_k = d^{-1}(\{k\})$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Очевидно, эти множества перечислимы и попарно не пересекаются. Допустим, что множество A_n отделяется от множества A_m разрешимым множеством C. Рассмотрим функцию f, т. ч. для всех $x \in \mathbb{N}$

$$f(x) \quad \simeq \quad \begin{cases} m, & \text{если } !\,d(x) \text{ и } x \in C; \\ n, & \text{если } !\,d(x) \text{ и } x \in \bar{C}; \\ \text{неопр.} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ясно, что f вычислима, причем $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} d$. Пусть g тотальное продолжение f; тогда $g(x) \not\simeq d(x)$ для всех $x \in \mathbb{N}$. Действительно, если $x \notin \operatorname{dom} d$, то $!\,g(x)$. Если $x \in \operatorname{dom} d \cap C$, то $x \notin A_m \subseteq \bar{C}$, поэтому $d(x) \neq m = f(x) = g(x)$. Аналогично для $x \in \operatorname{dom} d \cap \bar{C}$. Согласно упражнению 31, такая g не может быть вычислимой. С другой стороны, тотальная функция h, т. ч. для всех $x \in \mathbb{N}$ верно

$$h(x) \quad = \quad \begin{cases} m, & \text{если } x \in C; \\ n, & \text{если } x \in \bar{C}, \end{cases}$$

очевидно, является вычислимым продолжением функции f. Противоречие.

Неподвижные точки

Следствием главности нумерации является следующая теорема о неподвижной точке. Ее доказательство иллюстрирует идею *самоприменимости*, с которой мы уже встречались в доказательстве несчетности континуума, в теореме о неразрешимости проблемы остановки, в различных парадоксах[5]. Это одна из центральных идей математической логики.

Теорема 38. *Пусть универсальная вычислимая функция U главная, и вычислимая функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ тотальна. Тогда существует $n \in \mathbb{N}$, т. ч. $\{n\} = \{f(n)\}$, т. е. $\forall x\, (U(n,x) \simeq U(f(n),x))$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $V\colon \mathbb{N}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{N}$, т. ч.

$$V(k,x) \simeq U(U(k,k),x)$$

для всех $k, x \in \mathbb{N}$. Она, очевидно, вычислима (в частности, не определена, если $\neg\,!\,U(k,k)$). Вследствие главности U, найдется вычислимая тотальная $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, для которой при любых $k, x \in \mathbb{N}$ верно

$$U(g(k),x) \simeq V(k,x) \simeq U(U(k,k),x).$$

Функция $f \circ g$ также вычислимая тотальная. Существует $t \in \mathbb{N}$, т. ч. $\{t\} = f \circ g$. Для любых $x \in \mathbb{N}$ имеем

$$U(g(t),x) \simeq U(U(t,t),x) \simeq U((f \circ g)(t),x) \simeq U(f(g(t)),x).$$

Взяв $n = g(t)$, имеем $\{n\} = \{f(n)\}$, что и требовалось.

[5]Вроде парадокса Рассела: не существует множества $\{x \mid x \notin x\}$.

Какую роль играет условие тотальности f? Очевидно, оно нужно лишь для того, чтобы выражение $\{f(n)\}$ имело смысл: индексами функций являются натуральные числа. $\square$

Теорему можно использовать для построения вычислимых функций с заданными свойствами, учитывающими их собственный индекс. В этом разделе мы предполагаем, что выбрана некоторая главная универсальная вычислимая функция U.

Лемма 39 (о рекурсии)**.** *Пусть функция $V\colon \mathbb{N}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ вычислима. Тогда существует n, т. ч. $U(n,x) \simeq V(n,x)$ для всех x. Иными словами, т. ч. $\{n\} = V_n$.*

Доказательство. Прежде всего, используя главность находим тотальную вычислимую s, для которой

$$\forall k\, \forall x\, (V(k,x) \simeq U(s(k),x)).$$

Затем, по теореме 38, находим n со свойством $\forall x\, (U(n,x) \simeq U(s(n),x))$ и подставляем его вместо k в предыдущее равенство. Получаем

$$\forall x\, (V(n,x) \simeq U(n,x)),$$

что и требовалось. $\square$

Например, если $\forall k\, \forall x\, (V(k,x) = k)$, функция $\{n\}$ будет на любом входе возвращать свой индекс n. В том же духе легко показать, что для всякого разумного языка программирования найдется программа, печатающая свой текст.

Также это наблюдение позволяет доказывать существование и вычислимость функций, определенных «рекурсивно». (Потому и сама теорема 38 часто называется *теоремой о рекурсии*.)

Пример 40. Существует вычислимая функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, удовлетворяющая условиям

$$f(0) = 1 \quad \text{и} \quad f(x) = xf(x-1) \quad \text{для всех } x > 0.$$

(Индукцией по x легко показать, что существует не более одной функции с этими условиями. Из нашего утверждения будет тогда следовать, что такая функция единственна и вычислима.)

Рассмотрим функцию

$$V(k,x) \quad \simeq \quad \begin{cases} 1, & \text{если } x = 0; \\ x\{k\}(x-1), & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

очевидно, вычислимую. По лемме 39, находим n, для которого $\{n\} = V_n$. Отсюда

$$\{n\}(0) = 1 \quad \text{и} \quad \{n\}(x) \simeq x\{n\}(x-1) \quad \text{для всех } x > 0.$$

Очевидная индукция по x показывает, что $\forall x\; !\{n\}(x)$ и, следовательно, вычислимая функция $\{n\}$ удовлетворяет нашим условиям.

Пример 41. В предыдущем примере мы показали, что существует вычислимая функция, удовлетворяющая некоторому неявному определению. Для *этого конкретного определения*[6] мы смогли индукцией установить тотальность полученной функции. Однако, вообще, неподвижная точка неявного определения может дать нам функцию, хотя и вычислимую, но не всюду определенную. Содержательно, это соответствует случаю, когда неверно написанная рекурсивная процедура, скажем, на языке С, не завершается, приводя к «переполнению стека».

Действительно, существует вычислимая функция f, т. ч. $f(x) \simeq (f(x+1))^2$ для всех $x \in \mathbb{N}$. Рассматриваем вычислимую $V(k,x) \simeq (\{k\}(x+1))^2$ и получаем n, т. ч. $\{n\} = V_n$. Для всех x верно $\{n\}(x) \simeq V(n,x) \simeq (\{n\}(x+1))^2$. Очевидно, что константа 0 будет подходящей вычислимой функцией, однако $\{n\}$ может быть и нигде не определенной функцией, которая тоже подходит.

Упражнение 42. Докажите, что всякая функция $f\colon \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$, т. ч. $f(x) \simeq (f(x+1))^2$ для всех $x \in \mathbb{N}$, будет вычислимой.

Теорема 38 также позволяет строить различные экзотические примеры.

Пример 43. Докажем, что найдется $n \in \mathbb{N}$, т. ч. существует программа на языке С, состоящая из n строк, печатающая 1 на входе x, если $x > n$ и в ней есть строка из x символов, и 0 в противном случае.

Вместо программ будем работать с их номерами, а в качестве U возьмем какой-либо разумный интерпретатор языка С, задающий главную универсальную вычислимую функцию. Имеем вычислимые тотальные функцию $l\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, возвращающую число строк по номеру программы, и $g\colon \mathbb{N}^2 \to \{0,1\}$, проверяющую, есть ли в программе строка данной длины. Поэтому функция

$$V(k,x) \quad = \quad \begin{cases} g(k,x), & \text{если } x > l(k); \\ 0, & \text{если } x \leqslant l(k) \end{cases}$$

вычислимая тотальная. Пользуясь главностью, находим вычислимую тотальную s, т. ч. $V_k = \{s(k)\}$ для всех k. В силу теоремы 38, существует неподвижная точка m, для которой $\{s(m)\} = \{m\}$ и, следовательно, $\{m\} = V_m$. Взяв $n = l(m)$, имеем

$$\{m\}(x) \quad = \quad \begin{cases} g(m,x), & \text{если } x > n; \\ 0, & \text{если } x \leqslant n, \end{cases}$$

что и требовалось.

Лемма 44. *Существует вычислимая тотальная функция* $c\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, *т. ч. для всех* $p, q \in \mathbb{N}$ *верно* $\{c(p,q)\} = \{p\} \circ \{q\}$, *т. е.*

$$\forall p\, \forall q\, \forall x\, (\{c(p,q)\}(x) \simeq \{p\}(\{q\}(x))).$$

Доказательство. Таким образом, для главных нумераций можно вычислять индекс композиции функций по их индексам. Действительно, возьмем

[6] И, по существу, для целого класса определений, называемого *схемой примитивной рекурсии*: когда $f(0,\vec{y}) = g(\vec{y})$ и $f(x+1,\vec{y}) = h(f(x,\vec{y}), x+1, \vec{y})$ для некоторых тотальных функций g, h при всех $x, \vec{y}$.

$V(n,x) \simeq \{\pi^1(n)\}(\{\pi^2(n)\}(x))$. Эта функция, очевидно, вычислима. В силу главности, находим вычислимую тотальную s, т. ч. $V_n = \{s(n)\}$ для всех n. Положив $c(x,y) = s(\langle x,y\rangle)$, для любых $p,q \in \mathbb{N}$ имеем

$$\forall x\,(\{c(p,q)\}(x) \simeq \{\pi^1(\langle p,q\rangle)\}(\{\pi^2(\langle p,q\rangle)\}(x)) \simeq \{p\}(\{q\}(x))).$$

□

Пример 45. Существуют $a,b \in \mathbb{N}$, такие что для любого $x \in \mathbb{N}$

$$\{a\}(x) \simeq a+b \text{ и } \{b\}(x) \simeq \{a\}(xb).$$

Нам нужно из одной неподвижной точки извлечь информацию и об a, и о b. Для этого можно использовать кодирование пар. Подойдет неподвижная точка n со свойством

$$\{n\}(x) \simeq \langle c(p_1,n)+c(p_2,n), \{c(p_1,n)\}(xc(p_2,n))\rangle$$

для всех x, где $\pi^i = \{p_i\}$. Действительно, имеем тогда

$$\{c(p_1,n)\}(x) \simeq \pi^1(\{n\}(x)) \simeq c(p_1,n)+c(p_2,n) \text{ и}$$
$$\{c(p_2,n)\}(x) \simeq \pi^2(\{n\}(x)) \simeq \{c(p_1,n)\}(xc(p_2,n)).$$

Достаточно теперь положить $a = c(p_1,n)$ и $b = c(p_2,n)$. Убедимся в существовании подходящего n. Частичная функция

$$V(k,x) \simeq \langle c(p_1,k)+c(p_2,k), \{c(p_1,k)\}(xc(p_2,k))\rangle,$$

очевидно, вычислима. В силу главности найдется вычислимая тотальная s, для которой $V(k,x) \simeq \{s(k)\}(x)$ при всех $x,k \in \mathbb{N}$. Остается взять неподвижную точку $\{n\} = \{s(n)\}$.

Предыдущий пример можно понимать как утверждение о существовании (в любом «главном» языке программирования) двух программ, каждая из которых вычисляет некоторое число, связанное с текстом каждой из этих программ (формально, с кодом-номером этого текста в заведомо выбранном биективном кодировании корректных текстов числами). Однако, что если дополнительно потребовать, чтобы программы (т. е. их коды a и b) были различны?

Пример 46. Существуют две *различные* программы на языке C, из которых первая на любом входе печатает текст второй, а вторая — текст первой с добавленным в конец оператором ;.

Как и выше, мы переформулируем задачу для подходящей главной универсальной вычислимой функции. Пусть функция g по номеру программы выдает номер результата добавления оператора ; (это по-прежнему корректная программа). Ясно, что функция g вычислимая тотальная. Итак, нам нужно доказать, что найдутся числа a и b, т. ч. для любого $x \in \mathbb{N}$

$$\{a\}(x) = b \text{ и } \{b\}(x) = g(a).$$

Рассуждая как в предыдущем примере, находим n, для которого

$$\{n\}(x) \simeq \langle c(p_2,n), g(c(p_1,n))\rangle$$

при всех x. Затем берем $a = c(p_1, n)$ и $b = c(p_2, n)$, получая $\{a\}(x) = c(p_2, n) = b$ и $\{b\}(x) = g(c(p_1, n)) = g(a)$ (мы написали равенства вместо $\simeq$, поскольку правые их части всюду определены).

Почему, однако, $a \neq b$? В самом деле, пусть $a = b$. Тогда, конечно, $\{a\} = \{b\}$ (одна программа вычисляет одну функцию). Значения равных функций во всех точках совпадают: $g(a) = b = a$. Но это невозможно, так как функция g не имеет неподвижных точек — длина программы с номером $g(a)$ больше длины программы номер a.

Вот общая формулировка, позволяющая произвольным (вычислимым) образом определять две функции «совместной рекурсией» (иначе говоря, решать системы из двух уравнений на две вычислимые функции). Обобщения на большее число функций предоставляются читателю

Лемма 47 (о совместной рекурсии)**.** *Пусть функции $V_1, V_2 \colon \mathbb{N}^3 \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ вычислимы. Тогда существуют $a, b \in \mathbb{N}$, т. ч. для всех $x \in \mathbb{N}$ выполнены*

$$U(a, x) \simeq V_1(a, b, x) \quad \text{и} \quad U(b, x) \simeq V_2(a, b, x).$$

Доказательство. Для вычислимой функции $V \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, т. ч.

$$V(k, x) \simeq \langle V_1(c(p_1, k), c(p_2, k), x), V_2(c(p_1, k), c(p_2, k), x)\rangle$$

для всех $k, x \in \mathbb{N}$, согласно лемме 39, найдется число $n \in \mathbb{N}$, т. ч. $U_n = V_n$. Положим $a = c(p_1, n)$ и $b = c(p_2, n)$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} U(a, x) \simeq U(c(p_1, n), x) \simeq U_{p_1}(U_n(x)) \simeq \pi^1(V_n(x)) \simeq \pi^1(V(n, x)) \simeq \\ \pi^1\langle V_1(c(p_1, n), c(p_2, n), x), V_2(c(p_1, n), c(p_2, n), x)\rangle \simeq \\ V_1(c(p_1, n), c(p_2, n), x) \simeq V_1(a, b, x) \end{aligned}$$

для любого $x \in \mathbb{N}$. Аналогично рассматриваем число b. $\square$

Как показывает теорема 38, для г. у. в. ф. U и каждой вычислимой тотальной функции f существует число $n \in \mathbb{N}$, т. ч. $U_{f(n)} = U_n$. Единственно ли это число, а если нет, то как устроено множество всех таких неподвижных точек?

Пример 48. Пусть U г. у. в. ф. и вычислимая функция $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ тотальна. Тогда бесконечно множество

$$X = \{n \in \mathbb{N} \mid U_{f(n)} = U_n\}.$$

Предположим, что X конечно. Тогда это множество разрешимо, а кроме того, поскольку вычислимых функций бесконечно много, найдется вычислимая функция g, т. ч. ни один ее индекс относительно U не принадлежит X, т. е. для всех $n \in \mathbb{N}$ из $g = U_n$ следует $n \notin X$. Пусть $g = U_m$ для некоторого m.

Рассмотрим функцию h, т. ч. при всех $n \in \mathbb{N}$

$$h(n) \quad = \quad \begin{cases} m, & \text{если } n \in X; \\ f(n), & \text{если } n \notin X. \end{cases}$$

В силу разрешимости X, эта тотальная функция вычислима. Согласно теореме 38, существует число n, т. ч. $U_{h(n)} = U_n$. Если $n \in X$, то $U_n = U_{h(n)} = U_m = g$, но тогда $n \notin X$ по выбору функции g. Значит, $n \notin X$ и $U_n = U_{h(n)} = U_{f(n)}$. Но это равенство означает, что $n \in X$. Противоречие.

Упражнение 49. Укажите условие, достаточное для неразрешимости множества X.

m-сводимость

Главные нумерации вычислимых функций удовлетворяют теореме Райса-Успенского.

Теорема 50. *Пусть нумерация U главная и множество $\mathcal{F}$ вычислимых функций одного аргумента нетривиально, т. е. найдется $f \in \mathcal{F}$ и найдется вычислимая $g \notin \mathcal{F}$. Тогда множество индексов*

$$F = \{n \mid \{n\} \in \mathcal{F}\}$$

неразрешимо.

Доказательство. Доказательство использует уже упоминавшуюся процедуру *сведения*, которую мы вскоре рассмотрим подробнее. Пусть ζ нигде не определенная функция — очевидно, вычислимая. Поскольку разрешимость F равносильна разрешимости $\bar{F}$, не ограничивая общности, мы можем считать, что $\zeta \notin \mathcal{F}$, т. е. все индексы ζ лежат вне F (если $\zeta \in \mathcal{F}$, рассмотрим $\bar{F}$). Пусть $\eta \in \mathcal{F}$ и следовательно, $\{e\} = \eta$ влечет $e \in F$. Рассмотрим функцию

$$V(m, x) \quad \simeq \quad \begin{cases} \eta(x), & \text{если } m \in K; \\ \zeta(x), & \text{если } m \notin K. \end{cases}$$

Она вычислима. В самом деле, на входе (m, x) запустим перечисляющую множество K программу. Если $m \in K$, то m будет выписано. После этого запустим вычисление $\eta(x)$. Если же $m \notin K$, то мы зациклимся, как и $\zeta(x)$. Вследствие главности, найдется вычислимая s, т. ч. $V_m = \{s(m)\}$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Предположим, что F разрешимо. Тогда по данному m мы можем вычислить $s(m)$ и проверить $s(m) \in F$. Если окажется, что $s(m) \in F$, то $V_m = \eta$ и $m \in K$. Иначе $V_m = \zeta$ и $m \notin K$. Таким образом, мы нашли разрешающую процедуру для K. Противоречие. Здесь мы *свели* вопрос о принадлежности m к множеству K к вопросу о принадлежности $s(m)$ к F. $\square$

Интересно следствие доказанной теоремы. Пусть $\mathcal{F} = \{f\}$ для некоторой вычислимой функции $f\colon \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$. Тогда неразрешимо множество $F = \{n \mid \{n\} = f\}$ индексов функции f. В частности, это множество не может быть конечным. Иными словами, в главной нумерации каждая функция имеет бесконечно много индексов; может быть вычислена бесконечно многими программами.

Пример 51. Докажем теорему Райса-Успенского, не ссылаясь на неразрешимость множества K, — с использованием теоремы 38.

Допустим, что найдутся вычислимые функции $g \in \mathcal{F}$ и $h \notin \mathcal{F}$, но множество F разрешимо. Пусть $g = U_k$ и $h = U_m$. Определим функцию f, т. ч.

$$f(n) \quad = \quad \begin{cases} m, & \text{если } n \in F; \\ k, & \text{если } n \notin F, \end{cases}$$

при всех $n \in \mathbb{N}$. Вследствие разрешимости F, эта тотальная функция вычислима. Согласно теореме 38, найдется число $n \in \mathbb{N}$, т. ч. $U_{f(n)} = U_n$. Если $n \in F$, то $U_n \in \mathcal{F}$, но $U_n = U_{f(n)} = U_m = h \notin \mathcal{F}$. Значит, $n \notin F$ и $U_n \notin \mathcal{F}$. Однако тогда $U_n = U_{f(n)} = U_k = g \in \mathcal{F}$. Противоречие.

Пример 52. Построим нумерацию, где некоторая функция имеет лишь один индекс, и которая, следовательно, главной не будет.

Пусть U произвольная у. в. ф. Прежде всего заметим, что множество

$$A = \{n \mid \exists x \, !\{n\}_U(x)\}$$

индексов относительно U функций с непустой областью определения перечислимо. Действительно, для всех n

$$n \in A \iff \exists x \exists k \, T(n, x, k),$$

т. е. множество A является (двукратной) проекцией разрешимого множества T, а значит, перечислимо.

(Можно объяснить это и более непосредственно. Будем перебирать всевозможные тройки $(n, x, k) \in \mathbb{N}^3$ и для каждой проверять разрешимое условие $T(n, x, k)$. В случае положительного ответа, выписываем n. Переходим к следующей тройке.)

Поскольку у где-либо определенных вычислимых функций (скажем, у константы) есть индексы относительно U, имеем $A \neq \varnothing$. Поэтому существует вычислимая тотальная функция $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, т. ч. $A = \operatorname{rng} f$. Теперь положим

$$W(m, x) \quad \simeq \quad \begin{cases} \zeta(x), & \text{если } m = 0; \\ U(f(m-1), x), & \text{если } m > 0. \end{cases}$$

Понятно, что функция W вычислима. Также она универсальна для класса вычислимых функций: если $\operatorname{dom} g = \varnothing$, то $g = \zeta = W_0$; если $\operatorname{dom} g \neq \varnothing$, то $g = \{n\}_U$ влечет $n \in A$, откуда $g = U_{f(k)} = W_{k+1}$ для некоторого k. Единственным индексом ζ относительно W оказывается 0.

Упражнение 53. Докажите, что множество

$$\{n \mid \forall x \, \neg \, !\{n\}(x)\} = \{n \mid \{n\} = \zeta\}$$

неперечислимо.

Пусть $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Множество A *m-сводится* к множеству B (обозначение $A \leq_m B$), если существует вычислимая тотальная функция $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, т. ч.

$$\forall x \in \mathbb{N} \, (x \in A \leftrightarrow f(x) \in B).$$

Пример 54. Множество K в доказательстве теоремы 50 сводится[7] ко множеству F с помощью функции s. Множество K сводится к множеству $S_1 = \{\langle n, x\rangle \mid \, !\{n\}(x)\}$. (Действительно, $n \in K \leftrightarrow \langle n, n\rangle \in S_1$.)

[7]Есть и другие типы сводимости. В настоящем разделе мы говорим лишь об m-сводимости и опускаем 'm'.

Лемма 55. *Пусть* $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$. *Тогда*

1. $A \leq_m A$;
2. *если* $A \leq_m B$ *и* $B \leq_m C$, *то* $A \leq_m C$;
3. *если* $A \leq_m B$, *то* $\bar{A} \leq_m \bar{B}$;
4. *если* $A \leq_m B$ *и* B *разрешимо, то* A *разрешимо;*
5. *если* $A \leq_m B$ *и* B *перечислимо, то* A *перечислимо.*

Доказательство. Проверим, скажем, последний пункт. Пусть сведение осуществляет функция f, а вычислимая функция g такова, что $B = \operatorname{dom} g$. Имеем

$$x \in A \leftrightarrow f(x) \in B \leftrightarrow \,!\, g(f(x))$$

для любого $x \in \mathbb{N}$. Значит, $A = \operatorname{dom}(g \circ f)$. Последняя функция вычислима, следовательно, множество A перечислимо. □

Упражнение 56. Разрешимые множества оказываются «наименьшими» в смысле сводимости. Пусть $\varnothing \neq B \subsetneq \mathbb{N}$ и A разрешимо. Докажите, что $A \leq_m B$.

Упражнение 57. Следует ли из $A \leq_m B$ и $B \leq_m A$, что $A = B$?

Упражнение 58. Найдите множество $A \subseteq \mathbb{N}$, т. ч. $A \not\leq_m \bar{A}$.

Упражнение 59. Докажите, что нет подмножества $\mathbb{N}$, к которому сводились бы все прочие подмножества.

Лемма 60. *Пусть множество* $A \subseteq \mathbb{N}$ *перечислимо. Тогда* $A \leq_m K$, *если* K *берется относительно главной нумерации.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$V(n, x) \quad \simeq \quad \begin{cases} 1, & \text{если } n \in A; \\ \text{неопр.}, & \text{если } n \notin A. \end{cases}$$

Как мы уже видели в доказательстве теоремы 50, она вычислима. В силу главности, найдется вычислимая тотальная s, для которой $V_n = \{s(n)\}$ при всех n. В частности, если $n \in A$, $\{s(n)\}(x) = 1$ для всех x. Тогда $!\{s(n)\}(s(n))$ и $s(n) \in K$. Если же $n \notin A$, функция $\{s(n)\}$ нигде не определена, и $s(n) \notin K$. Таким образом,

$$\forall n \in \mathbb{N}\, (n \in A \leftrightarrow s(n) \in K).$$

□

Теорема 50 и понятие m-сводимости дают удобный инструментарий для исследования множеств на разрешимость и перечислимость.

В нижеследующих примерах мы везде будем рассматривать главную универсальную вычислимую функцию U, однако не обязательно каноническую, т. е. индексы могут и не быть номерами программ в П.

Пример 61. В примере 52 и ниже нам уже встречались множество $A = \{n \mid \exists x\ !\{n\}(x)\}$, оказавшееся перечислимым, и его дополнение $\bar{A} = \{n \mid \neg\exists x\ !\{n\}(x)\}$, равное множеству индексов нигде не определенной функции ζ и неперечислимое (тем более, неразрешимое).

Как мы знаем, $A \leq_m K$, откуда $\bar{A} \leq_m \bar{K}$. Докажем, что $\bar{K} \leq_m \bar{A}$. Рассмотрим вычислимую функцию

$$V(n,x) \quad \simeq \quad \begin{cases} 1, & \text{если } n \in K; \\ \text{неопр.,} & \text{если } n \notin K. \end{cases}$$

Пользуясь главностью, находим вычислимую тотальную s, для которой $V_n = \{s(n)\}$ при всех n. Если $n \in K$, то $V_n = \{s(n)\}$ есть тождественная единица, функция всюду определенная. Поэтому $s(n) \in A$. Если $n \notin K$, то $V_n = \{s(n)\} = \zeta$ и $s(n) \notin A$. Таким образом $n \notin K \leftrightarrow s(n) \notin A$, что и требовалось. Это сведение (вместе с тем фактом, что $\bar{K}$ неперечислимо) позволяет показать, что неперечислимо $\bar{A}$, не обращаясь явно ни к теореме 50, ни к перечислимости множества A.

Пример 62. Пусть $C = \{n \mid \forall x, y \in \operatorname{rng}\{n\}\ \text{НОД}(x,y) > 7\}$. Разрешимо ли множество C? Перечислимо ли?

Неразрешимость C немедленно вытекает из теоремы 50, поскольку перед нами множество индексов функций из некоторого нетривиального класса: наименьший общий делитель любых двух значений функции больше семи. Исследуем перечислимость C.

Необычное свойство не должно смущать. Обратите внимание, нигде не определенная функция ζ, для которой $\operatorname{rng}\zeta = \varnothing$, этим свойством обладает. Рассмотрим вычислимую функцию

$$V(n,x) \quad \simeq \quad \begin{cases} 1, & \text{если } n \in K; \\ \text{неопр.,} & \text{если } n \notin K. \end{cases}$$

Пользуясь главностью, находим вычислимую тотальную s, для которой $V_n = \{s(n)\}$ при всех n. Если $n \in K$, то $V_n = \{s(n)\}$ есть тождественная единица, очевидно, не обладающая нашим свойством. Поэтому в сем случае $s(n) \notin C$. Напротив, если $n \notin K$, то $\{s(n)\} = \zeta$ и $s(n) \in C$. Получаем, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$n \notin K \leftrightarrow s(n) \in C,$$

т. е. $\bar{K} \leq_m C$. Поскольку $\bar{K}$ неперечислимо, C также не может быть перечислимым.

Упражнение 63. Перечислимо ли множество $C_1 = \{n \mid \forall x, y \in \operatorname{dom}\{n\}\ |x - y| \vdots 3\}$?

Пример 64. Пусть $D = \{n \mid \operatorname{dom}\{n\} \text{ бесконечно}\}$. Докажем, что ни D, ни $\bar{D}$ не перечислимы.

Рассмотрим вычислимую функцию

$$V(n,x) \quad \simeq \quad \begin{cases} 1, & \text{если } n \in K; \\ \text{неопр.,} & \text{если } n \notin K. \end{cases}$$

Используем главность и для соответствующей s получаем

$$n \in K \leftrightarrow \forall x\, V_n(x) = 1 \leftrightarrow \{s(n)\} = 1 \leftrightarrow s(n) \in D.$$

Значит, $K \leq_m D$ и, следовательно, $\bar{K} \leq_m \bar{D}$. Как мы знаем, $\bar{K}$ неперечислимо. Тогда $\bar{D}$ тоже неперечислимо.

Сложнее построить сведение $\bar{K} \leq_m D$. Рассмотрим функцию V', т. ч.

$$V'(n,x) \quad \simeq \quad \begin{cases} 1, & \text{если } \forall m < x\ \neg T(n,n,m); \\ \text{неопр.} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Она вычислима: для каждого n нужно проверить x разрешимых условий.

Ясно, как ведет себя эта функция. Если $n \in K$, то $!\{n\}(n)$, а значит найдется k, т. ч. $T(n,n,k)$. Можно рассмотреть наименьшее такое k. Тогда функция V'_n будет определена и примет значение 1 при $0 \leqslant x \leqslant k$, а при $x > k$ определена не будет. В этом случае множество $\operatorname{dom} V'_n$ конечно. Если же $n \notin K$, то $\forall m\, \neg T(n,n,m)$, и V'_n будет всюду определена и равна 1. Тогда множество $\operatorname{dom} V'_n$ будет бесконечно.

Представляя это рассуждение более формально, мы по главности находим тотальную вычислимую s', т. ч. $V'_n = \{s'(n)\}$ для всех n, и, как уже показано, замечаем $n \in K \leftrightarrow s'(n) \notin D$. Отсюда $\bar{K} \leq_m D$. Поэтому D неперечислимо.

Упражнение 65. Докажите, что $\bar{A} \leq_m D$.

Упражнение 66. Докажите, что $A \leq_m D$.

Упражнение 67. Пусть $T = \{n \mid \forall x\ !\{n\}(x)\}$. Исследуйте T и $\bar{T}$ на перечислимость.

Упражнение 68. Пусть $B = \{n \mid \{n\}$ тотальная биекция $\mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$. Докажите, что B и $\bar{B}$ неперечислимы.

Упражнение 69. Докажите, что если $E = \{n \mid\ !\{n\}(0)\}$, то $K \leq_m E$.

Пример 70. Пусть $F = \{n \mid\ !\{n\}(0) \wedge \neg\, !\{n\}(1)\}$. Покажем, что ни F, ни $\bar{F}$ не перечислимы.

Рассмотрим функцию $V\colon \mathbb{N}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{N}$, т. ч.

$$V(n,x) \quad \simeq \quad \begin{cases} 1, & \text{если } n \in K \text{ или } x = 0; \\ \text{неопр.,} & \text{если } n \notin K \text{ и } x \neq 0. \end{cases}$$

при всех $n, x \in \mathbb{N}$. Функция V является вычислимой: в самом деле, если $x = 0$, выдаем 1 и завершаем работу; иначе $x \neq 0$, и тогда $V(n,x) \simeq \bar{\chi}_K(n)$. Используя главность нумерации, для соответствующей s имеем $V_n = \{s(n)\}$ и

$$n \in K \iff\ !\,V_n(0) \wedge !\,V_n(1) \iff s(n) \notin F,$$

откуда $K \leq_m \bar{F}$. Следовательно, $\bar{K} \leq_m F$ и F неперечислимо.

Для $\bar{F}$ рассмотрим вычислимую функцию

$$V'(n,x) \quad \simeq \quad \begin{cases} 1, & \text{если } n \in K \text{ и } x \neq 1; \\ \text{неопр.,} & \text{если } n \notin K \text{ или } x = 1. \end{cases}$$

Получаем
$$n \in K \iff\ !\,V'_n(0) \wedge \neg\,!\,V'_n(1) \iff s'(n) \in F,$$
и $K \leq_m F$. Следовательно, $\bar{K} \leq_m \bar{F}$ и $\bar{F}$ неперечислимо.

Пример 71. Пусть $G = \{n \mid \mathrm{dom}\{n\}$ конечно$\}$ и $G' = \{n \mid \mathbb{N}\backslash\mathrm{dom}\{n\}$ конечно$\}$. Тогда $G \leq_m G'$.

Рассмотрим функцию f, т. ч.
$$f(n,x) \simeq \sup\{m < x \mid \exists k < x\, T(n,m,k)\},$$
т. е. $f(n,x)$ это максимальный вход меньше x, на котором n-ая программа остановится менее чем за x шагов (или нуль, если таковых нет). Очевидно, что функция f вычислимая тотальная, причем каждое ее сечение f_n монотонно не убывает.

Заметим, что если множество $\mathrm{dom}\{n\}$ конечно, то функция f_n стабилизируется: взяв x_0 большим всех элементов $\mathrm{dom}\{n\}$ и максимального числа шагов, совершаемых n-ой программой на этих элементах до остановки, имеем $f_n(x) = f_n(x_0)$ для всех $x > x_0$. Обратно, если $\mathrm{dom}\{n\}$ бесконечно, f_n неограниченно возрастает, поскольку для любого y найдется $x' > y$, т. ч. $x' \in \mathrm{dom}\{n\}$, т. е. $T(n,x',k)$ для некоторого k. Тогда, взяв $x > \max(x',k)$, будем иметь $f_n(x) \geqslant x' > y$.

Рассмотрим вычислимую функцию V, т. ч.
$$V(n,x) \quad \simeq \quad \begin{cases} \text{неопр.,} & \text{если } f(n,x) \neq f(n,x+1); \\ 1 & \text{иначе.} \end{cases}$$
Таким образом, V_n неопределена ровно в тех точках, где f_n имеет «скачок». Если $n \in G$, то f_n стабилизируется, и «скачков» имеется лишь конечно много, а значит, множество $\mathbb{N} \setminus \mathrm{dom}\, V_n$ конечно. Если же, $n \notin G$, то f_n возрастает неограниченно, имея бесконечно много «скачков». Тогда множество $\mathbb{N} \setminus \mathrm{dom}\, V_n$ бесконечно.

Остается воспользоваться главностью нумерации и найти функцию s, т.ч. $\{s(n)\} = V_n$ для всех n.

Указания к упражнениям

4. В отмеченный элемент можно отобразить все элементы, где функция не определена. Чтобы не было проблемы с композицией, отмеченный элемент должен переходить в отмеченный.

6. Нужно сравнить x с элементами A и выдать соответствующий элемент C. Каковы бы ни были A и C, такая программа будет работать правильно.

12. Полезно рассмотреть отдельно случай, когда A конечно.

16. Рассмотрите множество $\{(y, x) \mid (x, y) \in \Gamma_f\}$ и, если f не инъективна, используйте пример 15.

26. Рассмотрите f, т. ч. для всех $x \in \mathbb{N}$ верно

$$f(x) \quad \simeq \quad \begin{cases} x, & \text{если } !\, d(x); \\ \text{неопр.} & \text{иначе.} \end{cases}$$

27. Пусть множество $A \subseteq \mathbb{N}$ бесконечно. Как построить биекцию $f\colon A \to A$ так, чтобы $f(x) \neq x$ для всех $x \in A$? Что если A неразрешимо?

29. Рассмотрите биекцию $\langle \cdot, \cdot \rangle$, упомянутую в доказательстве леммы 10. На каких множествах сумма значений «обратных» функций π^1 и π^2 постоянна? Как вычислить сумму, не вычисляя явно ни π^1, ни π^2? Каковы прообразы названных множеств в $\mathbb{N}^2$? Как переопределить биекцию на прообразах, сделав «обратные» невычислимыми?

42. Найдите все такие функции: рассмотрите отдельно случаи $\operatorname{dom} f = \varnothing$ и $\operatorname{dom} f \neq \varnothing$.

53. Каково дополнение этого множества?

56. Как изменить χ_A, чтобы получить сводящую функцию?

58. Используйте п. 5 леммы 55.

59. Примените соображения мощности.

66. Используйте пример 61 и транзитивность $\leq_m$ или постройте сведение непосредственно: как из где-то определенной функции сделать определенную на бесконечном множестве?

68. Что нужно поменять в рассуждениях для D?