Программа государственного экзамена
по дискретной математике и информатике ’2024
направление ИВТ
(Часть «Дискретная математика»)

1. Математическая логика

1. Включение и равенство множеств. Основные способы задания множеств (аксиомы существования). Операции и основные тождества алгебры множеств. Упорядоченные пары и декартово произведение.
2. Бинарные отношения; композиция и обращение. Функции. Равномощность и вложение. Теорема Кантора; тождества в смысле равномощности для множеств $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(A \times B)^C$ и C^{B^A}. Теорема Кантора–Бернштейна–Шрёдера (без доказательства) с примером применения.
3. Частичные порядки. Связь строгих и нестрогих порядков. Максимальные и минимальные, наибольшие и наименьшие элементы, верхние и нижние грани, супремум и инфимум. Изоморфизм порядков. Отношения эквивалентности, фактор-множество. Разбиения и отношения эквивалентности.
4. Принципы математической индукции, «сильной» индукции и наименьшего числа. Их равносильность. Теорема о рекурсии в различных формах (без доказательства). Принцип Дирихле (с доказательством). Основные теоремы о мощностях конечных и счетных множеств (про подмножество, объединение, произведение, степень и пр.; доказательства как доп. вопросы).
5. Вполне упорядоченные множества (ВУМ). Теорема о строении элементов ВУМ. Начальные отрезки ВУМ и их свойства; теорема о сравнении ВУМ (доказательство как доп. вопрос). Сложение и умножение ВУМ; свойства этих операций.
6. Аксиома выбора (с любой мотивировочной задачей — например, о существовании правой обратной у сюръекции). Лемма Цорна и теорема Цермело (без доказательства). Любой пример применения. Теоремы о мощностях бесконечных множеств, вытекающие из них (доказательства как дополнительные вопросы).
7. Структуры и сигнатуры. Изоморфизм структур. Термы и формулы первого порядка. Их значения. Значение формулы при изоморфизме структур. Выразимые отношения и автоморфизмы структуры.
8. Эквивалентность, общезначимость и выполнимость формул первого порядка. Приведение булевой комбинации к дизъюнктивной и конъюнктивной нормальным формам. Корректные подстановки. Приведение формулы к предваренной нормальной форме.
9. Теорема об играх Эренфойхта (без доказательства). Пример элементарно эквивалентных неизоморфных структур. Теорема о компактности (для логики первого порядка — без доказательства). Пример ее применения.
10. Вычислимые функции (на основе интуитивного понятия об алгоритме). Разрешимые и перечислимые множества; их свойства. Универсальные вычислимые функции и T-предикаты. Неразрешимость проблем самоприменимости и остановки. Теорема Клини о неподвижной точке (без доказательства). Теорема о рекурсии. Теорема Райса–Успенского.
11. Конкретная модель вычислений (на выбор студента): машины Тьюринга или бестиповое лямбда-исчисление. Вычислимость функций сложения и умножения натуральных чисел в выбранной модели

2. Дискретные структуры

1. Основные правила комбинаторики: правило сложения, правило умножения. Принцип Дирихле. Формула включения-исключения: формулировка, применение для вывода формулы для числа беспорядков (перестановок без неподвижных точек). Базовые комбинаторные конфигурации: размещения, перестановки и сочетания. Формулы для количеств размещений, перестановок и сочетаний (конфигурации с повторениями и без). Формула Стирлинга (б/д).
2. Формула бинома Ньютона, полиномиальная формула. Свойства биномиальных коэффициентов: симметричность, унимодальность, рекуррентная формула треугольника Паскаля. Знакопеременная сумма биномиальных коэффициентов. Оценки для биномиальных коэффициентов при $n \to \infty$: асимптотика $\binom{n}{k}$ в случае $k = const \cdot n$ и в случае $k = o\left(\sqrt{n}\right)$.
3. Определение простого графа, орграфа, мультиграфа, псевдографа, гиперграфа. Маршруты в графах, пути и простые пути, степени вершин. Изоморфизм графов, гомеоморфизм графов. Понятия связности и компонент связности. Три эквивалентных определения деревьев (с использованием условий ацикличности, связности, числа вершин и ребер) с доказательством их эквивалентности. Блоки и точки сочленения, теорема о пересечении блоков (с доказательством) и теорема о графе блоков и точек сочленения (б/д).
4. Планарность графов: определение планарного графа, формула Эйлера, верхняя оценка числа рёбер в планарном графе. Теорема о 5 красках для планарных графов. Критерий Понтрягина–Куратовского (доказательство необходимости; достаточность без доказательства).
5. Эйлеровы и гамильтоновы циклы в графах: критерий эйлеровости, алгоритм Флёри (с доказательством корректности), достаточное условие гамильтоновости (теорема Дирака или Оре). Признак Эрдеша-Хватала (б/д). Два необходимых условия гамильтоновости.
6. Хроматическое число, хроматический индекс, число независимости, кликовое число. Нижняя оценка хроматического числа через число независимости и через кликовое число. Теорема Визинга (с доказательством).
7. Системы общих представителей (с.о.п.): определение, примеры задач, сводящихся к построению с.о.п.. Тривиальные верхняя и нижняя оценки размера минимальной с.о.п.. Жадный алгоритм построения с.о.п., теорема о верхней оценке размера «жадной с.о.п.». Теорема о неулучшаемости этой оценки в общем случае (б/д).
8. Числа Рамсея: определение, и точные значения $R(s,t)$ при $s \leq 3$, $t \leq 4$. Верхняя оценка Эрдёша–Секереша, её следствие для диагональных чисел Рамсея; нижняя оценка диагональных чисел с помощью простого вероятностного метода.
9. Совершенные паросочетания. Теорема Холла (б/д). Использование теоремы Холла для доказательства того, что k-регулярный двудольный граф содержит k непересекающихся совершенных паросочетаний. Экстремальная теория графов: теорема Турана.

3. Теория вероятностей и математическая статистика

1. Вероятностное пространство, аксиомы Колмогорова, свойства вероятностной меры (в том числе теорема о непрерывности вероятностной меры с доказательством). Условные вероятности. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Независимость.
2. Случайные величины и векторы. Характеристики случайной величины и вектора: распределение вероятностей, функция распределения и её свойства, σ-алгебра, порожденная случайной величиной. Примеры конкретных распределений.

3. Математическое ожидание случайной величины: определение для простых, неотрицательных и произвольных случайных величин. Основные свойства математического ожидания (доказательства только для простых величин). Дисперсия и ковариация, их свойства.
4. Сходимость случайных величин: по вероятности, по распределению, почти наверное, в среднем. Связь между сходимостями (б/д). Лемма Слуцкого (б/д). Теорема о наследовании сходимости. Дельта-метод.
5. Неравенство Маркова, неравенство Чебышёва. Закон больших чисел в форме Чебышёва. Усиленные законы больших чисел (б/д).
6. Характеристические функции случайных величин и векторов и их свойства. Теорема непрерывности (б/д).
7. Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределенных случайных величин.
8. Выборка, выборочное пространство. Точечные оценки параметров и их основные свойства: несмещенность, состоятельность, асимптотическая нормальность. Выборочные среднее, медиана, дисперсия. Сравнение оценок, функция потерь и функция риска. Подходы к сравнению оценок: равномерный, байесовский, асимптотический.
9. Методы построения оценок: метод моментов и метод максимального правдоподобия. Состоятельность оценки метода моментов. Теорема о свойствах оценок максимального правдоподобия (б/д).
10. Доверительные интервалы. Метод центральной статистики. Метод построения асимптотических доверительных интервалов.
11. Статистические гипотезы, ошибки первого и второго рода, уровень значимости критерия. Принципы сравнения критериев, равномерно наиболее мощные критерии. Лемма Неймана–Пирсона. Построение с её помощью наиболее мощных критериев.