Системы формальной арифметики

Рассматриваются (если не оговорено иное) термы, формулы, *предложения* (формулы без свободных переменных) и теории *арифметической* сигнатуры

$$\sigma = (S^{(1)}, +^{(2)}, \cdot^{(2)}; =^{(2)}, \leqslant^{(2)}; 0).$$

Арифметика Пеано PA состоит из следующих предложений:

(A0) аксиомы равенства для сигнатуры σ;

(A1) $\forall x\, \neg Sx = 0$;

(A2) $\forall x \forall y\, (Sx = Sy \to x = y)$;

(A3) $\forall x\, x + 0 = x$;

(A4) $\forall x \forall y\, x + Sy = S(x + y)$;

(A5) $\forall x\, x \cdot 0 = 0$;

(A6) $\forall x \forall y\, x \cdot Sy = x \cdot y + x$;

(A7) $\forall x\, (x \leqslant 0 \leftrightarrow x = 0)$;

(A8) $\forall x \forall y\, (x \leqslant Sy \leftrightarrow (x = Sy \lor x \leqslant y))$;

(Ind) для всевозможных формул $\varphi(x, \vec{y})$ предложения[1]

$$\forall \vec{y} \Big(\big(\varphi(0, \vec{y}) \land \forall x\, (\varphi(x, \vec{y}) \to \varphi(Sx, \vec{y}))\big) \to \forall x\, \varphi(x, \vec{y}) \Big). \qquad (\mathrm{Ind}_{\varphi,x})$$

Счетное множество предложений Ind называется *схемой* индукции.

Теория PA_0 состоит из предложений A0–8. *Арифметика Робинсона* Q есть

$$\mathrm{PA}_0 \cup \{\forall x \forall y\, (x \leqslant y \lor y \leqslant x)\}.$$

Задача 1. Не ссылаясь на общие результаты, докажите что

1. $\mathrm{PA}_0 \vdash \underline{2} + \underline{3} = \underline{3} + \underline{2}$;
2. $\mathrm{PA}_0 \vdash \underline{2} \cdot \underline{2} = \underline{4}$;

Пусть t некоторый терм. Выражение $\exists x \leqslant t\, \varphi$, по определению, означает формулу $\exists x\, (x \leqslant t \land \varphi)$. Аналогично, $\forall x \leqslant t\, \varphi$ означает $\forall x\, (x \leqslant t \to \varphi)$.

Задача 2. Проверьте, что в исчислении предикатов (в сигнатуре σ)

$$\vdash \neg \exists x \leqslant t\, \varphi \leftrightarrow \forall x \leqslant t\, \neg \varphi.$$

Формула называется *ограниченной* (или Δ_0-формулой), если все ее подформулы, начинающиеся с кванторов, имеют вид $\exists x \leqslant t\, \varphi$ или $\forall x \leqslant t\, \varphi$ для различных φ и t, причем термы t не содержат переменную x. Пример:

$$y = \underline{3} + z \to \forall x \leqslant (y + \underline{8} \cdot z)\, (x \leqslant y \cdot y \lor \exists w \leqslant x\, \neg(x + \underline{5} = y \cdot (w + \underline{10}))).$$

[1] Более аккуратно, для терма t выражение $\varphi(t, \vec{y})$ следует понимать как $\varphi[t/x]$.

Задача 3. Дайте индуктивное определение множества Δ_0-формул.

Задача 4. Укажите Δ_0-формулу $Pr(x)$, выражающую в $\mathbb{N}$ множество всех простых чисел. Для этой формулы докажите $\mathrm{PA}_0 \vdash Pr(\underline{2})$, используя общие результаты возможно меньше.

Задача 5. Докажите, что

1. $\mathrm{Q} \vdash x \leqslant x$;
2. $\mathrm{Q} \vdash \exists z\,(x \leqslant z \land y \leqslant z)$.

Говорят, что формула лежит в классе Σ_1 (или является Σ_1-формулой), если она имеет вид $\exists \vec{x}\,\psi(\vec{x},\vec{y})$, где $\psi \in \Delta_0$. Аналогично, формула лежит в классе Π_1, если она имеет вид $\forall \vec{x}\,\psi(\vec{x},\vec{y})$, где $\psi \in \Delta_0$.

Задача 6. Докажите, что

1. $\mathrm{Q} \vdash \exists x \exists y\,\varphi(x,y,\vec{w}) \leftrightarrow \exists z \exists x \leqslant z \exists y \leqslant z\,\varphi(x,y,\vec{w})$ для любой формулы $\varphi(x,y,\vec{w})$;
2. доказуемо в Q, каждая Σ_1-формула эквивалента некоторой формуле вида $\exists z\,\psi(z,\vec{w})$, где $\psi(z,\vec{w}) \in \Delta_0$.

Задача 7. Докажите, что

1. $\mathrm{PA} \vdash 0 + x = x$;
2. $\mathrm{PA} \vdash Sx + y = S(x+y)$;
3. $\mathrm{PA} \vdash x + y = y + x$;
4. $\mathrm{PA} \vdash (x+y)+z = x+(y+z)$;
5. $\mathrm{PA} \vdash x = 0 \lor \exists y\, x = Sy$;
6. $\mathrm{PA} \vdash \big((x \leqslant y) \land (y \leqslant z)\big) \to x \leqslant z$;
7. $\mathrm{PA} \vdash \underline{2} \cdot x = x + x$.

Задача 8. Докажите, что

1. $\mathrm{Q} \nvdash \forall x \exists y\,(x = 0 \lor x = Sy)$;
2. $\mathrm{Q},\ \forall x \forall y \forall z\,(x+y)+z = x+(y+z) \nvdash \forall x \forall y\, x+y = y+x$;
3. $\mathrm{Q} \nvdash \forall x \forall y \forall z\,(x+y)+z = x+(y+z)$;
4. $\mathrm{Q}, \forall x \forall y\, x+y = y+x \nvdash \forall x \forall y\, x \cdot y = y \cdot x$.

(*Постройте контрмодель. Могут пригодиться ординалы.*)

Множество (пар, троек и т. д.) натуральных чисел называется Δ_0-множеством, если оно выражается в $\mathbb{N}$ некоторой Δ_0-формулой. Пример: множество всех простых чисел, множество всех четных чисел (почему?). Аналогично определяются Σ_1- и Π_1-множества.

Задача 9. Используя результаты лекций, докажите, что Π_1-множества суть, в точности, коперечислимые.

Задача 10. Пусть график Γ_f тотальной функции $f\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ является Σ_1-множеством. Докажите, не ссылаясь на общие результаты, что $\bar{\Gamma}_f$ также является Σ_1-множеством.

Задача 11 (Теорема Крэйга)**.** Пусть T перечислимая теория в некоторой сигнатуре τ. Докажите, что существует разрешимая теория S в сигнатуре τ, такая что $T \equiv S$, если

1. $\tau = \sigma$ и T содержит аксиомы равенства для τ;

2. τ произвольная сигнатура.

(*Нужно ввести число-«свидетель», имеющееся у формулы из перечислимого множества, в саму формулу.*)

Задача 12 (Разные формы индукции)**.** Рассмотрим схему *беспараметрической индукции* Ind^-, состоящую из предложений

$$\bigl(\varphi(0) \wedge \forall x\,(\varphi(x) \to \varphi(Sx))\bigr) \to \forall x\,\varphi(x)$$

для всевозможных формул $\varphi(x)$ (в которых *нет* свободных переменных, кроме x). Также рассмотрим *правило индукции* Ind^R

$$\frac{\varphi(0,\vec{y}) \wedge \forall x\,(\varphi(x,\vec{y}) \to \varphi(Sx,\vec{y}))}{\forall x\,\varphi(x,\vec{y})}.$$

Положим $\mathrm{PA}^- = \mathrm{PA}_0 \cup \mathrm{Ind}^-$. Далее, определим «теорию» $\mathrm{PA}^R = \mathrm{PA}_0 + \mathrm{Ind}^R$ в следующем смысле: $\mathrm{PA}^R \vdash \psi$ означает, что есть вывод ψ из PA_0 в исчислении предикатов, в котором также разрешено применять правило Ind^-, т. е. после формулы, имеющей вид посылки правила, записывать соответствующее заключение.

Докажите, что для любой формулы ψ равносильны утверждения

1. $\mathrm{PA}^R \vdash \psi$;

2. $\mathrm{PA}^- \vdash \psi$;

3. $\mathrm{PA} \vdash \psi$.

Теория T называется Σ_1-*полной*, если для любого Σ_1-предложения φ из $\mathbb{N} \models \varphi$ следует $T \vdash \varphi$.

Задача 13. Пусть теория T непротиворечивая и Σ_1-полная. Докажите, что T является Π_1-*корректной*, т. е. для любого предложения $\varphi \in \Pi_1$ из $T \vdash \varphi$ следует $\mathbb{N} \models \varphi$.

Задача 14. Обозначим $Th_{\Pi_1}(\mathbb{N})$ множество всех истинных (в $\mathbb{N}$) Π_1-предложений. Докажите, что теория T тогда и только тогда Σ_1-корректна, когда теория $T \cup Th_{\Pi_1}(\mathbb{N})$ непротиворечива.

Теория T называется ω-*непротиворечивой*, если для любой формулы $\varphi(x)$, из $T \vdash \neg\varphi(\underline{k})$ для всех $k \in \mathbb{N}$ вытекает $T \nvdash \exists x\,\varphi(x)$.

Задача 15. Докажите, что если теория T корректна (т. е. $\mathbb{N} \models T$), то она ω-непротиворечива.

Задача 16. Докажите, что если теория T ω-непротиворечива и $T \vdash \mathrm{Q}$, то она Σ_1-корректна.

Задача 17 (ω-правило)**.** Представьте, что понятие вывода изменили, разрешив в качестве выводов деревья счетного ветвления (но лишь с конечными ветвями), причем добавили следующее *ω-правило* со счетным множеством посылок:

$$\frac{\varphi(\underline{0},\vec{y})\ \varphi(\underline{1},\vec{y})\ \ldots\ \varphi(\underline{n},\vec{y})\ \ldots}{\forall x\, \varphi(x,\vec{y})}$$

Положим $\mathrm{PA}^\omega = \mathrm{PA}_0 + \omega$. Докажите, что

1. $\mathrm{PA}^\omega \vdash \mathrm{Ind}$;
2. если $\mathbb{N} \models \psi$, то $\mathrm{PA}^\omega \vdash \psi$ (и обратно, разумеется, т. е. $\mathrm{PA}^\omega \equiv Th(\mathbb{N})$).

(*Для второго пункта: приведите ψ к предваренной нормальной форме и подумайте об отношении* PA_0 *к истинным бескванторным формулам.*)

Задача 18 (Индукция по формулам ограниченной сложности)**.** Положим

$$\mathrm{Ind}_{\Sigma_1} = \{\mathrm{Ind}_{\varphi,x} \mid \varphi(x,\vec{y}) \in \Sigma_1\}$$

и

$$\mathrm{Ind}_{\Pi_1} = \{\mathrm{Ind}_{\varphi,x} \mid \varphi(x,\vec{y}) \in \Pi_1\}.$$

Далее,

$$\mathrm{I}\Sigma_1 = \mathrm{PA}_0 \cup \mathrm{Ind}_{\Sigma_1} \quad \text{и} \quad \mathrm{I}\Pi_1 = \mathrm{PA}_0 \cup \mathrm{Ind}_{\Pi_1}.$$

Докажите, что $\mathrm{I}\Sigma_1 \vdash \mathrm{I}\Pi_1$. (*Пусть* $\varphi(x,\vec{y}) \in \Pi_1$. *Рассмотрите формулу* $\forall z\,(z \leqslant w \to \neg\varphi(w - z,\vec{y}))$. *Что она значит? Как записать ее без «минуса»?*)