Zadanie 1

Do znalezienia maszynowego epsilon posłużył poniższy kod:

```
machine_epsilon = 1

while np.float32(1) != np.float32(machine_epsilon) + np.float32(1):
    machine_epsilon = np.float32(machine_epsilon / 2)

print("Maszynowy epsilon wynosi: " + str(machine_epsilon))
```

```
Maszynowy epsilon wynosi: 5.9604645e-08
```

Zadanie 2

Dla funkcji $f(x) = \sin(x)$:

- Błąd bezwzględny:

$$|\sin(x+h) - \sin(x)|$$

- Błąd względny:

$$\frac{|\sin(x+h) - \sin(\mathrm{x})\ |}{\sin(x)}$$

- Uwarunkowanie:

$$cond = \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{\sin(x)}}{\frac{x+h-x}{x}} = \frac{\sin(x+h)}{h} * \frac{x}{\sin(x)} \approx \frac{xcos(x)}{\sin(x)}$$

$$\frac{xcos(x)}{\sin(x)} = \mathrm{x} * \mathrm{ctg}\ (\mathrm{x})$$

- Uwarunkowanie:

Analizując wzór powyżej możemy łatwo dojść do wniosku, że będzie on bardzo czuły w punktach gdzie zeruje się sinus, tam gdzie zeruje się cosinus będzie natomiast on bardzo dobrze uwarunkowany. Zależność ta będzie rosła wraz z oddalaniem się x od środka osi liczbowej.

Zadanie 3

W okolicach $x = 0$ możliwe jest rozwinięcie funkcji $y = sinx$ z pomocą szeregu MacLaurina. Przybliżenie to dane jest następującym wzorem:

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots$$

Przyjęte oznaczenia:

- $\hat{y} - wartość\ przybliżona,$
- $\hat{x} - funkcja\ odwrotna\ od\ wartości\ przybliżonej,$
- $\Delta y, \Delta x - błąd\ progresywny\ oraz\ błąd\ wsteczny,$

$\Delta y = \hat{y} - y$

$\Delta x = \hat{x} - x$

Przybliżenie z użyciem pierwszego składnika $\hat{y} = x$

- $x = 0.1$

$\Delta y = \sin(\mathrm{x}) - \mathrm{x} \approx 0.0998334166 - 0.1 = -0.0001665834$

$\Delta x = \hat{x} - x = 0.1001674212 - 0.1 = 0.0001674212$

- $x = \frac{1}{2}$

$\Delta y = \sin(\mathrm{x}) - \mathrm{x} \approx 0.4794255386 - 0.5 = -0.0205744613958$

$\Delta x = \hat{x} - \mathrm{x} = 0.5235987755 - 0.5 = 0.0235987755$

- $x = 1$

$\Delta y = \sin(\mathrm{x}) - \mathrm{x} \approx \sin(\mathrm{x}) - \mathrm{x} \approx 0.8414709848 - 1 = -0.1585290152$

$\Delta x = \hat{x} - \mathrm{x} = 1.5707963268 - 1 = 0.5707963268$

Można zauważyć, że progresywne błędy rosną wraz z oddaleniem się wartości x od 0. Przybliżenie może zostać uznane za dobre dla $x \approx 0$.

Przybliżenie z użyciem pierwszych dwóch składników $\hat{y} = x - \frac{x^3}{3!}$

- $x = 0.1$

$$\Delta y = \sin x - x + \frac{x^3}{3!} \approx 0.0998334166 - 0.1 + 0.0001666667$$
$$= 0.00000008327$$

$$\Delta x = \hat{x} - x = 0.09999991623 - 0.1 = -0.0000000837$$

- $x = \frac{1}{2}$

$$\Delta y = \sin x - x + \frac{x^3}{3!} \approx 0.4794255386 - 0.5 + 0.0208333333$$
$$= 0.0002588719$$

$$\Delta x = \hat{x} - x = 0.4997050408 - 0.5 = -0.0002949592$$

- $x = 1$

$$\Delta y = \sin x - x + \frac{x^3}{3!} \approx 0.8414709848 - 1 + 0.1666666667$$
$$= 0.0081376515$$

$$\Delta x = \hat{x} - x = 0.9851107833 - 1 = -0.0148892167$$

Widać znaczną poprawę, gdyż błędy dla x = 0 są niemalże pomijalne. Dla pozostałych wartości x, x = 0 i x = 1 progresywne błędy względne stanowią jedynie 0.54 % i 0.96 %. Pamiętać należy jednak, iż problem ten jest najbardziej czuły w okolicach $x \approx \Pi$.

Zadanie 4

Poziomem UFL nazywany najmniejszą liczbę dodatnią, jaka może zostać zapisana w danym systemie. Interesuje więc nas liczba o mantysie równej 1 oraz o możliwie jak najmniejszym wykładniku, więc:

$$UFL = \beta^L = 10^{-98}.$$

Z powyższego wiemy, że $x - y = 0.06 * 10^{-97} < UFL$, więc