Mownit – Zestaw II

Zadanie 1.

Dane są trzy węzły interpolacji (-1,2.4), (1,1.8), (2,4.5), proszę obliczyć wielomian interpolacyjny 2-go stopnia, wykorzystując:

a) jednomiany

b) wielomiany Lagrange'a

c) wielomiany wg wzoru Newton'a

Pokazać że trzy reprezentacje dają ten sam wielomian.

a) Konstruujemy wielomian $W(x) = ax^2 + bx + c$ i podstawiamy dane punkty. Otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} c + (-b) + a = 2.4 \\ c + b + a = 1.8 \\ c + 2b + 4a = 4.5 \end{cases}$$

Po rozwiązaniu powyższego układu otrzymujemy:

$$a = 1, b = \frac{-3}{10}, c = \frac{11}{10}.$$

b) Otrzymujemy następujące równanie:

$$\begin{aligned} W(x) = {} & \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2 \\ & = \frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)} 2.4 + \frac{(x+1)(x-2)}{(1+1)(1-2)} 1.8 \\ & + \frac{(x+1)(x-1)}{(2+1)(2-1)} 4.5 = x^2 - 0.3x + 1.1. \end{aligned}$$

c) Wielomiany wg wzoru Newton'a:

$$W(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1 , x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$f[x_0] = 2.4, f[x_1] = 1.8, f[x_2] = 4.5$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = -\frac{3}{10}$$
$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{4.5 - 1.8}{2 - 1} = \frac{27}{10}$$
$$f[x_1, x_2 , x_3] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{4.5 - 1.8}{2 - 1} = 1$$

Ostatecznie:

$$W(x) = x^2 - 0.3x + 1.1.$$

Otrzymaliśmy ten sam wielomian korzystając z każdej metody.

Zadanie 2.

Wyrazić następujący wielomian metodą Hornera: p(t) = 3t^3 – 7t^2 + 5t – 4.

Dokonujemy przekształceń:

$$p(t) = 3 - 7t^2 + 5t - 4 = (3t^2 - 7t + 5)t - 4 = \big((3t - 7)t + 5\big)t - 4.$$

Zadanie 3.

Ile mnożeń trzeba wykonać do ewaluacji wielomianu p(t) stopnia n-1 w danym punkcie t jeżeli wybieramy jako reprezentacje:

a) jednomiany :

Korzystając z schematu Hornera otrzymujemy n-1 mnożeń.

b) wielomiany Lagrange'a

Do obliczenia wyrazu L_k potrzebujemy wykonać n-1 mnożeń. Przy liczbie wyrazów równej n aby obliczyć je wszystkie potrzebujemy n * (n-1) operacji mnożenia. Pamiętając, że mnożymy każdy z wyrazów przez rzędną, liczba mnożeń to łącznie n^2.

c) wielomiany Newtona

By obliczyć p_k musimy wykonać k mnożeń. $k \in \langle 0, n-1 \rangle$, więc ilość mnożeń to

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = n^2.$$

Zadania domowe

Zadanie 1.

Znaleźć kompromis między granicą błędu z zachowaniem wielomianu interpolacyjnego dla funkcji Rungego f(t) = 1/(1 + 25t^2), dla równoodległych węzłów na przedziale [-1,1].

Dobrym kompromisem jest $n = 5$. Przy większych wartościach n doświadczamy już znacznych rozbieżności.

Zadanie 2.

Wypiszmy wzory na 7 pierwszych wielomianów Legendre'a:

1. $p_0 = 1$
2. $p_1 = x$
3. $p_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
4. $p_3 = \frac{1}{2}(5x^2 - 3)$
5. $p_4 = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
6. $p_5 = \frac{1}{8}(56x^5 - 70x^5 - 3)$
7. $p_6 = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5).$

a) Sprawdzić czy pierwsze siedem wielomianów Legendre'a są wzajemnie ortogonalne:

Aby sprawdzić wzajemną ortogonalność tych wielomianów należy policzyć następującą całkę i sprawdzić, czy równa się ona 0:

$$\int_{-1}^{1} p_i\,(x)p_j(x)$$

Dla każdej pary $i, j \ \in \{0, 1, 2, 3,4,5,6\}, i \neq j$ całka ta będzie równa 0, co oznacza, że pierwsze siedem wielomianów Legendre'a jest parami ortogonalnymi.

b) Sprawdzić czy one spełniają wzór na rekurencję.

Zależność rekurencyjna wyznaczająca kolejne wielomiany Legendre'a wygląda następująco:

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}, P_0(x) = 1, P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_1(x) - \frac{n}{n+1} P_0(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$
$$P_3(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_2(x) - \frac{n}{n+1} P_1(x) = \frac{1}{2}(5x^2 - 3)$$
$$P_4(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_3(x) - \frac{n}{n+1} P_2(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$
$$P_5(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_4(x) - \frac{n}{n+1} P_3(x) = \frac{1}{8}(56x^5 - 70x^5 - 3)$$
$$P_6(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_5(x) - \frac{n}{n+1} P_4(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5).$$

Zależność rekurencyjna jest spełniona.

(c) wyrazić każdy z sześciu pierwszych jednomianów 1, t, …, t^6 jako liniową kombinację pierwszych siedmiu wielomianów Legendre'a, p0, …, p6

$$1 = P_0(x)$$
$$x = P_1(x)$$
$$x^2 = \frac{1}{3}(2P_2 + P_0)$$
$$x^3 = \frac{1}{3}(2P_3 + 3P_1)$$
$$x^4 = \frac{1}{35}(8P_3 + 20P_2 - 2P_0)$$
$$x^5 = \frac{1}{63}(8P_5 + 28P_3 - 17P_1)$$
$$x^6 = \frac{1}{231}(16P_6 - 72P_3 - 110P_2 + 49P_0)$$

Zadanie 3

Wyprowadzić wzór na przekształcenie węzłów Czebyszewa z przedziału [-1,1] na dowolny przedział [a,b].

Z promienia $r_t = 1$ chcemy uzyskać $r_x = \frac{b-a}{2}$. Więc $x = \frac{b-a}{2}$.

Również środek przedziału ulega zmiany z 0 na $\frac{a+b}{2}$.

Ostatecznie:

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}.$$