確率

確率と確率過程　具体例で学ぶ確率論の考え方

柳瀬　眞一郎

森北出版株式会社

レヴィの反転公式

- 1次元では分布関数F(x)が$x = a, b$で連続なら
  - $F(b) - F(a) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ika} - e^{-ikb}}{ik} \phi(k) dk$
- N次元では、確率測度をPとし、区間Iを
  - $I = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots \times (a_n, b_n]$
- とすると
  - $P(I) = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-T}^{T} \cdots \int_{-T}^{T} \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-ik_i a_i} - e^{-ik_i b_i}}{ik_i} \phi(k_1, \cdots, k_n) dk_1 \cdots dk_n$
- この定理から、特性関数によって分布関数が一意に決定され、分布関数と特性関数の間に1:1が成り立ち、確率分布は特性関数によっても一意的に与えられる

モーメント

- $M_n = E[X^n]$
- 特性関数から計算が可能
  - $\frac{d^n\phi(k)}{dk^n} = \phi^{(n)}(k) = E\left[(iX)^n e^{ikX}\right]$
  - $M_n = \frac{\phi^{(n)}(0)}{i^n}$
- 特性関数から、共分散・分散を求めることが可能
  - $\phi(k) = E\left[e^{ik^tX}\right]$
- より、$m_i = E[X_i]$として、$m = (m_1, \cdots, m_n)$とおくと
  - $e^{-ik^tm} = E\left[e^{ik^t(X-m)}\right]$
- よって
  - $C\left[X_i, X_j\right] = -\frac{\partial^2}{\partial k_i \partial k_j}\exp(-ik^tm)\phi(k)\,|_{k=0}$

正規分布

  - $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$
- 正規分布の特性関数は
  - $\phi(k) = E\left[e^{ikX}\right] = \exp\left(i\mu k - \frac{1}{2}\sigma^2 k^2\right)$
- $\boldsymbol{n}$個の変数$\boldsymbol{X_1, \cdots, X_n}$の結合確率分布が$\boldsymbol{n}$次元の正規分布であるとは
  - $f(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)\right]$
  - $A = (a_{ij})$は正定符号のn次元対称行列
- ベクトル表現
  - $x = (x_1, \cdots, x_n), \mu = (\mu_1, \cdots, \mu_n)$を用いると
  - $f(x) = \frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^t A (x-\mu)\right)$
- Aは適当な直行行列Tによって対角化される
  - $T^{-1}AT = A' = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}, T^t T = E$
  - Aは正定符号であるから、$\alpha_i > 0\ (1 \le i \le n)$

確率密度関数であることを確かめる

- $x = \mu + Tx'$
- とおくと、$dx = \|T\| dx' = dx'$であり、
  - ※ヤコビアン
  - 元の変数$(x_1, \cdots, x_n)$に対して、新しい変数をu_iを$x_i = x_i(u_1, \cdots, u_n)$とおくと、ヤコビアンを$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}$とおくと
    - $\int f(x)dx = \int f\big(x_1(u), \cdots, x_n(u)\big)|\mathrm{det} J|du$
  - この場合、ヤコビアンとTが一致する

続き

- $\int f(x)dx = \frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int dx' \exp\left(-\frac{1}{2}(Tx')^t A(Tx)\right)$
- $= \frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int dx' \exp\left(-\frac{1}{2}x'A'x'\right)$
- $=\frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int dx' \exp(-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^2)$
- $= \frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\Pi_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{2}{\alpha_i}}\right) = 1$

特性関数

- $\int f(x)\exp(ik^t x)dx$
- $= \frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int dx \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^t A(x-\mu) + ik^t(x-\mu) + ik^t\mu\right)$
- $k = Tk'$とおくと
  - $k(x-\mu) = (Tk')^t Tx' = k'^t x'$
- より
- $= \frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int dx' \exp\left(-\frac{1}{2}x'^t A' x' + ik'^t x' + ik^t\mu\right)$
- $= \frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{ik^t\mu}\int dx' \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i'^2 + i\sum_{i=1}^n k_i' x_i'\right)$
- $= \frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{ik^t\mu}\int dx' \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \alpha_i \left(x_i' - i\frac{k_i'}{\alpha_i}\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \frac{k_i'^2}{\alpha_i}\right)$
- $= e^{ik^t\mu}\exp\left(-\frac{1}{2}k'^t(A'^{-1})k'\right) = e^{ik^t\mu}\exp\left(-\frac{1}{2}(T^{-1}k)^t(T^{-1}AT)^{-1}(T^{-1}k)\right) = e^{ik^t\mu}e^{-\frac{1}{2}k^t A^{-1}k}$
- これから明らかに
  - $E[X] = \mu$

共分散

- $B = A^{-1} = (b_{ij})$とおくと
- $C[X_i, X_j] = -\frac{\partial^2}{\partial k_i \partial k_j} \exp(-ik^t \mu)\, \phi(k)|_{k=0}$
- $= -\frac{\partial^2}{\partial k_i \partial k_j} \exp\left(-\frac{1}{2} k^t B k\right)|_{k=0} = b_{ij}$
- したがって
  - $C[X_i, X_j] = b_{ij}$
  - $B = A^{-1}$を分散共分散行列という

正規分布における変数の独立性と共分散との関連:n=2

- $x_i' = x_i - \mu_i$
- とおくと
  - $f(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{|A|}}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}(a_{11}x_1'^2 + a_{12}x_1'x_2' + a_{21}x_2'x_1' + a_{22}x_2'^2)\right]$
  - $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
  - $B = \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{|A|} & -\frac{a_{12}}{|A|} \\ -\frac{a_{21}}{|A|} & \frac{a_{11}}{|A|} \end{pmatrix}$
- よって
  - $\sigma_1^2 = \frac{a_{22}}{|A|}, \sigma_2^2 = \frac{a_{11}}{|A|}, C[X_1, X_2] = \rho[X_1, X_2]\sigma_1\sigma_2 = -\frac{a_{12}}{|A|}$
- $\rho = \rho[X_1, X_2]$とおくと
  - $a_{11} = \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_1^2}, a_{22} = \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_2^2}, a_{12} = -\frac{\rho}{(1-\rho^2)\sigma_1\sigma_2}$
- 2次元の場合は、X_1, X_2が互いに独立であれば、共分散および相関係数が0となる
- 逆に、共分散または相関係数が0であれば、X_1, X_2は互いに独立

問題

- X, Y は同じ確率分布に従う、平均値0の、独立な確率変数とする。このとき
  - $\frac{E\left[(X-Y)^4\right]}{\{E[(X-Y)^2]\}^2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\frac{E\left[X^4\right]}{\{E[X^2]\}^2}$
- となることを示せ。さらに、X, Y が正規分布なら、右辺は3となることを示せ

問題

- (X,Y)を2変量正規分布にしたがう確率変数とする。このとき、任意の関数$f(x)$について
  - $E[f(X)e^{-Y}] = E[e^{-Y}]E[f(X - C[X,Y])]$
- を示せ

独立な確率変数の和

- Xの分布関数を$F_X(x)$, Yの分布関数を$F_Y(y)$, X, Yは互いに独立であるとすると$Z = X + Y$の分布関数は
  - $F_Z(z) = P(\{Z \leq z\}) = P(\{X + Y \leq z\})$
  - $= \int_{-\infty}^{\infty} P(\{X \leq z - y\}) P(\{y < Y \leq y + dy\})$
  - $= \int_{-\infty}^{\infty} P(\{X \leq z - y\}) \big(F_Y(y + dy) - F_Y(y)\big)$
  - $= \int_{-\infty}^{\infty} P(\{X \leq z - y\}) dF_Y(y)$
  - $= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(z - y) dF_Y(y)$
- 同様にして
  - $F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(z - y) dF_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(z - x) dF_X(x) = F_X(x) * F_Y(y)$
  - Zの分布関数は合成積
- 確率密度関数が
  - $dF_X(x) = f_X(x)dx, dF_Y(y) = f_Y(y)dy$
  - $g_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - y) f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(z - x) f_X(x) dx = f_X(x) * f_Y(y)$

特性関数

- $E\left[e^{ikZ}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} g_Z(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} f_X(z-y) f_Y(y) dy\, dz$
- $x = z - y$とおくと
  - $E\left[e^{ikZ}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x+y)} f_X(x) f_Y(y) dy\, dx = E\left[e^{ikX}\right] E\left[e^{ikY}\right]$
- と、X, Yの特性関数の積となる

再生的

- 独立な変数の和の分布が同じ種類の分布になるとき、その確率分布は再生的であるという
- 二項分布は再生的
- ポアソン分布は再生的
- 正規分布は再生的
  - X, Yが特性関数が$\exp\left(i\mu_X k - \frac{1}{2}\sigma_x^2 k^2\right), \exp\left(i\mu_y k - \frac{1}{2}\sigma_y^2 k^2\right)$である独立な確率分布に従う場合
    - $E\left[e^{ikZ}\right] = \exp\left(i(\mu_X + \mu_Y)k - \frac{1}{2}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2\right)k^2\right)$
  - となり、正規分布となる。
  - $X_1, \cdots, X_n$が互いに独立な確率変数で正規分布に従うとき
    - $S_n = \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_n X_n$
  - は平均値が
    - $E[S_n] = \alpha_1 E[X_1] + \cdots + \alpha_n E[X_n]$
  - 分散が
    - $V[S_n] = \alpha_1^2 V[X_1] + \cdots + \alpha_n^2 V[X_n]$

安定分布

- 任意の$a_1, a_2 > 0$に対して、$a > 0$および実数bがあって
  - $\phi(a_1 k)\phi(a_2 k) = \phi(ak)e^{ibk}$
- となるような分布の時、安定分布という
- $\phi(k)$に対応する確率密度関数を$f(x)$とおくと、$\phi(ak)$に対応する確率密度関数は、$Y = aX$とおくと、$\frac{1}{a} f\left(\frac{y}{a}\right)$であるから、確率変数$Y$の分布は、$X$の分布を確率変数を$a$倍、確率密度を$\frac{1}{a}$倍したものである。
- $\phi(a_1 k)$は$Y_1 = a_1 X_1$, $\phi(a_2 k)$は$Y_2 = a_2 X_2$の特性関数であり、$\phi(a_1 k)\phi(a_2 k)$は$Y_1 + Y_2 = a_1 X_1 + a_2 X_2$の特性関数。一方、$\phi(ak)e^{ibk}$は$aX + b$の特性関数で、これらが一致するすると
  - $a_1 X_1 + a_2 X_2 =^d aX + b$
- $=^d$は両者の確率分布が一致することを示す
- ※再生的な分布と安定的な分布はよく似た概念ではあるが、全く同じものではないことに注意

正規分布は安定分布

- 特性関数を$\phi(k) = \exp\left(i\mu k - \frac{1}{2}\sigma^2 k^2\right)$とすると
  - $\phi(a_1 k)\phi(a_2 k) = \exp\left(i\mu(a_1 + a_2)k - \frac{1}{2}\sigma^2(a_1^2 + a_2^2)k^2\right)$
  - $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, b = \mu\left(a_1 + a_2 - \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\right)$

チェビシェフの不等式

- 確率変数Xの確率分布をPとし、平均値をμ、分散をσ^2とする。このとき、任意の$\varepsilon > 0$に対して
  - $P(|X-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$
- 証明
  - $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx = \int_{|x-\mu|\geq\varepsilon}(x-\mu)^2 f(x)dx + \int_{|x-\mu|\leq\varepsilon}(x-\mu)^2 f(x)dx \geq \int_{|x-\mu|\geq\varepsilon}(x-\mu)^2 f(x)dx \geq \int_{|x-\mu|\geq\varepsilon}\varepsilon^2 f(x)dx = \varepsilon^2 P(|X-\mu| \geq \varepsilon)$

マルコフの不等式

- $\psi(x) \geq 0$をxの連続関数として
  - $P(\psi(X) \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E[\psi(X)]}{\varepsilon^2}$
- 証明
  - $E[\psi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)f(x)dx = \int_{\psi(x)\geq\varepsilon^2} \psi(x)f(x)dx + \int_{\psi(x)\leq\varepsilon^2} \psi(x)f(x)dx \geq \int_{\psi(x)\geq\varepsilon^2} \psi(x)f(x)dx \geq \int_{\psi(x)\geq\varepsilon^2} \varepsilon^2 f(x)dx = \varepsilon^2 P(\psi(X) \geq \varepsilon^2)$

様々な収束

- 法則収束
  - 確率変数X_nの分布関数を$F_n(x)$、確率変数Xの分布関数を$F(x)$とおくと、X_nがXに法則収束するとは、以下が成り立つこと：
    - $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$
  - $F_n(x)$に対応する確率密度関数$f_n(x)$が存在するとき、$F(x)$に対応する確率密度関数$f(x)$が存在して
    - $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

確率収束

- 任意の$\varepsilon > 0$に対して
  - $\lim_{n \to \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$
- が成り立つとき、X_nはXに確率収束するという

- 定理
  - 確率収束すれば法則収束する

平均2乗収束

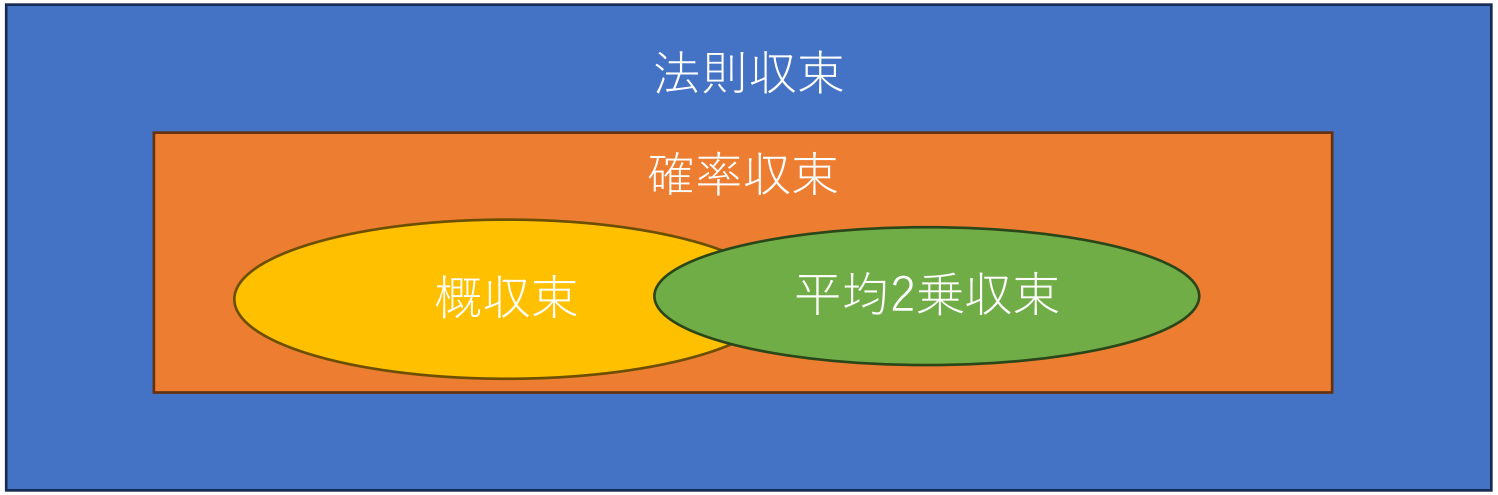
- $\lim_{n\to\infty} E[(X_n - X)^2] = 0$

- マルコフの不等式で、$\psi(X) = (X_n - X)^2$とおくと
  - $P\left((X_n - X)^2 \geq \varepsilon^2\right) \leq \frac{E\left[(X_n - X)^2\right]}{\varepsilon^2}$
  - X_n, Xと異なる確率分布なのにいいのか？？って思ったけど、$X_n - X$をXと思えばよいのか??
- とおくと、平均2乗収束すれば、確率収束することもわかる

ほとんど確実な収束 (概収束、確率1で収束)

- $\lim_{n\to\infty} X_n = X \ \ (a.e.\omega)$
  - Almost everywhere

- $P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$
- が成り立つとき、X_nはXにほとんど確実に収束する



大数の法則

- 必ずしも独立でないn個の確率変数X_nがあって、その和をS_n
  - $S_n = X_1 + \cdots + X_n$
- とし、
  - $Q_n = \frac{S_n}{n}$
- とする。S_nの分散$V[S_n]$が
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{V[S_n]}{n^2} = 0$
- となるとする。また
  - $\mu_n = E[S_n]$
- とおくと、Q_nの平均は$\frac{\mu_n}{n}$で、分散は$\frac{V[S_n]}{n^2}$となる。チェビシェフ不等式より
  - $P\left(\left|Q_n - \frac{\mu_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{V[S_n]}{n^2}$
- したがって、Q_nは$n \to \infty$のときに、単位分布$\delta\left(x - \lim_{n\to\infty}\frac{\mu_n}{n}\right)$に確率収束する。これを大数の弱法則

大数の弱法則

- 任意の$\varepsilon > 0$に対して$n > 0$が存在して
  - $P\left(\left|Q_n - \frac{\mu_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{V[S_n]}{n^2}$

大数の強法則

- $Q_n - \frac{\mu_n}{n}$は$n \to \infty$で、単位分布$f(x) = \delta(x)$にほとんど確実に収束する
- 正確には
- 任意の$\varepsilon > 0, \delta > 0$に対して$N > 0$が存在して
  - $P\left(\bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{N+r} \left\{\left|Q_n - \frac{\mu_n}{n}\right| < \varepsilon\right\}\right) > 1 - \delta$
- ※ほとんど確実に収束すれば確率収束するので、強法則が成り立てば弱法則が成立
- ※大数の法則は、ある確率分布を持つ確率変数があったときに、何回も試行を繰り返して算術平均をとれば、それが真の平均値に近づくことを理論的に証明している

中心極限定理

- リンデリングの条件
  - $X_1, \cdots, X_n$を必ずしも同じ分布を持たない独立な確率変数であるとし、$E[X_n] = \mu_n$とする。分散は
    - $V_n = V[X_1 + \cdots + X_n] = V[X_1] + \cdots + V[X_n]$
  - とおく。このとき、任意の$\varepsilon > 0$に対して
    - $\frac{1}{V_n} \sum_{k=1}^{n} \int_{-\varepsilon\sqrt{V_n}}^{\varepsilon\sqrt{V_n}} (x - \mu_n)^2 dF_k(x) \to 1 \ (n \to \infty)$
- が成り立つとき、
  - $\tilde{Q}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{V_n}} - \frac{\mu_1 + \cdots + \mu_n}{\sqrt{V_n}}$
- の確率分布は、$n \to \infty$で正規分布$N(0,1)$に近づく。

中心極限定理の簡単な証明

- $X_1, \cdots, X_n$が互いに独立な確率変数で、同じ分布を持つとする。また、
  - $E[X_i] = 0, V[X_i] = 1$
- とする。このとき
  - $S_n = X_1 + \cdots + X_n$
- とすると、S_nの平均値は0, 分散はn。X_iの特性関数を$\phi(k)$とおくと、$\frac{S_n}{\sqrt{n}}$の特性関数は
  - $\phi^n\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)$
- となる。平均0, 分散1より
  - $\phi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - ikx - \frac{k^2x^2}{2} + \cdots\right) dF(x) = 1 - 0 - \frac{k^2}{2} + \cdots$
  - $\phi^n\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right) = \left(1 - \frac{k^2}{2n}\right)^n \to e^{-\frac{k^2}{2}} \ (n \to \infty)$

大偏差定理

- 大数の法則において、X_nが互いに独立で同じ分布に従うとする。このとき、$E[X_i] = \mu$とすると
  - $Q_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$
- は、$n \to \infty$の極限で、1点分布
  - $f(x) = \delta(x-\mu)$
- に収束することが示されたが、非常に大きくても有限のnでは$\mathrm{Q_n} = \mu$以外の値をとる確率は0ではない。この確率を計算するのが大偏差定理

- $X_1, \cdots, X_n$を平均値μ、分散σ^2の同じ分布を持つ確率変数として、中心極限定理が成立するとする。nが十分に大きければ
  - $P\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n\sigma^2}} - \frac{n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right| \leq \varepsilon\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \exp\left[-\frac{1}{2}x^2\right] dx$
- つまり
  - $P\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x| \geq \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}} \exp\left[-\frac{1}{2}x^2\right] dx$
  - となって、ずれからの評価が可能となる

マルコフ連鎖

- 離散時間マルコフ連鎖
  - ある時間ステップ$t = t_n$における確率変数の値$X_n = X(t_n)$の確率分布が、直前の時間ステップ$t = t_{n-1}$の確率変数の確率分布だけで決定される離散確率過程
    - $P(\{X_n \leq x_n\}|\{X_0 = x_0\} \cap \{X_1 = x_1\} \cap \cdots \cap \{X_{n-1} = x_{n-1}\}) = P(\{X_n = x_n\}|\{X_{n-1} = x_{n-1}\})$
  - よって、推移確率分布
    - $F(x, m; y, n) = P(\{X_n \leq y\}|\{X_m = x\})\ (m < n)$
  - が大事
- 特に、確率変数が離散的である場合をマルコフ連鎖。Xが整数値のみをとるとすると
  - $P(i, m; j, m+1) = p_{ij}^{(m)} = P(\{X_{m+1} = j\}|\{X_m = i\})$
- マルコフ連鎖が定常なら
  - $p_{ij} = p_{ij}^{(m)}$

例5.2 独立な確率変数の和

- Z_nを同じ分布を持ち、互いに独立な確率変数$X_1, \cdots, X_n$の和
  - $Z_n = X_1 + \cdots + X_n$
- とし、$Z_0 = 0$とする。X_iの取りうる値は整数のみとする。このとき、Z_nは定常なマルコフ連鎖
  - $P(\{Z_n = j_n\}|\{Z_0 = j_0, \cdots, Z_{n-1} = j_{n-1}\})$
  - $= P(\{Z_n = j_n\}|Z_{n-1} = j_{n-1})$
  - $= P(\{Z_n - Z_{n-1} = X_n = j_n - j_{n-1}\})$
- となり、nに依存しない

ランダムウォーク

- 経路
  - $\{S_0 = 0, S_1, \cdots, S_{x-1}, S_x = y\}$
- x回のコイン投げのうち、P回表が出て、Q回裏が出たとすると
  - $x = P + Q, y = P - Q$
- このような割合で裏表が出る場合の数は
  - $L(x, y) = {}_{P+Q} C_P$

鏡像の原理

- $A(a,\alpha), B(b,\beta)$を結ぶ経路$\{S_a=\alpha,\cdots S_b=\beta\}$を考える。$A$と$y$軸に関して反転対象な位置にある点を$A'(a,-\alpha)$とする。このとき「点$A,B$を結ぶ経路のうち、$x$軸と共有点をもつ(交差または反射する)経路の数は、点A',Bを結ぶ経路の総数に等しい」

定理5.1

- $y > 0$のとき、すべての$z(1 \leq z \leq x)$に対して$S_z > 0$を満たす経路で、点$R(x, y)$にたどり着くものの個数は$\frac{y}{x}L(x, y)$
- 証明
  - $S_0 = 0$であるから、$S_1 = 1$。点$Q(1,1)$と$R(x, y)$を結ぶ経路のうち、x軸と共有点を持つ経路の個数は、鏡像の原理により、点$(1, -1)$と点$R(x, y)$を結ぶ経路の個数に等しい。よって、共有点を持たない経路の個数は
    - $L(x-1, y-1) - L(x-1, y+1) = {}_{x-1}C_{\frac{x-y}{2}} - {}_{x-1}C_{\frac{x-y-2}{2}} = \frac{y}{x}L\ (x, y)$

定理5.2

- 原点$O(0,0)$と点$P(2n,0)$を結ぶ経路が計算できる
  - $N_{2n} = \frac{1}{n+1} {}_{2n}C_n$
  - このとき点O, Pを結ぶ経路の数は
    - $S_1 > 0, S_2 > 0, \cdots, S_{2n-1} > 0$の場合、$N_{2n-2} = \frac{1}{n} {}_{2n-2}C_{n-1}$
    - $S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, \cdots S_{2n-1} \geq 0$の場合、$N_{2n}$
  - 証明
    - 原点から出発して、常に正で、点$P(2n-1,1)$を通る。よって
      - $\frac{1}{2n-1} L(2n-1,1) = \frac{1}{n} {}_{2n-2}C_{n-1} = N_{2n-2}$
    - x座標をy方向に-1した座標系を考えると、上と一致するので、N_{2n}

原点への再帰

- 原点への再帰
  - 0にいくこと
- 最初の原点への再帰
  - 最初のステップから値が正or負を続けた後、初めて0につくこと
- 最初の$r > 0$への到達
  - ステップ1からrより小さい値を続けた後、初めてrとなること

- u_n : $2n$ステップで原点に再帰する確率。それまでに何回でも原点に再帰してもよい。
  - $P(\{S_{2n} = 0\}) = u_{2n}$
  - $u_{2n} = 2^{-2n}{}_{2n}C_n = \frac{n+1}{2^{2n}} N_{2n}, u_0 = 1$
- f_{2n} : $2n$ステップで初めて原点に再帰する確率
  - $f_{2n} = P(\{S_1 \neq 0, \cdots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0\})$
  - $f_{2n} = \frac{1}{2n} u_{2n-2} = \frac{1}{2^{2n-1}} N_{2n-2}, \mathrm{f}_0 = 0$
  - 定理5.2よりずっと正値がN_{2n-2}通り、ずっと負も同じ。したがって、$f_{2n} = 2N_{2n-2}2^{-2n}$
- したがって、
  - $f_{2n} = u_{2n-2} - u_{2n}$

補題5.1

- 1度も原点に再帰しない確率
  - $P(\{S_1 \neq 0, \cdots, S_{2n} \neq 0\}) = u_{2n}$
- 値が常に非負である確率
  - $P(\{S_1 \geq 0, \cdots, S_{2n} \geq 0\}) = u_{2n}$
- $2n - 1$ステップで初めて負となる確率
  - $P(\{S_1 \geq 0, \cdots, S_{2n-2} = 0, S_{2n-1} < 0\}) = f_{2n}$

補題5.2

- $u_{2n} = \sum_{r=1}^{n} f_{2r} u_{2n-2r}$

- 証明
  - u_{2n}は$2r$回の施行で初めて原点に再帰し、残りの$2n-2r$回で再び原点に再帰する確率の総和

定理5.3

- 0からコイン投げをはじめ、$2n$ステップ行った後、所持金が$2k$区間で正で、$2n-2k$区間で負である確率を$p_{2k,2n}$とする。このとき
  - $p_{2k,2n} = u_{2k}u_{2n-2k}\ (0 \leq k \leq n)$

- $\frac{k}{n}$は区間で正である割合で、$\frac{1}{2}$に近いと思われるが、実際は$k = 0, n$で最大となる
- $n \to \infty$の極限で、分布関数に対してアークサインであらわされる表現が得られていて、第一アークサイン公式を呼ばれる

証明

- $k=0,n$については成立
  - $P(S_1 \geq 0, \cdots, S_{2n} \geq 0) = u_{2n}$よりok
- 経路の分類
  - $1 \leq k \leq n-1$については、区間は必ずx軸を通過する。
    - X軸を通過するまで正で、$2r$で初めてx軸を通過し、そのあと$2n-2r$の間で$2k-2r$だけ正
      - $\frac{1}{2} f_{2r} p_{2k-2r,2n-2r}$
    - X軸を通過するまで負で、2rで初めてx軸に触り、そのあと$2n-2r$の間で$2k$だけ正
      - $\frac{1}{2} f_{2r} p_{2k,2n-2r}$
    - rに関する和をとって $\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k} f_{2r} p_{2k-2r,2n-2r} + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n-k} f_{2r} p_{2k,2n-2r}$
- 帰納法の仮定より
  - $p_{2k-2r,2n-2r} = u_{2k-2r} u_{2n-2k}, p_{2k,2n-2r} = u_{2k} u_{2n-2k-2r}$
- よって
  - $\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k} f_{2r} u_{2k-2r} u_{2n-2k} + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n-k} f_{2r} u_{2k} u_{2n-2k-2r}$
  - $= \frac{1}{2} u_{2n-2k} \sum_{r=1}^{k} f_{2r} u_{2k-2r} + \frac{1}{2} u_{2k} \sum_{r=1}^{n-k} f_{2r} u_{2n-2k-2r} = \frac{1}{2} u_{2n-2k} u_{2k} + \frac{1}{2} u_{2k} u_{2n-2k} = u_{2k} u_{2n-2k}$

定理5.4

- $2n$ステップのコイン投げを行う。与えられた$\alpha > 0$に対して、原点に再帰する回数が$\alpha\sqrt{2n}$よりも少ない確率は
  - $f(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\alpha} e^{-\frac{s^2}{2}} ds$

- 大まかにいえば、原点に再帰する場合の数は、平均的にコイン投げ回数の約$\frac{1}{\sqrt{n}}$であり、非常に少ない

証明

- $u_{2n} = 2^{-2n}{}_{2n}C_n$
- $n \to \infty$のとき、
  - $u_{2n} = \frac{1}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{n!n!} \approx \frac{1}{2^{2n}}\frac{\sqrt{2\pi 2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$
  - $p_{2k,2n} = u_{2k}u_{2n-2k} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi k}}\frac{1}{\sqrt{\pi(n-k)}} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$
- $\frac{1}{2} < \alpha < 1$として、長さが$2n$の経路全体で、正側にある区間の個数$2k$が$\frac{2k}{2n} < \alpha$となる場合の数は
  - $\sum_{k=0}^{n\alpha} p_{2k,2n} \approx \sum_{k=0}^{n\alpha}\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n\alpha}\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}} \approx \frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\alpha}$
  - ※スターリングの公式: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

非対称ランダムウォーク

- 確率の定義
  - $\lambda_n = P(\{S_1 \leq 0, \cdots S_{n-1} \leq 0, S_n = 1\}), \lambda_0 = 0$
- 一般の$y > 0$に対して
  - $\lambda_n^{(y)} = P(\{S_1 < y, \cdots, S_{n-1} < y, S_n = y\}), \lambda_n^{(1)} = \lambda_n$

- $\lambda_n^{(2)}$を計算する。最初のrステップで初めて1に到達し、その後のn-rステップで2に到達するとする。この確率は$\lambda_r \lambda_{n-r}$で、rに対して和をとって
  - $\lambda_n^{(2)} = \lambda_1 \lambda_{n-1} + \lambda_2 \lambda_{n-2} + \cdots + \lambda_{n-1} \lambda_1$
- $\lambda_0 = 0$を考慮すると
  - $\left\{\lambda_n^{(2)}\right\} = \{\lambda_n\} * \{\lambda_n\}$
- これを繰り返すと、$\left\{\lambda_n^{(y)}\right\}$は
  - $\left\{\lambda_n^{(y)}\right\} = \{\lambda_n\} * \{\lambda_n\} * \cdots * \{\lambda_n\}$ (y個)
- よって、$\{\lambda_n\}$の母関数を$\lambda(s)$、$\left\{\lambda_n^{(y)}\right\}$の母関数を$\lambda^{(y)}(s)$とおくと
  - $\lambda^{(y)}(s) = \lambda(s)^y$

母関数の導出

- 第一ステップで1になれば、最初の$y=1$への到達は第一ステップで発生。もし、第一ステップで-1にいけば、次のステップからの積算で2増加しないと1に届かないので(かつ最初に1にいくとλ_1になるのでλ_nは最初のステップはマイナス)
  - $\lambda_1 = p, \lambda_n = q\lambda_{n-1}^{(2)}$
- 母関数においては
  - $\lambda(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \lambda_n = s\lambda_1 + \sum_{n=2}^{\infty} s^n q\lambda_{n-1}^{(2)} = sp + sq\lambda^{(2)}(s)$
  - $= ps + qs\lambda(s)^2$
  - $\lambda(s) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4pqs^2}}{2qs}$
- $\lambda(0) = \lambda_0 = 0$を満たすのは$\lambda(s) = \frac{1-\sqrt{1-4pqs^2}}{2qs}$

性質

- 二項展開をすると
  - $\lambda_{2m-1} = \frac{1}{2q_{\frac{1}{2}}} C_m (4pq)^m (-1)^{m-1}, \lambda_{2m} = 0$
- となる。また、
  - $\lambda(1) = \frac{1-|p-q|}{2q}$
  - つまり、$p \geq q$なら$\lambda(1) = 1$, $p < q$なら$\lambda(1) = \frac{p}{q} < 1$
  - $\lambda(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$は無限に試行を繰り返し、最終的に一度でもプラスになる確率
- $p = q$のときも確率は1だが、その時間は無限大
  - $E[n] = \sum_{k=1}^{\infty} k\lambda_k = \lambda'(1) = \lim_{p \to q} \frac{1}{2q}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4pq}} - 1\right)$

最初の原点への再帰の確率

- $P(\{S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \cdots, S_{n-1} \neq 0, S_n = 0\}) = f_n, f_0 = 0$
- と定義する。
- $\lambda_n^{(y)}$を$y = -1$へも拡張して定義。すると、$\lambda_n^{(-1)}$は$\lambda_n^{(1)} = \lambda_n$を与える式で$p, q$を入れ替えたものである。
- Nステップで初めての原点への再帰は、n-1ステップでの1 or -1にいることを示していて、
  - $f_n = q\lambda_{n-1} + p\lambda_{n-1}^{(-1)}$
  - ※-1ステップを考え,y軸を上に１だけ平行移動して下がった場合、0から1に初めて行く確率に等しいので、$q\lambda_{n-1}$。逆の場合は$p\lambda_{n-1}^{(-1)}$となる
- $\left\{\lambda_n^{(-1)}\right\}$の母関数は$\{\lambda_n\}$の$p, q$をひっくり返したものなので
  - $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n s^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(q\lambda_{n-1} + p\lambda_{n-1}^{(-1)}\right) s^n = 0 + s\sum_{n=1}^{\infty} \left(q\lambda_{n-1} s^{n-1} + p\lambda_{n-1}^{(-1)} s^{n-1}\right)$
  - $= sq\left(\frac{1-\sqrt{1-4pqs^2}}{2qs}\right) + sp\left(\frac{1-\sqrt{1-4pqs^2}}{2ps}\right) = 1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}$
- よって
  - $F(1) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n = 1 - |p - q|$
  - これはいつかは再帰する確率で、$p = q = \frac{1}{2}$のとき1となる。しかし
  - $F'(1) = \frac{4pq}{\sqrt{1-4pq}}$より、原点への回帰に必要なステップ数は無限大

母関数

- 負でない整数値をとる確率変数をXとし、
  - $p_k = P(\{X = k\}), \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$
- Xの母関数$G(s)$を
  - $G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k \ \ (|s| \leq 1)$
- で定義する。$-1 \leq s \leq 1$で収束。また
  - $G(1) = 1, G'(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = E[X]$
  - $G''(1) = \sum_{k}^{\infty} k(k-1) p_k = E[X^2] - E[X]$

合成積

- 負でない整数値をとる二つの互いに独立な確率変数をX, Yとし
  - $p_k = P(\{X = k\}), q_k = P(\{Y = k\})$
- 確率変数の和$Z = X + Y$の確率分布は
  - $u_k = P(\{Z = k\})$
- とすると、明らかに
  - $u_k = p_0 q_k + p_1 q_{k-1} + \cdots + p_{k-1} q_1 + p_k q_0$
- 上式で作られる新しい数列$\{u_k\}$を、数列$\{p_k\}, \{q_k\}$の合成積と呼び
  - $\{u_k\} = \{p_k\} * \{q_k\}$
- とかく。Zの母関数は
  - $G_Z(s) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{k} p_s q_{k-s} \, s^k = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} p_s q_{l+s-s} s^{l+s} = G_X(s) G_Y(s)$

確率変数の和の合成積

- $X_i (1 \leq i \leq n)$を同じ確率分布を持つ負でない整数値をとる確率変数として
  - $p_k = P(\{X_i = k\})(1 \leq i \leq n)$
- とおくと、X_iの和$Z_n = X_1 + \cdots + X_n$の期待値を
  - $u_k^{(n)} = P(\{Z_n = k\})$
- とおくと、これまでの議論より
  - $\left\{u_k^{(n)}\right\} = \{p_k\} * \{p_k\} * \cdots * \{p_k\} = \{p_k\}^{n*}$
- となる。母関数は
  - $G_z(s) = G_X(s)^n$

母関数の例

- 二項分布$B(n,p)$の母関数
  - $G(s)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k=\sum_{k=0}^{n} (n,k) p^k q^{n-k} s^k=(ps+q)^n$
- ポアソン分布の母関数
  - $G(s)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k=\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} s^k=e^{-\lambda}e^{\lambda s}$

加法過程

- 連続的な時間に対して変化する確率過程で、確率変数の増分が常に互いに独立な過程を「加法過程」
- 加法過程の中でほとんど確実に連続な過程を「ガウス型加法過程」
- 確率変数ωのほとんどすべての値(確率測度0の集合を除いて)に対して、確率過程の標本過程$X(t, \omega)$が連続、微分可能、可測であるとき、それぞれ、標本過程がほとんど確実に(確率1で)連続、微分可能、可測であるという

定義6.1 確率連続

- $X(t,\omega)$が$t=t_0$で確率連続であるとは、任意の$\varepsilon>0$に対して
  - $\lim_{t\to t_0} P(\{|X(t,\omega)-X(t_0,\omega)|>\varepsilon\})=0$
- であることを意味する。この収束は、確率収束である。
- また、tのすべての値に対して確率連続であるとき、$X(t,\omega)$は確率連続であるという

- 定理6.1
  - $X(t,\omega)$が開区間(a,b)で確率連続なら、(a,b)に含まれる任意の閉区間$[\alpha,\beta]$で一様確率連続

加法過程/独立加法過程

- 区間(a, b)で定義された確率過程$X(t, \omega)$において
  - $a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < b$
- となる任意の$\{t_k\}$に対して
  - $X(t_k, \omega) - X(t_{k-1}, \omega)\ (k = 2,3, \cdots, n)$
- が互いに独立であるとき、$X(t, \omega)$は加法過程あるいは独立加法過程
- 確率連続性は仮定しない

ウィーナー過程

- 標本過程がほとんど確実に連続であるような加法過程をガウス型加法過程
  - 代表的なものとして、ウィーナー過程
- ガウス型加法過程は、確率連続

- 定理6.2
  - 独立変数系$X_{nk}(t,\omega)(k=1,2,\cdots,p(n),n=1,2,\cdots)$と正数列$\{\varepsilon_n\}$が与えられていて、$n\to\infty$のとき$p(n)\to\infty,\varepsilon_n\to 0$であるとし
    - $X_{n1},X_{n2},\cdots,X_{np(n)}$は独立
    - $|X_{n1}|,|X_{n2}|,\cdots,|X_{np(n)}|<\varepsilon_n$
  - と仮定する。次に、$X_n=X_{n1}+X_{n2}+\cdots+X_{np(n)}$と定義し、$n\to\infty$の極限を
    - $X_n\to X\ (a.e.)$
  - とおくと、Xが存在し、正規分布に従う
- ※この定理は、分散の大きさを考えなくても、それぞれの確率変数の絶対値が小さければ、中心極限定理が成りたつことを示す

- 定理6.3
  - $X(t,\omega)$が開区間$[a,b]$でガウス型加法過程なら、関数$m(t)$、単調増加関数$v(t)$が存在して、$X(t)-X(s)\ (t>s)$が正規分布$N\big(m(t)-m(s), v(t)-v(s)\big)$に従う
- 定義6.2
  - 確率過程$X(t,\omega)$が時間的に一様であるとは、$X(t+\tau)-X(t)$の分布がτのみに依存し、tに依存しないこと
- 定理6.4
  - $X(t,\omega)$が時間的に一様なガウス型加法過程なら、m_1, v_1を定数として、
    - $m(t)=m_1 t, v(t)=v_1 t$
  - ととれる
- ※$m_1=0, v_1=1$の場合をウィーナー過程、またはブラウン運動という

ウィーナー過程をベルヌーイ試行から導出

- ベルヌーイ試行で$p = q = \frac{1}{2}$,事象Aを$X_n = a$, 事象Bを$X_n = -a$とすると、$E[X_n] = 0$。$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$とおくと、$V[X_i] = a^2$より
  - $V[S_n] = V[X_1] + \cdots + V[X_n] = na^2$
- n回目の施行に対して時刻$s = n\Delta$を対応させ、S_nを$X(s)$に対応させせる。$t = m\Delta$とすると
  - $X(t) - X(s) \rightarrow S_{m,n} = X_{n+1} + X_{n+2} + \cdots + X_m$
- すると、$E\left[S_{m,n}\right] = 0, V\left[S_{m,n}\right] = (m-n)a^2$
- よって、$a = \sqrt{\Delta}$とすると、$V\left[S_{m,n}\right] = (m-n)\Delta = \mathrm{t} - \mathrm{s}$
- となって、ウィーナー過程に対応し、$\Delta \rightarrow 0$の極限で、S_nはウィーナー過程に収束。
- 1ステップでの変化量は$\sqrt{\Delta}$であるが、時速としては$\frac{\sqrt{\Delta}}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}$となって$\Delta \rightarrow 0$の極限で無限大。
- これから想像できるように、ウィーナー過程は至る所で微分係数が無限大となるような、大変変化の激しい関数である

ウィーナー過程の微分

- $W(t,\omega)$は微分不可能
  - 1961年角谷静夫らによって証明された
- 直感的な理解
  - 微分が存在したら$W'(t,\omega) = \lim_{t\to s} \frac{W(t)-W(s)}{t-s}$
  - $E\left[\frac{\{W(t)-W(s)\}^2}{(t-s)^2}\right] = \frac{1}{(t-s)^2} v_1(t-s) = \frac{1}{t-s}$
  - $\lim_{t\to\infty} E\left[\frac{\{W(t)-W(s)\}^2}{(t-s)^2}\right] = \infty$

ウィーナー過程の1次,2次変動

- ウィーナー過程の2次変動は
  - $E[\{W(t)-W(s)\}^2]=t-s$
- となるので有界であるが、1次変動は有界ではない
  - $f(x)$が区間$[a,b]$で有界変動関数であるとは、$[a,b]$の任意の分割
    - $a=t_0^n<t_1^n<\cdots<t_n^n=b$
  - に対して
    - $V_1=\sum_{k=1}^n|f(t_k^n)-f(t_{k-1}^n)|<\infty$
  - となることを意味する。ウィーナー過程では
    - $b-a=E[\sum_{k=1}^n|W(t_k^n,\omega)-W(t_{k-1}^n,\omega)|^2]$
    - $\leq E[\max_k|W(t_k^n,\omega)-W(t_{k-1}^n,\omega)|\sum_{k=1}^n|W(t_k^n,\omega)-W(t_{k-1}^n,\omega)|]$
  - Maxの項が0に収束するので、和のほうが発散する必要がある
- この結果は、ウィーナー過程の汎関数を、ウィーナー過程によるスティルチェス型の積分を行うことが簡単ではないことを示している.一方で、分布関数は右連続単調増加関数であるから、スティルチェス積分は問題なく実行できる。この問題を、伊藤清はいわゆる伊藤積分によって解決した

定義6.3 ウィーナー積分

- 関数$f(t)$の$W(t,\omega)$による積分$I(f)$をウィーナー積分と呼び
  - $I(f)=\int_a^b f(t)dW(t,\omega)=\lim_{n\to\infty} I_n(f)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f(t_{k-1}^n)\left(W(t_k^n)-W(t_{k-1}^n)\right)$
- ここで、$[a,b]$の任意の分割を
  - $a=t_0^n<t_1^n<\cdots<t_n^n=b$
- とし、極限は$\max_k|t_k^n-t_{k-1}^n|\to 0$を意味する

- ※関数$f(t)$の値は小区間の左端で定義されているが、ウィーナー積分では、小区間のどの位置をとっても結果は変化しない。しかし、ウィーナー過程の汎関数の積分では、どの場所でとるかで変化する

性質

- $E[I_n(f)] = 0, V[I_n(f)] = \sum_{k=1}^{n}[f(t_{k-1})]^2(t_k^n - t_{k-1}^n)$
- $n \to \infty$で
  - $E[I(f)] = 0, V[I(f)] = \|f\|^2 = \int_a^b f(t)^2 dt$
- つまり、$I(f)$は$N(0, \|f\|^2)$に従う

ウィーナー積分を利用したフーリエ級数

- $f(t), W(t,\omega)$が区間$[0,\pi]$で定義されている。このとき、ウィーナー積分
  - $X = \int_0^\pi f(t)dW(t)$
- で表される任意の確率過程を、ウィーナー積分を利用してフーリエ級数に展開することができる。完全直工系を
  - $\phi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \phi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nt\ \ (n = 1,2,\cdots)$
- とし、$X_n = \int_0^\pi \phi_n(t)dW(t)$ とする。$\mathrm{X_n}$は正規分布で$N(0,1)$に従う。$f(t)$ をフーリエ級数に展開すると$f(t) = \sum_{n=0}^\infty a_n\phi_n(t)$ とおくと、
  - $X = \sum_{n=0}^\infty a_n X_n$が成り立つ。例えば、
  - $f(s) = \begin{cases} 1\ (0 \le s \le t) \\ 0\ (t < s \le \pi) \end{cases}$
- とすると
  - $\int_0^\pi f(s)dW(s) = W(t) - W(0) = W(t)$
- で、
  - $a_0 = \frac{t}{\sqrt{\pi}}, a_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\sin nt}{n}$
- より、$\mathrm{W}(t) = \frac{t}{\sqrt{\pi}}X_0 + \sum_{n=1}^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin nt}{n}X_n$と書ける。形式的に微分すると
  - $W'(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}X_0 + \sum_{n=1}^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nt\ \ X_n$
- となり、すべてのフーリエモードが均等に寄与するホワイトノイズとのある。これを確率超過程と呼ぶ

伊藤積分

- ウィーナー過程$W(t)$の汎関数の、ウィーナー過程による積分を計算するためには大きな問題点がある。ウィーナー過程の性質から、通常のスティルチェス積分としては一意的に定義できない。そこで、いくつか定義が存在するが、現在もっとも使われているのは伊藤清によって導入された伊藤積分
- 定義6.4 伊藤積分
  - $f(W(t), t)$を$W(t, \omega)$の汎関数。fの伊藤積分は、区間$[a, b]$の任意の分割を$a = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_n^n = b$としたときに、$\max_k |t_k^n - t_{k-1}^n| \to 0$の極限で以下のように定義される
    - $I_I(f) = \int_{aI}^{b} f(W(t, \omega), t)dW(t) = \lim_{n\to\infty} I_{In}(f)$
    - $= \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(W(t_{k-1}^n), t_{k-1}^n)\big(W(t_k^n) - W(t_{k-1}^n)\big)$
  - 収束は、平均二乗収束の意味とする

性質とストラトノビッチ積分

- 一般に
  - $E[I_I(f)] = 0$
- また、積分を
  - $I_S(f) = \int_{aS}^{b} f(W(t,\omega),t)dW\ (t) = \lim_{n\to\infty} I_{Sn}(f)$
  - $= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(W\left(\frac{t_{k-1}+t_k}{2}\right),\frac{t_{k-1}+t_k}{2}\right)[W(t_k^n) - W(t_{k-1}^n)]$
- で定義すると
  - $\int_{aS}^{b} W(t)dW(t) = \frac{1}{2}W(b)^2 - \frac{1}{2}W(a)^2$
- となり、ストラトノビッチ積分と呼ぶ。
- ※伊藤積分との違いは、伊藤積分ではウィーナー過程の性質によって定積分の期待値が常に0となるが、ストラトノビッチ積分はそうはならない。
- ストラトノビッチ積分があまり用いられない理由は、伊藤積分がマルチンゲールと親和性が高いから