曲線と曲面の微分幾何
(改訂版)
小林　昭七
裳華房

QD 部

小松原　航

2022/12/16

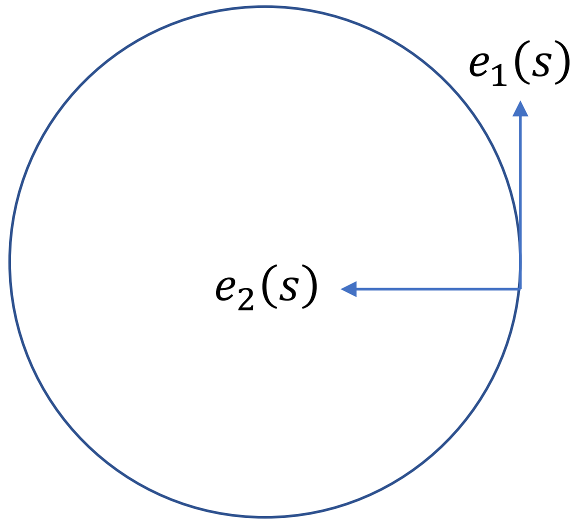
1. 平面上の曲線、空間内の曲線

§2 平面曲線

- $p = \big(x(t), y(t)\big)$
- 曲線$p(t)$の距離を$s = \int_0^t |\dot{p}(u)| du,\ \dot{s}(t) = |\dot{p}(t)|$
- すべてのtに対して$\dot{p}(t) \neq 0$ならば$|\dot{p}(t)| > 0$よりsはtの単調増加関数となり、$t = t(s)$と書ける。
- $p = p(s) = \big(x(s), y(s)\big)$
- $p' = p'(s) = \big(x'(s), y'(s)\big)$: sに関する微分は'で表す。
  - $|p'(s)| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,\frac{dt}{ds} = \frac{ds}{dt}\frac{dt}{ds} = 1$
- $e_1 = p'$ととり、e_2はe_1に対して左の方向を向いているとする。

例2.1 円

- $x(t) = r\cos t\,, y(t) = r\sin t$
- $s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}dt = rt$より
- $x(s) = r\cos\frac{s}{r}, y(s) = r\sin\frac{s}{r}$
- $e_1(s) = \left(-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r}\right)$
- $e_2(s) = \left(-\cos\frac{s}{r}, -\sin\frac{s}{r}\right)$
- $e_1'(s) = \left(-\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}, -\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}\right) = \frac{1}{r}e_2(s)$
- $e_2'(s) = \left(\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}, -\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}\right) = -\frac{1}{r}e_1(s)$

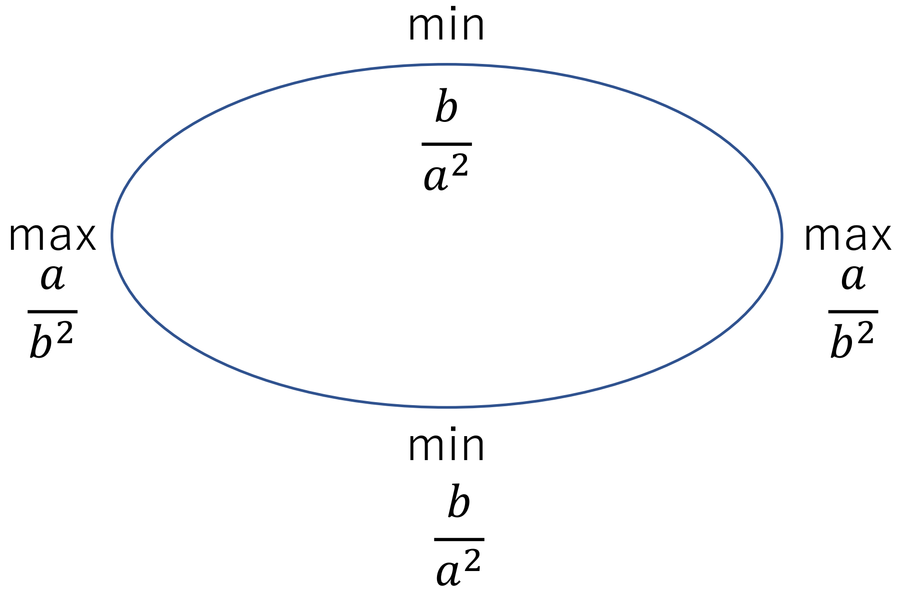


Curvature (曲率)

- $p' = e_1, e_1 \cdot e_1 = 1, e_2 \cdot e_2 = 1, e_1 \cdot e_2 = 0$
- $e_1 \cdot e_1 = 1$を微分して$2e_1 \cdot e_1' = 0$。したがって、e_1'はe_1と直交する。したがって、
  - $e_1'(s) = \kappa(s) e_2(s)$
- また、$e_1 \cdot e_2 = 0$を微分して
  - $e_1' \cdot e_2 + e_1 \cdot e_2' = 0$
  - $\kappa + e_1 \cdot e_2' = 0$。よって、$e_2' = -\kappa e_1$
- まとめると
  - $e_1'(s) = \kappa(s) e_2(s)$
  - $e_2'(s) = -\kappa(s) e_1(s)$
- この$\kappa(s)$を曲線$p(s)$の曲率
- 円の場合は$\kappa(s) = \frac{1}{r}$
- 定理2.1
  - 曲線$p(s)$の曲率が恒等的に0になるのは、$p(s)$が直線の時で、その時に限る。
- 定理2.2
  - 平面上の2曲線$p(s), \bar{p}(s)$の曲率$\kappa(s), \bar{\kappa}(s)$が一致するための必要十分条件は、回転と平行移動を使って$p(s)$を$\bar{p}(s)$に重ねることができることである。

例2.2 楕円

- $x(t) = a\cos t\,, y(t) = b\sin t$
- $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$
- $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}(-a\sin t, b\cos t)$
- $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}(-b\cos t\,, -a\sin t)$
- $\kappa(t) = \dfrac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$

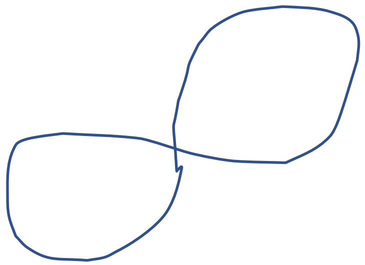


曲率の一般式

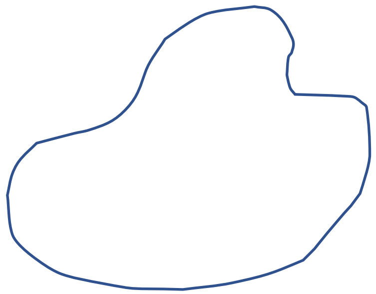
- $\kappa(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$
- 極座標表示の時
  - $\kappa = \frac{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$

§3 平面曲線に関する大域的定理

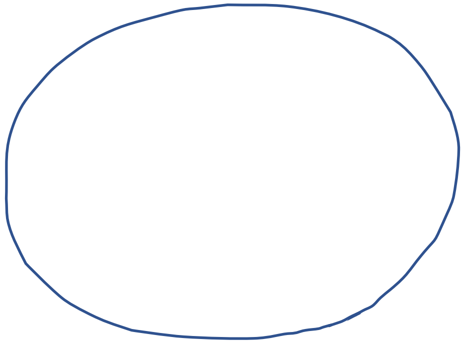
- 曲率$\kappa(s)$は、その点のごく近傍における関数の様子で決まるので、局所的性質と呼ばれる。
- 曲線全体に関した大域的性質
  - 曲線が閉じていると、コンパクトだから、曲率が最大・最小になる点が存在する。
  - 曲率を曲線上で積分できる
  - 閉曲線がある点の周りを何回回っているか
- 平面曲線$p(s)(a \leq s \leq b)$で始点$p(a)$と終点$p(b)$が一致するとき、閉曲線(closed curve)
- a, b以外のパラメーター値s_1, s_2に対して$p(s_1) = p(s_2)$となることがないときには単純閉曲線(simple closed curve)
  - Jordanの定理・・・単純閉曲線は平面を2つの領域(外部と内部)に分ける
  - 「このようにいったい何を証明しなければならないのかわからない定理は一部の職業的数学者に任せればよいので」
- 卵形線(oval), 凸閉曲線 (convex closed curve)
  - 単純閉曲線上のどの二点を結ぶ線分も曲線の外部に飛び出さない



閉曲線、ただし単純閉曲線でない



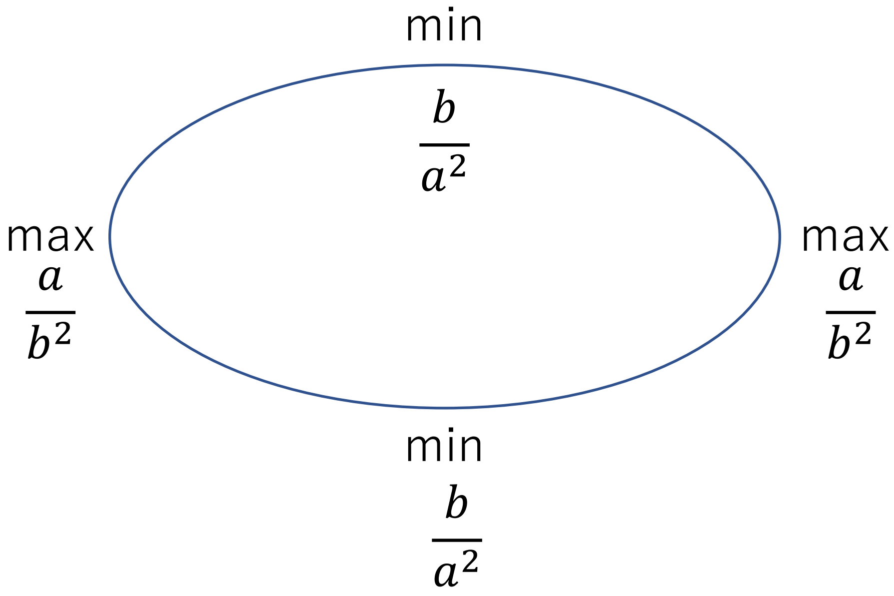
凸でない単純閉曲線



卵形線

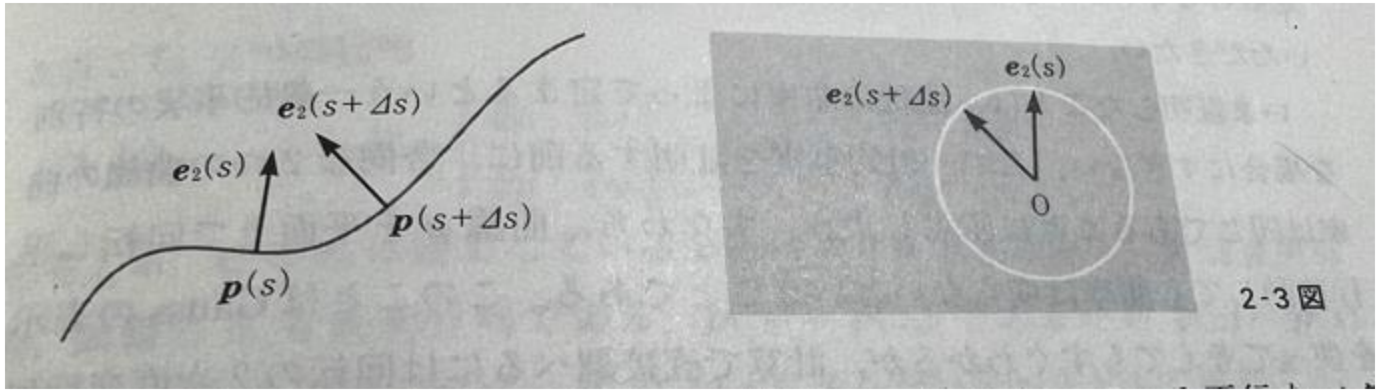
定理3.1 (四頂点定理, Mukhopadhyaya)

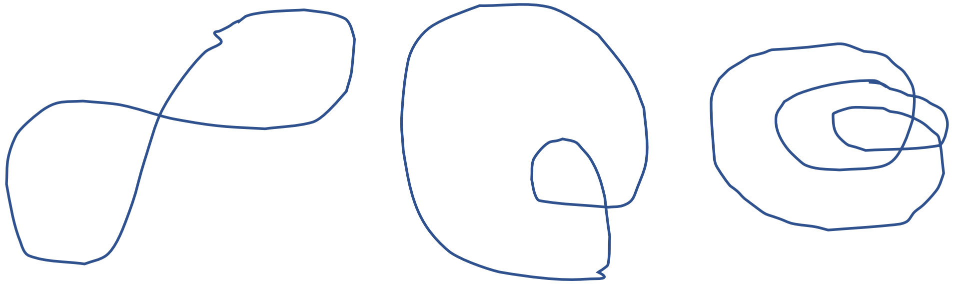
- 卵形線上には少なくとも4つ頂点がある。
  - 頂点・・・$\kappa'(s) = 0$となる点



回転数

- 閉曲線$p(s)(a \leq s \leq b)$の曲率をκとすると
  - $m = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \kappa(s)ds$
- は常に整数となる。
- $e_2(s + \Delta s) = e_2\ (s) + e_2'(s)\Delta s = e_2(s) - \kappa(s)e_1(s)\Delta s + \cdots$
- 距離$\kappa(s)\Delta s$だけ$-e_1(s)$の方向へ動く。
- よって、曲率の積分は、単位円周上を$e_2(s)$が何回回ったかを表すため、回転数と呼ぶ。



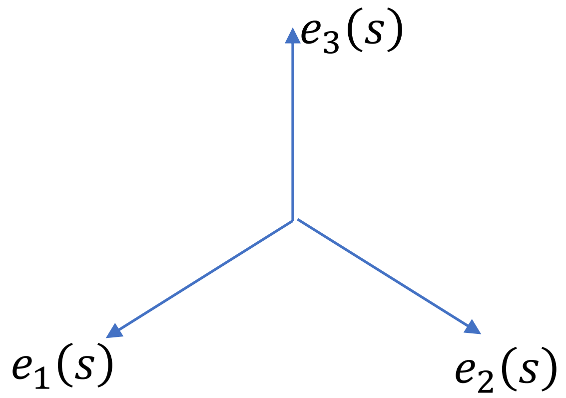


$m = 0$　　$m = 2$　　$m = 3$

全曲率(total curvature)

- $\mu = \int_a^b |\kappa(s)| ds$
- Fenchelの定理の特別な場合
  - 閉曲線$p(s)$の全曲率μに対し、$\mu \geq 2\pi$という不等式が成り立ち、等式$\mu = 2\pi$が成り立つのは、$p(s)$が卵形線の時に限る。

§4 空間曲線



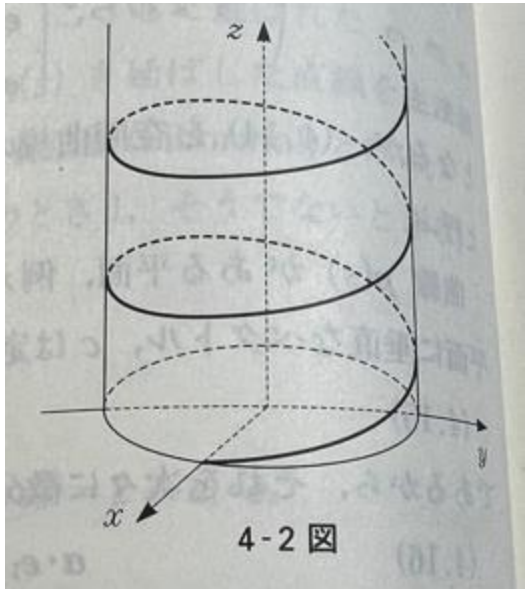
- $p(s) = \big(x(s), y(s), z(s)\big)$
- 曲線$p(s)$によって表される運動の速さは一定で1になるようにパラメータが取ってあるとする。
- $e_1(s) = p'(s) = \big(x'(s), y'(s), z'(s)\big)$
- $e_1(s) \cdot e_1(s) = 1$より、微分して$e_1(s) \cdot e_1'(s) = 0$
- $e_1'(s)$の長さを$\kappa(s)$と書き、曲線$p(s)$の曲率と呼ぶ。
  - $\kappa(s) = \sqrt{e_1'(s) \cdot e_1'(s)}$
- 空間曲線の場合は、$e_1(s)$に直交する単位ベクトルは無限になるので、以下のように定義する。
  - $e_1'(s) = \kappa(s) e_2(s) \Leftrightarrow e_2(s) = \frac{1}{\kappa(s)} e_1'(s)$
  - 以下、$\kappa(s) > 0$と仮定する
- $e_3 = e_1 \times e_2$で定義する。Frenetの標構(Frenet frame)
  - e_2を延ばした直線を主法線(principal normal), $e_3(s)$を延ばした直線を従法線(binormal)と呼ぶ。

Frenet-Serretの公式、捩率(torsion)

- $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$を微分していくと(詳細は省略)
  - $p' = e_1$
  - $e_1' = \kappa e_2$
  - $e_2' = -\kappa e_1 + \tau e_3$
  - $e_3' = -\tau e_2$
- 定理4.1
  - 空間曲線$p(s)$の曲率κが常に正であるとすると、捩率τがいたるところ0になるのは、$p(s)$が一つの平面に含まれているとき、そしてその時に限る。
- 定理4.2
  - 空間内の2曲線$p(s), \bar{p}(s)$の曲率、捩率をそれぞれ$k(s), \tau(s), \bar{\kappa}(s), \bar{\tau}(s)$とすると、$\kappa = \bar{\kappa}$かつ$\tau(s) = \bar{\tau}(s)$になるための必要十分条件は、回転と平行移動を使って$p(s), \bar{p}(s)$を重ねることができることである。
- 1次元からのはみだし具合が曲率で2次元からのはみだし具合が捩率?

例4.1 常螺旋(helix)

- $x = a\cos t\,, y = a\sin t\,, z = bt$
- $s = \sqrt{a^2+b^2}t$
- $e_1 = \left(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c}\right)\ (c = \sqrt{a^2+b^2})$
- $e'_1 = \left(-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c}, -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c}, 0\right)$
- $\kappa = \frac{a}{c^2}$
- $e_2 = \frac{1}{\kappa}e_1' = \left(-\cos\frac{s}{c}, -\sin\frac{s}{c}, 0\right)$
- $e_3 = \left(\frac{b}{c}\sin\frac{s}{c}, -\frac{b}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\right)$
- $e_2' = \left(\frac{1}{c}\sin\frac{s}{c}, -\frac{1}{c}\cos\frac{s}{c}, 0\right) = -\frac{a}{c^2}e_1 + \frac{b}{c^2}e_3$
- $\kappa = \frac{a}{a^2+b^2}, \tau = \frac{b}{a^2+b^2}$



問

- 問4.1 (Bouquetの定理)
  - 空間曲線$p(s)$を$s=0$でテイラー展開すると
  - $p(s) = p(0) + e_1(0)s + \kappa(0)e_2(0)\frac{s^2}{2} + \{-\kappa(0)^2 e_1(0) + \kappa'(0)e_2(0) + \kappa(0)\tau(0)e_3(0)\}\frac{s^3}{3!} + \cdots$
- 問4.2
  - 空間曲線$p(t)$に対し
  - $\kappa = \frac{|\dot{p}\times\ddot{p}|}{|\dot{p}|^3}, \tau = \frac{|\dot{p}\quad \ddot{p}\quad \dddot{p}|}{|\dot{p}\times\ddot{p}|^2}$

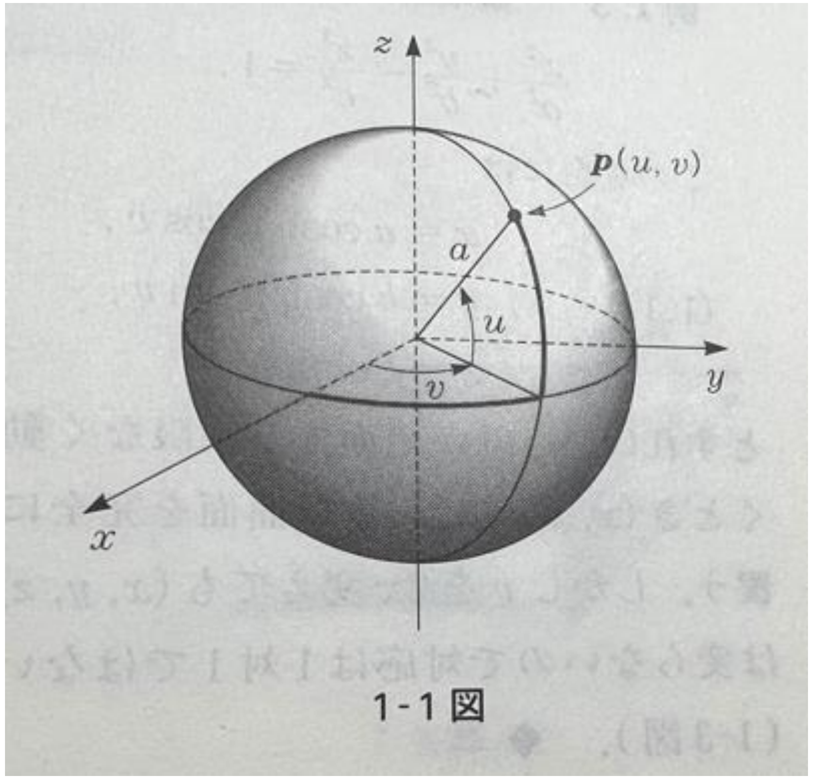
§5 空間曲線に関する大域的定理

- 定理5.1 Fenchelの定理
  - 空間内の閉曲線$p(s)(a \leq s \leq b)$の曲率を$\kappa(s)$とすると
    - $\int_a^b \kappa(s)ds \geq 2\pi$
  - かつ、等号は$p(s)$が平面に含まれた卵形線のときにだけ成り立つ。
  - 左辺を全曲率(total curvature)

- 定理5.2
  - 空間内の単純閉曲線$p(s)$が結び糸になっているならば、その全曲率は少なくとも4πである。

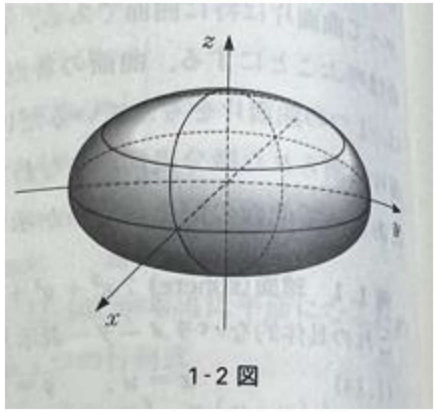
2 空間内の曲面の小域的理論
§1 空間内の曲面の概念

- 球面(sphere)
  - $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$
  - $x = a\cos u\cos v$
  - $y = a\cos u\sin v$
  - $z = a\sin u$
  - $|u| < \frac{\pi}{2}$とすると、南北両極を除いた部分を動く

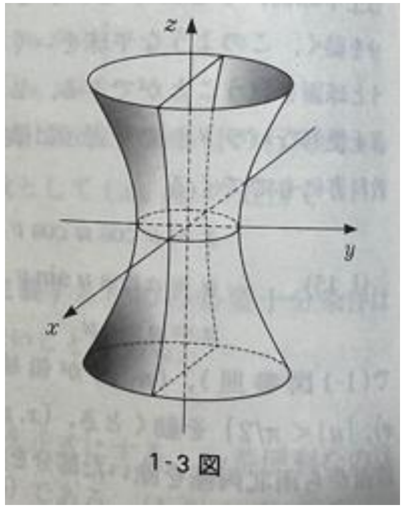


1-1 図

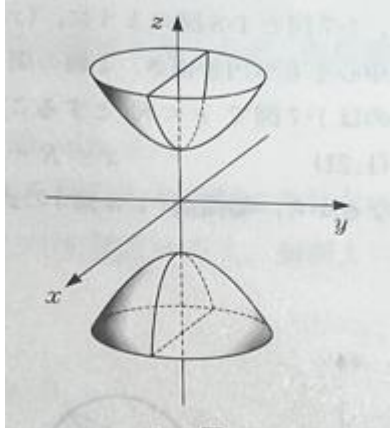
- 楕円面 (ellipsoid)
  - $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
  - $x=a\cos u\cos v$
  - $y=b\cos u\sin v$
  - $z=c\sin u$



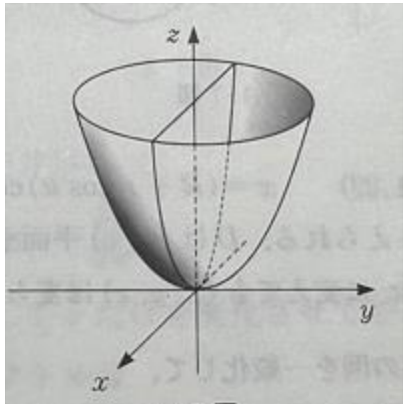
- 一葉双曲面 (hyperboloid of one sheet)
  - $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
  - $x=a\cosh u\cos v$
  - $y=b\cosh u\sin v$
  - $z=c\sinh u$
  - (u,v)が平面上を制限なく動くとき、一葉双曲面を完全に覆う。



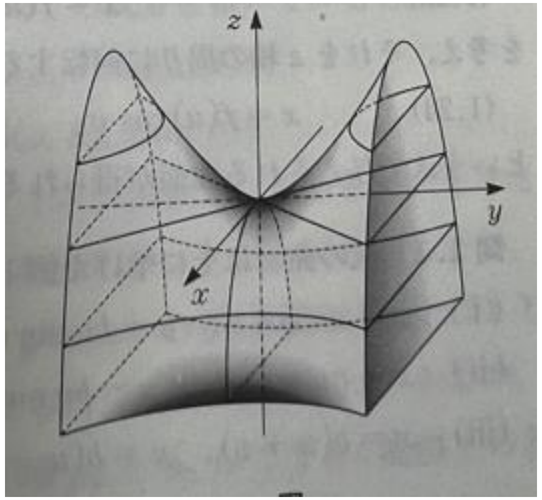
- 二葉双曲面 (hyperboloid of two sheets)
  - $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$
  - $x=a\sinh u\cos v$
  - $y=b\sinh u\sin v$
  - $z=c\cosh u$
  - $D=\{(u,v);u>0\}$とすると上半分の曲面から頂点を除いた部分を対応する。下半分が欲しいなら$z=-c\cosh u$とする。
- 楕円放物面 (elliptic paraboloid)
  - $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$
- 双曲放物面 (hyperbolic paraboloid)
  - $z=-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$



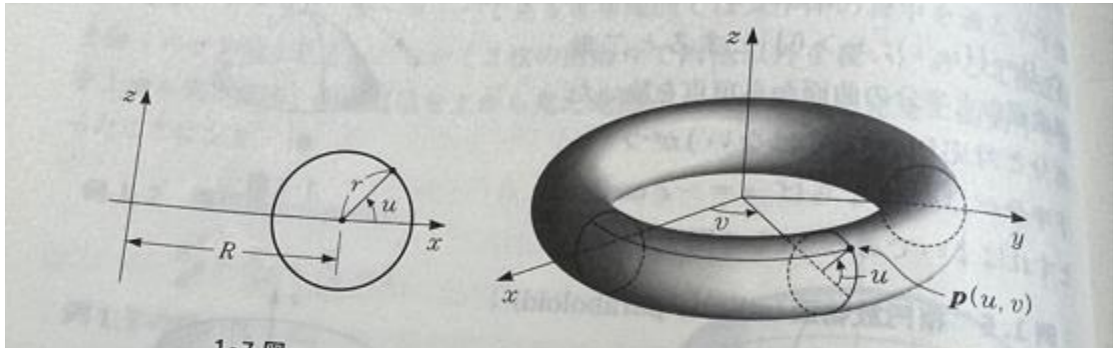
1-4 図



1-5 図

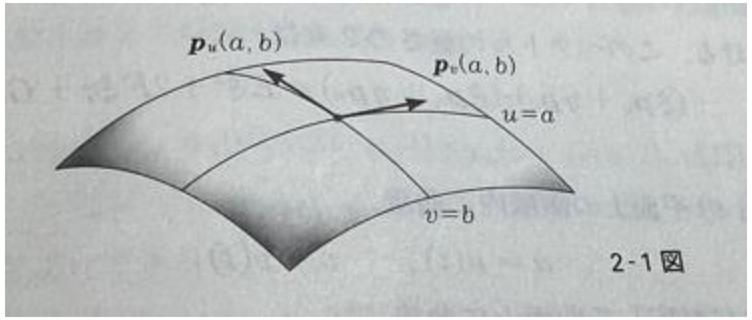


- 輪環面(torus)
  - $x = (R + r\cos u)\cos v\,, y = (R + r\cos u)\sin v\,, z = r\sin u$



1-7 図

§2 基本形式と曲率



2-1図

- $p(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$
- $E = p_u \cdot p_u, F = p_u \cdot p_v = p_v \cdot p_u, G = p_v \cdot p_v$とおく。
- p_u, p_vで張る接平面のベクトルは
  - $\xi p_u + \eta p_v$
- で書ける。長さの二乗は
  - $(\xi p_u + \eta p_v) \cdot (\xi p_u + \eta p_v) = E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2$
- また、(u,v)平面上の領域内に曲線
  - $u = u(t), v = v(t)$
- を取り、それに対応して曲面上に曲線
  - $p(t) = p(u(t), v(t))$
- を考える。この曲線の各点における接ベクトルは
  - $\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial p}{\partial v}\frac{dv}{dt} = p_u\frac{du}{dt} + p_v\frac{dv}{dt}$
- よって、長さの２乗は
  - $\frac{dp}{dt} \cdot \frac{dp}{dt} = E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$
- tが$\alpha \to \beta$まで動くときのこの曲線の長さは
  - $\int_\alpha^\beta \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt$
- このとき
  - $\mathrm{I} = Edudu + 2Fdudv + Gdvdv$
- を第一基本形式(first fundamental form)

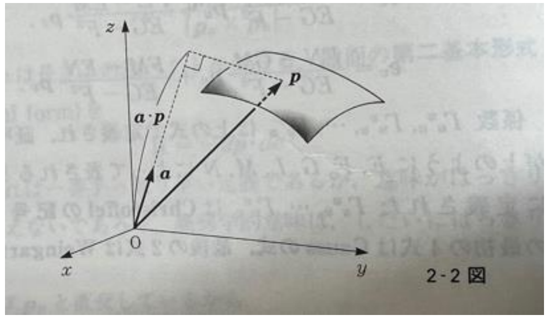
第２基本形式

- 第1基本形式は形式的に
  - $dp = p_u du + p_v dv$
  - $\mathrm{I} = dp \cdot dp$
- と書ける。
  - 「使って便利で正しい結果が出てくる概念、記号、式などは当初曖昧な点があっても、後できちんと正当化されるということは数学の歴史が示している」
- $e = \frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|}$は接平面に垂直の法ベクトル
- 曲面の第二基本形式(second fundamental form)は
  - $\mathrm{II} = -dp \cdot de$
  - 「これは一番手っ取り早い定義であるが、意味がはっきりせず、良い定義とはいえないであろう。幾何学的意味は、しだいにはっきりしてくる」

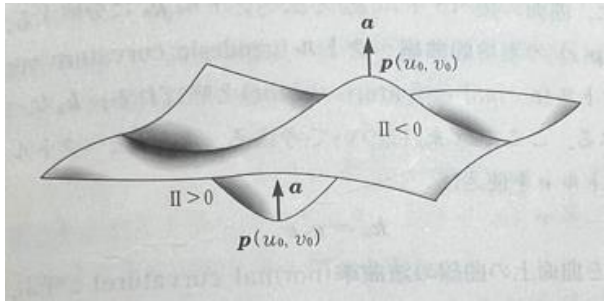
Gaussの式、Weingartenの式

- $p_u \cdot e = 0, p_v \cdot e = 0$を微分していくと
  - $L = p_{uu} \cdot e = -p_u \cdot e_u$
  - M$= p_{uv} \cdot e = -p_u \cdot e_v = p_{vu} \cdot e = -p_v \cdot e_u$
  - $N = p_{vv} \cdot e = -p_v \cdot e_v$
- このとき
  - $\mathrm{II} = -dp \cdot de = (p_u du + p_v dv) \cdot (e_u du + e_v dv)$
  - $= Ldudu + 2Mdudv + Ndvdv$
- また、このとき
  - Gaussの式
    - $p_{uu} = \Gamma_{uu}^{u} p_u + \Gamma_{uu}^{v} p_v + Le$
    - $p_{uv} = \Gamma_{uv}^{u} p_u + \Gamma_{uv}^{v} p_v + Me$
    - $p_{vu} = \Gamma_{vu}^{u} p_u + \Gamma_{vu}^{v} p_v + Me$
    - $p_{vv} = \Gamma_{vv}^{u} p_u + \Gamma_{vv}^{v} p_v + Ne$
    - Γ_{ab}^{c} : Christoffelの記号、E, F, G, L, M, Nで書ける
  - Weingartenの式
    - $e_u = \frac{FM-GL}{EG-F^2} p_u + \frac{FL-EM}{EG-F^2} p_v$
    - $e_v = \frac{FN-GM}{EG-F^2} p_u + \frac{FM-EN}{EG-F^2} p_v$

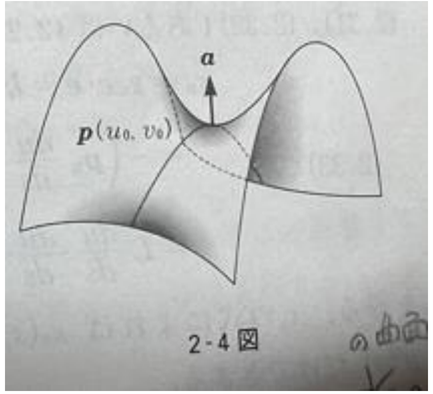
第二形式の幾何学的意味



2-2 図



- 曲面上の関数fを
  - $f(u,v) = a \cdot p(u,v)$
  - fはa方向の高さを表す関数である。
- 曲面上の点$p_0 = p(u_0, v_0)$を固定して、aをそこでの法ベクトル$a = e(u_0, v_0)$とする。
- $a \cdot p_u(u_0, v_0) = a \cdot p_v(u_0, v_0) = 0$より
  - $df = d(a \cdot p) = a \cdot p_u du + a \cdot p_v dv = 0$
  - 幾何学的な意味は、aを真上を向いたベクトルとしたとき、p_0での接平面はaに直交するから水平で、それは、曲面の高さがp_0で臨界値(critical value)に達している
- p_0でdfが0であるから、fのHesse行列を調べることにより、fのp_0近傍での様子がわかる
  - $H_f = \begin{bmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{vu} & f_{vv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(u_0, v_0) & M(u_0, v_0) \\ M(u_0, v_0) & N(u_0, v_0) \end{bmatrix}$



2-4 図

- 第二基本形式
  - $\mathrm{II} = Ldudu + 2Mdudv + Ndvdv$
- が$p(u_0, v_0)$において正値2次形式になるとすると、Hesse行列H_fが正値、つまりfが(u_0, v_0)において上に凹となる。
- II が負値2次形式ならば、上に凸
- IIが不定値、すなわち$LN - M^2 < 0$のときは、鞍点となる。$LN - M^2 = 0$のときは一般には何も言えない。
- 定理2.1
  - 第二基本形式$II = Ldudu + 2Mdudv + Ndvdv$が定値になる点、すなわち$LN - M^2 > 0$となる点では、曲面は凹/凸となり、不定値、$LN - M^2 < 0$となる点では鞍状になる。

曲面上の曲線の曲率

- 空間曲線$p(s) = p\big(u(s), v(s)\big)$
- $\left|\frac{dp}{ds}\right| = 1$となるパラメータ$s$が入っているとする。
- $p''(s)$の長さが曲率の定義であった。$p''(s)$は曲面$p(u, v)$に接してはいないから
  - $p''(s) = k_g + k_n$
  - k_g：曲面の接ベクトル。測地的曲率ベクトル(geodesic curvature vector)
  - k_n：法曲率ベクトル (normal curvature vector)
- k_nは法ベクトルであるから$k_n = \kappa_n e$と書ける。κ_nを曲線上の曲線の法曲率(normal curvature)
  - $\kappa_n = \kappa_n e \cdot e = k_n \cdot e = \big(p'' - k_g\big) \cdot e = p'' \cdot e = -p' \cdot e'$
  - $= -\left(p_u \frac{du}{ds} + p_v \frac{ds}{dv}\right) \cdot \left(e_u \frac{du}{ds} + e_v \frac{dv}{ds}\right) = L \frac{du}{ds}\frac{du}{ds} + 2M \frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + N \frac{dv}{ds}\frac{dv}{ds}$
  - κ_nは曲線$p(s)$そのものではなく、$p'(s)$のみで決まる。
- したがって、曲面上の点$p_0 = p(u_0, v_0)$に対して単位接ベクトル
  - $w = \xi p_u(u_0, v_0) + \eta p_v(u_0, v_0)$
  - $\mathrm{II}(w, w) = L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2$
  - $\kappa_n(s) = \mathrm{II}\big(p'(s), p'(s)\big)$
- と書ける。

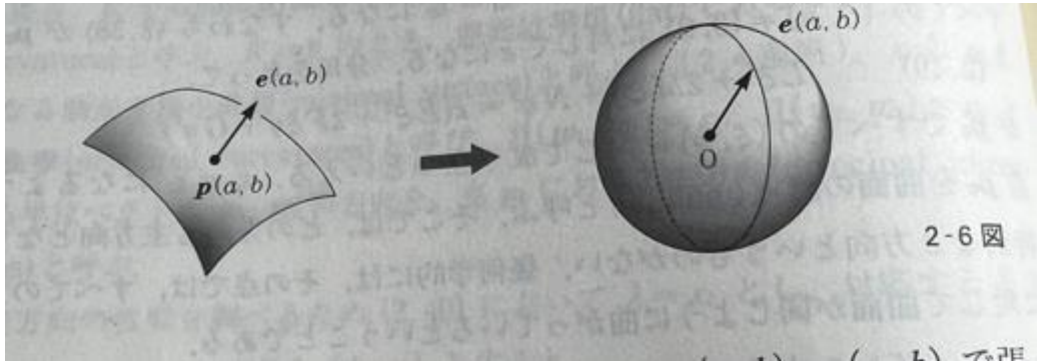
ガウスの曲率、平均曲率

- $\mathrm{II}(w, w)$ において w を p_0 での接平面内の単位円上を動かすときの最大、最小を求める。つまり、
  - $|w|^2 = E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2 = 1$の条件で
  - $\mathrm{II}(w, w) = L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2$の最大・最小を求める
- 最大・最小の解をκ_1, κ_2とおくと
  - $\kappa_1\kappa_2 = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = K, \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{EN+GL-2FM}{2(EG-F^2)} = H$
  - K : Gaussの曲率, H : 平均曲率
  - $K \equiv 0$のとき、曲面は平坦(flat)
  - $H \equiv 0$のとき、曲面は極小平面(minimal surface)
  - κ_1, κ_2を主曲率(principal curvatures)
  - $\mathrm{II}(w_1, w_1) = \kappa_1, \mathrm{II}(w_2, w_2) = \kappa_2$ となる単位ベクトルw_1, w_2の方向を、点p_0における主方向(principal direction)

性質

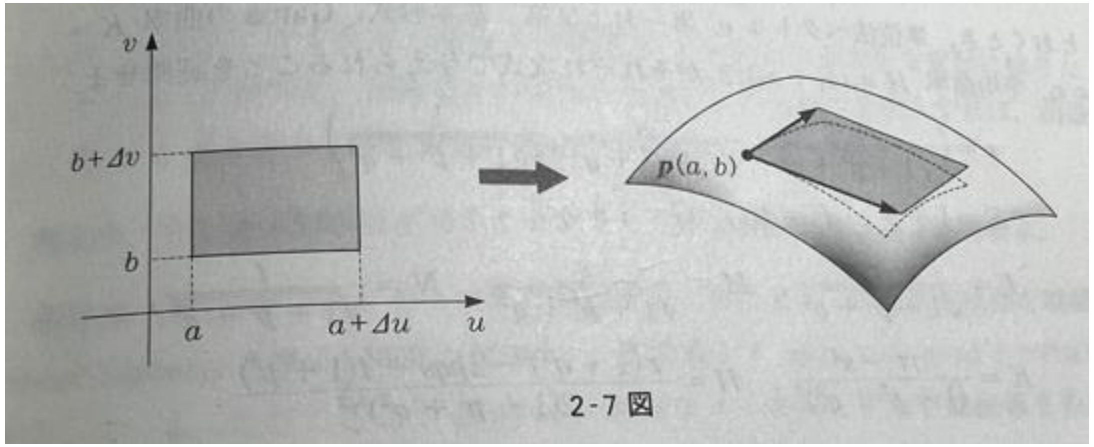
- $\kappa_1 \neq \kappa_2$なら、2つの主方向は互いに直角
- $\kappa_1 = \kappa_2$なら、$\mathrm{II}(w, w)$でwが単位円上を動くとき定数κとなる。このような点と臍点(せいてん、umblic)
  - どの方向も主方向
  - すべての方向に対して曲面が同じように曲がっている
- $K > 0$となる点を楕円点(elliptic point), $K < 0$となる点を双曲点(hyperbolic point)、$K = 0$となる点を放物点(parabolic point)
- 第一基本形式は常に正値であるから、$EG - F^2 > 0$で、
  - $\frac{LN - M^2}{EG - F^2} = K$
- より、Kは$LN - M^2$と同じ符号をもつ。
- 定理2.1
  - 第二基本形式$II = Ldudu + 2Mdudv + Ndvdv$が定値になる点、すなわち$LN - M^2 > 0$となる点では、曲面は凹/凸となり、不定値、$LN - M^2 < 0$となる点では鞍状になる。
- より
- 定理2.2
  - Gaussの曲率Kが正になる点では、曲面は凸、負になる点では鞍上になる。
- $k_g \equiv 0$となるとき、$p(s)$を測地線(geodesic)と呼ぶ。

Gaussの球面表示



- 平面曲線
  - 曲率とは、点がp_0の近くを曲線に沿って動く距離と、Gaussの表示により対応する点が単位円上を動く距離との比
- 曲面
  - Gaussの曲率が面積の比として理解される
- 接平面上のベクトルp_u, p_vで張られた平行四辺形の面積は
  - $|p_u \times p_v|$
- 単位球面上に対応する点eで対応する接ベクトルe_u, e_vで張られる平行四辺形の面積は
  - $|e_u \times e_v|$
  - $e_u \times e_v = \left(\frac{FM-GL}{EG-F^2} p_u + \frac{FL-EM}{EG-F^2} p_v\right) \times \left(\frac{FN-GM}{EG-F^2} p_u + \frac{FM-EN}{EG-F^2} p_v\right) = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} p_u \times p_v$
  - $|e_u \times e_v| = |K||p_u \times p_v|$
  - (e_u, e_v, e)が左手系の時には、e_u, e_vで張られた平行四辺形の面積は$-|e_u \times e_v|$であると定義して、面積に符号をつければ、Kは面積比と考えることができる。

面積要素



- $|p_u \times p_v| dudv$

- を曲面の面積要素という。(u, v)が領域Rを動くとき対応する曲面上の領域の面積は
  - $\iint_R |p_u \times p_v| dudv$
- となり、Gaussの表示によりそれに対応する単位球面上の領域の符号付の面積は
  - $\iint_R K|p_u \times p_v| dudv = \iint_R K\sqrt{EG - F^2} dudv$
    - $|p_u \times p_v|^2 = |p_u|^2 |p_v|^2 - (p_u \cdot p_v)^2 = EG - F^2$
    - $(w \times x) \cdot (y \times z) = (w \cdot y)(x \cdot z) - (w \cdot z)(x \cdot y)$ ($Lagrange$の公式)
    - (左)$=\varepsilon_{ijk} w_j x_k \varepsilon_{ilm} y_l z_m = \left(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}\right) w_j x_k y_l z_m = w_j x_k y_j z_k - w_j x_k y_k z_j = (w \cdot y)(x \cdot z) - (w \cdot z)(x \cdot y)$

問2.1

- 曲面が$z = f(x, y)$で与えられたとき
  - $p = \frac{\partial f}{\partial x}, q = \frac{\partial f}{\partial y}, r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
- とおくと
  - $e = \left(\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right)$
  - $E = 1 + p^2, F = pq, G = 1 + q^2$
  - $L = \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, M = \frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, N = \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$
  - $K = \frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}, H = \frac{r\left(1+q^2\right)-2pqs+t\left(1+p^2\right)}{2(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}$

問2.2

- 曲面の第三基本形式は
    - $\mathrm{III} = de \cdot de$
- で定義される。このとき
    - $K\mathrm{I} - 2H\mathrm{II} + \mathrm{III} = 0$

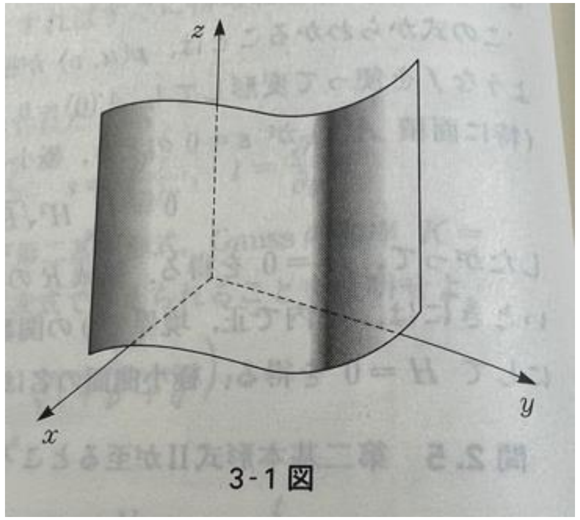
問2.3

- 曲面$p(u, v)$上の曲線$p(s) = p\big(u(s), v(s)\big)$が測地線($k_g = 0$)となるための必要十分条件は、$u, v$が次の微分方程式の解であることである
  - $\frac{d^2u}{ds^2} + \Gamma_{uu}^{u} \frac{du}{ds}\frac{du}{ds} + 2\Gamma_{uv}^{u} \frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \Gamma_{vv}^{u} \frac{dv}{ds}\frac{dv}{ds} = 0$
  - $\frac{d^2v}{ds^2} + \Gamma_{uu}^{v} \frac{du}{ds}\frac{du}{ds} + 2\Gamma_{uv}^{v} \frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \Gamma_{vv}^{v} \frac{dv}{ds}\frac{dv}{ds} = 0$

問2.5

- 第二基本形式IIが至る所0ならば、平面に限る

§3 実例について基本形式、曲率



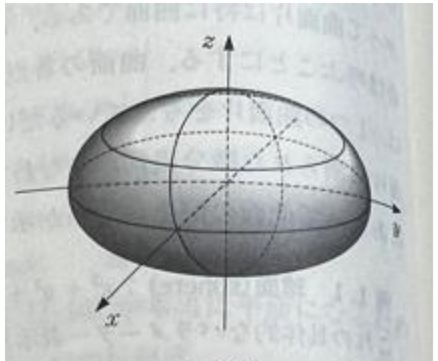
3-1 図

- 3.1 柱面 (cylindrical surface)
  - $x = x(u), y = y(u), z = v$
  - $\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 = 1$となるように$u$を取ってある
  - $p(u, v) = (x(u), y(u), v)$
  - $p_u = (x', y', 0), p_v = (0,0,1)$
  - $\mathrm{I} = (du)^2 + (dv)^2$
  - $e = (y', -x', 0), de = (y''du, -x''du, 0)$
  - $II = -dp \cdot de = (x''y' - x'y'')(du)^2$
  - $K = 0, H = \frac{1}{2}(x''y' - x'y'')$
  - $\kappa_1 = 0, \kappa_2 = x''y' - x'y''$
  - κ_1に対応する主方向はz軸の方向、κ_2に対応する主方向はxy平面に平行な方向
  - Gaussの球面表示においてeは常に単位球の赤道上を動くので、eが覆う面積は0

例3.2 楕円面

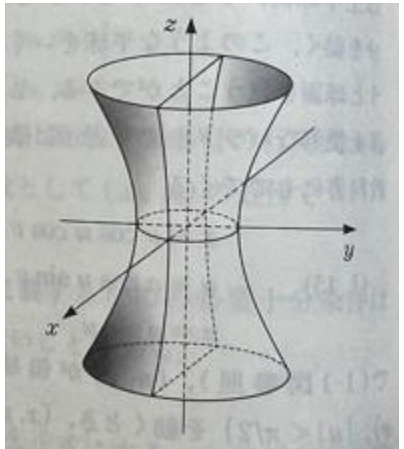
- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
- $p(u,v)=(a\cos u\cos v\,, b\cos u\sin v\,, c\sin u)$
- $e=\frac{1}{\Delta}(-bc\cos u\cos v\,, -ca\cos u\sin v\,, -ab\sin u)$
  - $\Delta=\sqrt{b^2c^2\cos^2 u\cos^2 v+c^2a^2\cos^2 u\sin^2 v+a^2b^2\sin^2 u}$
- $E=a^2\sin^2 u\cos^2 v+b^2\sin^2 u\sin^2 v+c^s\cos^2 u$
- $F=(a^2-b^2)\sin u\cos u\sin v\cos v$
- $G=a^2\cos^2 u\sin^2 v+b^2\cos^2 u\cos^2 v$
- $EG-F^2=\Delta^2\cos^2 u$
- $L=\frac{abc}{\Delta}, M=0, N=\frac{abc\cos^2 u}{\Delta}, K=\frac{a^2b^2c^2}{\Delta^4}=\frac{1}{a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^2}$
- $H=\frac{abc\left[(a^2+b^2+c^2)-(a^2\cos^2 u\cos^2 v+b^2\cos^2 u\sin^2 v+c^2\sin^2 u)\right]}{2\Delta^3}=\frac{(a^2+b^2+c^2)-(x^2+y^2+z^2)}{2a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{\frac{3}{2}}}$

- 球面の場合
  - $a=b=c$
  - $\mathrm{I}=a^2(du)^2+a^2\cos^2 u\,(dv)^2$
  - $\mathrm{II}=a(du)^2+a\cos^2 u\,(dv)^2$
  - $e=\left(-\frac{x}{a},-\frac{y}{a},-\frac{z}{a}\right)$
  - $K=\frac{1}{a^2}, H=\frac{1}{a}$



1-2 図

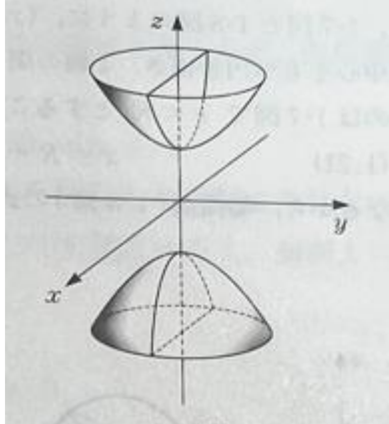
例3.3 一葉双曲面



1-3 図

- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
- $p(u,v)=(a\cosh u\cos v\,,b\cosh u\sin v\,,c\sinh u)$
- $e=-\frac{1}{\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},-\frac{z}{c^2}\right)$
- $K=-\frac{1}{a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^2}$
- $H=\frac{(x^2+y^2+z^2)-(a^2+b^2-c^2)}{2a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{\frac{3}{2}}}$

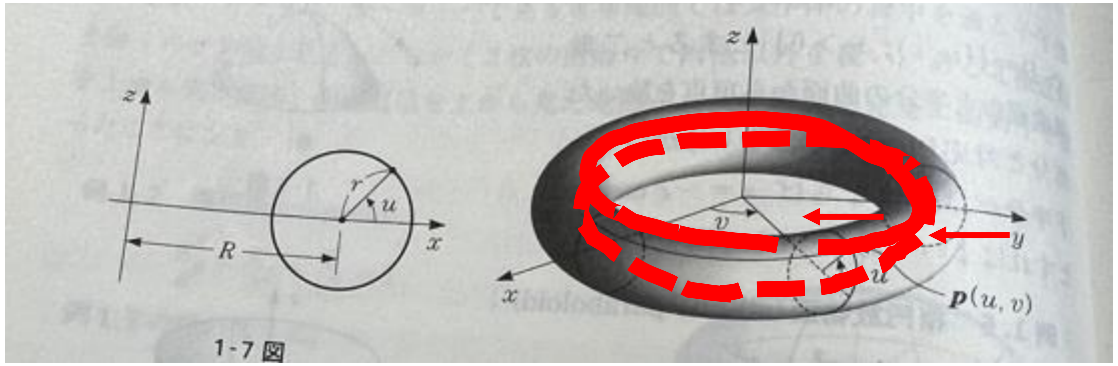
例3.4 二葉双曲面



1-4 図

- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$
- $p(u,v)=(a\sinh u\cos v\,,b\sinh u\sin v\,,c\cosh u)$
- $e=-\frac{1}{\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},-\frac{z}{c^2}\right)$
- $K=\frac{1}{a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^2}$
- $H=\frac{(x^2+y^2+z^2)+(a^2+b^2-c^2)}{2a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{\frac{3}{2}}}$

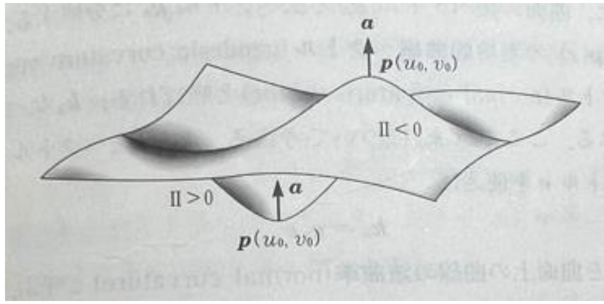
例3.5 輪環面



1-7 図

外側
K>0
内側
K<0

- $p(u,v)=\left((R+r\cos u)\cos v\,,(R+r\cos u)\sin v\,,r\sin u\right)$
- $e=(-\cos u\cos v\,,-\cos u\sin v\,,-\sin u)$
- $E=r^2, F=0, G=(R+r\cos u)^2$
- $L=r, M=0, N=(R+r\cos u)\cos u$



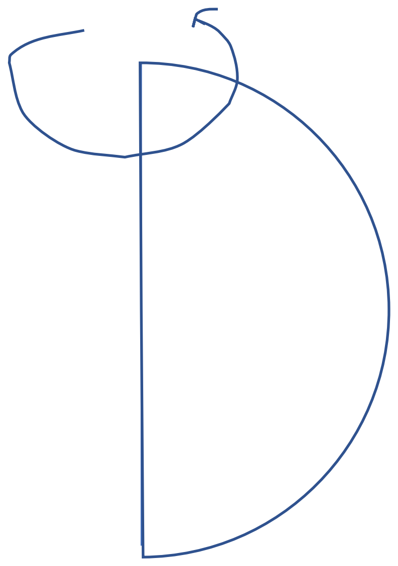
- $K=\frac{\cos u}{r(R+r\cos u)}, 2H=\frac{\cos u}{R+r\cos u}+\frac{1}{r}, \kappa_1=\frac{\cos u}{R+r\cos u}, \kappa_2=\frac{1}{r}$

例3.6 回転面

- $p(u,v) = \left(f(u)\cos v\,, f(u)\sin v\,, g(u)\right)$
  - $x = f(u), z = g(u)$はz軸と交わらないから$f(u) > 0$とする。
- $e = \frac{1}{\sqrt{f'(u)^2+g'(u)^2}}\left(-g'(u)\cos v\,, -g'(u)\sin v\,, f'(u)\right)$
- $E = f'(u)^2 + g'(u)^2, F = 0, G = f^2$
- $L = \frac{f'(u)g''(u)-f''(u)g'(u)}{\sqrt{f'(u)^2+g'(u)^2}}, M = 0, N = \frac{f(u)g'(u)}{\sqrt{f'(u)^2+g'(u)^2}}$
- $K = \frac{\{f'(u)g''(u)-f''(u)g'(u)\}g'(u)}{f(u)\{f'(u)^2+g'(u)^2\}^2}$
- $2H = \frac{g'(u)}{f(u)\{f'(u)^2+g'(u)^2\}^{\frac{1}{2}}} + \frac{f'(u)g''(u)-f''(u)g'(u)}{\{f'(u)^2+g'(u)^2\}^{\frac{3}{2}}}$
- $\kappa_1 = \frac{g'(u)}{f(u)\{f'(u)^2+g'(u)^2\}^{\frac{1}{2}}}, \kappa_2 = \frac{f'(u)g''(u)-f''(u)g'(u)}{\{f'(u)^2+g'(u)^2\}^{\frac{3}{2}}}$
- とくに、$f'(u)^2 + g'(u)^2 = 1$となるようにパラメータを選ぶと$f'(u)f''(u) + g'(u)g''(u) = 0$より
  - $(f'g'' - f''g')g' = f'g''g' - f''g'g' = -f'f'f'' - f''(1 - f'f') = -f''$
- $K = -\frac{f''}{f}, 2H = \frac{g'}{f} - \frac{f''}{g'}, \kappa_1 = \frac{g'}{f}, \kappa_2 = -\frac{f''}{g'}$

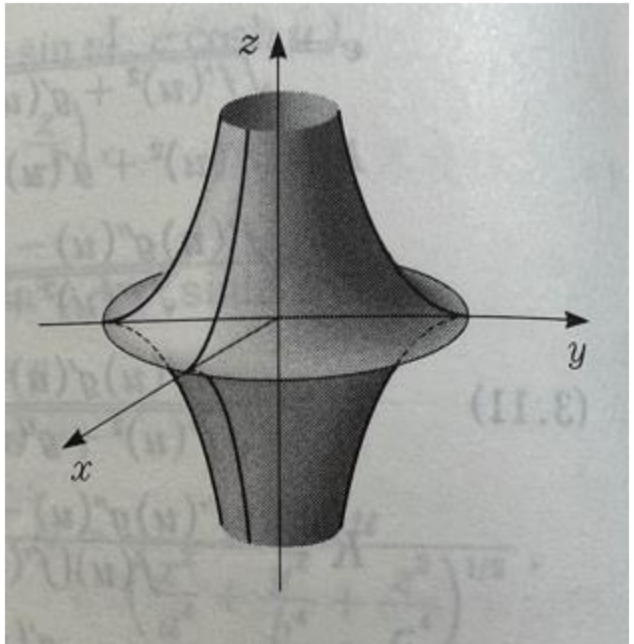
球面

- $K = -\frac{f''}{f} = \frac{1}{a^2}$
- $f''(u) = -\frac{f}{a^2}, f = a\sin\left(\frac{u}{a}\right)$
- $g'(u) = \pm\sqrt{1 - f'(u)^2} = \pm\sin\frac{u}{a}, g(u) = \mp a\cos\frac{u}{a}$
- 確かに球面！



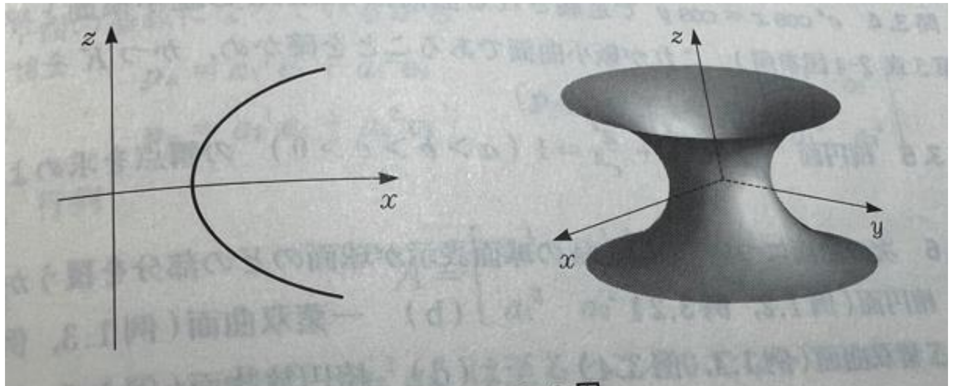
例3.7 曲率$K = -c^2$の回転面

- $K = -\frac{f''}{f}, 2H = \frac{g'}{f} - \frac{f''}{g'}, \kappa_1 = \frac{g'}{f}, \kappa_2 = -\frac{f''}{g'}$
- $f''(u) = c^2 f(u), f(u) = \frac{1}{c} e^{-u}$とすると
- $g'(u) = \pm\sqrt{1 - f'(u)^2} = \pm\sqrt{1 - e^{-2cu}}$
- $g(u) = \pm \int_0^u \sqrt{1 - e^{-2ct}} dt$
- 擬球面(pseudosphere)
  - 「非Euclid幾何を局所的にではあるが3次元Euclid空間内の曲面として実現する重要な局面」？



3-2 図

例3.8 懸垂面 (catenoid)



3-3 図

- $2H = \frac{g'}{f} - \frac{f''}{g'} = 0 \Leftrightarrow ff'' = g'^2 = 1 - f'^2$
- $(ff')' = f'^2 + ff'' = 1 \therefore ff' = u + c = \frac{1}{2}(f^2)'$
- $f^2 = u^2 + 2cu + d \therefore f = \sqrt{u^2 + 2cu + d}$
- $g' = \pm\sqrt{1 - f'^2} = \pm\sqrt{\frac{d-c^2}{u^2+2cu+d}}$
- $c = 0, d = a^2 (a > 0)$とおくと
- $x = f(u) = \sqrt{u^2 + a^2}$
- $z = g(u) = \pm\int_0^u \frac{a}{\sqrt{t^2+a^2}} dt = \pm a \sinh^{-1}\frac{u}{a}$
- uを消去できて、$x = a\cosh\frac{z}{a}$
  - ケーブルを張った時に、重力によって垂れ下がった形がこの曲線

2022/12/23
§4 正規直交基底を使う方法

- 曲面$p(u,v)$に対し、各点でベクトルp_u, p_v, eを使う代わりに、正規直交系を使いたい
- 曲面$p(u,v)$が与えられたときに、各点で接平面内のベクトルe_1, e_2を
  - $e_1 \cdot e_1 = e_2 \cdot e_2 = 1, e_1 \cdot e_2 = 0, e_3 = e_1 \times e_2$
- となるように選ぶ。
  - 例えば$e_1 = \frac{p_u}{|p_u|}, e_2 = \frac{p_v - (p_v \cdot e_1) e_1}{|p_v - (p_v \cdot e_1) e_1|}$のように定義できる。
  - e_3は$e = \frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|}$と符号を除いて一致するので、$e_3 = e$と仮定する。

第一基本形式

  - $p_u = a_1^1 e_1 + a_1^2 e_2$
  - $p_v = a_2^1 e_1 + a_2^2 e_2$
  - $(p_u \quad p_v) = (e_1 \quad e_2)\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} = (e_1 \quad e_2)A$
  - $p_u \times p_v = (\det A)e_3$
  - $dp = p_u du + p_v dv = (a_1^1 du + a_2^1 dv)e_1 + (a_1^2 du + a_2^2 dv)e_2$
  - $\theta^1 = a_1^1 du + a_2^1 dv, \theta^2 = a_1^2 du + a_2^2 dv$とおけば
  - $dp = \theta^1 e_1 + \theta^2 e_2$
- 第一基本形式は
  - $\mathrm{I} = dp \cdot dp = \theta^1\theta^1 + \theta^2\theta^2$

第二基本形式

  - $de_i = w_i^1 e_1 + w_i^2 e_2 + w_i^3 e_3\ (i = 1,2,3), w_i^j$は$du, dv$の線形結合
  - $w_i^j + w_j^i = 0$が成り立ち、交代行列となり、$w_i^i = 0$
- 第二基本形式は
  - $\mathrm{II} = -dp \cdot de = -dp \cdot de_3 = -(\theta^1 e_1 + \theta^2 e_2) \cdot (w_3^1 e_1 + w_3^2 e_2)$
  - $= -\theta^1 w_3^1 - \theta^2 w_3^2 = \theta^1 w_1^3 + \theta^2 w_2^3$
- $w_1^3 = b_{11}\theta^1 + b_{12}\theta^2, w_2^3 = b_{21}\theta^1 + b_{22}\theta^2$とおくと
  - $\mathrm{II} = \sum_{i,j=1}^2 b_{ij}\theta^i\theta^j$
  - $\theta^1 = a_1^1 du + a_2^1 dv, \theta^2 = a_1^2 du + a_2^2 dv$
- $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$とおくと、対称であり、固有値は実数となる。それを$\kappa_1, \kappa_2$と書き、主曲率という。
  - $K = \kappa_1\kappa_2, H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$
- 直交行列Pを用いてBを$P^t BP = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}$と対角化して
  - $K = detB = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$
  - $2H = trace\ B = b_{11} + b_{22}$
- これは以前定義したガウスの曲率、平均曲率と一致している。
  - $\kappa_1\kappa_2 = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = K, \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{EN+GL-2FM}{2(EG-F^2)} = H$

§5 2変数の外微分形式

- 外微分形式(exterior differential form) or 微分形式
  - $adu + bdv$
- 外積 (exterior multiplication)
  - $du \wedge du = 0, dv \wedge dv = 0, du \wedge dv = -dv \wedge du$
- ちなみに
  - 関数は0次微分形式 : 0-form
  - $fdu + gdv$は1次微分形式 : 1-form
  - $fdu \wedge dv$は2次微分形式 : 2-form
  - $fdu \wedge dv = -fdv \wedge du = \frac{1}{2}(fdu \wedge dv - fdv \wedge du)$
- $\alpha = a_1 du + a_2 dv, \beta = b_1 du + b_2 dv$をかけると
  - $\alpha \wedge \beta = (a_1 b_2 - a_2 b_1) du \wedge dv = -\beta \wedge \alpha$
  - $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$の行列式となっているので、$\alpha \wedge \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha, \beta$が一次独立

外微分 (exterior differentiation) d

- 0-form f
  - $df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$
- 1-form $\varphi = f du + g dv$
  - $d\varphi = df \wedge du + dg \wedge dv = \left(-\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial u}\right) du \wedge dv$
- 2-form $\phi = f du \wedge dv$
  - $d\phi = df \wedge du \wedge dv = \left(\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv\right) \wedge du \wedge dv = 0$
- 性質
  - f, g : 0-form
    - $d(fg) = df \cdot g + f \cdot dg$
  - f : 0-form, φ : 1-form
    - $d(f\varphi) = df \wedge \varphi + f d\varphi, d(\varphi f) = d\varphi \cdot f - \varphi \wedge df$
  - $dd\theta = 0$
    - 1,2-formの場合は明らか。0-formの場合も計算するとわかる

定理5.1

- 1次微分形式
  - $\varphi = f(u,v)du + g(u,v)dv$
- が領域$a \leq u \leq b, c \leq v \leq d$で連続微分可能で$d\varphi = 0$ならば、その領域で定義された関数$h$で、$\varphi = dh$となるものが存在する。

- ポアンカレの補助定理の一つの場合。
- φの定義域に関する仮定は大切!

定理5.2

- 2次微分形式
  - $\phi = f du \wedge dv$
- が領域$a \leq u \leq b, c \leq v \leq d$で連続微分可能ならば、その領域で定義された1次微分形式φで$\phi = d\varphi$となるものが存在する。

変数変換

- $u = u(s,t), v = v(s,t)$と変数変換
- 1次微分形式
  - $adu + bdv$
- は
  - $a\left(\frac{\partial u}{\partial s}ds + \frac{\partial u}{\partial t}dt\right) + b\left(\frac{\partial v}{\partial s}ds + \frac{\partial v}{\partial t}dt\right)$
- となる。
- 2次微分形式
  - $adu \wedge dv$
- は
  - $a\left(\frac{\partial u}{\partial s}ds + \frac{\partial u}{\partial t}dt\right) \wedge \left(\frac{\partial v}{\partial s}ds + \frac{\partial v}{\partial t}dt\right) = a\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{vmatrix} ds \wedge dt$

問5.1

- $u = r\cos\theta, v = r\sin\theta$と変数変換すると
  - $du \wedge dv = (\cos\theta dr - r\sin\theta\, d\theta) \wedge (\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta) = r\cos^2\theta\, dr \wedge d\theta - r\sin^2\theta\, d\theta \wedge dr = rdr \wedge d\theta$

§6 外微分形式を使う方法

- 曲面を
  - $p(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$
  - $dp = (dx, dy, dz)$を
    - $dp = \theta^1 e_1 + \theta^2 e_2$
  - $ddp = 0$より
    - $0 = d\theta^1 e_1 - \theta^1 \wedge \sum_{j=1}^{3} w_1^j e_j + d\theta^2 e_2 - \theta^2 \wedge \sum_{j=1}^{3} w_2^j e_j$
    - $= \left(d\theta^1 - \sum_{j=1}^{2} \theta^j \wedge w_j^1\right) e_1 + \left(d\theta^2 - \sum_{j=1}^{2} \theta^j \wedge w_j^2\right) e_2 - \sum_{j=1}^{2} \theta^j \wedge w_j^3 e_3$
  - e_1, e_2, e_3は一次独立であるから
    - $d\theta^i = \sum_{j=1}^{2} \theta^j \wedge w_j^i \ \ (i = 1,2)$ (6.4)
    - $\sum_{j=1}^{2} \theta^j \wedge w_j^3 = 0$
- (6.4)を第一構造式
  - w_i^jは交代行列なので、(6.4)は$d\theta^1 = \theta^2 \wedge w_2^1, d\theta^2 = \theta^1 \wedge w_1^2$
  - $w_j^3 = \sum_{k=1}^{2} b_{jk} \theta^k \ \ (j = 1,2)$
  - $0 = \sum_{j,k=1}^{2} b_{jk} \theta^j \wedge \theta^k = b_{12}\theta^1 \wedge \theta^2 + b_{21}\theta^2 \wedge \theta^1 = (b_{12} - b_{21})\theta^1 \wedge \theta^2$
  - θ^1, θ^2は一次独立より$\theta^1 \wedge \theta^2 \neq 0$。よって、$b_{12} = b_{21}$。Bの対称性が確かめられる

第二構造式

- $dde_i = 0$より
  - $0 = d(de_i) = d\left(\sum_{j=1}^{3} w_i^j e_j\right) = \sum_{j=1}^{3} dw_i^j e_j - \sum_{j=1}^{3} w_i^j \wedge de_j$
  - $= \sum_{k=1}^{3}\left(dw_i^k - \sum_{j=1}^{3} w_i^j \wedge w_j^k\right) e_k$
- よって
  - $dw_i^k = \sum_{j=1}^{3} w_i^j \wedge w_j^k = \sum_{j=1}^{2} w_i^j \wedge w_j^k + w_i^3 \wedge w_3^k$
  - $= \sum_{j=1}^{2} w_i^j \wedge w_j^k + w_k^3 \wedge w_i^3$
  - $= \sum_{j=1}^{2} w_i^j \wedge w_j^k + \sum_{h,j=1}^{2} b_{kh} b_{ij}\, \theta^h \wedge \theta^i$
  - $= \sum_{j=1}^{2} w_i^j \wedge w_j^k + \frac{1}{2} \sum_{h,j=1}^{2}\left(b_{kh} b_{ij} - b_{kj} b_{ih}\right) \theta^h \wedge \theta^i$
- $k = 1, i = 2$のとき
  - $dw_2^1 = \sum_{j=1}^{2} w_2^j \wedge w_j^1 + \frac{1}{2} \sum_{h,j=1}^{2}\left(b_{1h} b_{2j} - b_{1j} b_{2h}\right) \theta^h \wedge \theta^i$
  - $= (b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}) \theta^1 \wedge \theta^2 = K \theta^1 \wedge \theta^2$ (6.14)
  - 第二構造式

マイナルディ・コダッチ(Mainardi-Codazzi)の式

- $dw_i^3 = \sum_{j=1}^{3} w_i^j \wedge w_j^3 = \sum_{j=1}^{2} w_i^j \wedge w_j^3$
- $d\left(\sum_{j=1}^{2} b_{ij}\theta^j\right) = \sum_{j=1}^{2} w_i^j \wedge \left(\sum_{k=1}^{2} b_{jk}\theta^k\right)$
- $\sum_{k=1}^{2}\left(db_{ik} - \sum_{j=1}^{2} b_{ij}w_k^j - \sum_{j=1}^{2} b_{jk}w_i^j\right) \wedge \theta^k = 0$
- $db_{ik} - \sum_{j=1}^{2} b_{ij}w_k^j - \sum_{j=1}^{2} b_{jk}w_i^j = \sum_{l=1}^{2} b_{ik,l}\theta^l$
- $b_{ik} = b_{ki}$より$b_{ik,l} = b_{ki,l}$。
- $\sum_{k,l=1}^{2} b_{ik,l}\theta^l \wedge \theta^k = 0$ (6.21)
- つまり$b_{i2,1} = b_{i1,2}$
- よって$b_{ik,l} = b_{il,k}$ (6.22)
- これをマイナルディ・コダッチの式
- $dw_2^1 = K\theta^1 \wedge \theta^2$ (6.14)
- (6.14, 22)を合わして曲面論の基本式

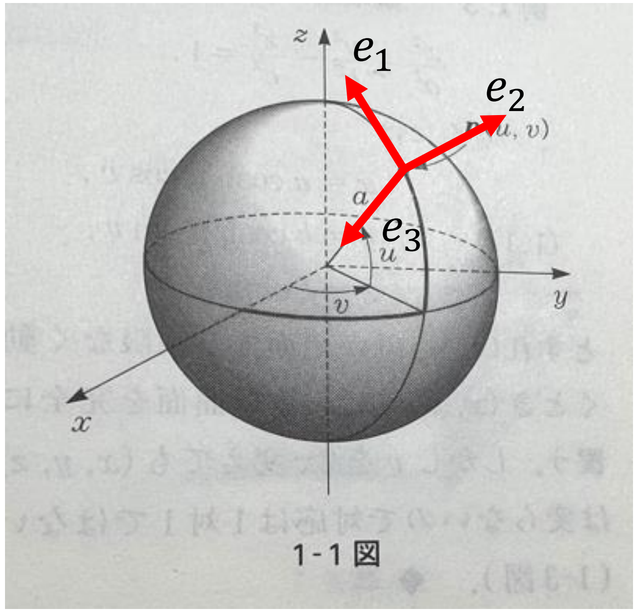
第一、第二基本形式と曲面

- 領域D上すべての点で一次独立な1次微分形式θ^1, θ^2をとり
  - $\theta^1\theta^1 + \theta^2\theta^2$ (6.23)
  - $\sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}\theta^i\theta^j$ (ただし、$b_{ij} = b_{ji}$)(6.24)
- を考える時、(6.23), (6.24)を第一、第二基本形式をするような曲面$p(u, v)$が空間内に存在するか？

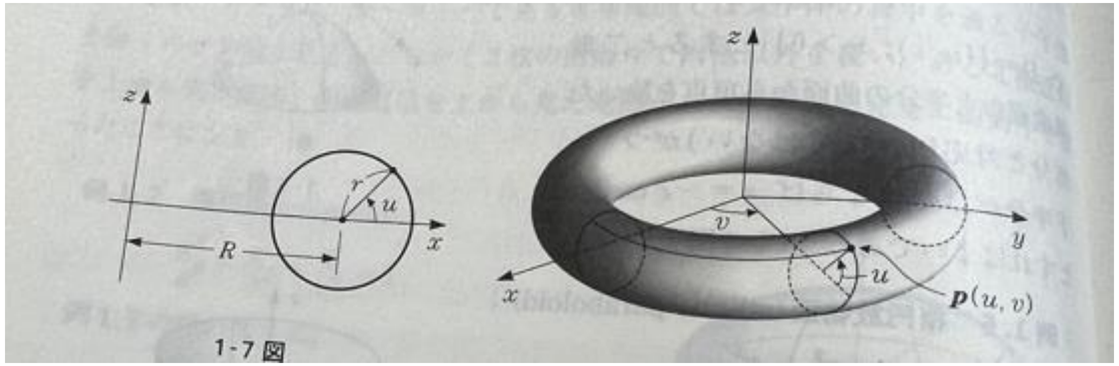
- (6.23)が与えられると
  - $w_j^i + w_i^j = 0\ (i, j = 1,2)$
  - $d\theta^i = -\sum_{j=1}^{2} w_j^i \wedge \theta^j\ \ (i = 1,2)$
- となるような1次微分形式w_j^iが存在して、しかも一意に定まる。(次章で証明)このとき
  - $dw_2^1 = K\theta^1 \wedge \theta^2$
- により関数Kを定義する。このとき
  - $K = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$ (6.28)
- が成り立たないといけない。また、
  - $b_{i2,1-b_{i1,2}=0}$ (6.29)
- も成立しないといけない。
- 逆に、(6.28), (6.29)が満たされていれば、(6.23)(6.24)を第一、第二基本形式とするような曲面が空間内に存在し、しかも合同変換を除けば一意である。

問6.1

- 球面(sphere)
  - $x^2+y^2+z^2=a^2$
  - $x=a\cos u\cos v$
  - $y=a\cos u\sin v$
  - $z=a\sin u$
  - $e_1=(-\sin u\cos v\,,-\sin u\sin v\,,\cos u)$
  - $e_2=(-\sin v\,,\cos v\,,0)$
    - $dp=ae_1du+a\cos u\,e_2dv$より$\theta^1=adu,\theta^2=a\cos u\,dv$
  - $e_3=(-\cos u\cos v\,,-\cos u\sin v\,,-\sin u)=\frac{1}{a}p$
  - $\begin{pmatrix} w_1^1 & w_1^2 & w_1^3 \\ w_2^1 & w_2^2 & w_2^3 \\ w_3^1 & w_3^2 & w_3^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -\sin u\,dv & du \\ \sin u\,dv & 0 & \cos u\,dv \\ -du & -\cos u\,dv & 0 \end{pmatrix}$
  - $dw_2^1=d(\sin u\,dv)=\cos u\,du\wedge dv=\frac{1}{a^2}(adu)\wedge(a\cos u\,dv)=\frac{1}{a^2}\theta^1\wedge\theta^2,K=\frac{1}{a^2}$
  - $w_1^3=du=\frac{1}{a}\theta^1,w_2^3=\cos u\,dv=\frac{1}{a}\theta^2$より、$B=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$
- ※この計算は基底の取り方(e_1,e_2)に依存しない



問6.2



1-7 図

- 輪環面(torus)
  - $x = (R + r\cos u)\cos v\,,\, y = (R + r\cos u)\sin v\,,\, z = r\sin u$
  - $dp = \begin{pmatrix} -r\sin u\cos v \\ -r\sin u\sin v \\ r\cos u \end{pmatrix} du + \begin{pmatrix} -(R + r\cos u)\sin v \\ (R + r\cos u)\,cos\,v \\ 0 \end{pmatrix} dv$より
    - $e_1 = (-\sin u\cos v\,, -\sin u\sin v\,, \cos u)$
    - $e_2 = (-\sin v\,, \cos v\,, 0)$
    - $e_3 = (-\cos u\cos v\,, -\cos u\sin v\,, -\sin u) = \frac{1}{a}p$ (球面の場合と同様)
    - $dp = re_1 du + (R + r\cos u)e_2 dv$より$\theta^1 = rdu, \theta^2 = (R + r\cos u)dv$
    - $\begin{pmatrix} w_1^1 & w_1^2 & w_1^3 \\ w_2^1 & w_2^2 & w_2^3 \\ w_3^1 & w_3^2 & w_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin u\,dv & du \\ \sin u\,dv & 0 & \cos u\,dv \\ -du & -\cos u\,dv & 0 \end{pmatrix}$
    - $dw_2^1 = \cos u\,du \wedge dv = \frac{\cos u}{r(R + r\cos u)}(rdu) \wedge \big((R + r\cos u)dv\big)$より$K = \frac{\cos u}{r(R + r\cos u)}$
    - $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\cos u}{(R + r\cos u)} \end{pmatrix}$

Chap3
曲面上の幾何

- §1 曲面上のRiemann計量
  - この章では、曲面の性質のうち、第一基本形式だけにより定まるものを調べる。
    - 言い換えると、曲面が3次威厳ユークリッド空間中に入っていることを忘れて、第一基本形式だけを使って曲面論を展開しよう
  - 柱面は$x = x(u), y = y(u), z = v$ (1.1)
  - パラメータは$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 = 1$ (1.2)を満たすようにとる
    - $K = 0, H = \frac{1}{2}(x''y' - x'y'')$
  - 第一基本形式は$\mathrm{I} = (du)^2 + (dv)^2$ (1.3)
  - 平均曲率Hは(1.1)が変わると変化するので、第一基本形式だけで決まっているとは言えない。
  - ガウスの曲率Kは、どんな柱面に対しても0になるから、第一基本形式によって決まるのではないか？という可能性が出てくる。
    - 実際その通り。

Riemann 計量

- (u, v)を座標系とする平面内の領域D上に、第一基本形式のようなもの
  - $Edudu + 2Fdudv + Gdvdv$ (1.4)
- が与えられたとする。
- (1.4)はD内の曲線$\big(u(t), v(t)\big)$の長さを測るためにあるので
  - $E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$ (1.5)
- は$\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt} = 0$でない限り、常に正であるべきである。つまｒ、(1.4)は正値形式。この条件は
  - $EG - F^2 > 0, E > 0$ (1.6)
- (1.4)が正値形式であるとき、D上のRiemann計量
  - 1854/6/10にゲッチンゲン大学で、当時27歳のRiemannが第一基本形式だけに基づいた幾何の研究を提唱したことにちなんでつけた名前

Riemann計量：ds^2

- $E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$ (1.5)
- において、曲線の長さがパラメータに使われているとする。そのため、sを用いると曲線の長さは
  - $\int_\alpha^\beta \sqrt{E\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2F\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2}\, ds$
  - $E\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2F\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 1$ (1.8)
  - $ds^2 = Edudu + 2Fdudv + Gdvdv$ (1.9)

ポアンカレ計量

- 例1.1
  - $D: u^2 + v^2 < 1, ds^2 = 4\frac{du^2+dv^2}{\{1-(u^2+v^2)\}^2}$
  - $w = u + iv$と複素数を用いると$ds^2 = \frac{4dwd\bar{w}}{\{1-|w|^2\}^2}$
- 例1.2
  - $U: y > 0$ 上半平面
  - $z = x + iy$とおいて複素座標を使うと、虚数部分が正の領域
  - $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$
- $z = i\frac{1-w}{1+w}\left(w = \frac{i-z}{i+z}\right)$によって、$U, D$に1:1の対応
  - $2yi = z - \bar{z} = i\frac{1-w}{1+w} + i\frac{1-\bar{w}}{1+\bar{w}} = \frac{2(1-w\bar{w})}{(1+w)(1+\bar{w})}i$より$y > 0 \Leftrightarrow |w|^2 < 1$
  - $dw = \frac{-2idz}{(i+z)^2}, d\bar{w} = \frac{2id\bar{z}}{(-i+\bar{z})^2}, \frac{1}{\{1-|w|^2\}^2} = \frac{(i+z)^2(-i+\bar{z})^2}{(4y)^2}$
  - $\frac{4dwd\bar{w}}{\{1-|w|^2\}^2} = \frac{dzd\bar{z}}{y^2}$

等長対応(isometry)

- (u,v)平面上の領域Dと、(x,y)平面上の領域D'があって、それぞれにRiemann計量
  - $Edudu+2Fdudv+Gdvdv$ (1.18)
  - $E'dxdx+2F'dxdy+G'dydy$ (1.19)
- が与えられている。D,D'の間に微分可能な関数
  - $u=u(x,y), v=v(x,y)$ (1.20)
- で1:1の対応が与えられていて、(1.20)を(1.18)に代入したとき、(1.19)が得られるときは、そのような対応を等長対応といい、2つのRiemann計量は本質的に同じものだとみなす

§2 曲面の構造方程式

- Riemann計量
  - $ds^2 = Edudu + 2Fdudv + Gdvdv$ (1.9)
- が与えられたとき、Riemann計量を
  - $ds^2 = \theta^1\theta^1 + \theta^2\theta^2$ (2.1)
- と、1次独立な1次微分形式θ^1, θ^2を使って書き表せる。
  - 例えば、
    - $\theta^1 = a_1^1 du + a_2^1 dv, \theta^2 = a_1^2 du + a_2^2 dv$とおいたときに
    - $E = (a_1^1)^2 + (a_1^2)^2, F = a_1^1 a_2^1 + a_1^2 a_2^2, G = (a_2^1)^2 + (a_2^2)^2$を満たせばよいので
    - $a_1^1 = \sqrt{E}, a_1^2 = 0, a_2^1 = \frac{F}{\sqrt{E}}, a_2^2 = \sqrt{\frac{EG-F^2}{E}}$が解の一つ

第一構造式、第二構造式

- $d\theta^1 = \theta^2 \wedge w_2^1, d\theta^2 = \theta^1 \wedge w_1^2$ (2.5)
- が成り立つような$w_2^1 = -w_1^2$を求める。
  - $w_2^1 = b_1\theta^1 + b_2\theta^2$ (2.6)
- とおくと、(2.5)は
  - $d\theta^1 = -b_1\theta^1 \wedge \theta^2, d\theta^2 = -b_2\theta^1 \wedge \theta^2$ (2.7)
- (2.7)よりb_1, b_2が一意に決まり、(2.5)が成り立つような
  - $\omega = \begin{pmatrix} 0 & w_2^1 \\ w_1^2 & 0 \end{pmatrix}$
- がただ一つ決まる。これを接続形式 (connection form)
- また、第二構造式から
  - $dw_2^1 = K\theta^1 \wedge \theta^2$ (2.9), K ：Gaussの曲率

Theorema egregium (最も素晴らしい定理)

- $ds^2 = \theta^1\theta^1 + \theta^2\theta^2$ (2.1)
- (2.1)が成り立つような他の$\bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2$を使うとどうなるか。
  - $\begin{pmatrix} \bar{\theta}^1 \\ \bar{\theta}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1^1 & s_2^1 \\ s_1^2 & s_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix}$ (2.11)
  - $\bar{w} = -dS \cdot S^{-1} + SwS^{-1}$ (2.20)
  - $d\bar{\theta} = -\bar{w} \wedge \bar{\theta}$ (2.21)
  - $d\bar{w} = S \cdot dw \cdot S^{-1}$ (2.33)
  - $\bar{K} = K$ (2.37)
- すなわち、Gaussの曲率Kは、Riemann計量ds^2にだけにしかよらず、(2.1)のθ^1, θ^2の選び方によらない。
- 空間内の曲面のGaussの曲率は第二基本形式IIを使って定義したのにもかかわらず、第一基本形式Iで定まることがわかった。

Gaussの曲率$\boldsymbol{K}$とRiemann計量$\boldsymbol{ds^2}$

- Kをds^2を使って書きたい。
  - $ds^2 = Edudu + Gdvdv$ (2.38)
- という特別な形をしている場合
  - $\theta^1 = \sqrt{E}du, \theta^2 = \sqrt{G}dv$ (2.39)
- であり、
  - $w_2^1 = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}du - \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}dv$ (2.40)
  - $K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right]$
- さらに特別に
  - $ds^2 = E(dudu + dvdv)$
- と書けたとすると
  - $K = -\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\log\sqrt{E} = -\frac{1}{2E}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\log E$