

曲線と曲面の微分幾何 (改訂版)

小林 昭七
裳華房

QD 部

小松原 航

2022/12/16

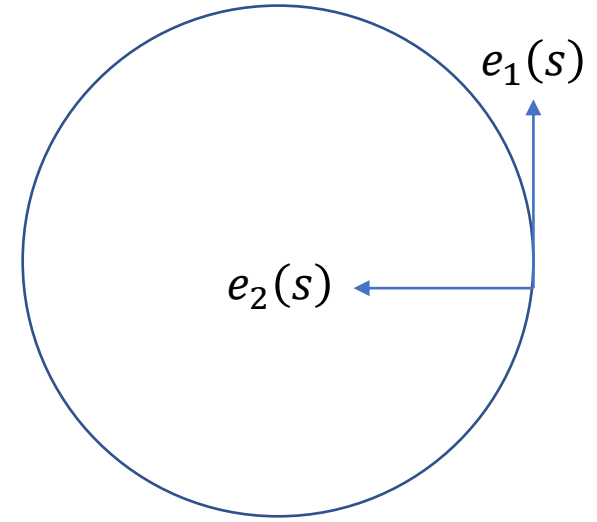
1. 平面上の曲線、空間内の曲線

§ 2 平面曲線

- $p = (x(t), y(t))$
- 曲線 $p(t)$ の距離を $s = \int_0^t |\dot{p}(u)| du$, $\dot{s}(t) = |\dot{p}(t)|$
- すべての t に対して $\dot{p}(t) \neq 0$ ならば $|\dot{p}(t)| > 0$ より s は t の単調増加関数となり、 $t = t(s)$ と書ける。
- $p = p(s) = (x(s), y(s))$
- $p' = p'(s) = (x'(s), y'(s))$: s に関する微分は'で表す。
 - $|p'(s)| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \frac{dt}{ds} = \frac{ds}{dt} \frac{dt}{ds} = 1$
- $e_1 = p'$ ととり、 e_2 は e_1 に対して左の方向を向いているとする。

例2.1 円

- $x(t) = r \cos t, y(t) = r \sin t$
- $s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt = rt$ より
- $x(s) = r \cos \frac{s}{r}, y(s) = r \sin \frac{s}{r}$
- $e_1(s) = \left(-\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r} \right)$
- $e_2(s) = \left(-\cos \frac{s}{r}, -\sin \frac{s}{r} \right)$
- $e_1'(s) = \left(-\frac{1}{r} \cos \frac{s}{r}, -\frac{1}{r} \sin \frac{s}{r} \right) = \frac{1}{r} e_2(s)$
- $e_2'(s) = \left(\frac{1}{r} \sin \frac{s}{r}, -\frac{1}{r} \cos \frac{s}{r} \right) = -\frac{1}{r} e_1(s)$

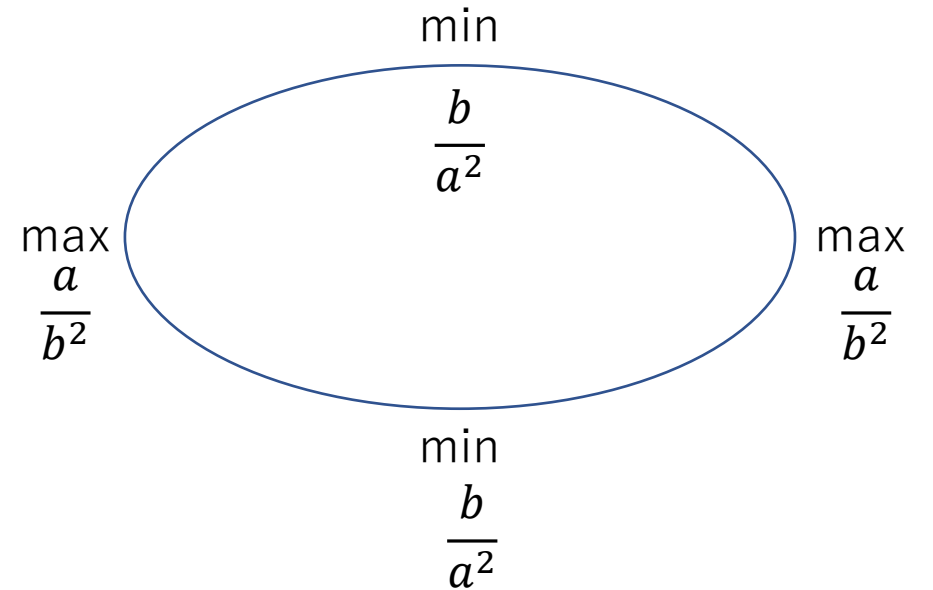


Curvature (曲率)

- $p' = e_1, e_1 \cdot e_1 = 1, e_2 \cdot e_2 = 1, e_1 \cdot e_2 = 0$
- $e_1 \cdot e_1 = 1$ を微分して $2e_1 \cdot e_1' = 0$ 。したがって、 e_1' は e_1 と直交する。したがって、
 - $e_1'(s) = \kappa(s)e_2(s)$
- また、 $e_1 \cdot e_2 = 0$ を微分して
 - $e_1' \cdot e_2 + e_1 \cdot e_2' = 0$
 - $\kappa + e_1 \cdot e_2' = 0$ 。よって、 $e_2' = -\kappa e_1$
- まとめると
 - $e_1'(s) = \kappa(s)e_2(s)$
 - $e_2'(s) = -\kappa(s)e_1(s)$
- この $\kappa(s)$ を曲線 $p(s)$ の曲率
- 円の場合は $\kappa(s) = \frac{1}{r}$
- 定理2.1
 - 曲線 $p(s)$ の曲率が恒等的に0になるのは、 $p(s)$ が直線の時で、その時に限る。
- 定理2.2
 - 平面上の2曲線 $p(s), \bar{p}(s)$ の曲率 $\kappa(s), \bar{\kappa}(s)$ が一致するための必要十分条件は、回転と平行移動を使って $p(s)$ を $\bar{p}(s)$ に重ねることができることである。

例2.2 橢円

- $x(t) = a \cos t, y(t) = b \sin t$
- $\frac{ds}{dt} = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$
- $e_1 = \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} (-a \sin t, b \cos t)$
- $e_2 = \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} (-b \cos t, -a \sin t)$
- $\kappa(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$



曲率の一般式

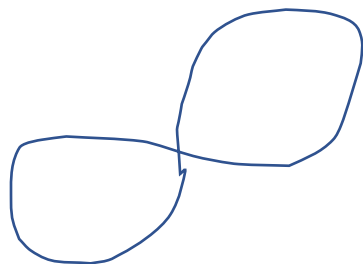
- $$\kappa(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

- 極座標表示の時

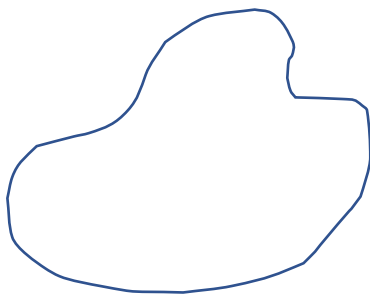
- $$\kappa = \frac{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

§ 3 平面曲線に関する大域的定理

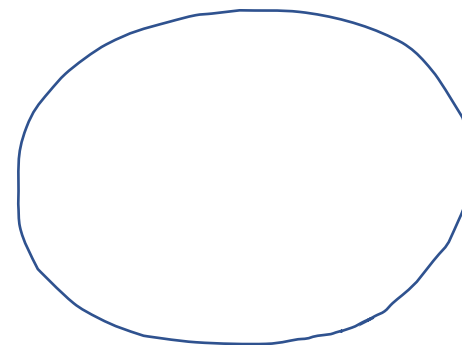
- 曲率 $\kappa(s)$ は、その点のごく近傍における関数の様子で決まるので、局所的性質と呼ばれる。
- 曲線全体に関する大域的性質
 - 曲線が閉じていると、コンパクトだから、曲率が最大・最小になる点が存在する。
 - 曲率を曲線上で積分できる
 - 閉曲線がある点の周りを何回回っているか
- 平面曲線 $p(s) (a \leq s \leq b)$ で始点 $p(a)$ と終点 $p(b)$ が一致するとき、閉曲線(closed curve)
- a, b 以外のパラメータ値 s_1, s_2 に対して $p(s_1) = p(s_2)$ となることがないときには単純閉曲線(simple closed curve)
 - Jordanの定理・・・単純閉曲線は平面を2つの領域(外部と内部)に分ける
 - 「このようにいったい何を証明しなければならないのかわからない定理は一部の職業的数学者に任せればよいので」
- 卵形線(oval), 凸閉曲線 (convex closed curve)
 - 単純閉曲線上のどの二点を結ぶ線分も曲線の外部に飛び出さない



閉曲線、ただし単純閉曲線でない



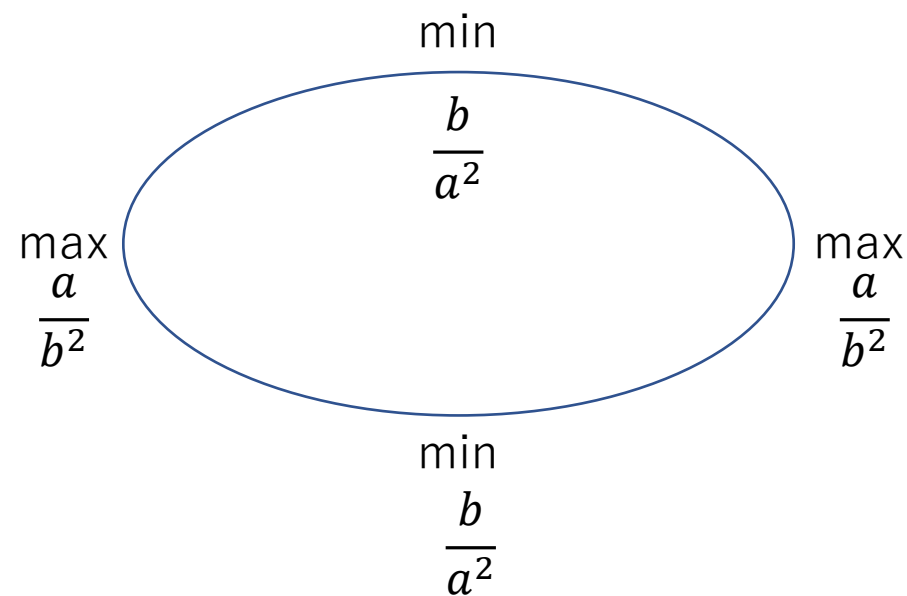
凸でない単純閉曲線



卵形線

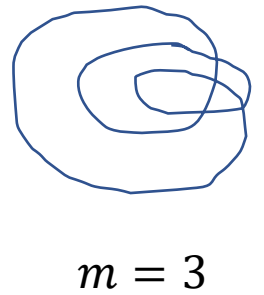
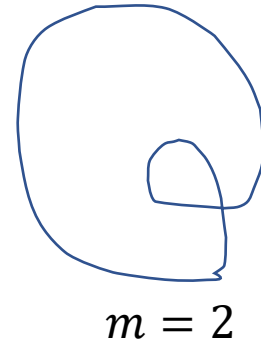
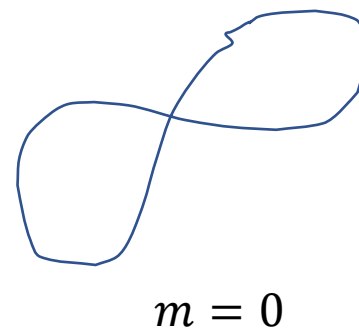
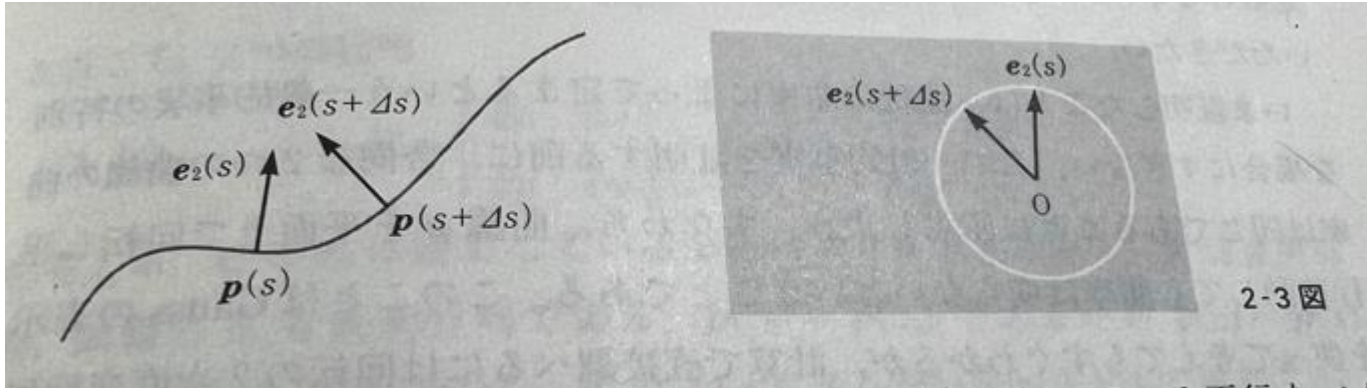
定理3.1 (四頂点定理, Mukhopadhyaya)

- 卵形線上には少なくとも4つ頂点がある。
 - 頂点 $\dots \kappa'(s) = 0$ となる点



回転数

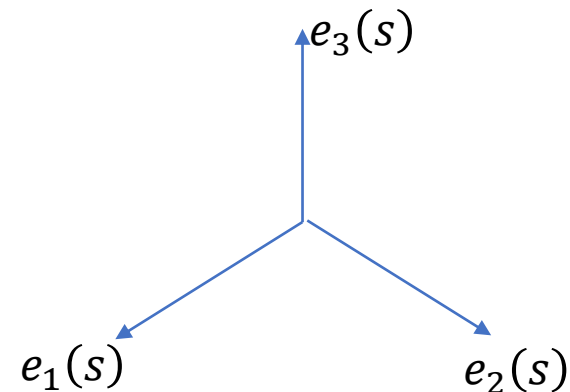
- 閉曲線 $p(s)(a \leq s \leq b)$ の曲率を κ とすると
 - $m = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \kappa(s) ds$
- は常に整数となる。
- $e_2(s + \Delta s) = e_2(s) + e_2'(s)\Delta s = e_2(s) - \kappa(s)e_1(s)\Delta s + \dots$
- 距離 $\kappa(s)\Delta s$ だけ $-e_1(s)$ の方向へ動く。
- よって、曲率の積分は、単位円周上を $e_2(s)$ が何回回ったかを表すため、回転数と呼ぶ。



全曲率(total curvature)

- $\mu = \int_a^b |\kappa(s)| ds$
- Fenchelの定理の特別な場合
 - 閉曲線 $p(s)$ の全曲率 μ に対し、 $\mu \geq 2\pi$ という不等式が成り立ち、等式 $\mu = 2\pi$ が成り立つのは、 $p(s)$ が卵形線の時に限る。

§ 4 空間曲線



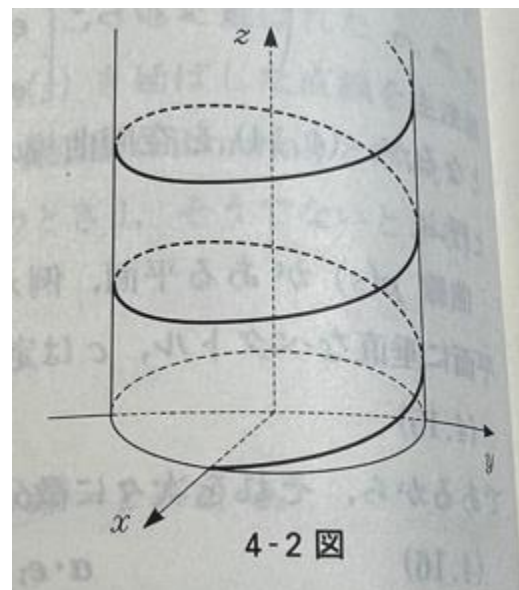
- $p(s) = (x(s), y(s), z(s))$
- 曲線 $p(s)$ によって表される運動の速さは一定で1になるようにパラメータが取ってあるとする。
- $e_1(s) = p'(s) = (x'(s), y'(s), z'(s))$
- $e_1(s) \cdot e_1(s) = 1$ より、微分して $e_1(s) \cdot e_1'(s) = 0$
- $e_1'(s)$ の長さを $\kappa(s)$ と書き、曲線 $p(s)$ の曲率と呼ぶ。
 - $\kappa(s) = \sqrt{e_1'(s) \cdot e_1'(s)}$
- 空間曲線の場合は、 $e_1(s)$ に直交する単位ベクトルは無限になるので、以下のように定義する。
 - $e_1'(s) = \kappa(s)e_2(s) \Leftrightarrow e_2(s) = \frac{1}{\kappa(s)} e_1'(s)$
 - 以下、 $\kappa(s) > 0$ と仮定する
- $e_3 = e_1 \times e_2$ で定義する。Frenetの標構(Frenet frame)
 - e_2 を延ばした直線を主法線(principal normal), $e_3(s)$ を延ばした直線を従法線(binormal)と呼ぶ。

Frenet-Serretの公式、捩率(torsion)

- $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ を微分していくと(詳細は省略)
 - $p' = e_1$
 - $e_1' = \kappa e_2$
 - $e_2' = -\kappa e_1 + \tau e_3$
 - $e_3' = -\tau e_2$
- 定理4.1
 - 空間曲線 $p(s)$ の曲率 κ が常に正であるとする、捩率 τ がいたるところ0になるのは、 $p(s)$ が一つの平面に含まれているとき、そしてその時に限る。
- 定理4.2
 - 空間内の2曲線 $p(s), \bar{p}(s)$ の曲率、捩率をそれぞれ $\kappa(s), \tau(s), \bar{\kappa}(s), \bar{\tau}(s)$ とすると、 $\kappa = \bar{\kappa}$ かつ $\tau = \bar{\tau}$ になるための必要十分条件は、回転と平行移動を使って $p(s), \bar{p}(s)$ を重ねることができることである。
- 1次元からのはみだし具合が曲率で2次元からのはみだし具合が捩率?

例4.1 常螺旋(helix)

- $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$
- $s = \sqrt{a^2 + b^2}t$
- $e_1 = \left(-\frac{a}{c} \sin \frac{s}{c}, \frac{a}{c} \cos \frac{s}{c}, \frac{b}{c}\right) \quad (c = \sqrt{a^2 + b^2})$
- $e'_1 = \left(-\frac{a}{c^2} \cos \frac{s}{c}, -\frac{a}{c^2} \sin \frac{s}{c}, 0\right)$
- $\kappa = \frac{a}{c^2}$
- $e_2 = \frac{1}{\kappa} e'_1 = \left(-\cos \frac{s}{c}, -\sin \frac{s}{c}, 0\right)$
- $e_3 = \left(\frac{b}{c} \sin \frac{s}{c}, -\frac{b}{c} \cos \frac{s}{c}, \frac{a}{c}\right)$
- $e'_2 = \left(\frac{1}{c} \sin \frac{s}{c}, -\frac{1}{c} \cos \frac{s}{c}, 0\right) = -\frac{a}{c^2} e_1 + \frac{b}{c^2} e_3$
- $\kappa = \frac{a}{a^2+b^2}, \tau = \frac{b}{a^2+b^2}$



問

- 問4.1 (Bouquetの定理)
 - 空間曲線 $p(s)$ を $s = 0$ でテイラー展開すると
 - $p(s) = p(0) + e_1(0)s + \kappa(0)e_2(0)\frac{s^2}{2} + \{-\kappa(0)^2e_1(0) + \kappa'(0)e_2(0) + \kappa(0)\tau(0)e_3(0)\}\frac{s^3}{3!} + \dots$
- 問4.2
 - 空間曲線 $p(t)$ に対し
 - $\kappa = \frac{|\dot{p} \times \ddot{p}|}{|\dot{p}|^3}, \tau = \frac{|\dot{p} \quad \ddot{p} \quad \ddot{\ddot{p}}|}{|\dot{p} \times \ddot{p}|^2}$

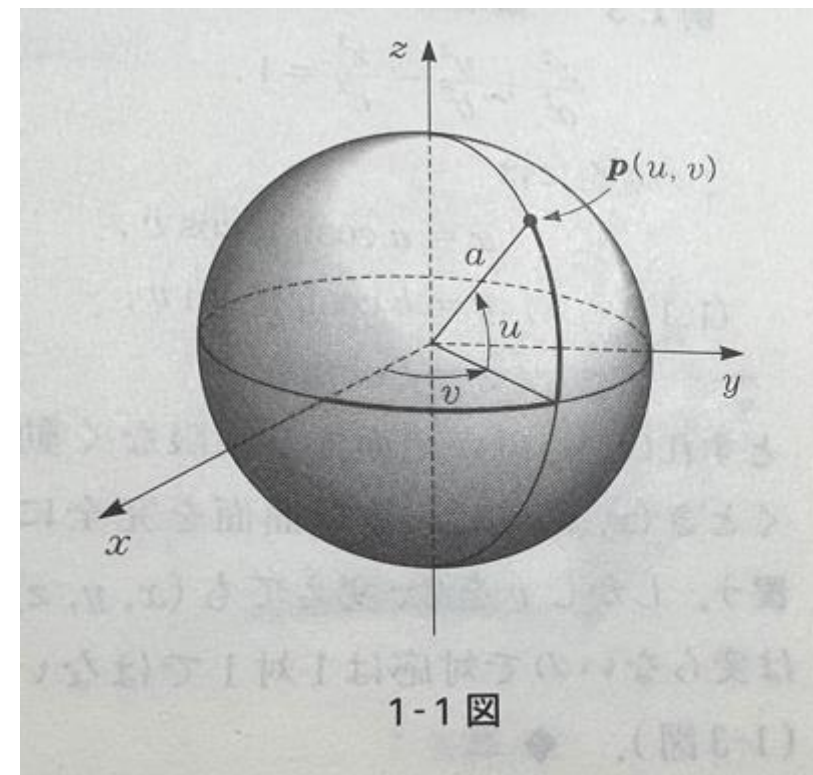
§ 5 空間曲線に関する大域的定理

- 定理5.1 Fenchelの定理
 - 空間内の閉曲線 $p(s)$ ($a \leq s \leq b$)の曲率を $\kappa(s)$ とすると
 - $\int_a^b \kappa(s) ds \geq 2\pi$
 - かつ、等号は $p(s)$ が平面に含まれた卵形線のとみにだけ成り立つ。
 - 左辺を全曲率(total curvature)
- 定理5.2
 - 空間内の単純閉曲線 $p(s)$ が結び糸になっているならば、その全曲率は少なくとも 4π である。

2 空間内の曲面の小域的理論

§ 1 空間内の曲面の概念

- 球面(sphere)
 - $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$
 - $x = a \cos u \cos v$
 - $y = a \cos u \sin v$
 - $z = a \sin u$
 - $|u| < \frac{\pi}{2}$ とすると、南北両極を除いた部分を動く



- 楕円面 (ellipsoid)

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

- $x = a \cos u \cos v$

- $y = b \cos u \sin v$

- $z = c \sin u$

- 一葉双曲面 (hyperboloid of one sheet)

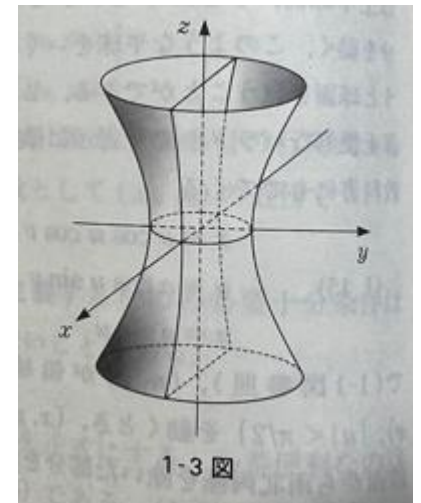
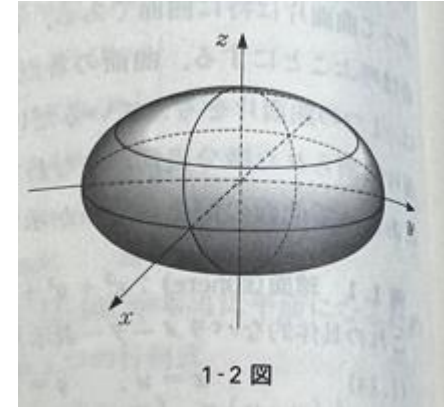
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

- $x = a \cosh u \cos v$

- $y = b \cosh u \sin v$

- $z = c \sinh u$

- (u, v) が平面上を制限なく動くとき、一葉双曲面を完全に覆う。



- 二葉双曲面 (hyperboloid of two sheets)

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$

- $x = a \sinh u \cos v$

- $y = b \sinh u \sin v$

- $z = c \cosh u$

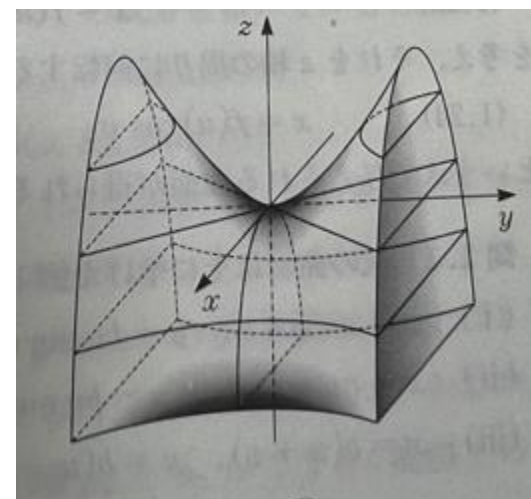
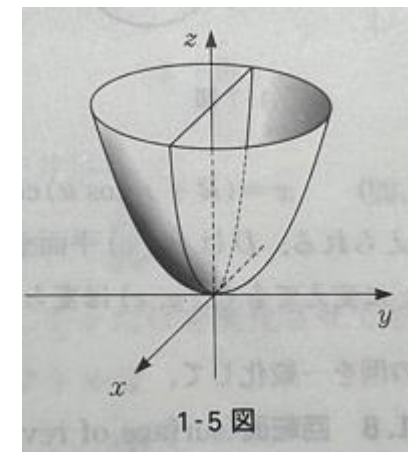
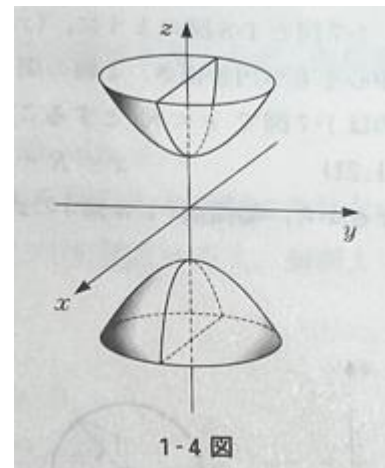
- $D = \{(u, v); u > 0\}$ とすると上半分の曲面から頂点を除いた部分に対応する。下半分が欲しいなら $z = -c \cosh u$ とする。

- 楕円放物面 (elliptic paraboloid)

- $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

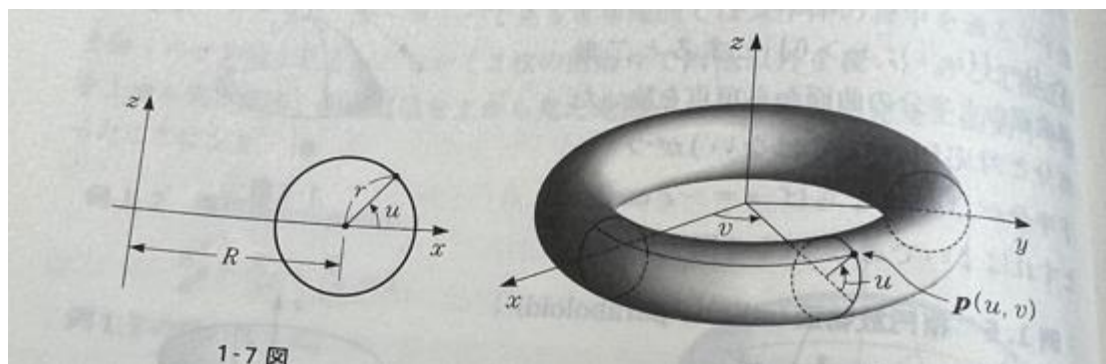
- 双曲放物面 (hyperbolic paraboloid)

- $z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$



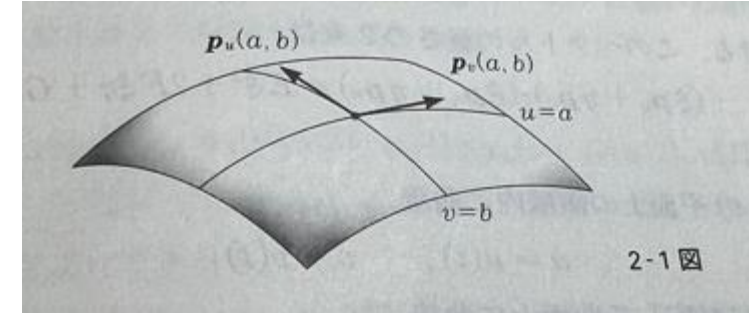
- 輪環面(torus)

- $x = (R + r \cos u) \cos v, y = (R + r \cos u) \sin v, z = r \sin u$



§ 2 基本形式と曲率

- $p(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$
- $E = p_u \cdot p_u, F = p_u \cdot p_v = p_v \cdot p_u, G = p_v \cdot p_v$ とおく。
- p_u, p_v で張る接平面のベクトルは
 - $\xi p_u + \eta p_v$
- で書ける。長さの二乗は
 - $(\xi p_u + \eta p_v) \cdot (\xi p_u + \eta p_v) = E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2$
- また、 (u, v) 平面上の領域内に曲線
 - $u = u(t), v = v(t)$
- を取り、それに対応して曲面上に曲線
 - $p(t) = p(u(t), v(t))$
- を考える。この曲線の各点における接ベクトルは
 - $\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial p}{\partial v} \frac{dv}{dt} = p_u \frac{du}{dt} + p_v \frac{dv}{dt}$
- よって、長さの2乗は
 - $\frac{dp}{dt} \cdot \frac{dp}{dt} = E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2$
- t が $\alpha \rightarrow \beta$ まで動くときのこの曲線の長さは
 - $\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2} dt$
- このとき
 - $1 = Edu + 2Fdv + Gdv$
- を第一基本形式(first fundamental form)



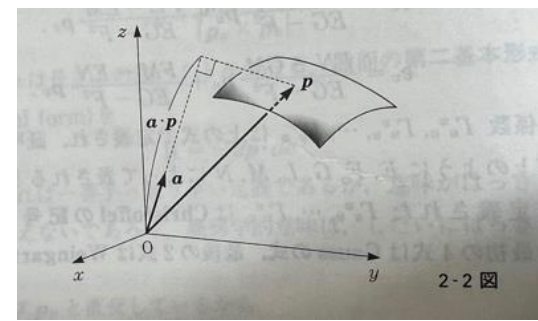
第2基本形式

- 第1基本形式は形式的に
 - $dp = p_u du + p_v dv$
 - $I = dp \cdot dp$
- と書ける。
 - 「使って便利で正しい結果が出てくる概念、記号、式などは当初曖昧な点があっても、後できちんと正当化されるということは数学の歴史が示している」
- $e = \frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|}$ は接平面に垂直の法ベクトル
- 曲面の第二基本形式(second fundamental form)は
 - $II = -dp \cdot de$
 - 「これは一番手っ取り早い定義であるが、意味がはっきりせず、良い定義とはいえないであろう。幾何学的意味は、しだいにはっきりしてくる」

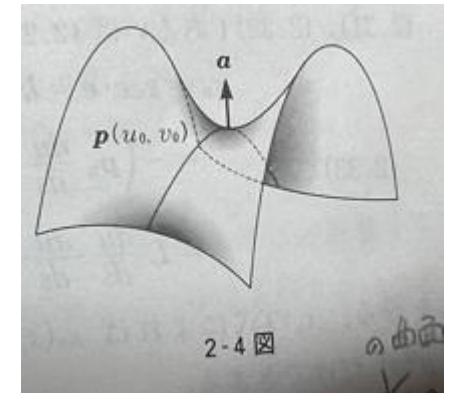
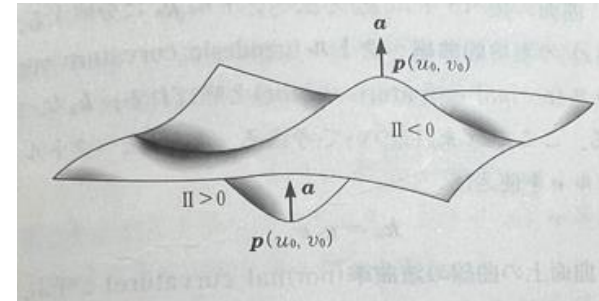
Gaussの式、 Weingartenの式

- $p_u \cdot e = 0, p_v \cdot e = 0$ を微分していくと
 - $L = p_{uu} \cdot e = -p_u \cdot e_u$
 - $M = p_{uv} \cdot e = -p_u \cdot e_v = p_{vu} \cdot e = -p_v \cdot e_u$
 - $N = p_{vv} \cdot e = -p_v \cdot e_v$
- このとき
 - $\text{II} = -dp \cdot de = (p_u du + p_v dv) \cdot (e_u du + e_v dv)$
 - $= Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$
- また、このとき
 - Gaussの式
 - $p_{uu} = \Gamma_{uu}^u p_u + \Gamma_{uu}^v p_v + Le$
 - $p_{uv} = \Gamma_{uv}^u p_u + \Gamma_{uv}^v p_v + Me$
 - $p_{vu} = \Gamma_{vu}^u p_u + \Gamma_{vu}^v p_v + Me$
 - $p_{vv} = \Gamma_{vv}^u p_u + \Gamma_{vv}^v p_v + Ne$
 - Γ_{ab}^c : Christoffelの記号、 E, F, G, L, M, N で書ける
 - Weingartenの式
 - $e_u = \frac{FM-GL}{EG-F^2} p_u + \frac{FL-EM}{EG-F^2} p_v$
 - $e_v = \frac{FN-GM}{EG-F^2} p_u + \frac{FM-EN}{EG-F^2} p_v$

第二形式の幾何学的意味



- 曲面上の関数 f を
 - $f(u, v) = a \cdot p(u, v)$
 - f は a 方向の高さを表す関数である。
- 曲面上の点 $p_0 = p(u_0, v_0)$ を固定して、 a をそこでの法ベクトル $a = e(u_0, v_0)$ とする。
- $a \cdot p_u(u_0, v_0) = a \cdot p_v(u_0, v_0) = 0$ より
 - $df = d(a \cdot p) = a \cdot p_u du + a \cdot p_v dv = 0$
 - 幾何学的な意味は、 a を真上を向いたベクトルとしたとき、 p_0 での接平面は a に直交するから水平で、それは、曲面の高さが p_0 で臨界値(critical value)に達している
- p_0 で df が 0 であるから、 f の Hesse 行列を調べることにより、 f の p_0 近傍での様子がわかる
 - $H_f = \begin{bmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{vu} & f_{vv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(u_0, v_0) & M(u_0, v_0) \\ M(u_0, v_0) & N(u_0, v_0) \end{bmatrix}$
- 第二基本形式
 - $II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$
- が $p(u_0, v_0)$ において正値 2 次形式になるとすると、Hesse 行列 H_f が正値、つまり f が (u_0, v_0) において上に凹となる。
- II が負値 2 次形式ならば、上に凸
- II が不定値、すなわち $LN - M^2 < 0$ のときは、鞍点となる。 $LN - M^2 = 0$ のときは一般には何も言えない。
- 定理 2.1
 - 第二基本形式 $II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ が定値になる点、すなわち $LN - M^2 > 0$ となる点では、曲面は凹/凸となり、不定値、 $LN - M^2 < 0$ となる点では鞍状になる。



曲面上の曲線の曲率

- 空間曲線 $p(s) = p(u(s), v(s))$
- $\left|\frac{dp}{ds}\right| = 1$ となるパラメータ s が入っているとする。
- $p''(s)$ の長さが曲率の定義であった。 $p''(s)$ は曲面 $p(u, v)$ に接してはいないから
 - $p''(s) = k_g + k_n$
 - k_g : 曲面の接ベクトル。測地的曲率ベクトル (geodesic curvature vector)
 - k_n : 法曲率ベクトル (normal curvature vector)
- k_n は法ベクトルであるから $k_n = \kappa_n e$ と書ける。 κ_n を曲線上の曲線の法曲率 (normal curvature)
 - $\kappa_n = \kappa_n e \cdot e = k_n \cdot e = (p'' - k_g) \cdot e = p'' \cdot e = -p' \cdot e'$
 - $= -\left(p_u \frac{du}{ds} + p_v \frac{dv}{ds}\right) \cdot \left(e_u \frac{du}{ds} + e_v \frac{dv}{ds}\right) = L \frac{du}{ds} \frac{du}{ds} + 2M \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + N \frac{dv}{ds} \frac{dv}{ds}$
 - κ_n は曲線 $p(s)$ そのものではなく、 $p'(s)$ のみで決まる。
- したがって、曲面上の点 $p_0 = p(u_0, v_0)$ に対して単位接ベクトル
 - $w = \xi p_u(u_0, v_0) + \eta p_v(u_0, v_0)$
 - $\Pi(w, w) = L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2$
 - $\kappa_n(s) = \Pi(p'(s), p'(s))$
- と書ける。

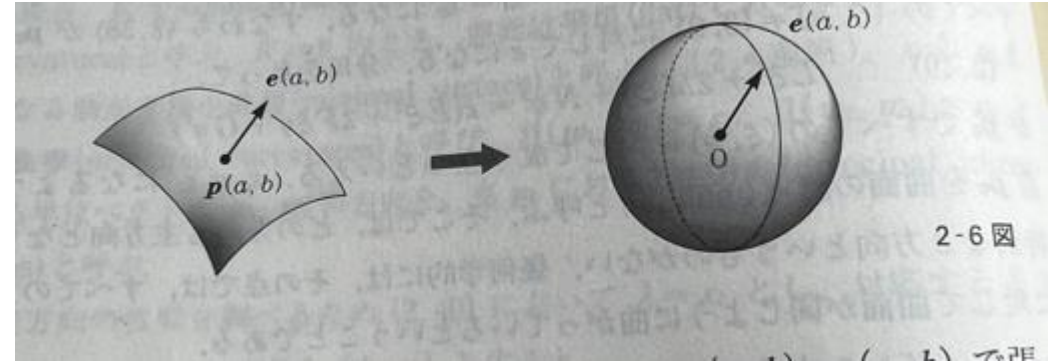
ガウスの曲率、平均曲率

- $\text{II}(w, w)$ において w を p_0 での接平面内の単位円上を動かすときの最大、最小を求める。つまり、
 - $|w|^2 = E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2 = 1$ の条件で
 - $\text{II}(w, w) = L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2$ の最大・最小を求める
- 最大・最小の解を κ_1, κ_2 とおくと
 - $\kappa_1\kappa_2 = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = K, \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{EN+GL-2FM}{2(EG-F^2)} = H$
 - K : Gaussの曲率, H : 平均曲率
 - $K \equiv 0$ のとき、曲面は平坦 (flat)
 - $H \equiv 0$ のとき、曲面は極小平面 (minimal surface)
 - κ_1, κ_2 を主曲率 (principal curvatures)
 - $\text{II}(w_1, w_1) = \kappa_1, \text{II}(w_2, w_2) = \kappa_2$ となる単位ベクトル w_1, w_2 の方向を、点 p_0 における主方向 (principal direction)

性質

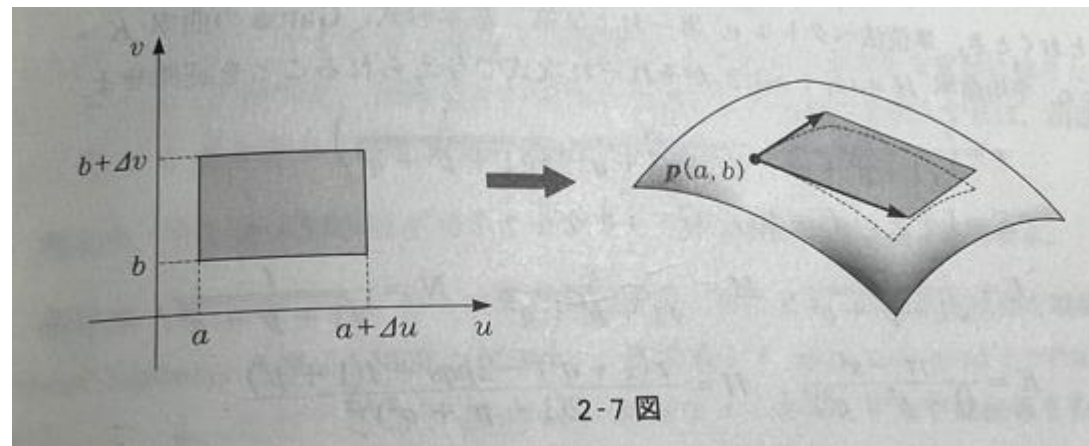
- $\kappa_1 \neq \kappa_2$ なら、2つの主方向は互いに直角
- $\kappa_1 = \kappa_2$ なら、 $\Pi(w, w)$ で w が単位円上を動くとき定数 κ となる。このような点と臍点(せいてん、umbilic)
 - どの方向も主方向
 - すべての方向に対して曲面が同じように曲がっている
- $K > 0$ となる点を楕円点(elliptic point), $K < 0$ となる点を双曲点(hyperbolic point)、 $K = 0$ となる点を放物点(parabolic point)
- 第一基本形式は常に正値であるから、 $EG - F^2 > 0$ で、
 - $\frac{LN - M^2}{EG - F^2} = K$
- より、 K は $LN - M^2$ と同じ符号をもつ。
- 定理2.1
 - 第二基本形式 $II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ が定値になる点、すなわち $LN - M^2 > 0$ となる点では、曲面は凹/凸となり、不定値、 $LN - M^2 < 0$ となる点では鞍状になる。
- より
- 定理2.2
 - Gaussの曲率 K が正になる点では、曲面は凸、負になる点では鞍上になる。
- $k_g \equiv 0$ となるとき、 $p(s)$ を測地線(geodesic)と呼ぶ。

Gaussの球面表示



- 平面曲線
 - 曲率とは、点が p_0 の近くを曲線に沿って動く距離と、Gaussの表示により対応する点が単位円上を動く距離との比
- 曲面
 - Gaussの曲率が面積の比として理解される
- 接平面上のベクトル p_u, p_v で張られた平行四辺形の面積は
 - $|p_u \times p_v|$
- 単位球面上に対応する点 e に対応する接ベクトル e_u, e_v で張られる平行四辺形の面積は
 - $|e_u \times e_v|$
 - $e_u \times e_v = \left(\frac{FM-GL}{EG-F^2} p_u + \frac{FL-EM}{EG-F^2} p_v \right) \times \left(\frac{FN-GM}{EG-F^2} p_u + \frac{FM-EN}{EG-F^2} p_v \right) = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} p_u \times p_v$
 - $|e_u \times e_v| = |K| |p_u \times p_v|$
 - (e_u, e_v, e) が左手系の時には、 e_u, e_v で張られた平行四辺形の面積は $-|e_u \times e_v|$ であると定義して、面積に符号をつければ、 K は面積比と考えることができる。

面積要素



- $|p_u \times p_v| du dv$
- を曲面の面積要素という。 (u, v) が領域 R を動くとき対応する曲面上の領域の面積は
 - $\iint_R |p_u \times p_v| du dv$
- となり、Gaussの表示によりそれに対応する単位球面上の領域の符号付の面積は
 - $\iint_R K |p_u \times p_v| du dv = \iint_R K \sqrt{EG - F^2} du dv$
 - $|p_u \times p_v|^2 = |p_u|^2 |p_v|^2 - (p_u \cdot p_v)^2 = EG - F^2$
 - $(w \times x) \cdot (y \times z) = (w \cdot y)(x \cdot z) - (w \cdot z)(x \cdot y)$ (Lagrangeの公式)
 - (左) $= \varepsilon_{ijk} w_j x_k \varepsilon_{ilm} y_l z_m = (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) w_j x_k y_l z_m = w_j x_k y_j z_k - w_j x_k y_k z_j = (w \cdot y)(x \cdot z) - (w \cdot z)(x \cdot y)$

問2.1

- 曲面が $z = f(x, y)$ で与えられたとき

- $p = \frac{\partial f}{\partial x}, q = \frac{\partial f}{\partial y}, r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

- とおくと

- $e = \left(\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right)$

- $E = 1 + p^2, F = pq, G = 1 + q^2$

- $L = \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, M = \frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, N = \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$

- $K = \frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}, H = \frac{r(1+q^2)-2pq s+t(1+p^2)}{2(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}$

問2.2

- 曲面の第三基本形式は
 - $\text{III} = de \cdot de$
- で定義される。このとき
 - $K\text{I} - 2H\text{II} + \text{III} = 0$

問2.3

- 曲面 $p(u, v)$ 上の曲線 $p(s) = p(u(s), v(s))$ が測地線($k_g = 0$)となるための必要十分条件は、 u, v が次の微分方程式の解であることである

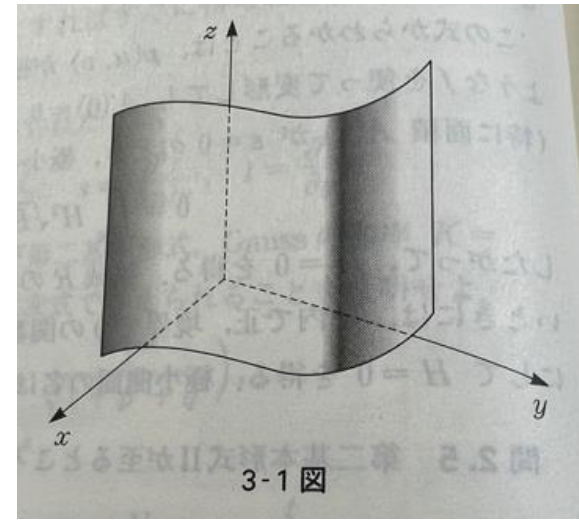
$$\bullet \frac{d^2 u}{ds^2} + \Gamma_{uu}^u \frac{du}{ds} \frac{du}{ds} + 2\Gamma_{uv}^u \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \Gamma_{vv}^u \frac{dv}{ds} \frac{dv}{ds} = 0$$

$$\bullet \frac{d^2 v}{ds^2} + \Gamma_{uu}^v \frac{du}{ds} \frac{du}{ds} + 2\Gamma_{uv}^v \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \Gamma_{vv}^v \frac{dv}{ds} \frac{dv}{ds} = 0$$

問2.5

- 第二基本形式IIが至る所0ならば、平面に限る

§ 3 実例について基本形式、曲率



• 3.1 柱面 (cylindrical surface)

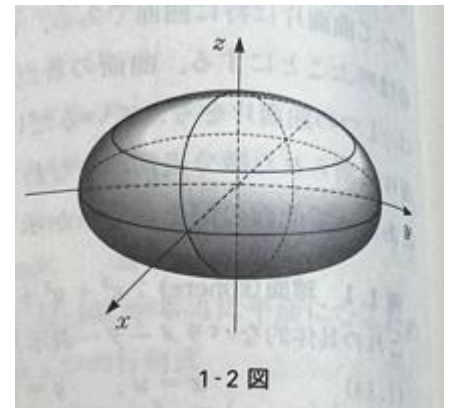
- $x = x(u), y = y(u), z = v$
- $\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 = 1$ となるように u を取ってある
- $p(u, v) = (x(u), y(u), v)$
- $p_u = (x', y', 0), p_v = (0, 0, 1)$
- $I = (du)^2 + (dv)^2$
- $e = (y', -x', 0), de = (y'' du, -x'' du, 0)$
- $II = -dp \cdot de = (x'' y' - x' y'')(du)^2$
- $K = 0, H = \frac{1}{2}(x'' y' - x' y'')$
- $\kappa_1 = 0, \kappa_2 = x'' y' - x' y''$
- κ_1 に対応する主方向は z 軸の方向、 κ_2 に対応する主方向は xy 平面に平行な方向
- Gaussの球面表示において e は常に単位球の赤道上进行するので、 e が覆う面積は0

例3.2 楕円面

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
- $p(u, v) = (a \cos u \cos v, b \cos u \sin v, c \sin u)$
- $e = \frac{1}{\Delta} (-bc \cos u \cos v, -ca \cos u \sin v, -ab \sin u)$
 - $\Delta = \sqrt{b^2 c^2 \cos^2 u \cos^2 v + c^2 a^2 \cos^2 u \sin^2 v + a^2 b^2 \sin^2 u}$
- $E = a^2 \sin^2 u \cos^2 v + b^2 \sin^2 u \sin^2 v + c^2 \cos^2 u$
- $F = (a^2 - b^2) \sin u \cos u \sin v \cos v$
- $G = a^2 \cos^2 u \sin^2 v + b^2 \cos^2 u \cos^2 v$
- $EG - F^2 = \Delta^2 \cos^2 u$
- $L = \frac{abc}{\Delta}, M = 0, N = \frac{abc \cos^2 u}{\Delta}, K = \frac{a^2 b^2 c^2}{\Delta^4} = \frac{1}{a^2 b^2 c^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^2}$
- $H = \frac{abc[(a^2 + b^2 + c^2) - (a^2 \cos^2 u \cos^2 v + b^2 \cos^2 u \sin^2 v + c^2 \sin^2 u)]}{2\Delta^3} = \frac{(a^2 + b^2 + c^2) - (x^2 + y^2 + z^2)}{2a^2 b^2 c^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{\frac{3}{2}}}$

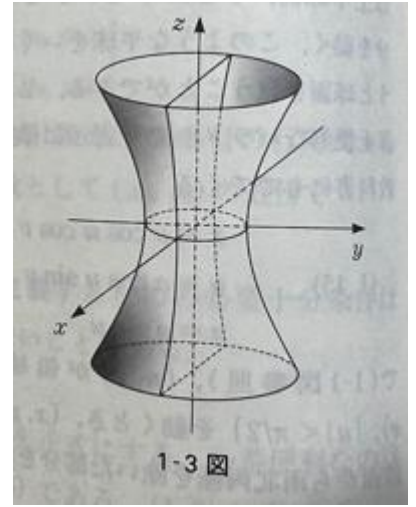
• 球面の場合

- $a = b = c$
- $I = a^2 (du)^2 + a^2 \cos^2 u (dv)^2$
- $II = a (du)^2 + a \cos^2 u (dv)^2$
- $e = \left(-\frac{x}{a}, -\frac{y}{a}, -\frac{z}{a} \right)$
- $K = \frac{1}{a^2}, H = \frac{1}{a}$



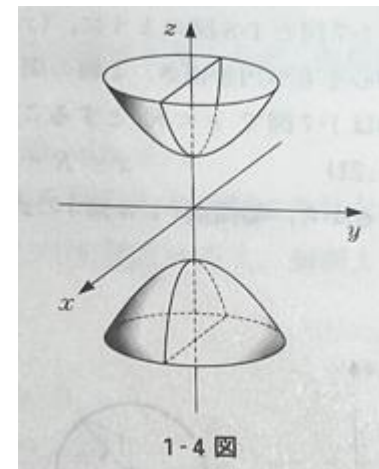
例3.3 一葉双曲面

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
- $p(u, v) = (a \cosh u \cos v, b \cosh u \sin v, c \sinh u)$
- $e = -\frac{1}{\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, -\frac{z}{c^2}\right)$
- $K = -\frac{1}{a^2 b^2 c^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^2}$
- $H = \frac{(x^2 + y^2 + z^2) - (a^2 + b^2 - c^2)}{2 a^2 b^2 c^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{\frac{3}{2}}}$

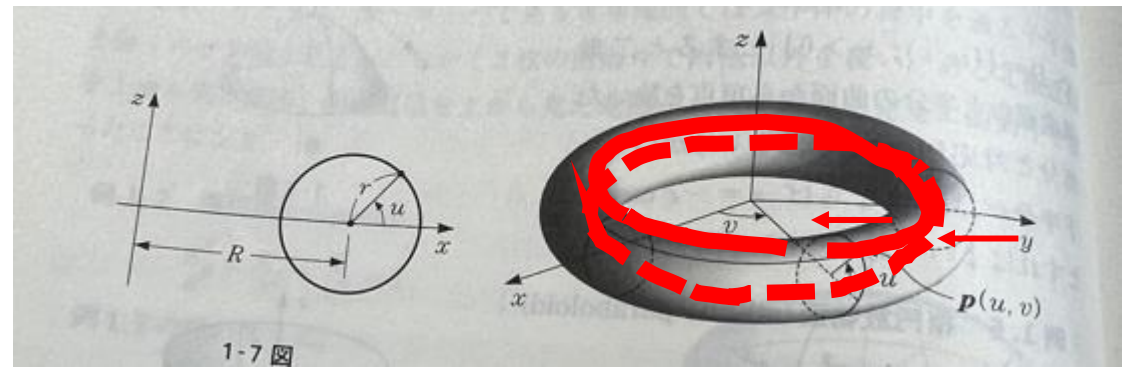


例3.4 二葉双曲面

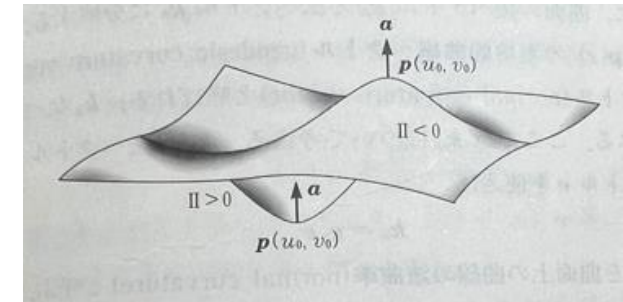
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$
- $p(u, v) = (a \sinh u \cos v, b \sinh u \sin v, c \cosh u)$
- $e = -\frac{1}{\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, -\frac{z}{c^2}\right)$
- $K = \frac{1}{a^2 b^2 c^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^2}$
- $H = \frac{(x^2 + y^2 + z^2) + (a^2 + b^2 - c^2)}{2 a^2 b^2 c^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{\frac{3}{2}}}$



例3.5 輪環面



- $p(u, v) = ((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin u)$
- $e = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u)$
- $E = r^2, F = 0, G = (R + r \cos u)^2$
- $L = r, M = 0, N = (R + r \cos u) \cos u$
- $K = \frac{\cos u}{r(R + r \cos u)}, 2H = \frac{\cos u}{R + r \cos u} + \frac{1}{r}, K_1 = \frac{\cos u}{R + r \cos u}, K_2 = \frac{1}{r}$



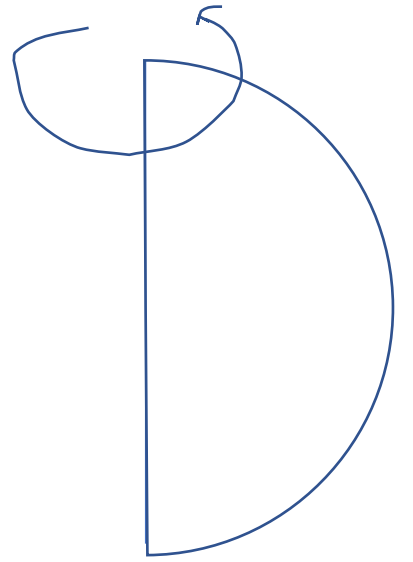
外側
 $K > 0$
 內側
 $K < 0$

例3.6 回転面

- $p(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$
 - $x = f(u), z = g(u)$ は z 軸と交わらないから $f(u) > 0$ とする。
- $e = \frac{1}{\sqrt{f'(u)^2 + g'(u)^2}} (-g'(u) \cos v, -g'(u) \sin v, f'(u))$
- $E = f'(u)^2 + g'(u)^2, F = 0, G = f^2$
- $L = \frac{f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)}{\sqrt{f'(u)^2 + g'(u)^2}}, M = 0, N = \frac{f(u)g'(u)}{\sqrt{f'(u)^2 + g'(u)^2}}$
- $K = \frac{\{f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)\}g'(u)}{f(u)\{f'(u)^2 + g'(u)^2\}^2}$
- $2H = \frac{g'(u)}{f(u)\{f'(u)^2 + g'(u)^2\}^{\frac{1}{2}}} + \frac{f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)}{\{f'(u)^2 + g'(u)^2\}^{\frac{3}{2}}}$
- $\kappa_1 = \frac{g'(u)}{f(u)\{f'(u)^2 + g'(u)^2\}^{\frac{1}{2}}}, \kappa_2 = \frac{f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)}{\{f'(u)^2 + g'(u)^2\}^{\frac{3}{2}}}$
- とくに、 $f'(u)^2 + g'(u)^2 = 1$ となるようにパラメータを選ぶと $f'(u)f''(u) + g'(u)g''(u) = 0$ より
 - $(f'g'' - f''g')g' = f'g''g' - f''g'g' = -f'f'f'' - f''(1 - f'f') = -f''$
- $K = -\frac{f''}{f}, 2H = \frac{g'}{f} - \frac{f''}{g'}, \kappa_1 = \frac{g'}{f}, \kappa_2 = -\frac{f''}{g'}$

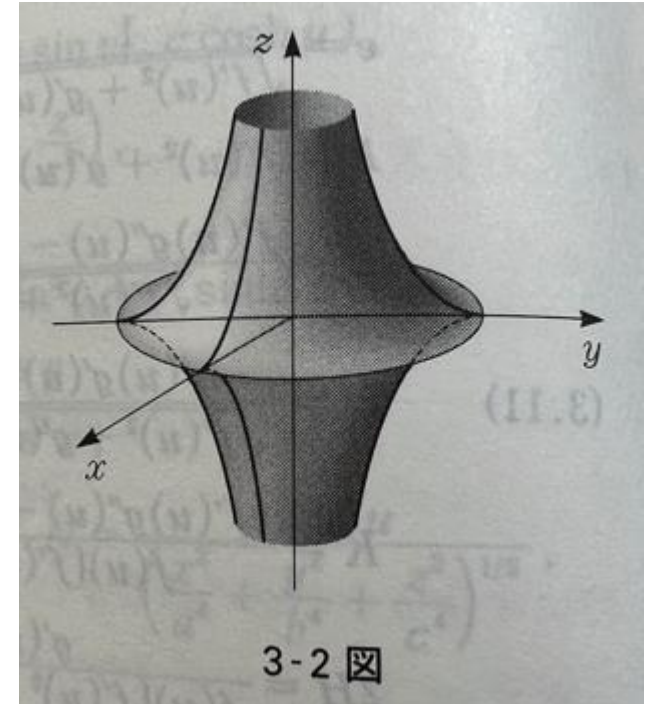
球面

- $K = -\frac{f''}{f} = \frac{1}{a^2}$
- $f''(u) = -\frac{f}{a^2}, f = a \sin\left(\frac{u}{a}\right)$
- $g'(u) = \pm\sqrt{1 - f'(u)^2} = \pm \sin\frac{u}{a}, g(u) = \mp a \cos\frac{u}{a}$
- 確かに球面！



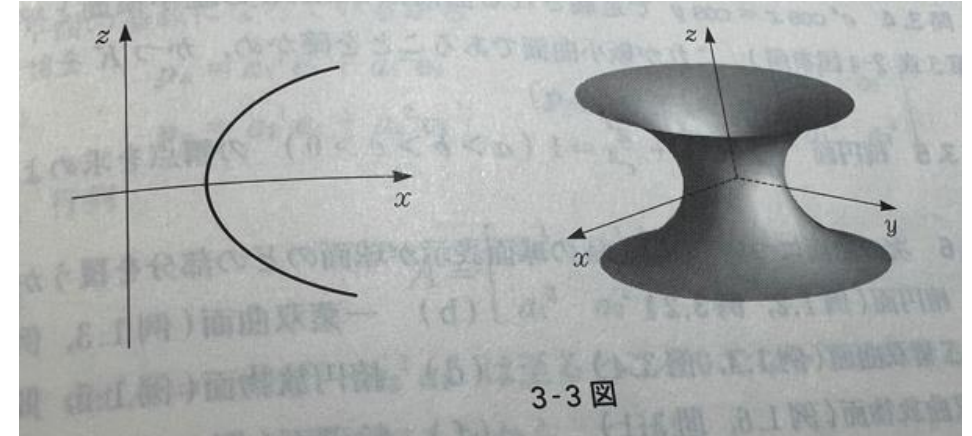
例3.7 曲率 $K = -c^2$ の回転面

- $K = -\frac{f''}{f}, 2H = \frac{g'}{f} - \frac{f''}{g'}, \kappa_1 = \frac{g'}{f}, \kappa_2 = -\frac{f''}{g'}$
- $f''(u) = c^2 f(u), f(u) = \frac{1}{c} e^{-u}$ とすると
- $g'(u) = \pm \sqrt{1 - f'(u)^2} = \pm \sqrt{1 - e^{-2cu}}$
- $g(u) = \pm \int_0^u \sqrt{1 - e^{-2ct}} dt$
- 擬球面(pseudosphere)
 - 「非Euclid幾何を局所的にはあるが3次元Euclid空間内の曲面として実現する重要な局面」？



例3.8 懸垂面 (catenoid)

- $2H = \frac{g'}{f} - \frac{f''}{g'} = 0 \Leftrightarrow ff'' = g'^2 = 1 - f'^2$
- $(ff')' = f'^2 + ff'' = 1 \therefore ff' = u + c = \frac{1}{2}(f^2)'$
- $f^2 = u^2 + 2cu + d \therefore f = \sqrt{u^2 + 2cu + d}$
- $g' = \pm\sqrt{1 - f'^2} = \pm\sqrt{\frac{d - c^2}{u^2 + 2cu + d}}$
- $c = 0, d = a^2 (a > 0)$ とおくと
- $x = f(u) = \sqrt{u^2 + a^2}$
- $z = g(u) = \pm \int_0^u \frac{a}{\sqrt{t^2 + a^2}} dt = \pm a \sinh^{-1} \frac{u}{a}$
- u を消去できて、 $x = a \cosh \frac{z}{a}$
 - ケーブルを張った時に、重力によって垂れ下がった形がこの曲線



2022/12/23

§ 4 正規直交基底を使う方法

- 曲面 $p(u, v)$ に対し、各点でベクトル p_u, p_v, e を使う代わりに、正規直交系を使いたい
- 曲面 $p(u, v)$ が与えられたときに、各点で接平面内のベクトル e_1, e_2 を
 - $e_1 \cdot e_1 = e_2 \cdot e_2 = 1, e_1 \cdot e_2 = 0, e_3 = e_1 \times e_2$
- となるように選ぶ。
 - 例えば $e_1 = \frac{p_u}{|p_u|}, e_2 = \frac{p_v - (p_v \cdot e_1)e_1}{|p_v - (p_v \cdot e_1)e_1|}$ のように定義できる。
 - e_3 は $e = \frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|}$ と符号を除いて一致するので、 $e_3 = e$ と仮定する。

第一基本形式

- $p_u = a_1^1 e_1 + a_1^2 e_2$
- $p_v = a_2^1 e_1 + a_2^2 e_2$
- $(p_u \quad p_v) = (e_1 \quad e_2) \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} = (e_1 \quad e_2) A$
- $p_u \times p_v = (\det A) e_3$
- $dp = p_u du + p_v dv = (a_1^1 du + a_2^1 dv) e_1 + (a_1^2 du + a_2^2 dv) e_2$
- $\theta^1 = a_1^1 du + a_2^1 dv, \theta^2 = a_1^2 du + a_2^2 dv$ とおけば
- $dp = \theta^1 e_1 + \theta^2 e_2$
- 第一基本形式は
 - $I = dp \cdot dp = \theta^1 \theta^1 + \theta^2 \theta^2$

第二基本形式

- $de_i = w_i^1 e_1 + w_i^2 e_2 + w_i^3 e_3$ ($i = 1, 2, 3$), w_i^j は du, dv の線形結合
 - $w_i^j + w_j^i = 0$ が成り立ち、交代行列となり、 $w_i^i = 0$
- 第二基本形式は
 - $\Pi = -dp \cdot de = -dp \cdot de_3 = -(\theta^1 e_1 + \theta^2 e_2) \cdot (w_3^1 e_1 + w_3^2 e_2)$
 - $= -\theta^1 w_3^1 - \theta^2 w_3^2 = \theta^1 w_1^3 + \theta^2 w_2^3$
- $w_1^3 = b_{11}\theta^1 + b_{12}\theta^2, w_2^3 = b_{21}\theta^1 + b_{22}\theta^2$ とおくと
 - $\Pi = \sum_{i,j=1}^2 b_{ij}\theta^i\theta^j$
 - $\theta^1 = a_1^1 du + a_2^1 dv, \theta^2 = a_1^2 du + a_2^2 dv$
- $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ とおくと、対称であり、固有値は実数となる。それを κ_1, κ_2 と書き、主曲率という。
 - $K = \kappa_1 \kappa_2, H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$
- 直交行列 P を用いて B を $P^t B P = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}$ と対角化して
 - $K = \det B = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$
 - $2H = \text{trace } B = b_{11} + b_{22}$
- これは以前定義したガウスの曲率、平均曲率と一致している。
 - $\kappa_1 \kappa_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = K, \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)} = H$

§ 5 2変数の外微分形式

- 外微分形式(exterior differential form) or 微分形式
 - $adu + bdv$
- 外積 (exterior multiplication)
 - $du \wedge du = 0, dv \wedge dv = 0, du \wedge dv = -dv \wedge du$
- ちなみに
 - 関数は0次微分形式 : 0-form
 - $fdu + gdv$ は1次微分形式 : 1-form
 - $fdu \wedge dv$ は2次微分形式 : 2-form
 - $fdu \wedge dv = -fdv \wedge du = \frac{1}{2}(fdu \wedge dv - fdv \wedge du)$
- $\alpha = a_1du + a_2dv, \beta = b_1du + b_2dv$ をかけると
 - $\alpha \wedge \beta = (a_1b_2 - a_2b_1)du \wedge dv = -\beta \wedge \alpha$
 - $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ の行列式となっているので、 $\alpha \wedge \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha, \beta$ が一次独立

外微分 (exterior differentiation) d

- 0-form f
 - $df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$
- 1-form $\varphi = f du + g dv$
 - $d\varphi = df \wedge du + dg \wedge dv = \left(-\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial u}\right) du \wedge dv$
- 2-form $\phi = f du \wedge dv$
 - $d\phi = df \wedge du \wedge dv = \left(\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv\right) \wedge du \wedge dv = 0$
- 性質
 - $f, g : 0\text{-form}$
 - $d(fg) = df \cdot g + f \cdot dg$
 - $f : 0\text{-form}, \varphi : 1\text{-form}$
 - $d(f\varphi) = df \wedge \varphi + f d\varphi, d(\varphi f) = d\varphi \cdot f - \varphi \wedge df$
 - $dd\theta = 0$
 - 1,2-formの場合は明らか。0-formの場合も計算するとわかる

定理5.1

- 1次微分形式
 - $\varphi = f(u, v)du + g(u, v)dv$
- が領域 $a \leq u \leq b, c \leq v \leq d$ で連続微分可能で $d\varphi = 0$ ならば、その領域で定義された関数 h で、 $\varphi = dh$ となるものが存在する。
- ポアンカレの補助定理の一つの場合。
- φ の定義域に関する仮定は大切!

定理5.2

- 2次微分形式
 - $\phi = f du \wedge dv$
- が領域 $a \leq u \leq b, c \leq v \leq d$ で連続微分可能ならば、その領域で定義された1次微分形式 φ で $\phi = d\varphi$ となるものが存在する。

変数変換

- $u = u(s, t), v = v(s, t)$ と変数変換
- 1次微分形式
 - $adu + bdv$
- は
 - $a \left(\frac{\partial u}{\partial s} ds + \frac{\partial u}{\partial t} dt \right) + b \left(\frac{\partial v}{\partial s} ds + \frac{\partial v}{\partial t} dt \right)$
- となる。
- 2次微分形式
 - $adu \wedge dv$
- は
 - $a \left(\frac{\partial u}{\partial s} ds + \frac{\partial u}{\partial t} dt \right) \wedge \left(\frac{\partial v}{\partial s} ds + \frac{\partial v}{\partial t} dt \right) = a \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{vmatrix} ds \wedge dt$

問5.1

- $u = r \cos \theta, v = r \sin \theta$ と変数変換すると
 - $du \wedge dv = (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) \wedge (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) = r \cos^2 \theta dr \wedge d\theta - r \sin^2 \theta d\theta \wedge dr = r dr \wedge d\theta$

§ 6 外微分形式を使う方法

- 曲面を
 - $p(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$
 - $dp = (dx, dy, dz)$ を
 - $dp = \theta^1 e_1 + \theta^2 e_2$
 - $ddp = 0$ より
 - $0 = d\theta^1 e_1 - \theta^1 \wedge \sum_{j=1}^3 w_1^j e_j + d\theta^2 e_2 - \theta^2 \wedge \sum_{j=1}^3 w_2^j e_j$
 - $= (d\theta^1 - \sum_{j=1}^2 \theta^j \wedge w_j^1) e_1 + (d\theta^2 - \sum_{j=1}^2 \theta^j \wedge w_j^2) e_2 - \sum_{j=1}^2 \theta^j \wedge w_j^3 e_3$
 - e_1, e_2, e_3 は一次独立であるから
 - $d\theta^i = \sum_{j=1}^2 \theta^j \wedge w_j^i \quad (i = 1, 2) \quad (6.4)$
 - $\sum_{j=1}^2 \theta^j \wedge w_j^3 = 0$
- (6.4) を第一構造式
 - w_i^j は交代行列なので、(6.4) は $d\theta^1 = \theta^2 \wedge w_2^1, d\theta^2 = \theta^1 \wedge w_1^2$
 - $w_j^3 = \sum_{k=1}^2 b_{jk} \theta^k \quad (j = 1, 2)$
 - $0 = \sum_{j,k=1}^2 b_{jk} \theta^j \wedge \theta^k = b_{12} \theta^1 \wedge \theta^2 + b_{21} \theta^2 \wedge \theta^1 = (b_{12} - b_{21}) \theta^1 \wedge \theta^2$
 - θ^1, θ^2 は一次独立より $\theta^1 \wedge \theta^2 \neq 0$ 。よって、 $b_{12} = b_{21}$ 。B の対称性が確かめられる

第二構造式

- $dde_i = 0$ より
 - $0 = d(de_i) = d(\sum_{j=1}^3 w_i^j e_j) = \sum_{j=1}^3 dw_i^j e_j - \sum_{j=1}^3 w_i^j \wedge de_j$
 - $= \sum_{k=1}^3 (dw_i^k - \sum_{j=1}^3 w_i^j \wedge w_j^k) e_k$
- よって
 - $dw_i^k = \sum_{j=1}^3 w_i^j \wedge w_j^k = \sum_{j=1}^2 w_i^j \wedge w_j^k + w_i^3 \wedge w_3^k$
 - $= \sum_{j=1}^2 w_i^j \wedge w_j^k + w_k^3 \wedge w_i^3$
 - $= \sum_{j=1}^2 w_i^j \wedge w_j^k + \sum_{h,j=1}^2 b_{kh} b_{ij} \theta^h \wedge \theta^i$
 - $= \sum_{j=1}^2 w_i^j \wedge w_j^k + \frac{1}{2} \sum_{h,j=1}^2 (b_{kh} b_{ij} - b_{kj} b_{ih}) \theta^h \wedge \theta^i$
- $k = 1, i = 2$ のとき
 - $dw_2^1 = \sum_{j=1}^2 w_2^j \wedge w_j^1 + \frac{1}{2} \sum_{h,j=1}^2 (b_{1h} b_{2j} - b_{1j} b_{2h}) \theta^h \wedge \theta^i$
 - $= (b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}) \theta^1 \wedge \theta^2 = K \theta^1 \wedge \theta^2 \quad (6.14)$
 - 第二構造式

マイナルディ・コダッチ(Mainardi-Codazzi)の式

- $dw_i^3 = \sum_{j=1}^3 w_i^j \wedge w_j^3 = \sum_{j=1}^2 w_i^j \wedge w_j^3$
- $d(\sum_{j=1}^2 b_{ij} \theta^j) = \sum_{j=1}^2 w_i^j \wedge (\sum_{k=1}^2 b_{jk} \theta^k)$
- $\sum_{k=1}^2 (db_{ik} - \sum_{j=1}^2 b_{ij} w_k^j - \sum_{j=1}^2 b_{jk} w_i^j) \wedge \theta^k = 0$
- $db_{ik} - \sum_{j=1}^2 b_{ij} w_k^j - \sum_{j=1}^2 b_{jk} w_i^j = \sum_{l=1}^2 b_{ik,l} \theta^l$
- $b_{ik} = b_{ki}$ より $b_{ik,l} = b_{ki,l}$ 。
- $\sum_{k,l=1}^2 b_{ik,l} \theta^l \wedge \theta^k = 0$ (6.21)
- つまり $b_{i2,1} = b_{i1,2}$
- よって $b_{ik,l} = b_{il,k}$ (6.22)
- これをマイナルディ・コダッチの式
- $dw_2^1 = K \theta^1 \wedge \theta^2$ (6.14)
- (6.14, 22)を合わせて曲面論の基本式

第一、第二基本形式と曲面

- 領域 D 上すべての点で一次独立な1次微分形式 θ^1, θ^2 をとり
 - $\theta^1\theta^1 + \theta^2\theta^2$ (6.23)
 - $\sum_{i,j=1}^2 b_{ij}\theta^i\theta^j$ (ただし、 $b_{ij} = b_{ji}$) (6.24)
- を考える時、(6.23), (6.24)を第一、第二基本形式をするような曲面 $p(u, v)$ が空間内に存在するか？
- (6.23)が与えられると
 - $w_j^i + w_i^j = 0$ ($i, j = 1, 2$)
 - $d\theta^i = -\sum_{j=1}^2 w_j^i \wedge \theta^j$ ($i = 1, 2$)
- となるような1次微分形式 w_j^i が存在して、しかも一意に定まる。(次章で証明)このとき
 - $dw_2^1 = K\theta^1 \wedge \theta^2$
- により関数 K を定義する。このとき
 - $K = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$ (6.28)
- が成り立たないといけない。また、
 - $b_{i2,1} - b_{i1,2} = 0$ (6.29)
- も成立しないといけない。
- 逆に、(6.28), (6.29)が満たされていれば、(6.23)(6.24)を第一、第二基本形式とするような曲面が空間内に存在し、しかも合同変換を除けば一意である。

問6.1

- 球面(sphere)

- $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

- $x = a \cos u \cos v$

- $y = a \cos u \sin v$

- $z = a \sin u$

- $e_1 = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u)$

- $e_2 = (-\sin v, \cos v, 0)$

- $dp = ae_1 du + a \cos u e_2 dv$ より $\theta^1 = a du, \theta^2 = a \cos u dv$

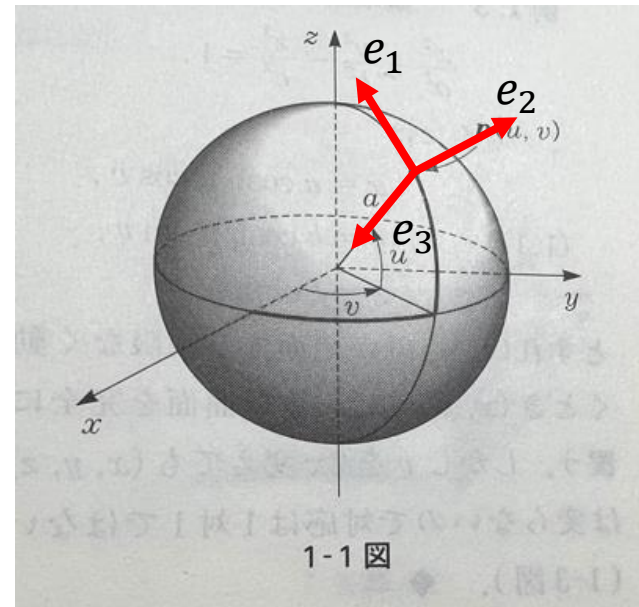
- $e_3 = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u) = \frac{1}{a} p$

- $\begin{pmatrix} w_1^1 & w_1^2 & w_1^3 \\ w_2^1 & w_2^2 & w_2^3 \\ w_3^1 & w_3^2 & w_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin u dv & du \\ \sin u dv & 0 & \cos u dv \\ -du & -\cos u dv & 0 \end{pmatrix}$

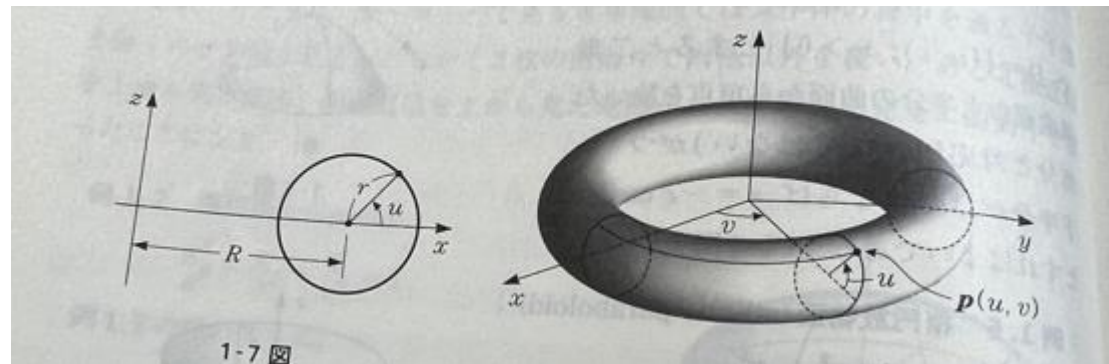
- $dw_2^1 = d(\sin u dv) = \cos u du \wedge dv = \frac{1}{a^2} (adu) \wedge (a \cos u dv) = \frac{1}{a^2} \theta^1 \wedge \theta^2, K = \frac{1}{a^2}$

- $w_1^3 = du = \frac{1}{a} \theta^1, w_2^3 = \cos u dv = \frac{1}{a} \theta^2$ より、 $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$

- ※この計算は基底の取り方(e_1, e_2)に依存しない



問6.2



- 輪環面(torus)

- $x = (R + r \cos u) \cos v, y = (R + r \cos u) \sin v, z = r \sin u$

- $dp = \begin{pmatrix} -r \sin u \cos v \\ -r \sin u \sin v \\ r \cos u \end{pmatrix} du + \begin{pmatrix} -(R + r \cos u) \sin v \\ (R + r \cos u) \cos v \\ 0 \end{pmatrix} dv$ より

- $e_1 = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u)$

- $e_2 = (-\sin v, \cos v, 0)$

- $e_3 = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u) = \frac{1}{a} p$ (球面の場合と同様)

- $dp = r e_1 du + (R + r \cos u) e_2 dv$ より $\theta^1 = r du, \theta^2 = (R + r \cos u) dv$

- $\begin{pmatrix} w_1^1 & w_1^2 & w_1^3 \\ w_2^1 & w_2^2 & w_2^3 \\ w_3^1 & w_3^2 & w_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin u dv & du \\ \sin u dv & 0 & \cos u dv \\ -du & -\cos u dv & 0 \end{pmatrix}$

- $dw_2^1 = \cos u du \wedge dv = \frac{\cos u}{r(R + r \cos u)} (r du) \wedge ((R + r \cos u) dv)$ より $K = \frac{\cos u}{r(R + r \cos u)}$

- $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\cos u}{(R + r \cos u)} \end{pmatrix}$

Chap3

曲面上の幾何

- §1 曲面上のRiemann計量

- この章では、曲面の性質のうち、第一基本形式だけにより定まるものを調べる。
 - 言い換えると、曲面が3次元ユークリッド空間中に入っていることを忘れて、第一基本形式だけを使って曲面論を展開しよう
- 柱面は $x = x(u), y = y(u), z = v$ (1.1)
- パラメータは $\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 = 1$ (1.2)を満たすようにとる
 - $K = 0, H = \frac{1}{2}(x''y' - x'y'')$
- 第一基本形式は $I = (du)^2 + (dv)^2$ (1.3)
- 平均曲率 H は(1.1)が変わると変化するので、第一基本形式だけで決まっているとは言えない。
- ガウスの曲率 K は、どんな柱面に対しても0になるから、第一基本形式によって決まるのではないか？という可能性が出てくる。
 - 実際その通り。

Riemann 計量

- (u, v) を座標系とする平面内の領域 D 上に、第一基本形式のようなもの
 - $Edu + 2Fdu dv + Gdv dv$ (1.4)
- が与えられたとする。
- (1.4)は D 内の曲線 $(u(t), v(t))$ の長さを測るためにあるので
 - $E \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt}\right)^2$ (1.5)
- は $\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt} = 0$ でない限り、常に正であるべきである。つま り、(1.4)は正値形式。この条件は
 - $EG - F^2 > 0, E > 0$ (1.6)
- (1.4)が正値形式であるとき、 D 上のRiemann計量
 - 1854/6/10にゲッティンゲン大学で、当時27歳のRiemannが第一基本形式だけに基づいた幾何の研究を提唱したことにちなんでつけた名前

Riemann計量： ds^2

- $E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2$ (1.5)

- において、曲線の長さがパラメータに使われているとする。そのため、 s を用いると曲線の長さは

- $\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{E \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2F \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + G \left(\frac{dv}{ds} \right)^2} ds$

- $E \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2F \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + G \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = 1$ (1.8)

- $ds^2 = Edu + 2Fdu dv + Gdv dv$ (1.9)

ポアンカレ計量

- 例1.1

- $D: u^2 + v^2 < 1, ds^2 = 4 \frac{du^2 + dv^2}{\{1 - (u^2 + v^2)\}^2}$
- $w = u + iv$ と複素数を用いると $ds^2 = \frac{4dw d\bar{w}}{\{1 - |w|^2\}^2}$

- 例1.2

- $U: y > 0$ 上半平面
- $z = x + iy$ とおいて複素座標を使うと、虚数部分が正の領域
- $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$
- $z = i \frac{1-w}{1+w} \left(w = \frac{i-z}{i+\bar{z}} \right)$ によって、 U, D に1:1の対応
- $2yi = z - \bar{z} = i \frac{1-w}{1+w} + i \frac{1-\bar{w}}{1+\bar{w}} = \frac{2(1-w\bar{w})}{(1+w)(1+\bar{w})} i$ より $y > 0 \Leftrightarrow |w|^2 < 1$
- $dw = \frac{-2idz}{(i+z)^2}, d\bar{w} = \frac{2id\bar{z}}{(-i+\bar{z})^2}, \frac{1}{\{1-|w|^2\}^2} = \frac{(i+z)^2(-i+\bar{z})^2}{(4y)^2}$
- $\frac{4dw d\bar{w}}{\{1-|w|^2\}^2} = \frac{dz d\bar{z}}{y^2}$

等長対応(isometry)

- (u, v) 平面上の領域 D と、 (x, y) 平面上の領域 D' があって、それぞれにRiemann計量
 - $Edudu + 2Fdudv + Gdv dv$ (1.18)
 - $E'dxdx + 2F'dxdy + G'dydy$ (1.19)
- が与えられている。 D, D' の間に微分可能な関数
 - $u = u(x, y), v = v(x, y)$ (1.20)
- で1:1の対応が与えられていて、(1.20)を(1.18)に代入したとき、(1.19)が得られるときは、そのような対応を等長対応といい、2つのRiemann計量は本質的に同じものとみなす

§ 2 曲面の構造方程式

- Riemann計量
 - $ds^2 = Edu + 2Fdudv + Gdv dv$ (1.9)
- が与えられたとき、Riemann計量を
 - $ds^2 = \theta^1\theta^1 + \theta^2\theta^2$ (2.1)
- と、1次独立な1次微分形式 θ^1, θ^2 を使って書き表せる。
 - 例えば、
 - $\theta^1 = a_1^1 du + a_2^1 dv, \theta^2 = a_1^2 du + a_2^2 dv$ とおいたときに
 - $E = (a_1^1)^2 + (a_1^2)^2, F = a_1^1 a_2^1 + a_1^2 a_2^2, G = (a_2^1)^2 + (a_2^2)^2$ を満たせばよいので
 - $a_1^1 = \sqrt{E}, a_1^2 = 0, a_2^1 = \frac{F}{\sqrt{E}}, a_2^2 = \sqrt{\frac{EG-F^2}{E}}$ が解の一つ

第一構造式、第二構造式

- $d\theta^1 = \theta^2 \wedge w_2^1, d\theta^2 = \theta^1 \wedge w_1^2$ (2.5)
- が成り立つような $w_2^1 = -w_1^2$ を求める。
 - $w_2^1 = b_1\theta^1 + b_2\theta^2$ (2.6)
- とおくと、(2.5)は
 - $d\theta^1 = -b_1\theta^1 \wedge \theta^2, d\theta^2 = -b_2\theta^1 \wedge \theta^2$ (2.7)
- (2.7)より b_1, b_2 が一意に決まり、(2.5)が成り立つような
 - $\omega = \begin{pmatrix} 0 & w_2^1 \\ w_1^2 & 0 \end{pmatrix}$
- がただ一つ決まる。これを接続形式 (connection form)
- また、第二構造式から
 - $dw_2^1 = K\theta^1 \wedge \theta^2$ (2.9), K : Gaussの曲率

Theorema egregium (最も素晴らしい定理)

- $ds^2 = \theta^1 \theta^1 + \theta^2 \theta^2$ (2.1)
- (2.1)が成り立つような他の $\bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2$ を使うとどうなるか。
 - $\begin{pmatrix} \bar{\theta}^1 \\ \bar{\theta}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1^1 & s_2^1 \\ s_1^2 & s_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix}$ (2.11)
 - $\bar{w} = -dS \cdot S^{-1} + SwS^{-1}$ (2.20)
 - $d\bar{\theta} = -\bar{w} \wedge \bar{\theta}$ (2.21)
 - $d\bar{w} = S \cdot dw \cdot S^{-1}$ (2.33)
 - $\bar{K} = K$ (2.37)
- すなわち、Gaussの曲率 K は、Riemann計量 ds^2 にだけにしかよらず、(2.1)の θ^1, θ^2 の選び方によらない。
- 空間内の曲面のGaussの曲率は第二基本形式IIを使って定義したのにもかかわらず、第一基本形式Iで定まることがわかった。

Gaussの曲率 K とRiemann計量 ds^2

- K を ds^2 を使って書きたい。
 - $ds^2 = Edu + Gdv$ (2.38)
- という特別な形をしている場合
 - $\theta^1 = \sqrt{E}du, \theta^2 = \sqrt{G}dv$ (2.39)
- であり、
 - $w_2^1 = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} du - \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} dv$ (2.40)
 - $K = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) \right]$
- さらに特別に
 - $ds^2 = E(du + dv)$
- と書けたとすると
 - $K = -\frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) \log \sqrt{E} = -\frac{1}{2E} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) \log E$

2023/1/6

§ 3 ベクトル場

- ベクトル場 $X = \xi \frac{\partial}{\partial u} + \eta \frac{\partial}{\partial v}$ と、一次微分形式 $\varphi = fdu + gdv$ が与えられたとき
 - $\varphi(X) = f\xi + g\eta$ (3.6)
 - $\varphi(X)$ を $\langle \varphi, X \rangle$ と書くこともある。
 - これにより、接ベクトル空間と1次微分形式の空間が互いに双対空間となる。
 - 関数 f から1次微分形式 df をつくり、(3.6)を適用すると
 - $\langle df, X \rangle = Xf$ (3.7)

座標変換

- $t^i = t^i(u^1, u^2)$
- $\frac{\partial}{\partial u^i} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial t^j}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial t^j}$
- $X = \sum_{i=1}^2 \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} = \sum_{j=1}^2 \left(\sum_{i=1}^2 \xi^i \frac{\partial t^j}{\partial u^i} \right) \frac{\partial}{\partial t^j}$
- $\varphi = \sum_{i=1}^2 f_i du^i = \sum_{j=1}^2 \left(\sum_{i=1}^2 f_i \frac{\partial u^i}{\partial t^j} \right) dt^j$
- よって
 - $\varphi(X) = \sum_{j=1}^2 \left(\sum_{k=1}^2 f_k \frac{\partial u^k}{\partial t^j} \right) \left(\sum_{i=1}^2 \xi^i \frac{\partial t^j}{\partial u^i} \right) = \sum_{i=1}^2 f_i \xi^i$
 - $\varphi(X)$ は座標系に依存しない

双対基

- 一般に θ^1, θ^2 が一次独立な1次微分形式とすると、ベクトル場 e_1, e_2 で
 - $\theta^i(e_j) = \delta_{ij}$ (3.13)
- となるものが一意に定まる。
 - $\theta^1 = a_1^1 du + a_1^2 dv, \theta^2 = a_2^1 du + a_2^2 dv$
 - $e_1 = b_1^1 \frac{\partial}{\partial u} + b_1^2 \frac{\partial}{\partial v}, e_2 = b_2^1 \frac{\partial}{\partial u} + b_2^2 \frac{\partial}{\partial v}$
 - とおくと、(3.13)は $\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix} = I$
- 逆に、一次独立なベクトル場 e_1, e_2 が与えられたときに、(3.13)が成り立つような1次微分形式 θ^1, θ^2 が一意的に決まる。
- 双対空間で言うと、 e_1, e_2 と θ^1, θ^2 は互いに双対基(dual base)

内積

- Riemann計量
 - $ds^2 = \theta^1\theta^1 + \theta^2\theta^2$
- と書き、1次微分形式 θ^1, θ^2 に対応するベクトル場(双対基)を e_1, e_2 とする。二つの接ベクトルを
 - $X = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2, Y = \eta^1 e_1 + \eta^2 e_2$
- と書いたとき、 X, Y の内積 $\langle X, Y \rangle$, X の長さ $|X|$ を
 - $\langle X, Y \rangle = \xi^1 \eta^1 + \xi^2 \eta^2, |X| = \langle X, X \rangle^{\frac{1}{2}}$
- Riemann計量を形式的に第一基本形式の一般化として定義したが、接ベクトル空間に内積を定義するということが本質的
- ちなみに
 - $ds^2 = \bar{\theta}^1 \bar{\theta}^1 + \bar{\theta}^2 \bar{\theta}^2$
 - それに対応するベクトル場を \bar{e}_1, \bar{e}_2 とする。
- このとき、内積・長さが不変であることが確かめられる。

問3.2

- 2次微分形式 $\varphi = f du^1 \wedge du^2$ と2つのベクトル場
 - $X = \sum_{i=1}^2 \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}, Y = \sum_{i=1}^2 \eta^i \frac{\partial}{\partial u^i}$
- に対して
 - $\varphi(X, Y) = f(\xi^1 \eta^2 - \xi^2 \eta^1)$
- と定義すると以下が成り立つ。
- (a) φ, ϕ が1次微分形式ならば
 - $(\varphi \wedge \phi)(X, Y) = \varphi(X)\phi(Y) - \phi(X)\varphi(Y)$
- (b) φ が1次微分形式ならば
 - $(d\varphi)(X, Y) = X(\varphi(Y)) - Y(\varphi(X)) - \varphi([X, Y])$

§ 4 共変微分と平行移動

- 空間内の曲面 $p(u, v)$ を考える。
- この曲面上の曲線 $p(t) = p(u(t), v(t))$ の各点で接ベクトル $X(t)$ が与えられているとする。
- $X'(t)$ は必ずしも曲面 $p(u, v)$ に接しているとは限らないので、接ベクトルと法ベクトルとの和に表す。
 - $X' = \frac{DX}{dt} + A_X$ ($\frac{DX}{dt}$ が接ベクトル、 A_X は法ベクトル)
- 今、曲面だけを考慮して、周囲の空間を全く無視すると、意味のあるのは X' の接成分 $\frac{DX}{dt}$ だけで、これを X の曲線 $p(t)$ に沿っての共変微分 (covariant derivative) と呼ぶ。
- 大切なことは、 $\frac{DX}{dt}$ は曲面の第一基本形式にだけ依存し、曲面の空間内の相対的位置に無関係、すなわち、第二基本形式に依存しない。

共変微分は第一基本形式にのみ依存する

- 正規直交系 e_1, e_2 を取り、 $e_3 = e_1 \times e_2$
 - $X = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2$
 - $\frac{dX}{dt} = \left(\frac{d\xi^1}{dt} + \xi^1 \frac{w_1^1}{dt} + \xi^2 \frac{w_2^1}{dt} \right) e_1 + \left(\frac{d\xi^2}{dt} + \xi^1 \frac{w_1^2}{dt} + \xi^2 \frac{w_2^2}{dt} \right) e_2 + \left(\xi^1 \frac{w_1^3}{dt} + \xi^2 \frac{w_2^3}{dt} \right) e_3$
 - $w = adu + bdv$ としたとき $\frac{w}{dt} = a \frac{du}{dt} + b \frac{dv}{dt}$
 - $w_1^1 = w_2^2 = 0$ より
 - $\frac{DX}{dt} = \left(\frac{d\xi^1}{dt} + \xi^2 \frac{w_2^1}{dt} \right) e_1 + \left(\frac{d\xi^2}{dt} + \xi^1 \frac{w_1^2}{dt} \right) e_2$
 - $A_X = \left(\xi^1 \frac{w_1^3}{dt} + \xi^2 \frac{w_2^3}{dt} \right) e_3$
- $\frac{DX}{dt}$ には接続形式の成分 w_2^1, w_1^2 が使われているだけで、第二基本形式を定義する w_1^3, w_2^3 は使われていない。
- w_2^1, w_1^2 はRiemann計量 ds^2 と e_1, e_2 によって一意に決まるため、 $\frac{DX}{dt}$ は ds^2 と e_1, e_2 によって決まる。
 - e_1, e_2 の取り方にもよらないことが示される。

平行 parallel

- $\frac{DX}{dt} \equiv 0$ となるとき、 X は曲線 $(u(t), v(t))$ に沿って平行であるという。
- パラメータ t が $a \rightarrow b$ まで動くとし、点 $(u(a), v(a))$ でベクトル $X(a)$ が与えられたとき、 $\frac{DX}{dt} \equiv 0$ となるように、 $X(a)$ を曲線に沿って動かすことが可能で、しかも一意的に可能
 - これは常微分方程式
 - $\frac{d\xi^i}{dt} + \sum_{j=1}^2 \frac{w_j^i}{dt} \xi^j = 0$
 - を初期条件 $\xi^i(a) = \alpha^i$ の下で解くのと同一

まとめ

- Riemann計量 ds^2 が与えられる
- $ds^2 = \theta^1\theta^1 + \theta^2\theta^2$ とかき、対応するベクトル場 e_1, e_2 をとる
- 曲線 $(u(t), v(t))$ に沿ったベクトル場 $X = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2$ の共変微分 $\frac{DX}{dt}$ を
 - $\frac{DX}{dt} = \left(\frac{d\xi^1}{dt} + \xi^2 \frac{w_2^1}{dt} \right) e_1 + \left(\frac{d\xi^2}{dt} + \xi^1 \frac{w_1^2}{dt} \right) e_2$
- で定義する。
- $\frac{DX}{dt} = 0$ のとき、 X は曲線に沿って平行(parallel)
 - $ds^2 = \theta^1\theta^1 + \theta^2\theta^2$ と書いたときの、 θ^1, θ^2 の選び方に $\frac{DX}{dt}$ は依存しない

ベクトルの内積、長さが平行移動で不変

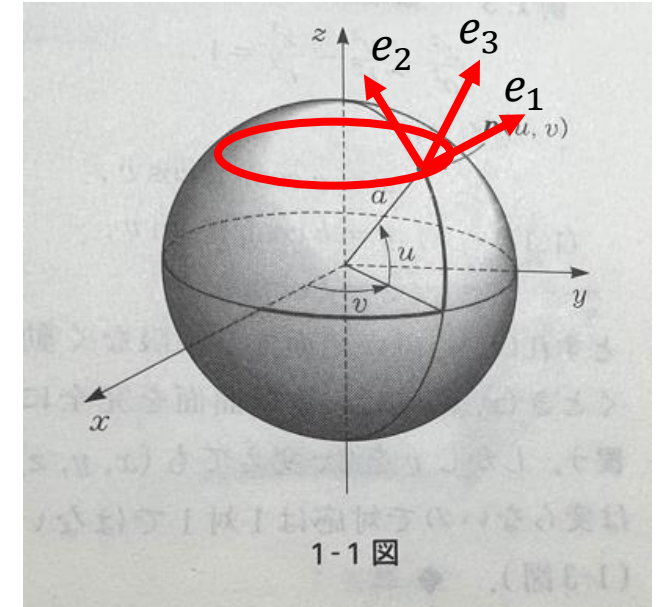
- $X = \sum_{i=1}^2 \xi^i e_i, Y = \sum_{i=1}^2 \eta^i e_i$
- を曲線 $(u(t), v(t))$ に沿って平行な 2 つのベクトル場とすると
 - $\frac{d}{dt} \langle X, Y \rangle = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^2 \xi^i \eta^i \right) = \sum_{i=1}^2 \frac{d\xi^i}{dt} \eta^i + \sum_{i=1}^2 \xi^i \frac{d\eta^i}{dt}$
 - $= \sum_{i=1}^2 \frac{d\xi^i}{dt} \eta^i + \sum_{i,j=1}^2 \frac{w_j^i}{dt} \xi^j \eta^i + \sum_{i=1}^2 \xi^i \frac{d\eta^i}{dt} + \sum_{i,j=1}^2 \frac{w_j^i}{dt} \xi^i \eta^j \quad (w_j^i = -w_i^j)$
 - $= \left\langle \frac{DX}{dt}, Y \right\rangle + \left\langle X, \frac{DY}{dt} \right\rangle \quad \left(\frac{DX}{dt} = \frac{DY}{dt} = 0 \right)$
 - $= 0$
- $\langle X, Y \rangle$ は不変

平行移動の概念

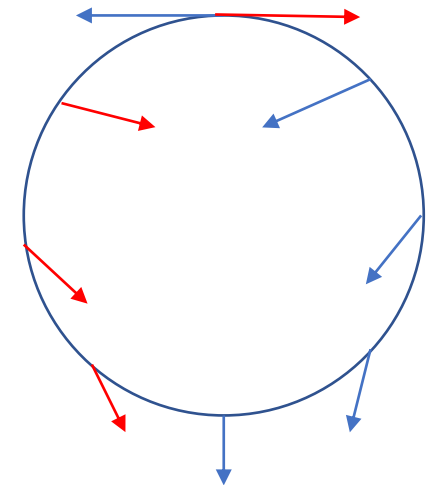
- ユークリッド幾何
 - 離れた二点でのベクトルが平行である/ないに意味がある
- 曲面上の平行
 - 2点でのベクトルが与えられた曲線に沿って平行であるとかないとか言えても、単に2点でのベクトルが平行である云々を言えない。
 - つまり、2点を結ぶ曲線を2つ考えたとき、その2点でのベクトルが、一方の曲線に沿って平行でも、他の曲線に沿っては平行でないことがある。

例4.1 球面上の小円に沿った平行移動

- 球面(sphere)
 - $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$
 - $x = a \cos u \cos v$
 - $y = a \cos u \sin v$
 - $z = a \sin u$
 - $e_1 = (-\sin v, \cos v, 0)$
 - $e_2 = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u)$
 - $e_3 = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$
 - $\begin{pmatrix} w_1^1 & w_1^2 & w_1^3 \\ w_2^1 & w_2^2 & w_2^3 \\ w_3^1 & w_3^2 & w_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sin u \, dv & -\cos u \, dv \\ -\sin u \, dv & 0 & -du \\ \cos u \, dv & du & 0 \end{pmatrix}$
- u を固定して得られる緯線に沿って平行なベクトル場 $X = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2$ を決定する。
- $\lambda = \sin u$ とおくと
 - $\frac{d\xi^1}{dv} - \lambda \xi^2 = 0, \frac{d\xi^2}{dv} + \lambda \xi^1 = 0$
- 一般解
 - $\xi^1 = \alpha \sin \lambda v - \beta \cos \lambda v, \xi^2 = \beta \sin \lambda v + \alpha \cos \lambda v$
- $v = 0$ でベクトル e_1 ($\alpha = 0, \beta = -1$)をとり
 - 正の方向に $v = \pi$ まで平行移動すると $\cos \lambda \pi e_1 - \sin \lambda \pi e_2$
 - 負の方向に $v = -\pi$ まで平行移動すると $\cos \lambda \pi e_1 + \sin \lambda \pi e_2$



$\lambda = \frac{1}{2}$ の場合



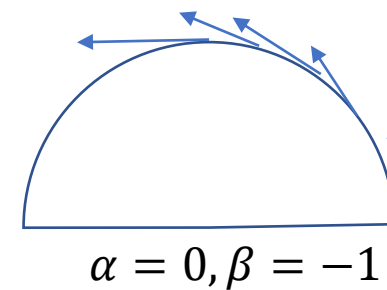
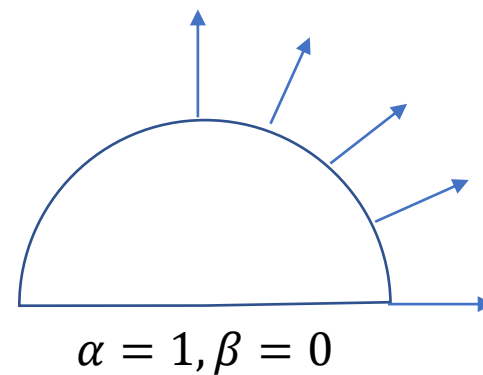
問 4. 1

- U を $w = u + iv$ 平面内の上半分 $v > 0$ とし、ポアンカレ計量
 - $\frac{dw d\bar{w}}{v^2} = \frac{(du)^2 + (dv)^2}{v^2}$
- に関して、正規直交系 $e_1 = v \frac{\partial}{\partial u}, e_2 = v \frac{\partial}{\partial v}$ を考える。
- (a) w_2^1 を決定せよ
- (b) $u = a \cos t, v = a \sin t$ ($0 < t < \pi$) に沿っての平行ベクトル場を決定せよ
- (c) 直線 $u = t, v = a$ に沿っての平行ベクトル場を決定せよ

- $\theta^1 = \frac{du}{v}, \theta^2 = \frac{dv}{v}$ より、 $d\theta^1 = \frac{1}{v^2} du \wedge dv, d\theta^2 = 0$
- $w_2^1 = -w_1^2 = -\frac{1}{v} du$ とおけば、 $d\theta^1 = -w_2^1 \wedge \theta^2, d\theta^2 = -w_1^2 \wedge \theta^1$
- $\xi^1 e_1 + \xi^2 e_2$ を与えられた曲線に沿っての平行ベクトル場とすると

- $0 = \frac{d\xi^1}{dt} + \xi^2 \frac{w_2^1}{dt} = \frac{d\xi^1}{dt} - \xi^2 \frac{1}{v(t)} \frac{du}{dt} = \frac{d\xi^1}{dt} + \xi^2$
- $0 = \frac{d\xi^2}{dt} + \xi^1 \frac{w_1^2}{dt} = \frac{d\xi^2}{dt} + \xi^1 \frac{1}{v(t)} \frac{du}{dt} = \frac{d\xi^2}{dt} - \xi^1$
- 以上より、 $\frac{d^2 \xi^1}{dt^2} + \xi^1 = 0$
- $\xi^1 = \alpha \cos t + \beta \sin t, \xi^2 = \alpha \sin t - \beta \cos t$

- (c)
 - 同様にして $\frac{d^2 \xi^1}{dt^2} + \frac{1}{a^2} \xi^1 = 0$
 - $\xi^1 = \alpha \cos \frac{t}{a} + \beta \sin \frac{t}{a}, \xi^2 = -\alpha \sin \frac{t}{a} + \beta \cos \frac{t}{a}$



§ 5 測地線

- Chap.2 § 2で定義したが復習する。
- 曲面 $p(u, v)$ 上の曲線 $p(s) = p(u(s), v(s))$ を考え、接ベクトル $p'(s) = 1$ となるようにパラメータ s を取る。加速度ベクトル $p''(s)$ は一般には曲面には接していなくて
 - $p''(s) = k_g + k_n$
 - k_g : 曲面に接する測地的曲率ベクトル
 - k_n : 曲面に垂直な法曲ベクトル
 - $k_g = 0$ のとき、曲線 $p(s)$ を測地線
- k_n はChap.2で第二基本形式との関係を述べた
 - $\kappa_n(s) = \text{II}(p'(s), p'(s))$
- k_g は第一基本形式だけで定まるベクトルであり、測地線も第一基本形式だけにしか依存しない概念であることを学ぶ

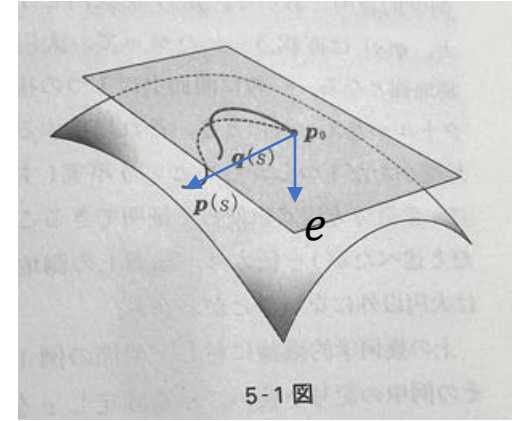
測地線

- $p'(s) = \sum_{i=1}^2 \xi^i e_i$
- $p''(s) = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{d\xi^i}{ds} e_i + \xi^i \frac{de_i}{ds} \right) = \sum_{i=1}^2 \frac{d\xi^i}{ds} e_i + \sum_{i=1}^2 \xi^i \sum_{j=1}^3 \frac{w_j^i}{ds} e_j$
- $= \sum_{i=1}^2 \left(\frac{d\xi^i}{ds} + \sum_{j=1}^2 \frac{w_j^i}{ds} \xi^j \right) e_i + \sum_{j=1}^3 \frac{w_j^3}{ds} \xi^j e_3$
- $k_g = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{d\xi^i}{ds} + \sum_{j=1}^2 \frac{w_j^i}{ds} \xi^j \right) e_i$
- $k_n = \sum_{j=1}^3 \frac{w_j^3}{ds} \xi^j e_3$
- 今
 - $X = p'(s)$
- とおくと、
 - $k_g = \frac{DX}{ds}, k_n = A_X$
- と考えることができる。つまり、 k_g は曲線 $p(s)$ の接ベクトル場 $p'(s)$ の曲線 $p(s)$ に沿っての共変微分となることがわかった。したがって、 k_g は第一基本形式だけで定まる。
- 測地線は $k_g = 0$,つまり
 - $\frac{DX}{ds} = 0 \ (X = p'(s)) \quad (5.7)$
- 測地線とは、その接ベクトル場が曲線自身に沿って平行である。この性質により、測地線の内容は3次元ユークリッド空間の中に入っていない空間に対しても定義される。

特別な標構

- $p'(s)$ は単位ベクトルなので
 - $e_1(s) = p'(s)$
- ととる。 e_1 に直交する単位ベクトルで曲面に接するものを e_2 とする。そのとき、 e_1 から e_2 への向きが、 p_u から p_v へ回転する向きになるように e_2 を選ぶことで一意に定まる。
- $p'(s) \cdot p'(s) = 1$ より微分して $p'(s) \cdot p''(s) = 0$ 。よって、 $p''(s)$ は $p'(s)$ に直交する。よって
 - $k_g = \kappa_g e_2, k_n = \kappa_n e_3$
 - κ_g : 測地的曲率 (geodesic curvature)
 - κ_n : 法曲率 (normal curvature)
 - $\kappa_g = \kappa_g e_2 \cdot e_2 = k_g \cdot e_2 = p'' \cdot e_2 = e_1' \cdot e_2 = \frac{w_1^2}{ds}$
 - $\kappa_n = \frac{w_1^3}{ds}$

測地線の幾何学的意味

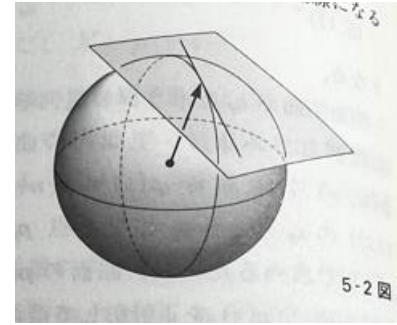


- $q(s)$: p_0 の接平面に $p(s)$ を正射影してられる平面曲線
- 曲面に対する p_0 の単位法ベクトルを e とすると
 - $p(s) = q(s) + (p(s) \cdot e)e$
 - $p'(s_0) = q'(s_0) \ (p'(s_0) \cdot e = 0)$
 - $p''(s_0) = q''(s_0) + (p''(s_0) \cdot e)e$
- $q(s)$ は接平面上にあるから、 $q''(s)$ も接平面上にあることに注意して
 - $q''(s_0) = k_g(s_0), (p''(s_0) \cdot e)e = k_n(s_0)$
- $q''(s_0)$ の長さは、平面曲線 $q(s)$ の $q(s_0)$ における曲率
 - (s は $q(s)$ に対する長さのパラメータではないので $|q''(s_0)|$ が曲率であることは自明ではないが、計算すると証明できるらしい)
- つまり、測地的曲率とは、正射影した平面曲線の曲率である。

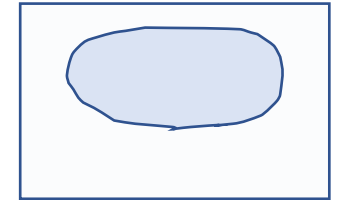
例5.1

- 平面上では測地線は直線
- 直線概念を曲面にまで拡張するために測地線概念が生まれる

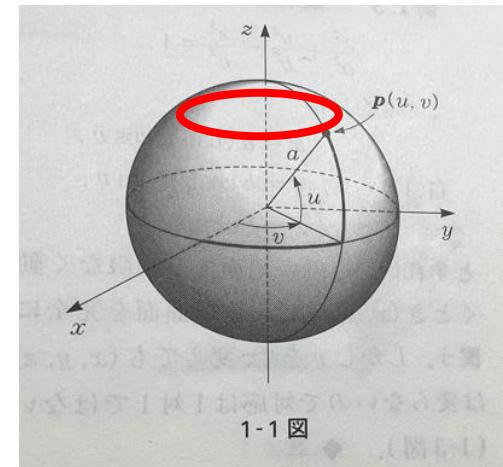
例5.2



- 球面上の大円は、その任意の点で接平面に正射影すると直線になるので、大円の測地的曲率 $\kappa_g = 0$ 。
- したがって、大円は測地線
- 一般に、曲面上に一つの接ベクトルが与えられたときに、それに接する測地線がただ一つしかないので、球面上の測地線は大円以外にない。
- 緯線の κ_g を計算する
 - $w_1^2 = \sin u \, dv$ より $\kappa_g = \sin u \frac{dv}{ds}$
 - 緯線の描く小円の半径は $a \cos u$ より $s = av \cos u$ とすれば、 s が長さを表すパラメータとなり
 - $\kappa_g = \frac{1}{a} \tan u$
 - とくに、 $u = 0$, つまり大円の時 $\kappa_g = 0$ となり測地線となる。

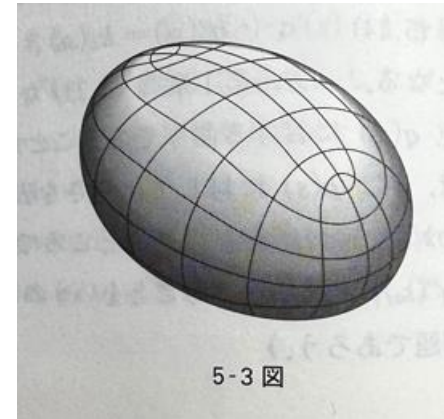


接平面上の正射影は楕円??



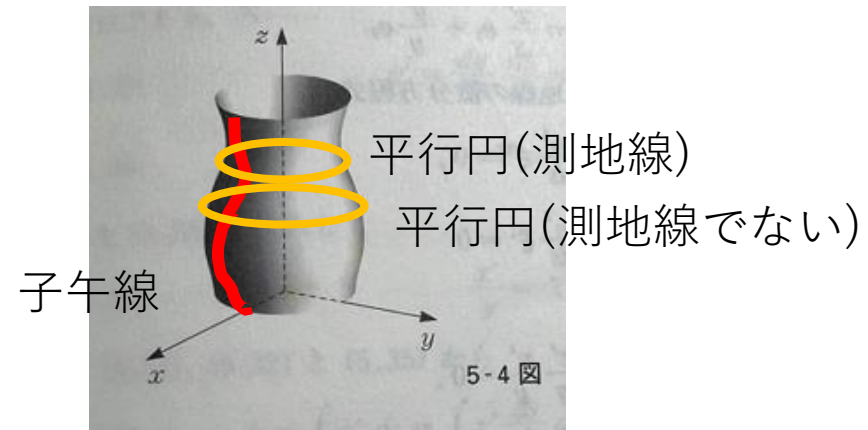
例5.3

- 楕円面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
- の場合も、座標平面との交わりとして得られる 3 つの平曲面が測地線となる。
- ちなみに、そのような閉曲面にも必ず最小3つの閉測地線が存在するという定理がある。



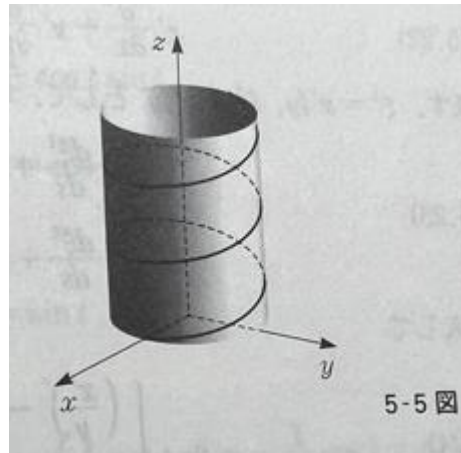
例5.4 回転面

- (x, z) 平面上の曲線 $x = f(u), z = g(u)$ に対して、回転面
 - $p(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$
- v を固定して、 u をパラメータとできる曲線を子午線(meridian)
 - 子午線は常に測地線。接平面に射影すると直線となる
- u を固定して v をパラメータとすると平行円(parallel)を得る。
 - $f'(u) = 0$ となる u 、すなわち、子午線の傾きが z 軸方向となる u に対応する平行円は測地線



例5.5 直円柱

- 母線に沿って切り、平面に展開したときに直線になるような曲線が測地線
 - つるまき線(helix)、母線、平行円は測地線
 - 「マメ科のような植物がつるまき線上に、すなわち測地線に沿って伸びるのは自然の摂理というものであろうか」

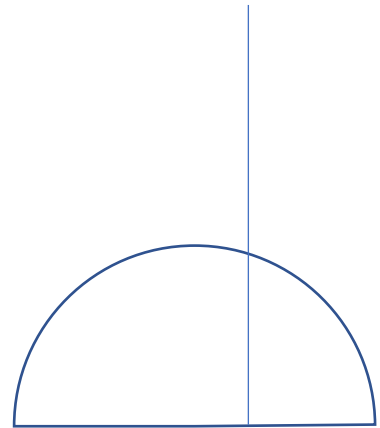


例5.6

- 上半平面 $U = \{(x, y); y > 0\}$ 上にポアンカレ計量
 - $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$
- が与えられている場合の測地線。
- 空間内の曲面をして与えられていないので、測地線を定義する微分方程式を解く。
- $\theta^1 = \frac{dx}{y}, \theta^2 = \frac{dy}{y}$ とおくと、 $ds^2 = (\theta^1)^2 + (\theta^2)^2$ となり
 - $d\theta^1 = \frac{dx \wedge dy}{y^2} = \frac{dx}{y} \wedge \theta^2, d\theta^2 = 0 = -\frac{dx}{y} \wedge \theta^1$
 - $w_2^1 = -\frac{dx}{y} = -w_1^2$ とおくと
 - $d\theta^1 = -w_2^1 \wedge \theta^2, d\theta^2 = -w_1^2 \wedge \theta^1$
- $(x(s), y(s))$ を測地線とし、その接ベクトル場
 - $x' \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y}$
- を θ^1, θ^2 に対応する標構
 - $e_1 = y \frac{\partial}{\partial x}, e_2 = y \frac{\partial}{\partial y}$
- を使って
 - $x' \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} = \frac{x'}{y} e_1 + \frac{y'}{y} e_2$

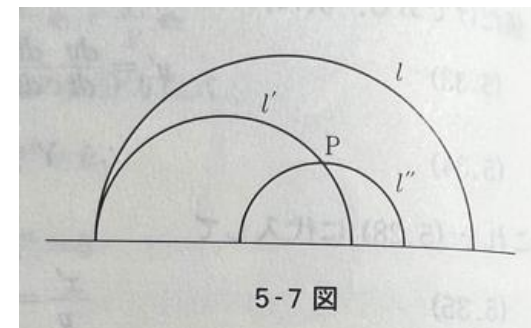
続き

- $\xi^1 = \frac{x'}{y}, \xi^2 = \frac{y'}{y}$ において、測地線の微分方程式
 - $\frac{d\xi^1}{ds} + \frac{w_2^1}{ds} \xi^2 = 0, \frac{d\xi^2}{ds} + \frac{w_1^2}{ds} \xi^1 = 0$
 - $\left(\frac{x'}{y}\right)' - \frac{x'}{y} \frac{y'}{y} = 0, \left(\frac{y'}{y}\right)' + \frac{x'}{y} \frac{y'}{y} = 0$
- $X = \frac{x'}{y}, Y = \frac{y'}{y}$ とおくと
 - $X' - XY = 0, Y' + XX = 0$
 - 一番目の式より $X \neq 0$ のとき $\frac{X'}{X} = Y = \frac{y'}{y}$ より $X = cy$
 - 接ベクトルの長さが1になるようにパラメータを取ってあるので、 $(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 = 1$ よって $X^2 + Y^2 = 1$
 - $X = cy$ を代入して
 - $c^2 y^2 + \left(\frac{y'}{y}\right)^2 = 1$
 - $ds = \frac{dy}{y\sqrt{1-c^2 y^2}}, y = \frac{1}{c} \sin t$ とおくと $ds = \frac{dt}{\sin t}$
 - $y' = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{c} \cos t \sin t, Y = \frac{y'}{y} = \cos t$
 - $X^2 + Y^2 = 1$ より $\frac{x'}{y} = X = \sin t$
 - $x = \int x' ds = \int x' \frac{ds}{dt} dt = \int \frac{1}{c} \sin t dt = -\frac{1}{c} \cos t + a$
 - 以上をまとめて $(x-a)^2 + y^2 = \frac{1}{c^2}$ 、つまり測地線は半円となる。
 - $X = 0$ なら $x = a$ となり直線
- つまり、ポアンカレ計量を持った上半平面の測地線は、x軸上に直径を持つ半円か、x軸に垂直な直線



ユークリッドの公理とポアンカレの上半平面の幾何

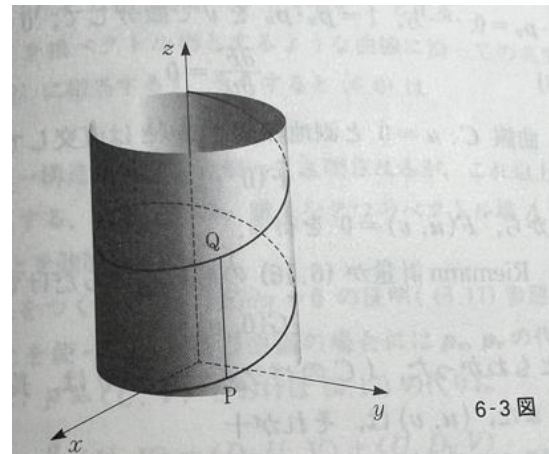
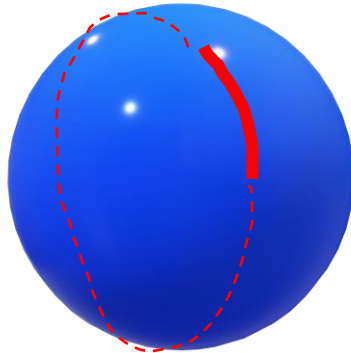
- ユークリッドの第5の公理(平行線の公理)
 - 与えられた一直線 l に含まれないどの点 P に対しても、 P を通過して l に平行な直線 l' が一つ、そしてただ一つ引ける
- 長い間、この公理は他の4公理から証明できると考えられてきた。しかし1826-1829ロバチェフスキイ(ロシア), 1829-1832ボリアイ(ハンガリー)が平行線の公理が他の公理から独立であること、すなわち平行線の公理が成り立たない幾何(非ユークリッド幾何)が存在することを発見した
- ポアンカレの上半平面を平面のように考え、測地線を直線と呼ぶと、点 P を通り直線 l に平行な(交わらない)直線が l', l'' といくつも引ける。
- このポアンカレによる非ユークリッド幾何のモデルは数学の色々な分野で使われる大切なRiemann空間の例。



5-7 図

§ 6 最短線としての測地線

- $p(t)$ が点 P, Q 間を結ぶ最短曲線であれば、 $p(t)$ は測地線
- しかし、 P から Q への測地線が最短曲線とは限らない
 - (証明は省略)
- 一般に、十分小さな範囲内では測地線は最短曲線となる



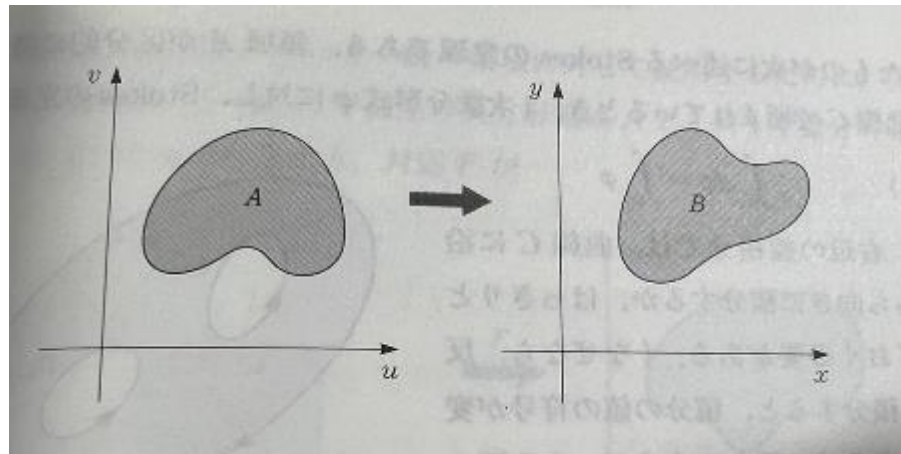
Chap4

Gauss-Bonnetの定理

- § 1 外微分形式の積分
 - (u, v) 平面内の領域 D で定義された一次微分式
 - $\varphi = fdu + gdv$
 - と D 内の曲線
 - $C : u = u(t), v = v(t)$
 - に対し、積分
 - $\int_C \varphi = \int_a^b \left(f \frac{du}{dt} + g \frac{dv}{dt} \right) dt$
 - で定義される。
 - 領域 D 内で2次微分形式
 - $\phi = hdu \wedge dv$
 - が与えられたときに、 D に含まれる領域 A 上での積分を
 - $\int_A \phi = \iint_A hdu dv$
 - と定義する。 $du \wedge dv$ の向きに統一することに注意。
 - $\int_A f dv \wedge du = \int_A -f du \wedge dv = \iint_A -f du dv$

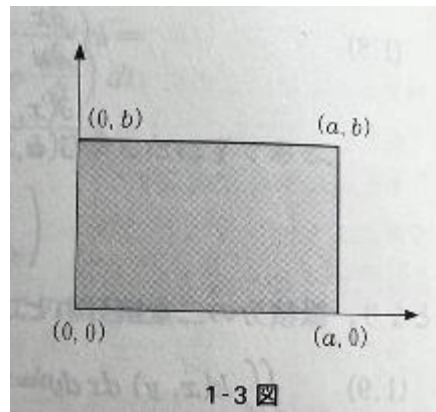
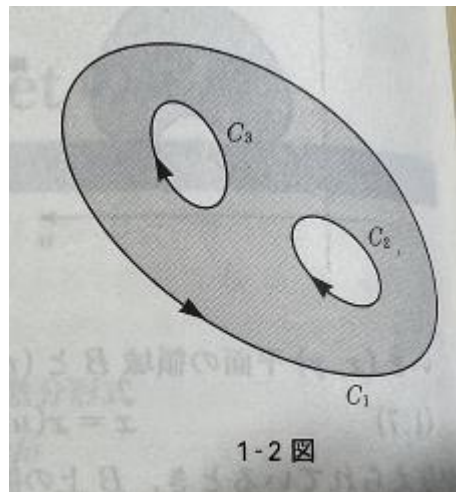
座標変換

- (x, y) 平面の領域 B と (u, v) 平面の領域 A の間の変換
 - $x = x(u, v), y = y(u, v)$
- が与えられているとき、
 - $k dx \wedge dy = k \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \wedge \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right)$
 - $= k \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) du \wedge dv = k \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du \wedge dv$



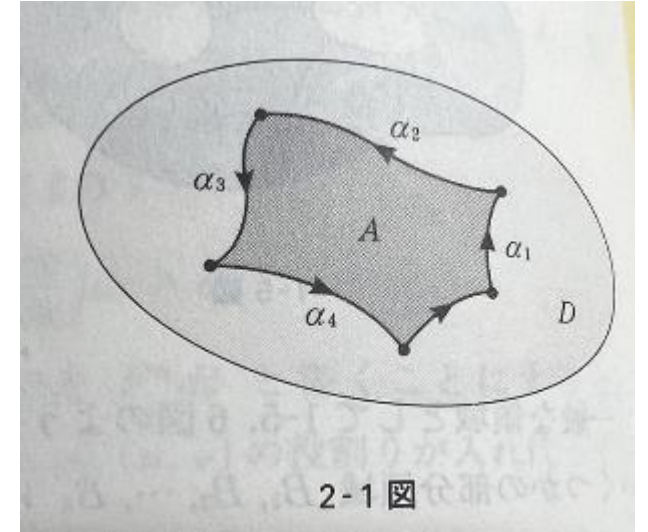
Stokesの定理

- $\int_A d\varphi = \int_{\partial A} \varphi$
- 長方形の領域での証明
 - $\varphi = fdu + gdv$
 - $d\varphi = \left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}\right) du \wedge dv$
 - $\int_A d\varphi = \int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}\right) dudv = \int_0^a f(u, 0)du + \int_0^b g(a, v)dv + \int_a^0 f(u, b)du + \int_b^0 g(0, v)dv = \int_{\partial A} \varphi$



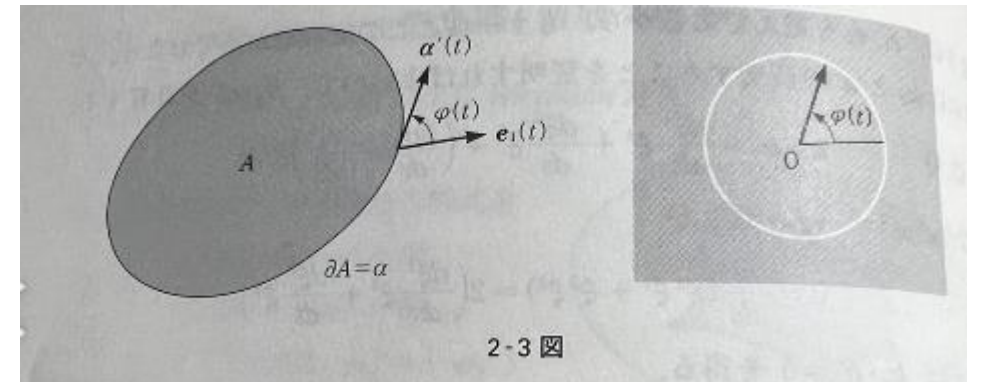
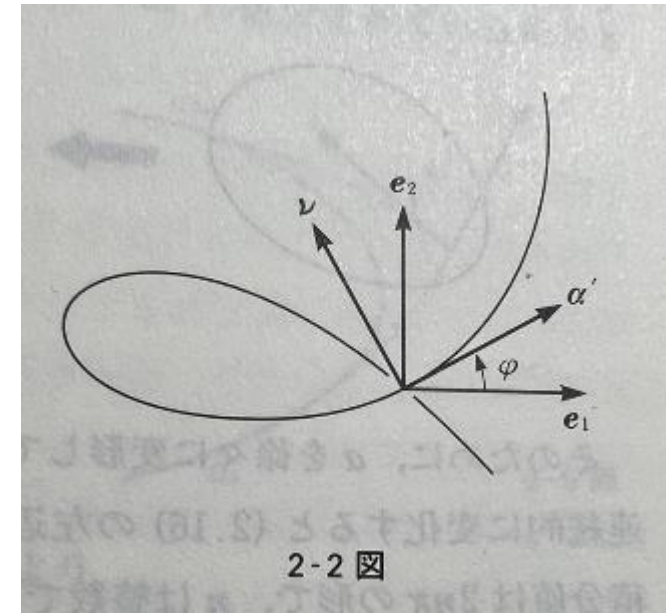
§ 2 Gauss-Bonnetの定理(領域の場合)

- (u, v) 平面上の領域 D 上にRiemann計量
 - $\theta^1\theta^1 + \theta^2\theta^2$
- 構造方程式
 - $d\theta^1 = -w_2^1 \wedge \theta^1, d\theta^2 = -w_1^2 \wedge \theta^1$ ($w_1^2 = -w_2^1$)
 - $dw_2^1 = K\theta^1 \wedge \theta^2$
- 領域 D に含まれる領域 A の境界 ∂A がいくつか有限個の微分可能な曲線 α_i をつないだようになっているとき、Stokesの定理より
 - $\int_A K\theta^1 \wedge \theta^2 = \int_A dw_2^1 = \int_{\partial A} w_2^1$
- この右辺の線積分をもっと幾何学的な量で表すのが目的



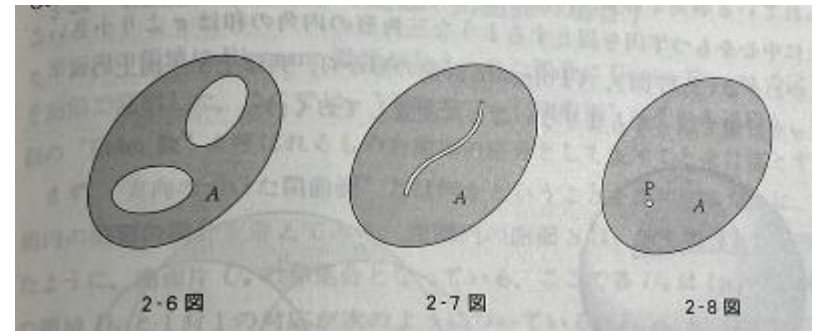
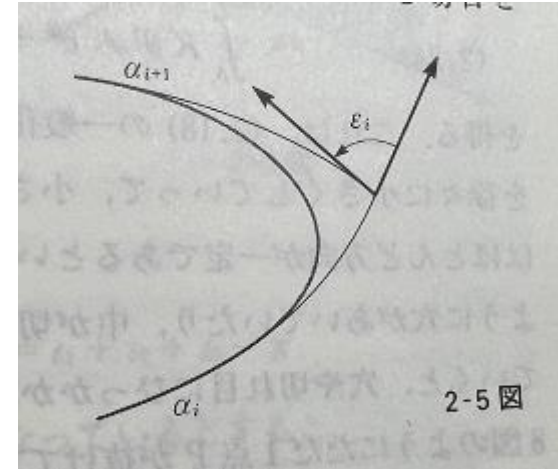
境界が一つの場合

- 境界の領域を α とし、長さ s をパラメータとする
- $\alpha'(s)$ は単位接ベクトル
- θ^1, θ^2 に対応する正規直交基底を
 - $\alpha' = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2$
 - $v = -\xi^2 e_1 + \xi^1 e_2$ とおけば、 α' に直交する単位ベクトル場
- すると、測地的曲率ベクトル
 - $k_g = \left(\frac{d\xi^1}{ds} + \frac{w_2^1}{ds}\xi^2\right)e_1 + \left(\frac{d\xi^2}{ds} + \frac{w_1^2}{ds}\xi^1\right)e_2$
- は、 v の何倍かになっていて、 $k_g = \kappa_g v$ と書ける。
 - $\kappa_g ds = k_g \cdot v ds$
 - $= [(d\xi^1 + w_2^1 \xi^2)e_1 + (d\xi^2 + w_1^2 \xi^1)e_2] \cdot [-\xi^2 e_1 + \xi^1 e_2]$
 - $= -d\xi^1 \cdot \xi^2 - w_2^1 \xi^2 \xi^2 + d\xi^2 \cdot \xi^1 + w_1^2 \xi^1 \xi^1 = \xi^1 d\xi^2 - \xi^2 d\xi^1 - w_2^1$
- e_1 から α' への角を φ とすると、 $\xi^1 = \cos \varphi, \xi^2 = \sin \varphi$
 - $d\xi^1 = -\sin \varphi d\varphi, d\xi^2 = \cos \varphi d\varphi, \xi^1 d\xi^2 - \xi^2 d\xi^1 = d\varphi$
 - $w_2^1 = d\varphi - \kappa_g ds$
- よって
 - $\int_A K \theta^1 \wedge \theta^2 = \int_A dw_2^1 = \int_{\partial A} w_2^1 = \int_{\partial A} d\varphi - \kappa_g ds = 2\pi - \int_{\partial A} \kappa_g ds$
 - 境界が一つの場合は、 $\int_{\partial A} d\varphi = 2\pi$
 - よって、 $\int_A K \theta^1 \wedge \theta^2 + \int_{\partial A} \kappa_g ds = 2\pi$



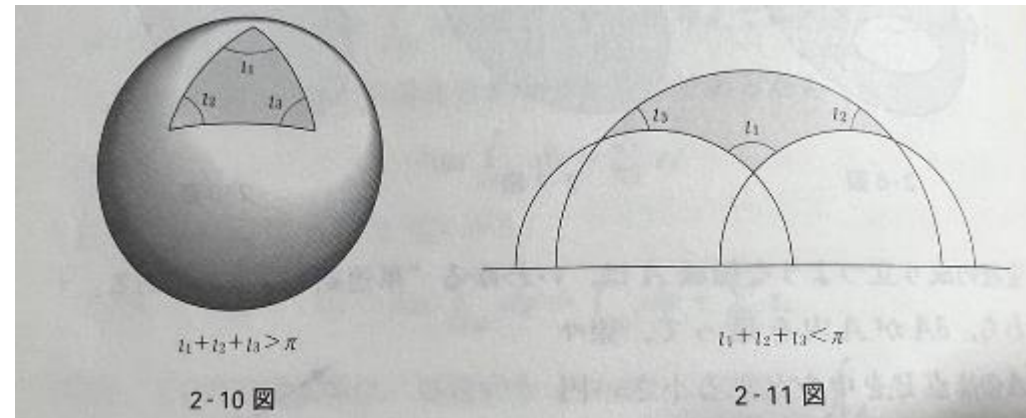
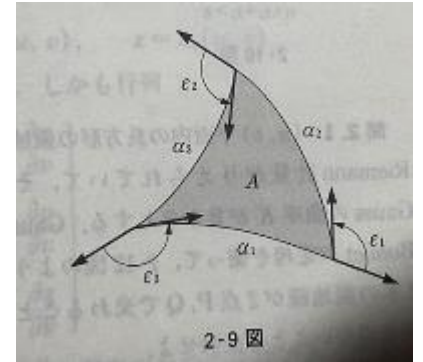
境界がn個の場合

- かどをなめらかにしてできる領域を B とすると、
 - $\int_{\partial B} d\varphi = 2\pi$
- ∂B のうち、 $\partial B \cap \partial A$ を β' 、それ以外を β'' とおくと
 - $\int_{\partial B} d\varphi = \int_{\beta'} d\varphi + \int_{\beta''} d\varphi = 2\pi$
- β' が ∂A に近づくと
 - $\int_{\beta'} d\varphi \rightarrow \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_i} d\varphi = \int_{\partial A} d\varphi$
 - $\int_{\beta''} d\varphi \rightarrow \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$
- 以上より
 - $2\pi = \int_{\partial A} d\varphi + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$
- Gauss-Bonnet (ガウス・ボンネの定理)
 - $\int_A K \theta^1 \wedge \theta^2 + \int_{\partial A} \kappa_g ds = 2\pi - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$
 - ※定理が成り立つような領域 A は単連結な領域。穴があるとだめ。



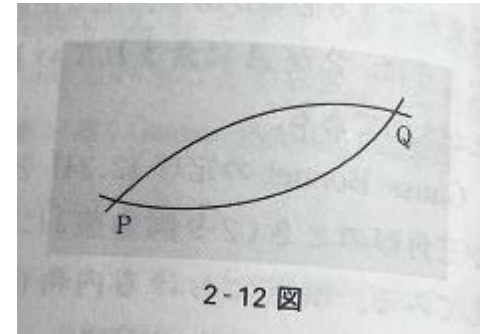
三角形の場合

- 頂点における内角を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ とおくと
 - $\int_A K \theta^1 \wedge \theta^2 + \int_{\partial A} \kappa_g ds = 2\pi - \sum_{i=1}^3 (\pi - \alpha_i) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi$
- 3辺 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ が測地線だとすると
 - $\int_A K \theta^1 \wedge \theta^2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi$
 - ユークリッド幾何の場合には $K = 0$ より、上の式は三角形の内角の和が 180° であることを示す。
 - 球面上に大円弧を辺とする三角形を考えると、 $K > 0$ より、内角の和が π よりも大きくなる。
 - ポアンカレ計量をもった上半平面での三角形の内角の和は π よりも小さい。



問2.1

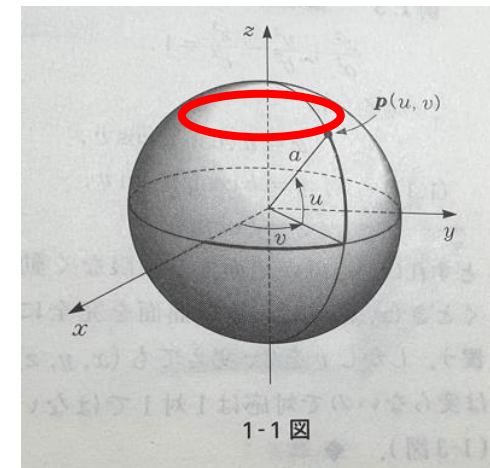
- (u, v) 平面内の長方形の領域にRiemann計量を与えられていて、そのGaussの曲率 K が負か0とする。このとき、図のように2本の測地線が2点 P, Q で交わることはありえないことを証明せよ



- $\int_A K \theta^1 \wedge \theta^2 = 2\pi - \varepsilon_P - \varepsilon_Q$
- 左辺は $K \leq 0$ より0以下
- $\varepsilon_P < \pi, \varepsilon_Q < \pi$ よりこれは矛盾
 - $\varepsilon_P = \pi$ の場合、2つの測地線は P で接することになるが、測地線は1点における方向で一意に決まり、直線が重なってしまうことになる

問2.2

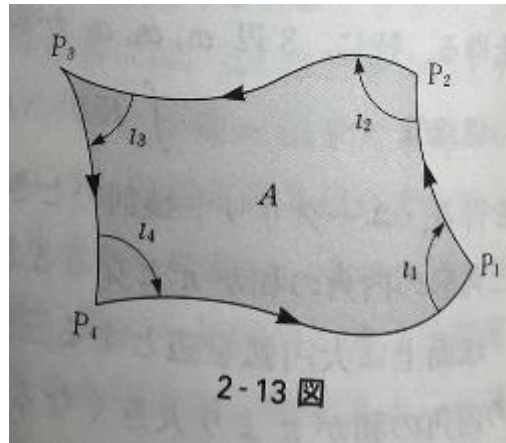
- 赤円より上にある球面の部分の面積を計算して、Gauss-Bonnetの定理を確認せよ
- 緯線の κ_g を計算する
 - $w_1^2 = \sin u \, dv$ より $\kappa_g = \sin u \frac{dv}{ds}$
 - $\int_C \kappa_g ds = \int_0^{2\pi} \sin u \, dv = 2\pi \sin u$
- 球面の第一基本形式は
 - $a^2(du)^2 + a^2 \cos^2 u (dv)^2 = \theta^1 \theta^1 + \theta^2 \theta^2$
 - $\int_A \theta^1 \wedge \theta^2 = \iint_A a^2 \cos u \, du \wedge dv = a^2 \int_0^{2\pi} dv \int_u^{\frac{\pi}{2}} \cos u \, du = 2\pi a^2(1 - \sin u)$
- $K = 1/a^2$ より $\int_A K \theta^1 \wedge \theta^2 = 2\pi(1 - \sin u)$
- よって
 - $\int_A K \theta^1 \wedge \theta^2 + \int_C \kappa_g ds = 2\pi$



問2.3

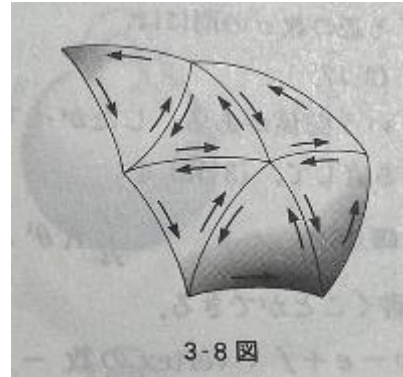
- 四角形の場合

- $\int_A K \theta^1 \wedge \theta^2 + \int_{\partial A} \kappa_g ds = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 - 2\pi$



§ 3 Gauss-Bonnetの定理(閉曲面の場合)

- Oriented (方向がついている)
 - 三角分割された曲面 S の各辺はちょうど2つの三角形に属するので、向きが2つつく。その向きが互いに反対になっているとき、 S には方向がついているという



方向のついた閉曲面 S に対して Gauss-Bonnet の定理

- S を有限個の三角形 T_1, \dots, T_f に分割し、各 T_i に対して Gauss-Bonnet の定理を適用すると
 - $\int_{T_i} K \theta^1 \wedge \theta^2 + \int_{\partial T_i} \kappa_g ds = \alpha_{i1} + \alpha_{i2} + \alpha_{i3} - \pi$
- 全ての三角形に対して足して
 - $\int_S K \theta^1 \wedge \theta^2 + \sum_{i=1}^f \int_{\partial T_i} \kappa_g ds = \sum_{i=1}^f (\alpha_{i1} + \alpha_{i2} + \alpha_{i3}) - f\pi$
- 三角分割の各辺は、2つの三角形の辺になっていて、向きが逆なので、
 - $\sum_{i=1}^f \int_{\partial T_i} \kappa_g ds = 0$
- 各頂点に集まる角を集めれば、頂点の数を v として
 - $\sum_{i=1}^f (\alpha_{i1} + \alpha_{i2} + \alpha_{i3}) = 2v\pi$
- よって、
 - $\int_S K \theta^1 \wedge \theta^2 = (2v - f)\pi$
- 三角形の数 f と辺の数 e の間には $3f = 2e$ の関係があるため
 - $2v - f = 2v - 3f + 2f = 2(v - e + f)$
- とし、 $v - e + f$ (頂点-辺+面) を S の Euler 数と呼び、 $\chi(S)$ と書くと
 - $\int_S K \theta^1 \wedge \theta^2 = 2\pi\chi(S)$
- これを方向の付いた閉曲面に対する Gauss-Bonnet の定理
 - 曲率 K そのものは S に与えられた Riemann 計量に依存するが、その積分は Riemann 計量とは無関係な数 $2\pi\chi(S)$ に等しい
 - $\chi(S)$ は $\int_S K \theta^1 \wedge \theta^2$ が三角分割によらないことから、 $\chi(S)$ は分割によらない

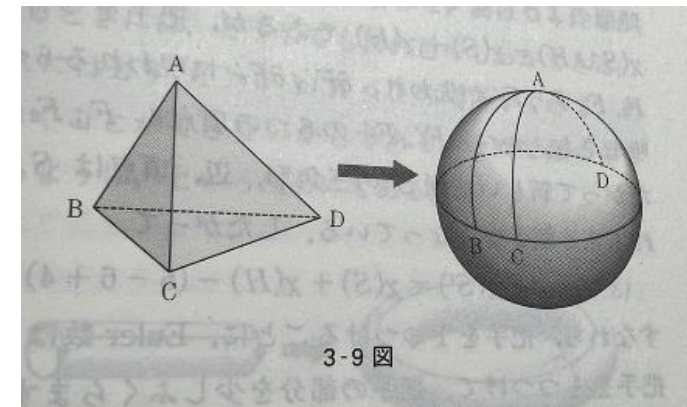
Euler数の例

• 球面

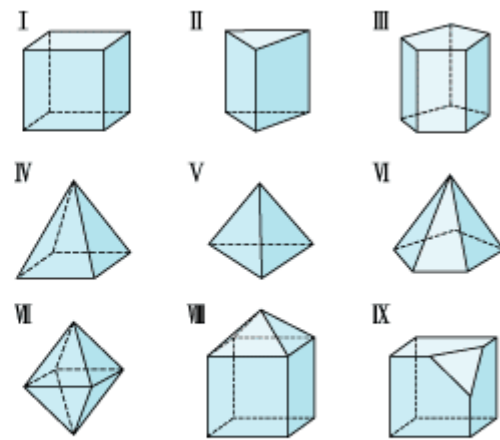
- 四面体を膨らませて球面を作ったと考えれば、四面体は

- $v - e + f = 4 - 6 + 4 = 2$

- より球面のEuler数は2



多面体	v 頂点	e 辺	f 面
I 立方体	8	12	6
II 三角柱	6	9	5
III 五角柱	10	15	7
IV 四角錐	5	8	5
V 三角錐	4	6	4
VI 五角錐	6	10	6
VII 八面体	6	12	8
VIII 「塔」	9	16	9
IX 「端を切られた立方体」	10	15	7



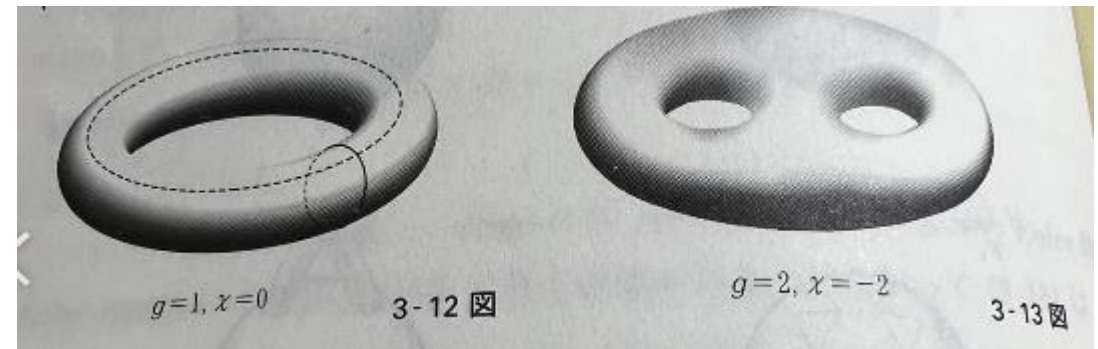
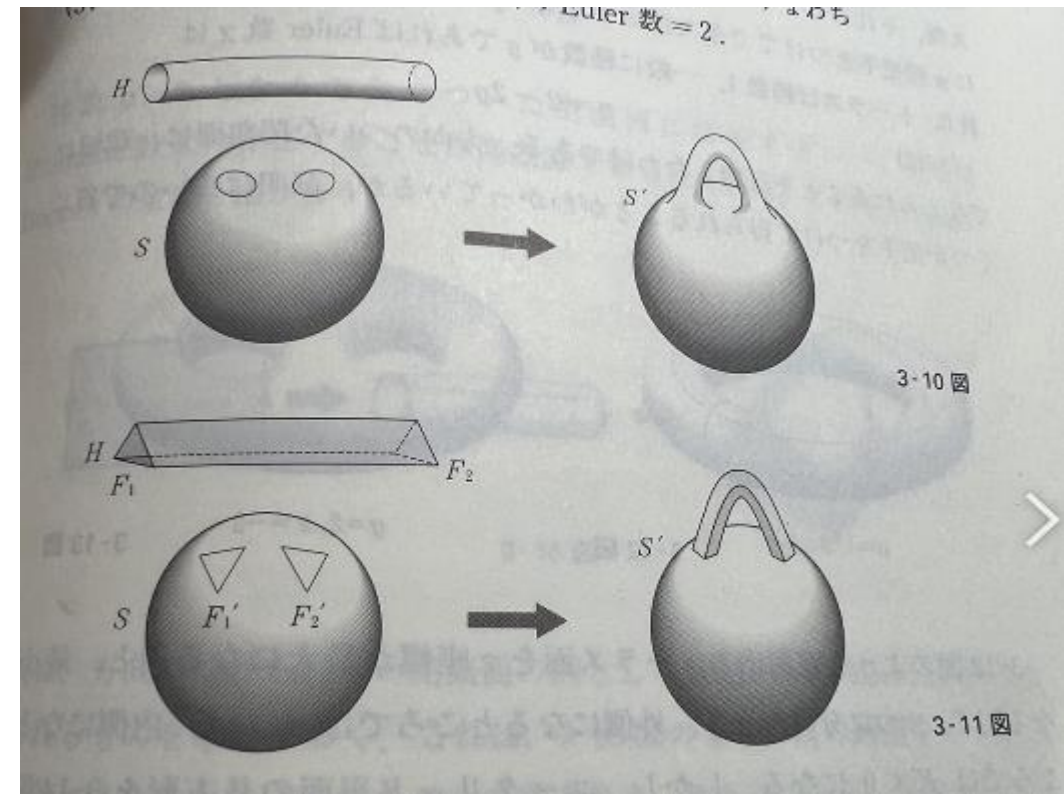
$$v - e + f = 2$$

が予想される。

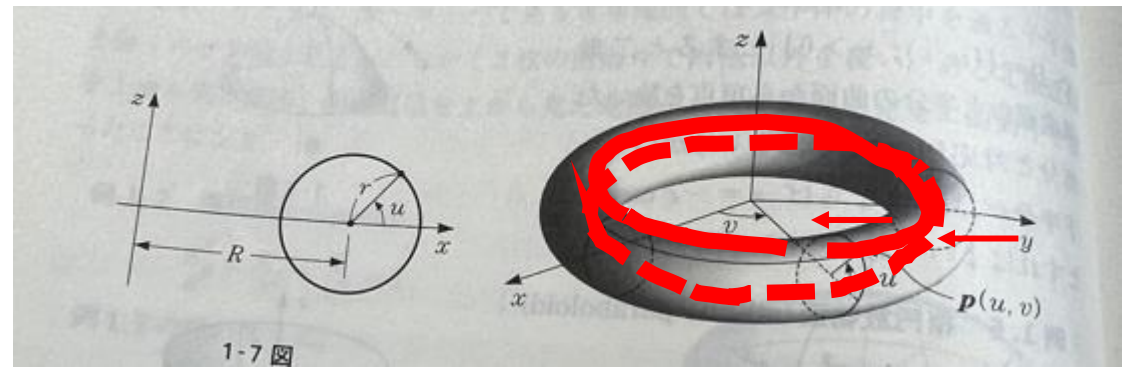
		面の数	頂点の数	辺の数
正4面体		4	↔ 4	6
正6面体		6	✗ 8	12
正8面体		8	✗ 6	12
正12面体		12	✗ 20	30
正20面体		20	✗ 12	30

Euler数の例

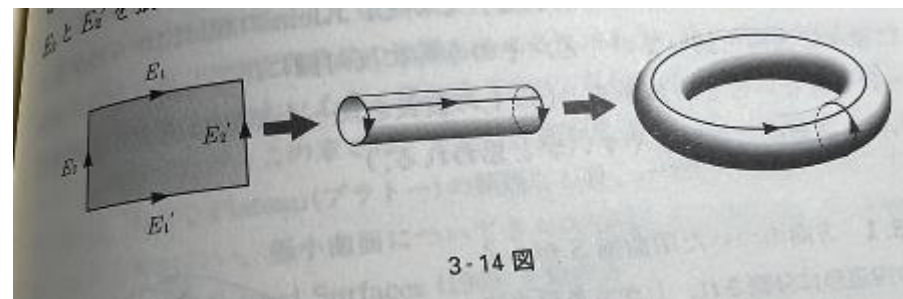
- 曲面にとって(handle)をつけた場合
 - くっつける前のためのEuler数は球面と同じで $\chi(H) = 2$
 - 三角形が4つ F_1, F_2, F_1', F_2' 消失
 - $\partial F_1', \partial F_2'$ の辺6本が吸収される
 - F_1', F_2' の頂点6個吸収
- 結局
 - $\chi(S') = \chi(S) + \chi(H) - (6 - 6 + 4) = \chi(S) - 2$
- とってを1つつけるたびにEuler数は2こずつ減っていく
 - 球面に g 個とってをつけてできた曲面を種数(genus) g の曲面とよび
 - $\chi = 2 - 2g$



例3.5 輪環面

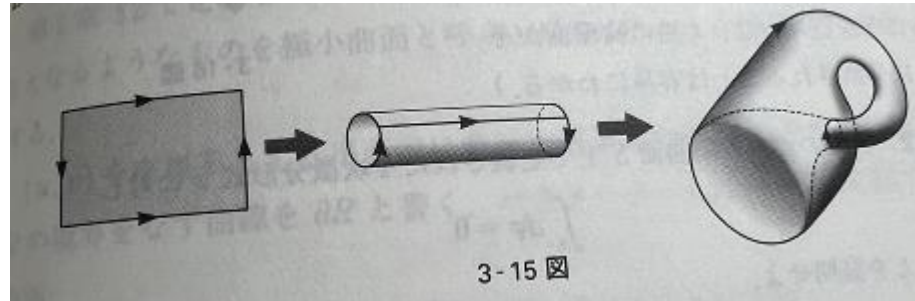


- トーラスのEuler数は0
 - 外側で $K > 0$, 内側で $K < 0$ より辻褃があう
- また、ユークリッド空間の長方形をぐるっと張り付けて、実際に張り付けずに頭の中で張り付けたと想像してみるとトーラスになる。ユークリッド平面の曲率は0より、こちらもトーラスのEuler数に矛盾しない
 - 長方形に紙を切り実際にトーラスを作ろうとすると、折れ目やしわができてしまうが、これは空間内のトーラスには必ず $K > 0$, $K < 0$ の場所ができて、至る所 $K = 0$ とすることができないから



その他の例

- 種数 $g \geq 2$ となる方向の付いた閉曲面にはかならず $K \equiv -1$ となる Riemann 計量の存在することが関数論で知られており、Gauss-Bonnet の定理と矛盾しない
- 方向の付けられない閉曲面の例
 - Klein の瓶



- メビウスの輪？

メビウスの帯は3次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^3 に埋め込むことができ、媒介変数 r, t ($-1 \leq r \leq 1, 0 \leq t \leq n$) を使えば

$$x = (r \cos t + 2) \cos 2t$$

$$y = (r \cos t + 2) \sin 2t$$

$$z = r \sin t$$

