曲線と曲面の微分幾何
(改訂版)
小林　昭七
裳華房

QD 部

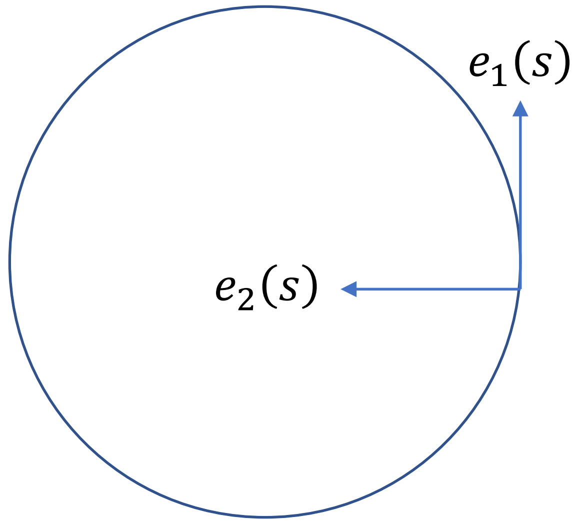
小松原　航

1. 平面上の曲線、空間内の曲線
§2 平面曲線

- $p = \big(x(t), y(t)\big)$
- 曲線$p(t)$の距離を$s = \int_0^t |\dot{p}(u)|du,\ \dot{s}(t) = |\dot{p}(t)|$
- すべてのtに対して$\dot{p}(t) \neq 0$ならば$|\dot{p}(t)| > 0$よりsはtの単調増加関数となり、$t = t(s)$と書ける。
- $p = p(s) = \big(x(s), y(s)\big)$
- $p' = p'(s) = \big(x'(s), y'(s)\big)$：$s$に関する微分は’で表す。
  - $|p'(s)| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\frac{dt}{ds} = \frac{ds}{dt}\frac{dt}{ds} = 1$
- $e_1 = p'$ととり、e_2はe_1に対して左の方向を向いているとする。

例2.1 円

- $x(t) = r\cos t\,, y(t) = r\sin t$
- $s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}dt = rt$ より
- $x(s) = r\cos\frac{s}{r}, y(s) = r\sin\frac{s}{r}$
- $e_1(s) = \left(-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r}\right)$
- $e_2(s) = \left(-\cos\frac{s}{r}, -\sin\frac{s}{r}\right)$
- $e_1'(s) = \left(-\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}, -\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}\right) = \frac{1}{r}e_2(s)$
- $e_2'(s) = \left(\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}, -\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}\right) = -\frac{1}{r}e_1(s)$

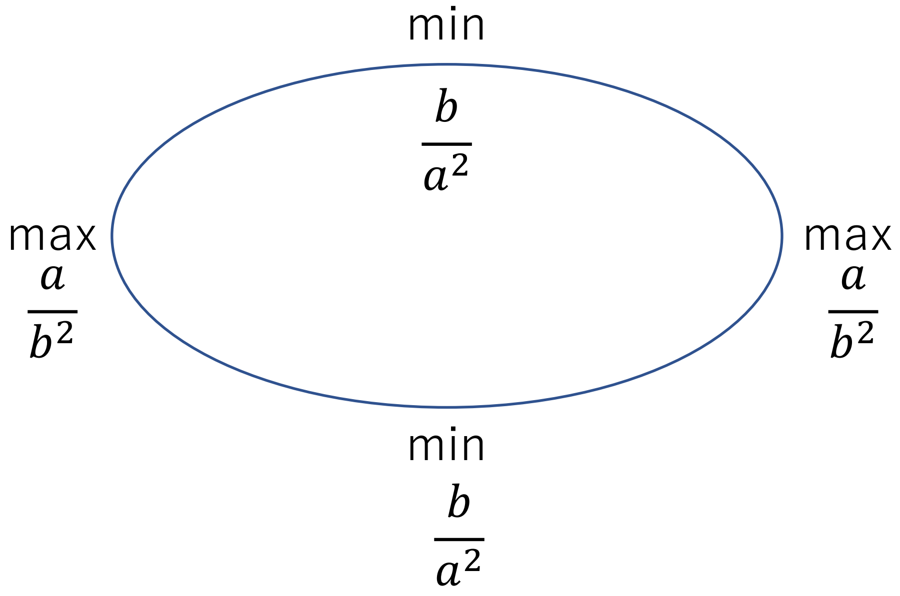


Curvature (曲率)

- $p' = e_1, e_1 \cdot e_1 = 1, e_2 \cdot e_2 = 1, e_1 \cdot e_2 = 0$
- $e_1 \cdot e_1 = 1$を微分して$2e_1 \cdot e_1' = 0$。したがって、e_1'はe_1と直交する。したがって、
  - $e_1'(s) = \kappa(s) e_2(s)$
- また、$e_1 \cdot e_2 = 0$を微分して
  - $e_1' \cdot e_2 + e_1 \cdot e_2' = 0$
  - $\kappa + e_1 \cdot e_2' = 0$。よって、$e_2' = -\kappa e_1$
- まとめると
  - $e_1'(s) = \kappa(s) e_2(s)$
  - $e_2'(s) = -\kappa(s) e_1(s)$
- この$\kappa(s)$を曲線$p(s)$の曲率
- 円の場合は$\kappa(s) = \frac{1}{r}$
- 定理2.1
  - 曲線$p(s)$の曲率が恒等的に0になるのは、$p(s)$が直線の時で、その時に限る。
- 定理2.2
  - 平面上の2曲線$p(s), \bar{p}(s)$の曲率$\kappa(s), \bar{\kappa}(s)$が一致するための必要十分条件は、回転と平行移動を使って$p(s)$を$\bar{p}(s)$に重ねることができることである。

例2.2 楕円

- $x(t) = a\cos t\,, y(t) = b\sin t$
- $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$
- $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}(-a\sin t, b\cos t)$
- $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}(-b\cos t\,, -a\sin t)$
- $\kappa(t) = \dfrac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$

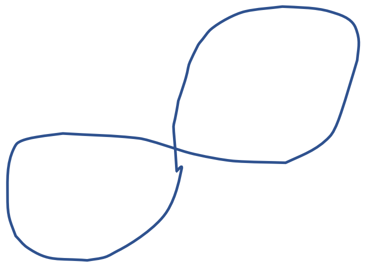


曲率の一般式

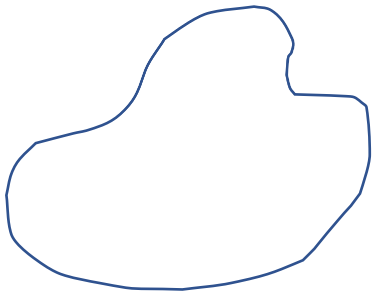
- $\kappa(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t)-\ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{(\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$
- 極座標表示の時
  - $\kappa = \frac{r^2+2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{\left\{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$

§3 平面曲線に関する大域的定理

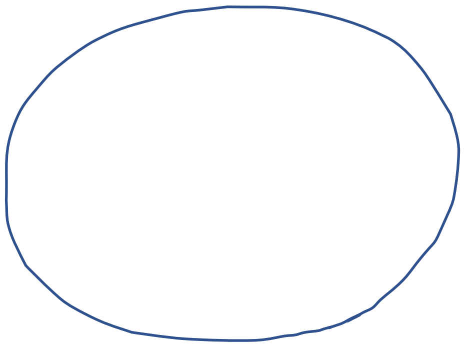
- 曲率$\kappa(s)$は、その点のごく近傍における関数の様子で決まるので、局所的性質と呼ばれる。
- 曲線全体に関した大域的性質
  - 曲線が閉じていると、コンパクトだから、曲率が最大・最小になる点が存在する。
  - 曲率を曲線上で積分できる
  - 閉曲線がある点の周りを何回回っているか
- 平面曲線$p(s)(a \leq s \leq b)$で始点$p(a)$と終点$p(b)$が一致するとき、閉曲線(closed curve)
- a, b以外のパラメーター値s_1, s_2に対して$p(s_1) = p(s_2)$となることがないときには単純閉曲線(simple closed curve)
  - Jordanの定理・・・単純閉曲線は平面を2つの領域(外部と内部)に分ける
  - 「このようにいったい何を証明しなければならないのかわからない定理は一部の職業的数学者に任せればよいので」
- 卵形線(oval), 凸閉曲線 (convex closed curve)
  - 単純閉曲線上のどの二点を結ぶ線分も曲線の外部に飛び出さない



閉曲線、ただし単純閉曲線でない



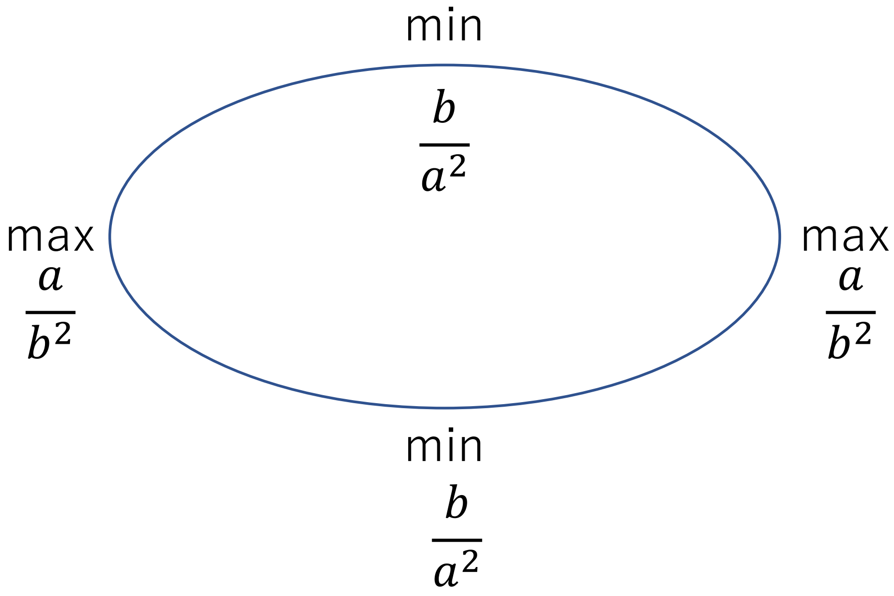
凸でない単純閉曲線



卵形線

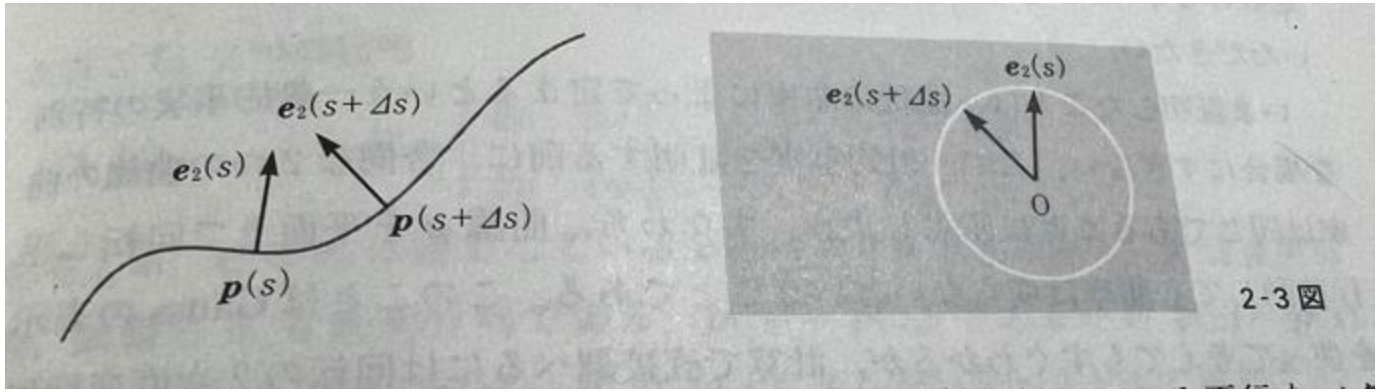
定理3.1 (四頂点定理, Mukhopadhyaya)

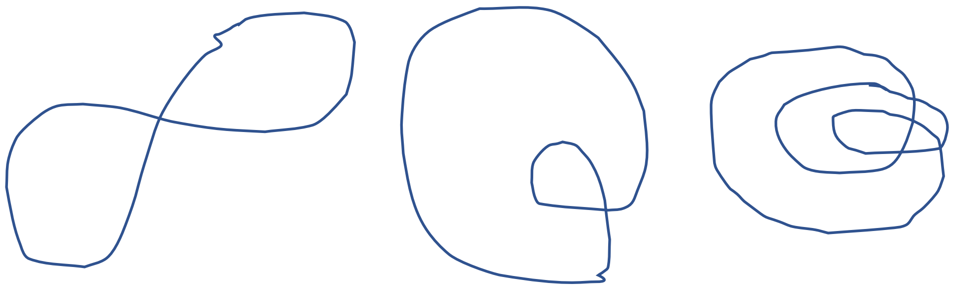
- 卵形線上には少なくとも4つ頂点がある。
  - 頂点・・・$\kappa'(s) = 0$となる点



回転数

- 閉曲線$p(s)(a \leq s \leq b)$の曲率をκとすると
  - $m = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \kappa(s)ds$
- は常に整数となる。
- $e_2(s+\Delta s) = e_2\ (s) + e_2'(s)\Delta s = e_2(s) - \kappa(s)e_1(s)\Delta s + \cdots$
- 距離$\kappa(s)\Delta s$だけ$-e_1(s)$の方向へ動く。
- よって、曲率の積分は、単位円周上を$e_2(s)$が何回回ったかを表すため、回転数と呼ぶ。



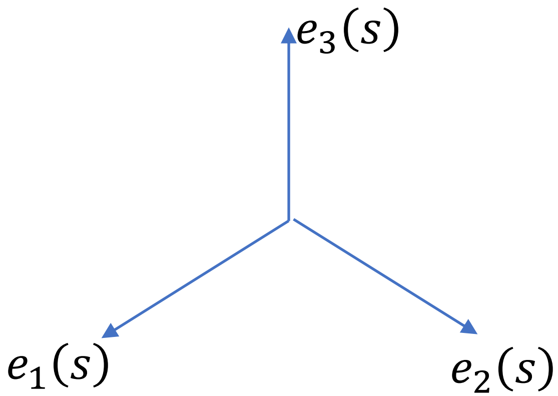


$m=0$　　$m=2$　　$m=3$

全曲率(total curvature)

- $\mu = \int_a^b |\kappa(s)| ds$
- Fenchelの定理の特別な場合
  - 閉曲線$p(s)$の全曲率μに対し、$\mu \geq 2\pi$という不等式が成り立ち、等式$\mu = 2\pi$が成り立つのは、$p(s)$が卵形線の時に限る。

§4 空間曲線



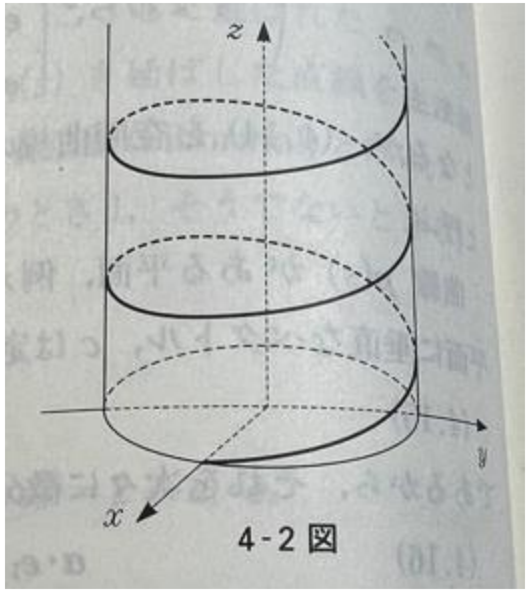
- $p(s) = \big(x(s), y(s), z(s)\big)$
- 曲線$p(s)$によって表される運動の速さは一定で1になるようにパラメータが取ってあるとする。
- $e_1(s) = p'(s) = \big(x'(s), y'(s), z'(s)\big)$
- $e_1(s) \cdot e_1(s) = 1$より、微分して$e_1(s) \cdot e_1'(s) = 0$
- $e_1'(s)$の長さを$\kappa(s)$と書き、曲線$p(s)$の曲率と呼ぶ。
  - $\kappa(s) = \sqrt{e_1'(s) \cdot e_1'(s)}$
- 空間曲線の場合は、$e_1(s)$に直交する単位ベクトルは無限になるので、以下のように定義する。
  - $e_1'(s) = \kappa(s) e_2(s) \Leftrightarrow e_2(s) = \frac{1}{\kappa(s)} e_1'(s)$
  - 以下、$\kappa(s) > 0$と仮定する
- $e_3 = e_1 \times e_2$で定義する。Frenetの標構(Frenet frame)
  - e_2を延ばした直線を主法線(principal normal), $e_3(s)$を延ばした直線を従法線(binormal)と呼ぶ。

Frenet-Serretの公式、捩率(torsion)

- $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$を微分していくと(詳細は省略)
  - $p' = e_1$
  - $e_1' = \kappa e_2$
  - $e_2' = -\kappa e_1 + \tau e_3$
  - $e_3' = -\tau e_2$
- 定理4.1
  - 空間曲線$p(s)$の曲率κが常に正であるとすると、捩率τがいたるところ0になるのは、$p(s)$が一つの平面に含まれているとき、そしてその時に限る。
- 定理4.2
  - 空間内の2曲線$p(s), \bar{p}(s)$の曲率、捩率をそれぞれ$k(s), \tau(s), \bar{\kappa}(s), \bar{\tau}(s)$とすると、$\kappa = \bar{\kappa}$かつ$\tau(s) = \bar{\tau}(s)$になるための必要十分条件は、回転と平行移動を使って$p(s), \bar{p}(s)$を重ねることができることである。
- 1次元からのはみだし具合が曲率で2次元からのはみだし具合が捩率?

例4.1 常螺旋(helix)

- $x = a\cos t\,, y = a\sin t\,, z = bt$
- $s = \sqrt{a^2 + b^2}t$
- $e_1 = \left(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c}\right)$ $\left(c = \sqrt{a^2 + b^2}\right)$
- $e'_1 = \left(-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c}, -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c}, 0\right)$
- $\kappa = \frac{a}{c^2}$
- $e_2 = \frac{1}{\kappa}e'_1 = \left(-\cos\frac{s}{c}, -\sin\frac{s}{c}, 0\right)$
- $e_3 = \left(\frac{b}{c}\sin\frac{s}{c}, -\frac{b}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\right)$
- $e'_2 = \left(\frac{1}{c}\sin\frac{s}{c}, -\frac{1}{c}\cos\frac{s}{c}, 0\right) = -\frac{a}{c^2}e_1 + \frac{b}{c^2}e_3$
- $\kappa = \frac{a}{a^2+b^2}, \tau = \frac{b}{a^2+b^2}$



問

- 問4.1 (Bouquetの定理)
  - 空間曲線$p(s)$を$s=0$でテイラー展開すると
  - $p(s) = p(0) + e_1(0)s + \kappa(0)e_2(0)\frac{s^2}{2} + \{-\kappa(0)^2 e_1(0) + \kappa'(0)e_2(0) + \kappa(0)\tau(0)e_3(0)\}\frac{s^3}{3!} + \cdots$
- 問4.2
  - 空間曲線$p(t)$に対し
  - $\kappa = \frac{|\dot{p}\times\ddot{p}|}{|\dot{p}|^3}, \tau = \frac{|\dot{p} \quad \ddot{p} \quad \dddot{p}|}{|\dot{p}\times\ddot{p}|^2}$

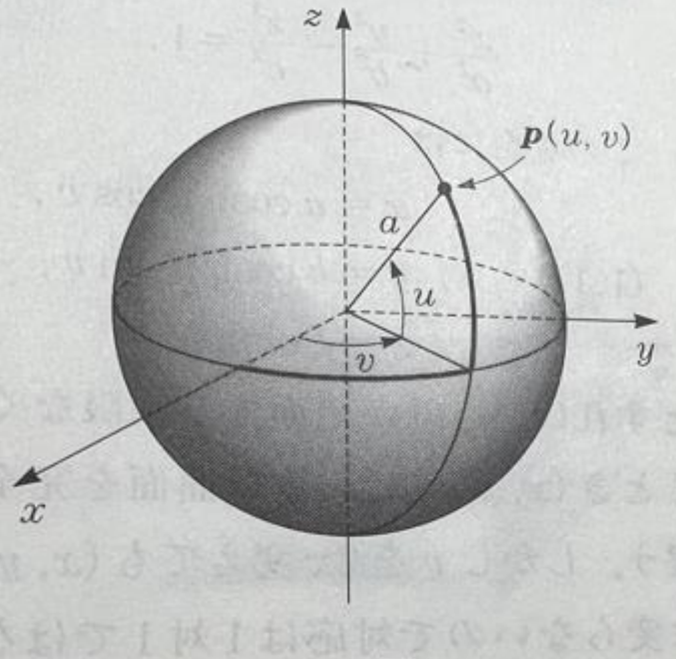
§5 空間曲線に関する大域的定理

- 定理5.1 Fenchelの定理
  - 空間内の閉曲線$p(s)(a \leq s \leq b)$の曲率を$\kappa(s)$とすると
    - $\int_a^b \kappa(s)ds \geq 2\pi$
  - かつ、等号は$p(s)$が平面に含まれた卵形線のときにだけ成り立つ。
  - 左辺を全曲率(total curvature)

- 定理5.2
  - 空間内の単純閉曲線$p(s)$が結び糸になっているならば、その全曲率は少なくとも4πである。

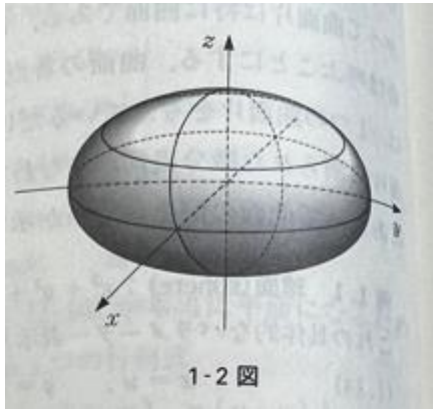
2 空間内の曲面の小域的理論
§1 空間内の曲面の概念

- 球面(sphere)
  - $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$
  - $x = a\cos u \cos v$
  - $y = a\cos u \sin v$
  - $z = a\sin u$
  - $|u| < \frac{\pi}{2}$とすると、南北両極を除いた部分を動く

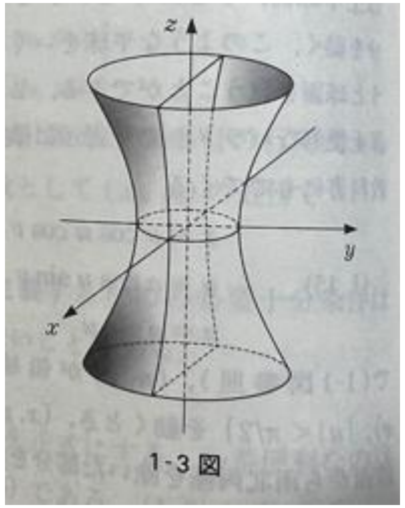


1-1 図

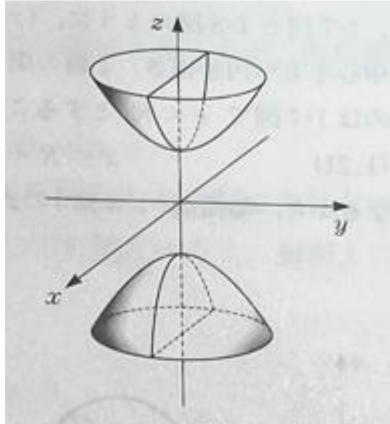
- 楕円面 (ellipsoid)
  - $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
  - $x=a\cos u\cos v$
  - $y=b\cos u\sin v$
  - $z=c\sin u$



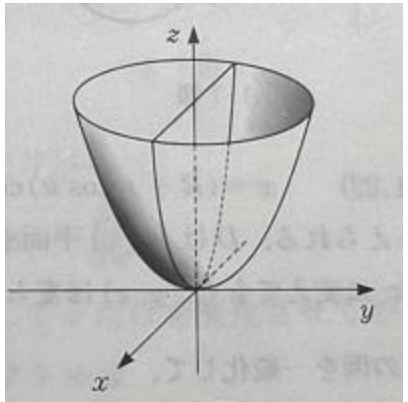
- 一葉双曲面 (hyperboloid of one sheet)
  - $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
  - $x=a\cosh u\cos v$
  - $y=b\cosh u\sin v$
  - $z=c\sinh u$
  - (u,v)が平面上を制限なく動くとき、一葉双曲面を完全に覆う。



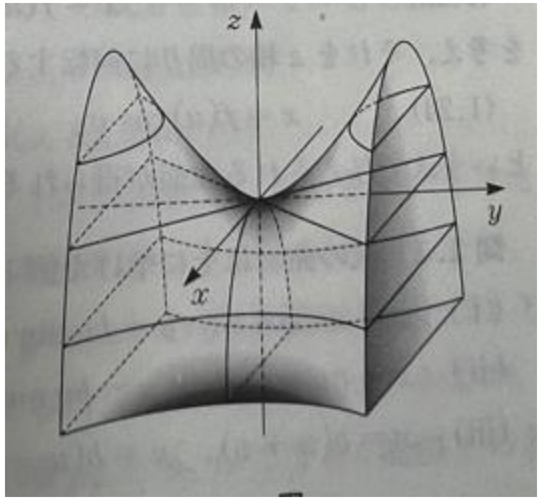
- 二葉双曲面 (hyperboloid of two sheets)
  - $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$
  - $x=a\sinh u\cos v$
  - $y=b\sinh u\sin v$
  - $z=c\cosh u$
  - $D=\{(u,v);u>0\}$とすると上半分の曲面から頂点を除いた部分を対応する。下半分が欲しいなら$z=-c\cosh u$とする。
- 楕円放物面 (elliptic paraboloid)
  - $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$
- 双曲放物面 (hyperbolic paraboloid)
  - $z=-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$



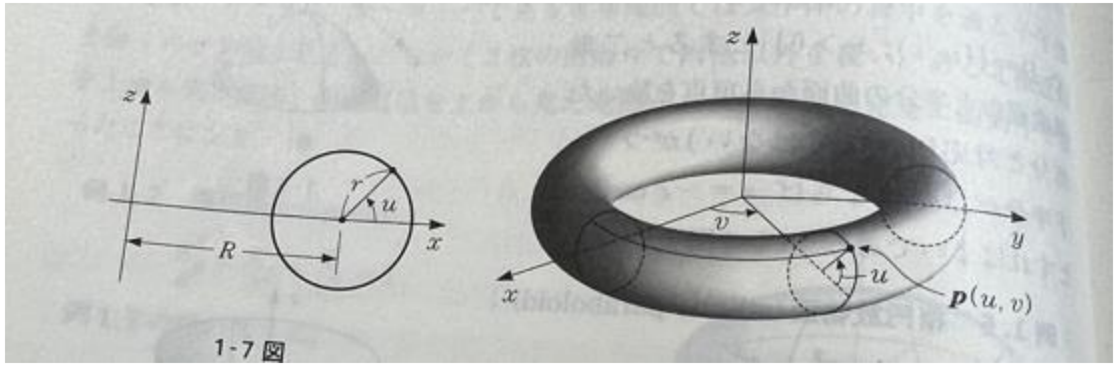
1-4 図



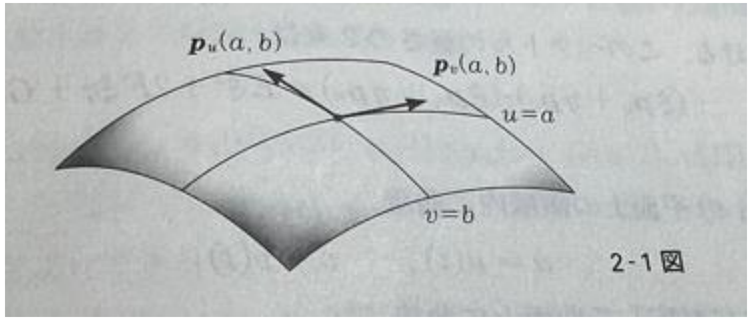
1-5 図



- 輪環面(torus)
  - $x = (R + r\cos u)\cos v\,, y = (R + r\cos u)\sin v\,, z = r\sin u$



§2 基本形式と曲率



  - $p(u,v)=\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)$
- $E=p_u\cdot p_u, F=p_u\cdot p_v=p_v\cdot p_u, G=p_v\cdot p_v$とおく。
- p_u,p_vで張る接平面のベクトルは
  - $\xi p_u+\eta p_v$
- で書ける。長さの二乗は
  - $(\xi p_u+\eta p_v)\cdot(\xi p_u+\eta p_v)=E\xi^2+2F\xi\eta+G\eta^2$
- また、(u,v)平面上の領域内に曲線
  - $u=u(t), v=v(t)$
- を取り、それに対応して曲面上に曲線
  - $p(t)=p\big(u(t),v(t)\big)$
- を考える。この曲線の各点における接ベクトルは
  - $\frac{dp}{dt}=\frac{\partial p}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial p}{\partial v}\frac{dv}{dt}=p_u\frac{du}{dt}+p_v\frac{dv}{dt}$
- よって、長さの２乗は
  - $\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dp}{dt}=E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$
- tが$\alpha\to\beta$まで動くときのこの曲線の長さは
  - $\int_\alpha^\beta\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt$
- このとき
  - $\mathrm{I}=Edudu+2Fdudv+Gdvdv$
- を第一基本形式(first fundamental form)

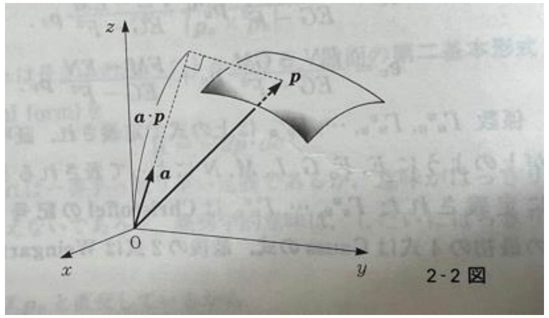
第２基本形式

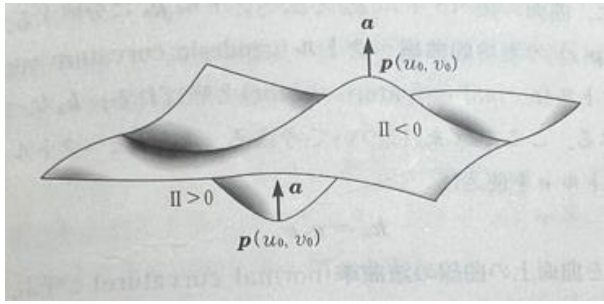
- 第1基本形式は形式的に
  - $dp = p_u du + p_v dv$
  - $\mathrm{I} = dp \cdot dp$
- と書ける。
  - 「使って便利で正しい結果が出てくる概念、記号、式などは当初曖昧な点があっても、後できちんと正当化されるということは数学の歴史が示している」
- $e = \frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|}$は接平面に垂直の法ベクトル
- 曲面の第二基本形式(second fundamental form)は
  - $\mathrm{II} = -dp \cdot de$
  - 「これは一番手っ取り早い定義であるが、意味がはっきりせず、良い定義とはいえないであろう。幾何学的意味は、しだいにはっきりしてくる」

Gaussの式、Weingartenの式

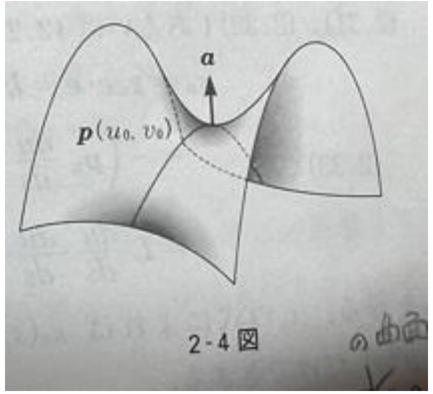
- $p_u \cdot e = 0, p_v \cdot e = 0$を微分していくと
  - $L = p_{uu} \cdot e = -p_u \cdot e_u$
  - M$= p_{uv} \cdot e = -p_u \cdot e_v = p_{vu} \cdot e = -p_v \cdot e_u$
  - $N = p_{vv} \cdot e = -p_v \cdot e_v$
- このとき
  - $\mathrm{II} = -dp \cdot de = (p_u du + p_v dv) \cdot (e_u du + e_v dv)$
  - $= Ldudu + 2Mdudv + Ndvdv$
- また、このとき
  - Gaussの式
    - $p_{uu} = \Gamma_{uu}^{u} p_u + \Gamma_{uu}^{v} p_v + Le$
    - $p_{uv} = \Gamma_{uv}^{u} p_u + \Gamma_{uv}^{v} p_v + Me$
    - $p_{vu} = \Gamma_{vu}^{u} p_u + \Gamma_{vu}^{v} p_v + Me$
    - $p_{vv} = \Gamma_{vv}^{u} p_u + \Gamma_{vv}^{v} p_v + Ne$
    - Γ_{ab}^{c} : Christoffelの記号、E, F, G, L, M, Nで書ける
  - Weingartenの式
    - $e_u = \frac{FM-GL}{EG-F^2} p_u + \frac{FL-EM}{EG-F^2} p_v$
    - $e_v = \frac{FN-GM}{EG-F^2} p_u + \frac{FM-EN}{EG-F^2} p_v$

第二形式の幾何学的意味





- 曲面上の関数fを
  - $f(u,v) = a \cdot p(u,v)$
  - fはa方向の高さを表す関数である。
- 曲面上の点$p_0 = p(u_0, v_0)$を固定して、aをそこでの法ベクトル$a = e(u_0, v_0)$とする。
- $a \cdot p_u(u_0, v_0) = a \cdot p_v(u_0, v_0) = 0$より
  - $df = d(a \cdot p) = a \cdot p_u du + a \cdot p_v dv = 0$
  - 幾何学的な意味は、aを真上を向いたベクトルとしたとき、p_0での接平面はaに直交するから水平で、それは、曲面の高さがp_0で臨界値(critical value)に達している
- p_0でdfが0であるから、fのHesse行列を調べることにより、fのp_0近傍での様子がわかる
  - $H_f = \begin{bmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{vu} & f_{vv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(u_0,v_0) & M(u_0,v_0) \\ M(u_0,v_0) & N(u_0,v_0) \end{bmatrix}$
- 第二基本形式
  - $\mathrm{II} = Ldudu + 2Mdudv + Ndvdv$
- が$p(u_0, v_0)$において正値2次形式になるとすると、Hesse行列H_fが正値、つまりfが(u_0, v_0)において上に凹となる。
- II が負値2次形式ならば、上に凸
- IIが不定値、すなわち$LN - M^2 < 0$のときは、鞍点となる。$LN - M^2 = 0$のときは一般には何も言えない。
- 定理2.1
  - 第二基本形式$II = Ldudu + 2Mdudv + Ndvdv$が定値になる点、すなわち$LN - M^2 > 0$となる点では、曲面は凹/凸となり、不定値、$LN - M^2 < 0$となる点では鞍状になる。



曲面上の曲線の曲率

- 空間曲線$p(s) = p\big(u(s), v(s)\big)$
- $\left|\frac{dp}{ds}\right| = 1$となるパラメータ$s$が入っているとする。
- $p''(s)$の長さが曲率の定義であった。$p''(s)$は曲面$p(u,v)$に接してはいないから
    - $p''(s) = k_g + k_n$
    - k_g : 曲面の接ベクトル。測地的曲率ベクトル(geodesic curvature vector)
    - k_n : 法曲率ベクトル (normal curvature vector)
- k_nは法ベクトルであるから$k_n = \kappa_n e$と書ける。κ_nを曲線上の曲線の法曲率(normal curvature)
    - $\kappa_n = \kappa_n e \cdot e = k_n \cdot e = \big(p'' - k_g\big) \cdot e = p'' \cdot e = -p' \cdot e'$
    - $= -\left(p_u \frac{du}{ds} + p_v \frac{ds}{dv}\right) \cdot \left(e_u \frac{du}{ds} + e_v \frac{dv}{ds}\right) = L \frac{du}{ds}\frac{du}{ds} + 2M \frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + N \frac{dv}{ds}\frac{dv}{ds}$
    - κ_nは曲線$p(s)$そのものではなく、$p'(s)$のみで決まる。
- したがって、曲面上の点$p_0 = p(u_0, v_0)$に対して単位接ベクトル
    - $w = \xi p_u(u_0, v_0) + \eta p_v(u_0, v_0)$
    - $\mathrm{II}(w, w) = L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2$
    - $\kappa_n(s) = \mathrm{II}\big(p'(s), p'(s)\big)$
- と書ける。

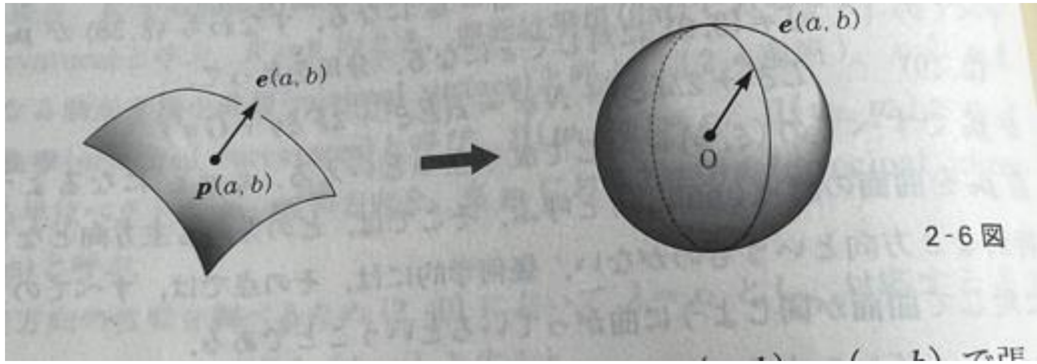
ガウスの曲率、平均曲率

- $\mathrm{II}(w,w)$ においてwをp_0 での接平面内の単位円上を動かすときの最大、最小を求める。つまり、
  - $|w|^2 = E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2 = 1$の条件で
  - $\mathrm{II}(w,w) = L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2$の最大・最小を求める
- 最大・最小の解をκ_1, κ_2とおくと
  - $\kappa_1\kappa_2 = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = K, \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{EN+GL-2FM}{2(EG-F^2)} = H$
  - K : Gaussの曲率, H : 平均曲率
  - $K \equiv 0$のとき、曲面は平坦(flat)
  - $H \equiv 0$のとき、曲面は極小平面(minimal surface)
  - κ_1, κ_2を主曲率(principal curvatures)
  - $\mathrm{II}(w_1,w_1) = \kappa_1, \mathrm{II}(w_2,w_2) = \kappa_2$ となる単位ベクトルw_1, w_2の方向を、点p_0における主方向(principal direction)

性質

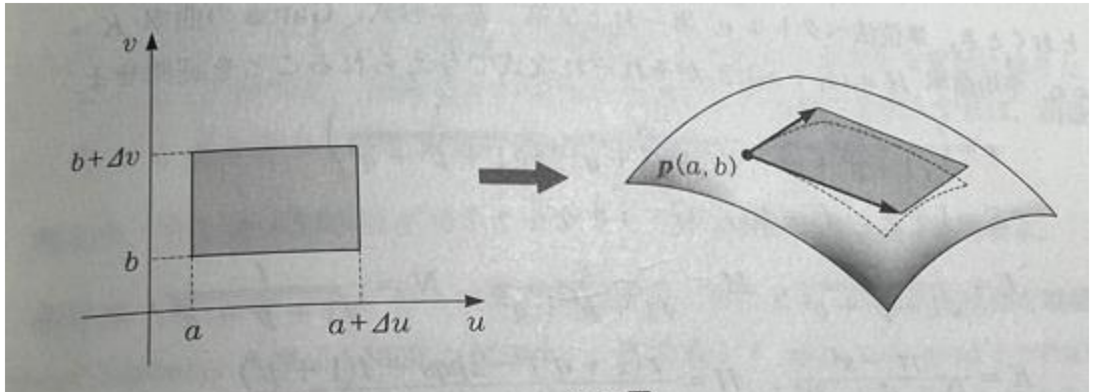
- $\kappa_1 \neq \kappa_2$なら、2つの主方向は互いに直角
- $\kappa_1 = \kappa_2$なら、$\mathrm{II}(w, w)$でwが単位円上を動くとき定数κとなる。このような点と臍点(せいてん、umblic)
  - どの方向も主方向
  - すべての方向に対して曲面が同じように曲がっている
- $K > 0$となる点を楕円点(elliptic point), $K < 0$となる点を双曲点(hyperbolic point)、$K = 0$となる点を放物点(parabolic point)
- 第一基本形式は常に正値であるから、$EG - F^2 > 0$で、
  - $\frac{LN-M^2}{EG-F^2} = K$
- より、Kは$LN - M^2$と同じ符号をもつ。
- 定理2.1
  - 第二基本形式$II = Ldudu + 2Mdudv + Ndvdv$が定値になる点、すなわち$LN - M^2 > 0$となる点では、曲面は凹/凸となり、不定値、$LN - M^2 < 0$となる点では鞍状になる。
- より
- 定理2.2
  - Gaussの曲率Kが正になる点では、曲面は凸、負になる点では鞍上になる。
- $k_g \equiv 0$となるとき、$p(s)$を測地線(geodesic)と呼ぶ。

Gaussの球面表示



- 平面曲線
  - 曲率とは、点がp_0の近くを曲線に沿って動く距離と、Gaussの表示により対応する点が単位円上を動く距離との比
- 曲面
  - Gaussの曲率が面積の比として理解される
- 接平面上のベクトルp_u, p_vで張られた平行四辺形の面積は
  - $|p_u \times p_v|$
- 単位球面上に対応する点eで対応する接ベクトルe_u, e_vで張られる平行四辺形の面積は
  - $|e_u \times e_v|$
  - $e_u \times e_v = \left(\frac{FM-GL}{EG-F^2} p_u + \frac{FL-EM}{EG-F^2} p_v\right) \times \left(\frac{FN-GM}{EG-F^2} p_u + \frac{FM-EN}{EG-F^2} p_v\right) = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} p_u \times p_v$
  - $|e_u \times e_v| = |K||p_u \times p_v|$
  - (e_u, e_v, e)が左手系の時には、e_u, e_vで張られた平行四辺形の面積は$-|e_u \times e_v|$であると定義して、面積に符号をつければ、Kは面積比と考えることができる。

面積要素



2-7 図

- $|p_u \times p_v|dudv$
- を曲面の面積要素という。(u, v)が領域Rを動くとき対応する曲面上の領域の面積は
  - $\iint_R |p_u \times p_v|dudv$
- となり、Gaussの表示によりそれに対応する単位球面上の領域の符号付の面積は
  - $\iint_R K|p_u \times p_v|dudv = \iint_R K\sqrt{EG - F^2}dudv$
    - $|p_u \times p_v|^2 = |p_u|^2|p_v|^2 - (p_u \cdot p_v)^2 = EG - F^2$
    - $(w \times x)\cdot(y \times z) = (w \cdot y)(x \cdot z) - (w \cdot z)(x \cdot y)$ ($Lagrange$の公式)
    - (左)=$\varepsilon_{ijk}w_j x_k \varepsilon_{ilm} y_l z_m = \left(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}\right)w_j x_k y_l z_m = w_j x_k y_j z_k - w_j x_k y_k z_j = (w \cdot y)(x \cdot z) - (w \cdot z)(x \cdot y)$

問2.1

- 曲面が$z = f(x, y)$で与えられたとき
  - $p = \frac{\partial f}{\partial x}, q = \frac{\partial f}{\partial y}, r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
- とおくと
  - $e = \left(\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right)$
  - $E = 1 + p^2, F = pq, G = 1 + q^2$
  - $L = \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, M = \frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, N = \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$
  - $K = \frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}, H = \frac{r\left(1+q^2\right)-2pqs+t\left(1+p^2\right)}{2(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}$

問2.2

- 曲面の第三基本形式は
  - $\mathrm{III} = de \cdot de$
- で定義される。このとき
  - $K\mathrm{I} - 2H\mathrm{II} + \mathrm{III} = 0$

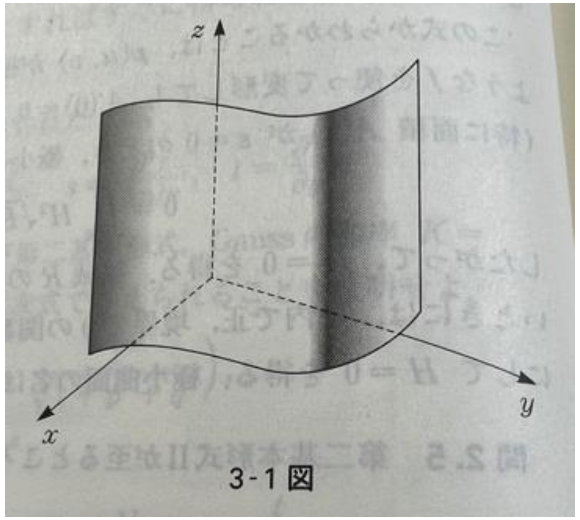
問2.3

- 曲面$p(u,v)$上の曲線$p(s)=p\big(u(s),v(s)\big)$が測地線($k_g=0$)となるための必要十分条件は、$u,v$が次の微分方程式の解であることである
  - $\frac{d^2u}{ds^2}+\Gamma_{uu}^{u}\frac{du}{ds}\frac{du}{ds}+2\Gamma_{uv}^{u}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\Gamma_{vv}^{u}\frac{dv}{ds}\frac{dv}{ds}=0$
  - $\frac{d^2v}{ds^2}+\Gamma_{uu}^{v}\frac{du}{ds}\frac{du}{ds}+2\Gamma_{uv}^{v}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\Gamma_{vv}^{v}\frac{dv}{ds}\frac{dv}{ds}=0$

問2.5

- 第二基本形式IIが至る所0ならば、平面に限る

§3 実例について基本形式、曲率



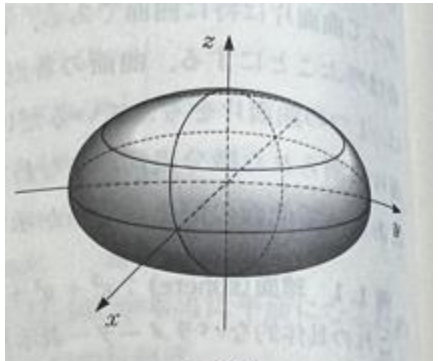
3-1 図

- 3.1 柱面 (cylindrical surface)
  - $x = x(u), y = y(u), z = v$
  - $\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 = 1$となるように$u$を取ってある
  - $p(u, v) = (x(u), y(u), v)$
  - $p_u = (x', y', 0), p_v = (0,0,1)$
  - $\mathrm{I} = (du)^2 + (dv)^2$
  - $e = (y', -x', 0), de = (y''du, -x''du, 0)$
  - $II = -dp \cdot de = (x''y' - x'y'')(du)^2$
  - $K = 0, H = \frac{1}{2}(x''y' - x'y'')$
  - $\kappa_1 = 0, \kappa_2 = x''y' - x'y''$
  - κ_1に対応する主方向はz軸の方向、κ_2に対応する主方向はxy平面に平行な方向
  - Gaussの球面表示においてeは常に単位球の赤道上を動くので、eが覆う面積は0

例3.2 楕円面

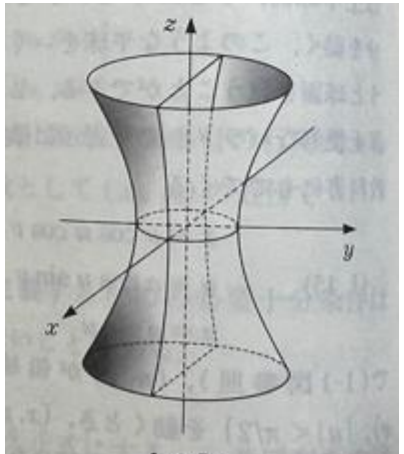
- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
- $p(u,v)=(a\cos u\cos v\,, b\cos u\sin v\,, c\sin u)$
- $e=\frac{1}{\Delta}(-bc\cos u\cos v\,, -ca\cos u\sin v\,, -ab\sin u)$
  - $\Delta=\sqrt{b^2c^2\cos^2 u\cos^2 v+c^2a^2\cos^2 u\sin^2 v+a^2b^2\sin^2 u}$
- $E=a^2\sin^2 u\cos^2 v+b^2\sin^2 u\sin^2 v+c^s\cos^2 u$
- $F=(a^2-b^2)\sin u\cos u\sin v\cos v$
- $G=a^2\cos^2 u\sin^2 v+b^2\cos^2 u\cos^2 v$
- $EG-F^2=\Delta^2\cos^2 u$
- $L=\frac{abc}{\Delta}, M=0, N=\frac{abc\cos^2 u}{\Delta}, K=\frac{a^2b^2c^2}{\Delta^4}=\frac{1}{a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^2}$
- $H=\frac{abc\left[(a^2+b^2+c^2)-(a^2\cos^2 u\cos^2 v+b^2\cos^2 u\sin^2 v+c^2\sin^2 u)\right]}{2\Delta^3}=\frac{(a^2+b^2+c^2)-(x^2+y^2+z^2)}{2a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{\frac{3}{2}}}$

- 球面の場合
  - $a=b=c$
  - $\mathrm{I}=a^2(du)^2+a^2\cos^2 u\,(dv)^2$
  - $\mathrm{II}=a(du)^2+\mathrm{a}\cos^2 u\,(dv)^2$
  - $e=\left(-\frac{x}{a},-\frac{y}{a},-\frac{z}{a}\right)$
  - $K=\frac{1}{a^2}, H=\frac{1}{a}$



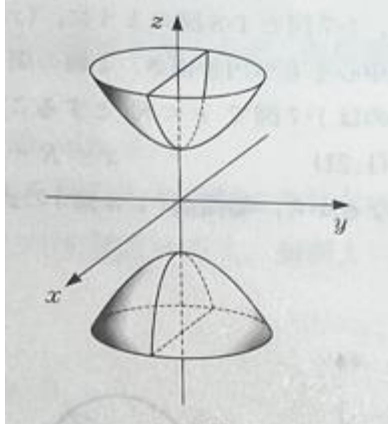
1-2 図

例3.3 一葉双曲面



- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
- $p(u, v) = (a \cosh u \cos v\,, b \cosh u \sin v\,, c \sinh u)$
- $e = -\frac{1}{\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, -\frac{z}{c^2}\right)$
- $K = -\frac{1}{a^2 b^2 c^2 \left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^2}$
- $H = \frac{(x^2+y^2+z^2)-(a^2+b^2-c^2)}{2a^2 b^2 c^2 \left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{\frac{3}{2}}}$

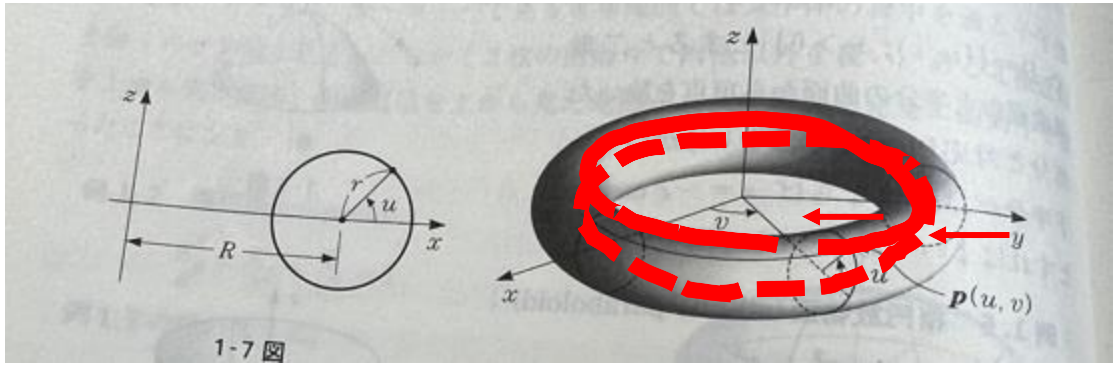
例3.4 二葉双曲面



1-4 図

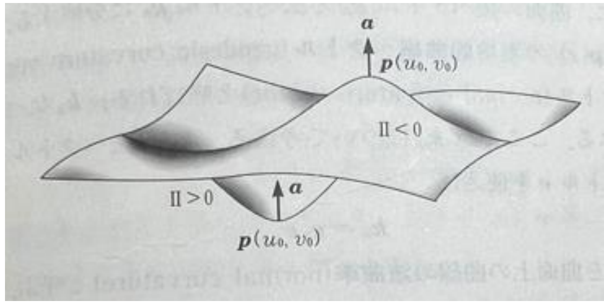
- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$
- $p(u,v)=(a\sinh u\cos v\,,b\sinh u\sin v\,,c\cosh u)$
- $e=-\frac{1}{\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},-\frac{z}{c^2}\right)$
- $K=\frac{1}{a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^2}$
- $H=\frac{(x^2+y^2+z^2)+(a^2+b^2-c^2)}{2a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{\frac{3}{2}}}$

例3.5 輪環面



外側
K>0
内側
K<0

- $p(u,v) = \left((R + r\cos u)\cos v\,, (R + r\cos u)\sin v\,, r\sin u\right)$
- $e = (-\cos u\cos v\,, -\cos u\sin v\,, -\sin u)$
- $E = r^2, F = 0, G = (R + r\cos u)^2$
- $L = r, M = 0, N = (R + r\cos u)\cos u$
- $K = \frac{\cos u}{r(R+r\cos u)}, 2H = \frac{\cos u}{R+r\cos u} + \frac{1}{r}, \kappa_1 = \frac{\cos u}{R+r\cos u}, \kappa_2 = \frac{1}{r}$

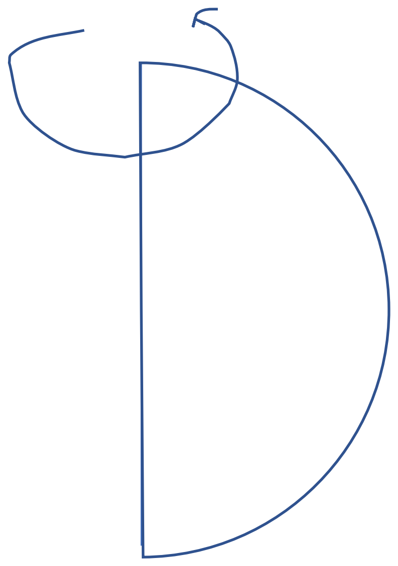


例3.6 回転面

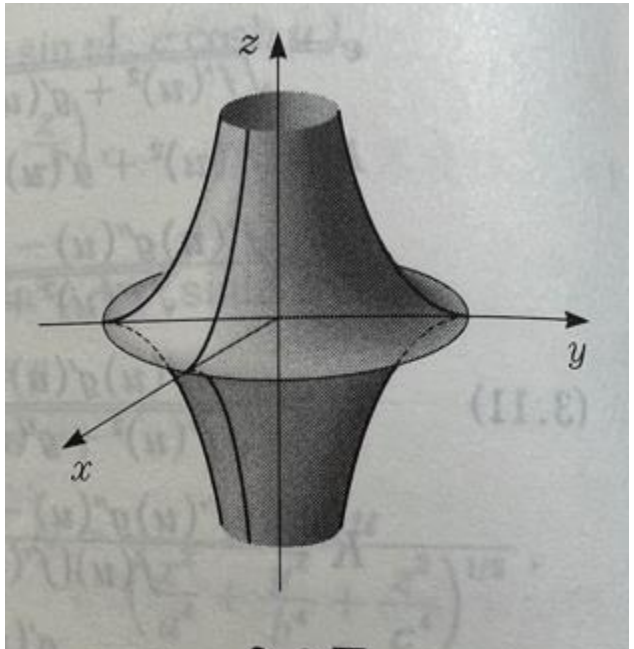
- $p(u,v) = \left(f(u)\cos v\,, f(u)\sin v\,, g(u)\right)$
  - $x = f(u), z = g(u)$はz軸と交わらないから$f(u) > 0$とする。
- $e = \frac{1}{\sqrt{f'(u)^2+g'(u)^2}}\left(-g'(u)\cos v\,, -g'(u)\sin v\,, f'(u)\right)$
- $E = f'(u)^2 + g'(u)^2, F = 0, G = f^2$
- $L = \frac{f'(u)g''(u)-f''(u)g'(u)}{\sqrt{f'(u)^2+g'(u)^2}}, M = 0, N = \frac{f(u)g'(u)}{\sqrt{f'(u)^2+g'(u)^2}}$
- $K = \frac{\{f'(u)g''(u)-f''(u)g'(u)\}g'(u)}{f(u)\{f'(u)^2+g'(u)^2\}^2}$
- $2H = \frac{g'(u)}{f(u)\{f'(u)^2+g'(u)^2\}^{\frac{1}{2}}} + \frac{f'(u)g''(u)-f''(u)g'(u)}{\{f'(u)^2+g'(u)^2\}^{\frac{3}{2}}}$
- $\kappa_1 = \frac{g'(u)}{f(u)\{f'(u)^2+g'(u)^2\}^{\frac{1}{2}}}, \kappa_2 = \frac{f'(u)g''(u)-f''(u)g'(u)}{\{f'(u)^2+g'(u)^2\}^{\frac{3}{2}}}$
- とくに、$f'(u)^2 + g'(u)^2 = 1$となるようにパラメータを選ぶと$f'(u)f''(u) + g'(u)g''(u) = 0$より
  - $(f'g'' - f''g')g' = f'g''g' - f''g'g' = -f'f'f'' - f''(1 - f'f') = -f''$
- $K = -\frac{f''}{f}, 2H = \frac{g'}{f} - \frac{f''}{g'}, \kappa_1 = \frac{g'}{f}, \kappa_2 = -\frac{f''}{g'}$

球面

- $K=-\frac{f''}{f}=\frac{1}{a^2}$
- $f''(u)=-\frac{f}{a^2}, f=a\sin\left(\frac{u}{a}\right)$
- $g'(u)=\pm\sqrt{1-f'(u)^2}=\pm\sin\frac{u}{a}, g(u)=\mp a\cos\frac{u}{a}$
- 確かに球面！



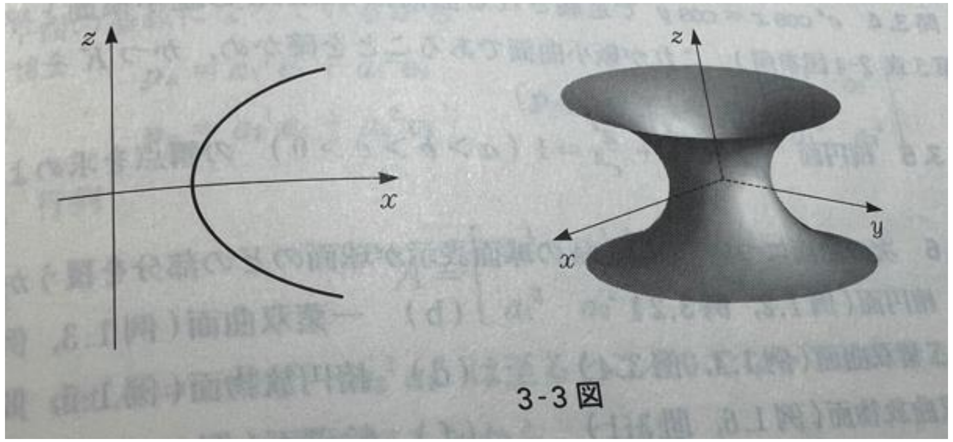
例3.7 曲率$K=-c^2$の回転面



3-2 図

- $K=-\frac{f''}{f}, 2H=\frac{g'}{f}-\frac{f''}{g'}, \kappa_1=\frac{g'}{f}, \kappa_2=-\frac{f''}{g'}$
- $f''(u)=c^2 f(u), f(u)=\frac{1}{c}e^{-u}$とすると
- $g'(u)=\pm\sqrt{1-f'(u)^2}=\pm\sqrt{1-e^{-2cu}}$
- $g(u)=\pm\int_0^u \sqrt{1-e^{-2ct}}dt$
- 擬球面(pseudosphere)
  - 「非Euclid幾何を局所的にではあるが3次元Euclid空間内の曲面として実現する重要な局面」？

例3.8 懸垂面 (catenoid)



- $2H = \frac{g'}{f} - \frac{f''}{g'} = 0 \Leftrightarrow ff'' = g'^2 = 1 - f'^2$
- $(ff')' = f'^2 + ff'' = 1 \therefore ff' = u + c = \frac{1}{2}(f^2)'$
- $f^2 = u^2 + 2cu + d \therefore f = \sqrt{u^2 + 2cu + d}$
- $g' = \pm\sqrt{1 - f'^2} = \pm\sqrt{\frac{d - c^2}{u^2 + 2cu + d}}$
- $c = 0, d = a^2 (a > 0)$とおくと
- $x = f(u) = \sqrt{u^2 + a^2}$
- $z = g(u) = \pm\int_0^u \frac{a}{\sqrt{t^2 + a^2}} dt = \pm a \sinh^{-1}\frac{u}{a}$
- uを消去できて、$x = a\cosh\frac{z}{a}$
  - ケーブルを張った時に、重力によって垂れ下がった形がこの曲線