

文章编号: 0258-7025(2002)08-0687-04

偏振模色散统计特性的研究

郑 远, 李朝阳, 刘秀敏, 李锡忠, 李荣华, 杨伯君, 张晓光

(北京邮电大学理学院物理部 123 信箱, 北京 100876)

提要 利用动态方程研究了偏振模色散矢量的统计特性, 分别用统计系综和频率系综两种方法进行数值模拟。数值结果表明, 统计系综和频率系综两种方法的结果一致。在大归一化距离条件下, 均方根时延的平方随归一化距离线性变化, 偏振模色散矢量的各个分量服从高斯分布, 差分群时延服从麦克斯韦分布, 偏振模色散矢量弥散于整个邦加球。

关键词 偏振模色散 统计特性 动态方程

中图分类号 O 183.1 ; O 436.3 **文献标识码** A

Investigation on the Statistical Characteristics of Polarization Mode Dispersion

ZHENG Yuan, LI Chao-yang, LIU Xiu-min, LI Xi-zhong,
LI Rong-hua, YANG Bo-jun, ZHANG Xiao-guang
(Department of Physics, School of Science, Beijing University of
Posts and Telecommunications, Beijing 100876)

Abstract Statistical characteristics of polarization mode dispersion (PMD) are investigated with dynamical equation. Simulations are performed in two methods: statistical ensemble and frequency ensemble. It is shown numerically that the results from the two methods are consistent with each other. Limited by the condition of long normalized distance, the square of rms delay grows linearly with normalized distance; the probability density functions (PDF) of PMD vector's components obey Gauss distribution and the PDF of differential group delay (DGD) time obeys Maxwell distribution; PMD vectors are dispersed on the whole Poincare sphere.

Key words polarization mode dispersion (PMD), statistical characteristics, dynamical equation

1 引 言

众所周知, 理想单模光纤的两个正交的基模完全简并, 而实际光纤在生产、成缆、铺设时要受各种随机扰动的影响。扰动的影响主要表现在两个方面: 一是双折射的变化, 二是随机模式耦合。这两个方面的影响造成偏振模色散统计分布。偏振模色散统计特性表现为: 光纤输出端差分群时延的随机变化及主态方向的随机旋转, 这给偏振模色散补偿带来了困难。因此, 研究这些变化的统计分布规律可

以为补偿偏振模色散提供依据。国外对偏振模色散的统计规律已经有一些研究^[1~3], 国内的研究工作处于起步阶段, 虽然已有实验文章对其统计规律作了报道, 但是理论方面大部分文章仍采用低相干的耦合功率模型。本文将利用偏振模色散矢量的动态方程^[4~6]对其进行进一步研究。

2 理论模型

在三维斯托克斯 (Stokes) 空间中偏振模色散矢

收稿日期: 2001-06-19; 收到修改稿日期: 2001-08-28

基金项目: 国家自然科学基金 (编号: 60072042) 教育部博士点基金及北京邮电大学校基金资助项目。

作者简介: 郑远 (1976—), 男, 北京邮电大学理学院物理部, 博士生, 硕士期间从事全光波长变换器和声光耦合器件的研究, 现从事高速光通信系统中偏振模色散的研究。E-mail: zhengyuan@263.net

量满足的动态方程为^[2,5]

$$\frac{\partial \vec{\Omega}(z, \omega)}{\partial z} = \frac{\partial \vec{W}(z, \omega)}{\partial \omega} + \vec{W}(z, \omega) \times \vec{\Omega}(z, \omega) \quad (1)$$

其中, $\vec{W}(\omega, z)$ 为光纤本地双折射, $\vec{\Omega}$ 为偏振模色散矢量, 差分群时延 $\Delta\tau = |\vec{\Omega}|/\omega$ 为光的角频率, z 为光纤的长度, $\frac{\partial \vec{W}(z, \omega)}{\partial \omega}$ 为光纤的本征模色散。

进行数值模拟时, 采用线性双折射模型^[2]。考虑光纤本地双折射 $\vec{W}(\omega, z)$ 可以表示为 $\vec{W}(\omega, z) = \vec{W}_0(\omega) + \sigma\vec{v}(z)$, 其中 $\vec{W}_0(\omega)$ 与距离无关。在线性双折射模型的假设中 $\vec{W}_0(\omega) = (\Delta\beta \ 0 \ 0)$, $\Delta\beta = \beta_x - \beta_y$ 表示线性双折射的强度, $\beta_{x,y}$ 为两个偏振模的传播常数。 $\sigma\vec{v}(z)$ 表示与距离有关的微扰双折射, $\vec{v}(z) = (v_1(z) \ v_2(z) \ v_3(z))$, 三个分量都是均值为 0, 方差为 1 的高斯过程, 并且彼此独立不相关。假设 $\vec{W}_0(\omega)$ 对角频率有线性依赖关系, 在 $\sigma\vec{v}(z)$ 比 $\vec{W}_0(\omega)$ 小很多的情况下, 可认为 $\sigma\vec{v}(z)$ 与频率无关。因此, 本征模色散可以表示为 $\frac{\partial \vec{W}(z, \omega)}{\partial \omega} = (\Delta\beta' \ 0 \ 0)$ 。将上面的假设应用于

(1) 式, 可以得到如下形式的动态方程

$$\begin{pmatrix} \partial\Omega_1/\partial z \\ \partial\Omega_2/\partial z \\ \partial\Omega_3/\partial z \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ -\Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(z) \\ v_2(z) \\ v_3(z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta\beta \\ 0 & \Delta\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta\beta' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

其中, $\omega_{1,2,3}$ 为 $\vec{\Omega}$ 的三个分量。由于 $v_{1,2,3}$ 是高斯随机过程, 根据随机过程理论^[7,8], 可以把 (2) 式中的 $v_{1,2,3}$ 写为 $v_{1,2,3} = dB_{1,2,3}(z)/dz$ 的形式, 其中 $B(z)$ 是维纳过程。(2) 式是一个随机微分方程。根据对随机积分中被积函数在积分区间上取值的不同^[7~9], 对 (2) 式有两种理解方式: 斯特拉托诺维奇 (Stratonovich) 理解和伊藤 (Ito) 理解。文献 [2] 证明, (2) 式在斯特拉托诺维奇理解下具有合理的物理意义。由于一般文献中随机方程的解法都是针对于伊藤理解的方程, 所以首先应将 (2) 式变成伊藤理解下的方程形式。利用文献 [9] 给出的转换公式, 得到伊藤理解下的方程形式^[2]

$$\begin{pmatrix} \partial\Omega_1/\partial z \\ \partial\Omega_2/\partial z \\ \partial\Omega_3/\partial z \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ -\Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(z) \\ v_2(z) \\ v_3(z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 & -\Delta\beta \\ 0 & \Delta\beta & -\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta\beta' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

为了进行数值模拟, 需要对方程 (3) 进行离散化。根据伊藤积分的意义 (3) 式右边第一项 $v_{1,2,3}$ 的系数矩阵应该取离散区间左侧的值 (3) 式离散化后的形式为

$$\begin{pmatrix} \Omega_1(z_i + \Delta z) \\ \Omega_2(z_i + \Delta z) \\ \Omega_3(z_i + \Delta z) \end{pmatrix} = A^{-1} B \begin{pmatrix} \Omega_1(z_i) \\ \Omega_2(z_i) \\ \Omega_3(z_i) \end{pmatrix} + A^{-1} \begin{pmatrix} \Delta\beta' \Delta z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 + 0.5\sigma^2\Delta z & 0 & 0 \\ 0 & 1 + 0.5\sigma^2\Delta z & 0.5\Delta\beta\Delta z \\ 0 & -0.5\Delta\beta\Delta z & 1 + 0.5\sigma^2\Delta z \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 - 0.5\sigma^2\Delta z & -\sigma v_3(z_i)\Delta z & \sigma v_2(z_i)\Delta z \\ \sigma v_3(z_i)\Delta z & 1 - 0.5\sigma^2\Delta z & -\sigma v_1(z_i)\Delta z - 0.5\Delta\beta\Delta z \\ -\sigma v_2(z_i)\Delta z & \sigma v_1(z_i)\Delta z + 0.5\Delta\beta\Delta z & 1 - 0.5\sigma^2\Delta z \end{pmatrix} \quad (6)$$

3 数值结果及讨论

(3) 式是随机微分方程, 它的解是随机变量, 具有一定的概率分布, 但是 (3) 式比较复杂, 很难得到解析解, 因此采用数理统计中常用的蒙特卡罗数值模拟方法。我们采用统计系综和波长系综两种方法^[1]分别模拟同一种光纤偏振模色散特性, 然后将结果作比较。两种不同的模拟方法所表示的物理意

义不同, 统计系综描述的是一个波长情况下, 统计特性相同的多根光纤偏振模色散特性, 模拟的方法是对一根光纤进行多次模拟, 各次模拟所用的微扰服从同一统计规律, 这样就等同于模拟多根统计特性相同光纤。加微扰方法是在每一个离散积分段 Δz 上加随机微扰。波长系综描述的是一定波长范围内, 不同波长之间偏振模色散特性。采用的方法是: 保持

各次模拟中微扰 $\sigma \vec{v}(z)$ 固定, 让 $\Delta\beta$ 随波长变化。

在模拟中引入表示耦合强度的参数 $h = \sigma^2 \sin(\Delta\beta \Delta z / 2) / \Delta\beta$, h 的值越大, 表明随机耦合的强度越强, 相应的耦合长度 h^{-1} 就越小。在采用频率系综时, $\Delta\beta$ 取中心频率对应的双折射。将实际长度对耦合长度 h^{-1} 归一化为 hz 。鉴于本文采用的是线性双折射模型, 它更适用于描述弱双折射的情况^[6], 所以模拟中采用的参数为: 波长取 1550 nm, $\Delta\beta$ 取 0.5 rad/m, 对应的双折射 Δn 量级为 10^{-7} , $\Delta z = 1$ m, $h^{-1} = 300$ m, 频率采样点间隔为 10 GHz, 初始值 $\Omega_i(z=0) = 0$ 。为保证得到准确的统计计算结果, 重复的计算次数为 10^4 次。

图 1 描述的是均方根时延随归一化距离的变化关系, 实线表示的是统计系综的模拟结果, 圆圈表示的是频率系综的模拟结果。可以看出, 两种模拟结果能够很好地吻合。在 hz 较小的时候, 本征模色散 $\Delta\beta'$ 起主要作用, 均方根延迟 $\Delta\tau^2$ 随距离线性变化, 变化速率由 $\Delta\beta'$ 决定, 这与保偏光纤的情况相同; 当 hz 很大时, $\Delta\tau^2$ 随距离线性变化, 这是由于随机模式耦合减缓了本征模色散的作用。可以说, 均方根时延的变化规律是本征模色散和随机模式耦合共同作用的结果。

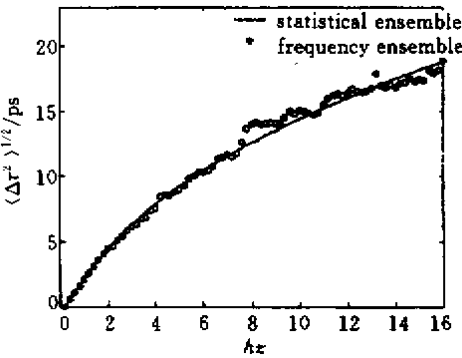


图 1 均方根延迟随归一化距离的变化
Fig.1 Rms delay time versus normalized length

图 2 和图 3 描述的是在光纤归一化长度 $hz \gg 1$ 时差分群时延的统计分布规律, 其中实线是理论上的几率密度函数, 用作比较, 其他符号表示的是数值模拟的结果。图 2 是统计系综模拟的情况, 图 3 是波长系综模拟的情况。可以看出, 两种系综模拟的结果基本上一致, 当 $hz \gg 1$ 时, 偏振模色散矢量的各个分量的几率满足高斯分布, 差分群时延的几率满足麦克斯韦分布^[10], 理论上所用的拟合曲线 $P(\Delta\tau) = 1.68 \sqrt{\lambda^3 \text{ 数据}} \exp\left[-\frac{(\Delta\tau)^2}{210}\right]$, $\Delta\tau$ 的单位是

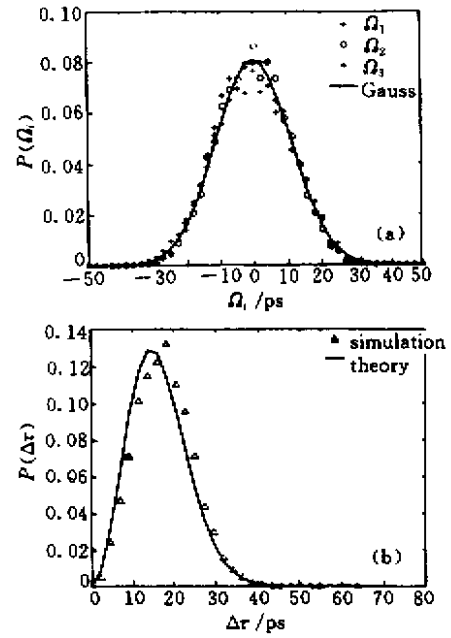


图 2 (a) 统计系综中 Ω_i 的几率密度函数;
(b) 统计系综中差分群时延 $\Delta\tau$ 的几率密度函数
Fig.2 (a) Probability density functions for Ω_i in statistical ensemble; (b) Probability density functions for differential group delay time $\Delta\tau$ in statistical ensemble

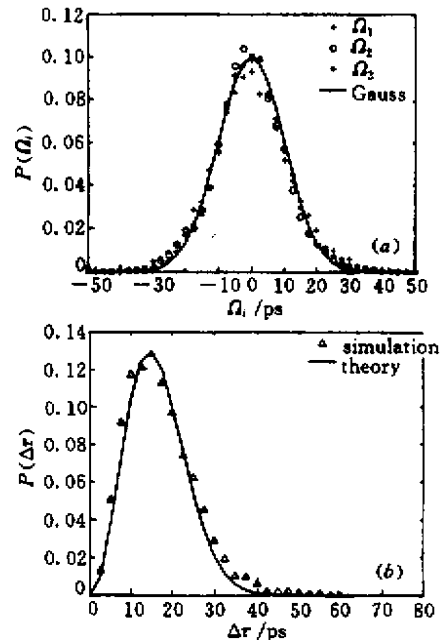


图 3 (a) 频率系综中 Ω_i 的几率密度函数;
(b) 频率系综中差分群时延 $\Delta\tau$ 的几率密度函数
Fig.3 (a) Probability density functions for Ω_i in frequency ensemble; (b) Probability density functions for differential group delay time $\Delta\tau$ in frequency ensemble

ps。从图 2(b) 及图 3(b) 可以看出, 差分群时延有一定概率出现值是其平均值的 3 倍, 在补偿偏振模色

散时应该充分考虑这个特性。

上面模拟的只是偏振模色散矢量幅度的统计特性,然而在实际补偿的过程中,比如在基于偏振主态概念的后向补偿方案中,除了考虑这个因素以外,还应该考虑偏振主态方向漂移的影响。在一阶偏振模色散近似情况下,两个偏振主态之一的方向可以用偏振模色散矢量的方向 $\hat{\Omega}$ 表示。图 4 表示的是输出偏振主态(PSP)在邦加球上随归一化距离的演化情况,为只显示偏振主态方向的变化规律,对偏振模色散矢量作了归一化处理 $\hat{\Omega} = \vec{\Omega} / |\vec{\Omega}|$ 。图中深色的点表示频率系综模拟的结果,浅色的点表示统计系综模拟的结果。 $hz = 0$ 表示刚入射时的偏振主态,对应的斯托克斯参量在邦加球上表示为 S_1 轴上的一点。随着归一化距离的增加,输出偏振主态的方向随机变化,对应邦加球上的点逐渐弥散(对应 $hz = 0.1$ 和 $hz = 1$ 的情况),最后弥散于整个邦加球上(对应 $hz = 10$ 的情况)。

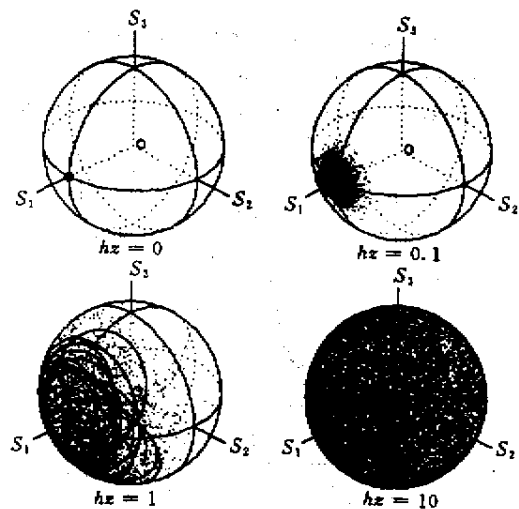


图 4 偏振主态在邦加球上的演化

Fig.4 Evolution of PSP (principal state of polarization)
in Poincare Sphere

值得注意的是,在归一化长度不是很长时,频率系综和统计系综模拟的结果有所差别,如图 4 中 $hz = 0.1$ 和 $hz = 1$ 的情况,统计系综的结果表现的是一种完全的弥散现象,而频率系综的结果表现出一定的轨迹特性,特别是在归一化长度比较小的时候这种现象更加明显。造成这种现象的原因是偏振模色散矢量的频率相关性或者说是偏振主态具有一定的带宽^[5],在归一化长度比较小的时候,偏振模色散值小,主态的带宽宽,小于主态带宽的频率采样点之间的相关性不能够忽略,这样一来统计独立的点数

量不多,表现在邦加球上,虽然整体上是一种弥散效果,局部各点却形成一定轨迹,随着归一化距离的增大,偏振模色散值变大,主态带宽越来越小,具有相关性的频率采样点越来越少,统计独立的点越来越多,当归一化距离足够时在邦加球上表现为一种弥散现象,如图 4 中 $hz = 10$ 的情况,两种系综模拟的情况已不可区分。所以,在归一化距离比较大的时候,偏振模色散矢量的方向可以是任意的,在进行补偿时需要让补偿光纤双折射轴作相应变化,以达到最佳补偿效果。

4 结 论

利用偏振模色散的动态方程和线性双折射模型研究了偏振模色散矢量的统计特性,用统计系综和频率系综两种数值方法得到:1)均方根时延与距离的平方根成正比;2)大归一化距离下,偏振模色散矢量的三个分量的几率满足高斯分布,差分群时延的几率满足麦克斯韦分布;3)研究了偏振模色散矢量方向随归一化距离的变化关系;4)数值结果表明统计系综和频率系综两种方法所得的结论一致。

参 考 文 献

- 1 C. D. Poole. Statistical treatment of polarization dispersion in single-mode fiber [J]. *Opt. Lett.*, 1988, **13** (8) : 687 ~ 689
- 2 G. J. Foschini, C. D. Poole. Statistical theory of polarization dispersion in single mode fibers [J]. *J. Lightwave Technol.*, 1991, **9** (11) : 1439 ~ 1456
- 3 A. O. Dal Forno, A. Paradisi, R. Passy *et al.*. Experimental and theoretical modeling of polarization-mode dispersion in single-mode fibers [J]. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, 2000, **12** (3) : 296 ~ 298
- 4 N. Gisin. Solutions of the dynamical equation for polarization dispersion [J]. *Opt. Comm.*, 1991, **86** : 371 ~ 373
- 5 C. D. Poole, J. H. Winters, J. A. Nagel. Dynamical equation for polarization dispersion [J]. *Opt. Lett.*, 1991, **16** (6) : 372 ~ 374
- 6 P. K. A. Wai, C. R. Menyuk. Polarization mode dispersion, decorrelation, and diffusion in optical fibers with randomly varying birefringence [J]. *J. Lightwave Technol.*, 1996, **14** (2) : 148 ~ 157
- 7 L. Arnold. Stochastic Differential Equations: Theory and Applications [M]. New York: Wiley, 1974
- 8 Schuss, Zeev. Theory and Applications of Stochastic Differential Equations [M]. New York: Wiley, 1980
- 9 LMS Durham Symposium [C]. Stochastic Integrals: Proc. of the LMS Durham Symposium. Springer-Verlag, 1981
- 10 F. Curti, B. Daino, G. D. Marchis *et al.*. Statistical treatment of the evolution of the principal states of polarization in single-mode fibers [J]. *J. Lightwave Technol.*, 1990, **8** (8) : 1162 ~ 1165