עקרונות שפות תכנות – תרגיל 2

חלק א׳: הוכחות בסמנטיקה

שאלה 1:

1. הוכיחו את השקילות הסמנטית הבאה ב-Natural Operational Semantics:

$$(S_1;S_2);S_3 \sim S_1;(S_2;S_3)$$

הוכחה:

תהיינה $S_1,S_2,S_3 \in Stm$. נרצה להוכיח שהפקודה $A=(S_1;S_2);S_3$ שקולה לפקודה $B=S_1;(S_2;S_3)$. יהיו $s,s' \in State$. <u>צ״ל</u>: $(B,s)\to s' \Leftrightarrow (A,s)\to s'$.

$\Rightarrow$: נניח שמתקיים $(A,s)\to s'$, לכן יש עץ גזירה T ששורשו $(A,s)\to s'$. T חייב להסתיים בכלל $COMP_{ns}$, והוא יראה כך:

$$T \;=\; \cfrac{\cfrac{\cfrac{\dots}{\langle S_1,s\rangle \to s'''} \quad \cfrac{\dots}{\langle S_2,s'''\rangle \to s''}}{\langle S_1;S_2,s\rangle \to s''}\,comp_{ns} \quad \cfrac{\dots}{\langle S_3,s''\rangle \to s'}}{\langle (S_1;S_2);S_3,s\rangle \to s'}\,comp_{ns}$$

עבור $s''' \in State$ כלשהו, כי הכלל היחיד שקיים לחץ מסוג $\langle S;S',s\rangle \to s'$ הוא $COMP_{ns}$. לכן נוכל לבנות עץ גזירה חדש כך:

$$\cfrac{\cfrac{\dots}{\langle S_1,s\rangle \to s'''} \quad \cfrac{\cfrac{\dots}{\langle S_2,s'''\rangle \to s''} \quad \cfrac{\dots}{\langle S_3,s''\rangle \to s'}}{\langle S_2;S_3,s'''\rangle \to s'}\,comp_{ns}}{\langle S_1;(S_2;S_3),s\rangle \to s'}\,comp_{ns}$$

כאשר כל ... יהיה זהה למה שנמצא ב-... המתאים ב-T. קיבלנו עץ גזירה ששורשו $(B,s)\to s'$.

$\Leftarrow$: דומה.

■

2. הוכיחו שבמקרה הכללי לא מתקיימת השקילות הבאה ב-Natural Operational Semantics:

$$S_1;S_2 \sim S_2;S_1$$

הוכחה:

נבחר $S_1 = x \coloneqq 1, S_2 = x \coloneqq 2$. יהיו $s,s' \in State$ כך ש-$s\ x=0, s'\ x=2$. נוכל לגזור:

$$\cfrac{\cfrac{}{\langle x := 1,s\rangle \to s[x\mapsto 1]}\,ass_{ns} \quad \cfrac{}{\langle x := 2,s[x\mapsto 1]\rangle \to s'}\,ass_{ns}}{\langle x := 1; x := 2,s\rangle \to s'}\,comp_{ns}$$

כי $\mathcal{A}[1]s = 1$ וקיבלנו שמתקיים $\mathcal{A}[1]s[x \mapsto 1] = 1,$ $\langle S_1; S_2, s\rangle \to s'$. כעת נניח בשלילה שמתקיים $\langle S_2; S_1, s\rangle \to s'$, לכן יש עץ גזירה שזהו שורשו, והוא נראה כך:

$$\cfrac{\cfrac{}{\langle x := 2, s\rangle \to s''}\ ass_{ns} \qquad \cfrac{}{\langle x := 1, s''\rangle \to s'}\ ass_{ns}}{\langle x := 2; x := 1, s\rangle \to s'}\ comp_{ns}$$

עבור $s'' \in State$ כלשהו, כי הכלל היחיד שניתן להשתמש בו על $S_1; S_2$ הוא $comp_{ns}$ והכלל היחיד שניתן להשתמש בו על S_1 ו-S_2 בנפרד הוא ass_{ns}. מהגדרת ass_{ns} נקבל מתת העץ השמאלי:

$$s'' = s[x \mapsto \mathcal{A}[2]s] = s[x \mapsto 2]$$

ומתת העץ הימני:

$$s' = s''[x \mapsto \mathcal{A}[1]s''] = s''[x \mapsto 1] = s[x \mapsto 2][x \mapsto 1] = s[x \mapsto 1]$$

ומכך נובע ש-$s'\ x = 1$ בסתירה להגדרה ש-$s'\ x = 2$. לכן $\langle S_2; S_1, s\rangle \nrightarrow s'$, ומתקיים:

$$\langle S_1; S_2, s\rangle \to s' \nLeftrightarrow \langle S_2; S_1, s\rangle \to s'$$

וסך הכל השקילות לא מתקיימת באופן כללי.

■

שאלה 2:

1. תהי $S \in Stm$ ויהי פרדיקט P, צ״ל: $\vdash_p \{false\}\ S\ \{P\}$. נעשה אינדוקציה על המבנה של S:

<u>בסיס</u>:

- $S = x := a$ עבור $x \in Var, a \in Aexp$. נראה עץ גזירה ששורשו הוא $\{false\}\ S\ \{P\}$:

$$\dfrac{\dfrac{}{\{P[x \mapsto \mathcal{A}[a]]\}x := a\{P\}}\ ass_p}{\{false\}x := a\{P\}}\ cons_p$$

ניתן להשתמש כאן ב-$cons_p$ כי אכן מתקיים $\text{P} \Rightarrow \text{P}$ ו-$P[x \mapsto \mathcal{A}[a]] \Rightarrow false$ (שקר גורר הכל).

- $S = skip$:

$$\dfrac{\dfrac{}{\{P\}skip\{P\}}\ skip_p}{\{false\}skip\{P\}}\ cons_p$$

כאשר גם כאן ניתן להשתמש ב-$cons_p$ מאותן סיבות בדיוק.

<u>צעד</u>:

- $S = S_1; S_2$, עבור פקודות $S_1, S_2 \in Stm$ כלשהן המקיימות $\{false\}\ S_i\ \{P\}$ לכל פרדיקט P, לכן בפרט מתקיים $\{false\}S_1\{false\}$, לכן נגזור:

$$\dfrac{\{false\}S_1\{false\} \quad \{false\}S_2\{P\}}{\{false\}S_1; S_2\{P\}}\ comp_p$$

וקיבלנו את הדרוש.

- $S = if\ b\ then\ S_1\ else\ S_2$, עבור פקודות $S_1, S_2 \in Stm$ כלשהן המקיימות $\{false\}\ S_i\ \{P\}$ לכל פרדיקט P, ו-$b \in Bexp$. נגזור:

$$\dfrac{\dfrac{\{false\}S_1\{P\}}{\{\mathcal{B}[b] \wedge false\}S_1\{P\}}\ cons_p \quad \dfrac{\{false\}S_2\{P\}}{\{\neg\mathcal{B}[b] \wedge false\}S_2\{P\}}\ cons_p}{\{false\}if\ b\ then\ S_1\ else\ S_2\{P\}}\ if_p$$

ניתן להשתמש ב-$cons_p$ כי $false \equiv \mathcal{B}[b] \wedge false \Rightarrow false$ ובאופן דומה מתקיים התנאי גם בגזירה הימנית.

- $S = while\ b\ do\ S_1$, עבור פקודה $S_1 \in Stm$ כלשהי המקיימת $\{false\}\ S_1\ \{P\}$ לכל פרדיקט P, ו-$b \in Bexp$. נגזור:

$$\dfrac{\dfrac{\{\mathcal{B}[b] \wedge false\}S_1\{false\}}{\{false\}while\ b\ do\ S_1\{\neg\mathcal{B}[b] \wedge false\}}\ while_p}{\{false\}while\ b\ do\ S_1\{P\}}\ cons_p$$

כי $\neg\mathcal{B}[b] \wedge false \equiv false$ ושקר גורר הכל.

■

2. נציג את הגזירה הבאה:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\{(y=10)[y\mapsto\mathcal{A}[10]]\}y:=10\{y=10\}}\,ass_p}{\{true\}y:=10\{y=10\}}\,cons_p}{\{\mathcal{B}[x=5]\wedge(x=5)\}y:=10\{y=10\}}\,cons_p \quad \dfrac{\dfrac{}{\{(z=10)[z\mapsto\mathcal{A}[y]]\}z:=y\{z=10\}}\,ass_p}{\{y=10\}z:=y\{z=10\}}\,cons_p}{\{\mathcal{B}[x=5]\wedge(x=5)\}y:=10;z:=y\{z=10\}}\,comp_p \quad \dfrac{\dfrac{implied\ from\ question\ 2.1}{\{false\}skip\{z=10\}}}{\{\neg\mathcal{B}[x=5]\wedge(x=5)\}skip\{z=10\}}\,cons_p}{\{x=5\}if\ x=5\ then\ y:=10;z:=y\ else\ skip\{z=10\}}\,if_p$$

■

3. יהיו P,Q פרדיקטים. צ"ל: $\vdash_p \{P\}S_1;(S_2;S_3)\{Q\} \Leftrightarrow \vdash_p \{P\}(S_1;S_2);S_3\{Q\}$.

$\Rightarrow$: נניח שיש עץ גזירה ששורשו $\{P\}(S_1;S_2);S_3\{Q\}$. לכן הוא נראה כך:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A}{\{P\}S_1\{O\}} \quad \dfrac{B}{\{O\}S_2\{R\}}}{\{P\}S_1;S_2\{R\}}\,comp_p \quad \dfrac{C}{\{R\}S_3\{Q\}}}{\{P\}(S_1;S_2);S_3\{Q\}}\,comp_p$$

עבור פרדיקטים R,O כלשהם, כי הכלל היחיד שיכול להתאים פה הוא $comp_p$. כעת נוכל לגזור:

$$\dfrac{\dfrac{A}{\{P\}S_1\{O\}} \quad \dfrac{\dfrac{B}{\{O\}S_2\{R\}} \quad \dfrac{C}{\{R\}S_3\{Q\}}}{\{O\}S_2;S_3\{Q\}}\,comp_p}{\{P\}S_1;(S_2;S_3)\{Q\}}\,comp_p$$

ולקבל את הדרוש.

$\Leftarrow$: דומה.

■

שאלה 3:

1. נוסיף את הכללים הבאים:

$$[repeat_{ns}^{tt}] \quad \frac{\langle S, s\rangle \to s'}{\langle repeat\ S\ until\ b, s\rangle \to s'} \quad if\ \mathcal{B}[b]s' = tt$$

$$[repeat_{ns}^{ff}] \quad \frac{\langle S, s\rangle \to s'' \quad \langle repeat\ S\ until\ b, s''\rangle \to s'}{\langle repeat\ S\ until\ b, s\rangle \to s'} \quad if\ \mathcal{B}[b]s'' = ff$$

2. יהיו $s, s' \in State$. צ"ל:

$$\langle S; if\ b\ then\ skip\ else\ (repeat\ S\ until\ b), s\rangle \to s' \Leftrightarrow \langle repeat\ S\ until\ b, s\rangle \to s'$$

$\Leftarrow$: נניח שמתקיים $\langle repeat\ S\ until\ b, s\rangle \to s'$, לכן יש עץ גזירה T שזהו שורשו. נחלק למקרים:

- אם כלל הגזירה האחרון ב-T הוא $repeat_{ns}^{tt}$ אז לפי הגדרת הכלל בסעיף 1, T יראה כך:

$$\frac{\dfrac{A}{\langle S, s\rangle \to s'}}{\langle repeat\ S\ until\ b, s\rangle \to s'}\ repeat_{ns}^{tt}$$

עבור גזירה כלשהי A, ויתקיים $\mathcal{B}[b]s' = tt$. לכן נוכל לבנות עץ גזירה כך:

$$\frac{\dfrac{A}{\langle S, s\rangle \to s'} \quad \dfrac{\overline{\langle skip, s'\rangle \to s'}\ skip_{ns}}{\langle if\ b\ then\ skip\ else\ (repeat\ S\ until\ b), s'\rangle \to s'}\ if_{ns}^{tt}}{\langle S; if\ b\ then\ skip\ else\ (repeat\ S\ until\ b), s\rangle \to s'}\ comp_{ns}$$

ולקבל שמתקיים $\langle S; if\ b\ then\ skip\ else\ (repeat\ S\ until\ b), s\rangle \to s'$, כדרוש.

- אם כלל הגזירה האחרון ב-T הוא $repeat_{ns}^{ff}$ אז T יראה כך:

$$\frac{\dfrac{A}{\langle S, s\rangle \to s''} \quad \dfrac{B}{\langle repeat\ S\ until\ b, s''\rangle \to s'}}{\langle repeat\ S\ until\ b, s\rangle \to s'}\ repeat_{ns}^{ff}$$

ויתקיים $\mathcal{B}[b]s'' = ff$. לכן נוכל לבנות עץ גזירה חדש:

$$\frac{\dfrac{A}{\langle S, s\rangle \to s''} \quad \dfrac{\dfrac{B}{\langle repeat\ S\ until\ b, s''\rangle \to s'}}{\langle if\ b\ then\ skip\ else\ (repeat\ S\ until\ b), s''\rangle \to s'}\ if_{ns}^{ff}}{\langle S; if\ b\ then\ skip\ else\ (repeat\ S\ until\ b), s\rangle \to s'}\ comp_{ns}$$

ולקבל את הדרוש.

$\Rightarrow$: נניח שמתקיים $\langle S; if\ b\ then\ skip\ else\ (repeat\ S\ until\ b), s\rangle \to s'$. לכן קיים עץ גזירה שזהו שורשו, וכלל הגזירה האחרון בו חייב להיות $comp_{ns}$:

$$\frac{\dfrac{A}{\langle S, s\rangle \to s''} \quad \dfrac{\dots}{\langle if\ b\ then\ skip\ else\ (repeat\ S\ until\ b), s''\rangle \to s'}}{\langle S; if\ b\ then\ skip\ else\ (repeat\ S\ until\ b), s\rangle \to s'}\ comp_{ns}$$

כעת נחלק למקרים:

- <u>אם</u> $\mathcal{B}[b]s'' = tt$, אז ניתן להמשיך את עץ הגזירה כך:

$$\frac{\dfrac{A}{\langle S, s\rangle \to s''} \quad \dfrac{\overline{\langle skip, s''\rangle \to s'}\ skip_{ns}}{\langle if\ b\ then\ skip\ else\ (repeat\ S\ until\ b), s''\rangle \to s'}\ if_{ns}^{tt}}{\langle S; if\ b\ then\ skip\ else\ (repeat\ S\ until\ b), s\rangle \to s'}\ comp_{ns}$$

כי לפקודה if הכלל היחיד שמתאים הוא if_{ns}^{tt} ול-$skip$ הכלל היחיד הוא $skip_{ns}$, שממנו נוכל להסיק $s'' = s'$. לכן $\mathcal{B}[b]s' = tt$, וגם מתקיים $\langle S, s\rangle \to s'$, לפי תת העץ השמאלי. לכן נוכל לבנות עץ גזירה חדש:

$$\frac{\dfrac{A}{\langle S, s\rangle \to s'}}{\langle repeat\ S\ until\ b, s\rangle \to s'}\ repeat_{ns}^{tt}$$

כלומר מתקיים $\langle repeat\ S\ until\ b, s\rangle \to s'$, כדרוש.

- <u>אם</u> $\mathcal{B}[b]s'' = ff$, אז ניתן להסיק שעץ הגזירה המקורי נראה כך:

$$\frac{\dfrac{A}{\langle S, s\rangle \to s''} \quad \dfrac{\dfrac{B}{\langle repeat\ S\ until\ b, s''\rangle \to s'}}{\langle if\ b\ then\ skip\ else\ (repeat\ S\ until\ b), s''\rangle \to s'}\ if_{ns}^{ff}}{\langle S; if\ b\ then\ skip\ else\ (repeat\ S\ until\ b), s\rangle \to s'}\ comp_{ns}$$

וכעת נוכל לגזור:

$$\frac{\dfrac{A}{\langle S, s\rangle \to s''} \quad \dfrac{B}{\langle repeat\ S\ until\ b, s''\rangle \to s'}}{\langle repeat\ S\ until\ b, s\rangle \to s'}\ repeat_{ns}^{ff}$$

ושוב קיבלנו את הדרוש.

■

חלק ב׳: תכנות סמנטיקה (סעיף תיאורטי)

שאלה 1:

2. נוסיף את הכללים הבאים: עבור $s \in State$ כלשהו:

$$\mathcal{A}[x \ll y]s = \mathcal{A}[x]s * \prod_{k=1}^{\mathcal{A}[y]s} 2$$

$$\mathcal{A}[x \ll y]s = \lfloor \mathcal{A}[x]s / \prod_{k=1}^{\mathcal{A}[y]s} 2 \rfloor$$