עקרונות שפות תכנות – תרגיל 1

חלק ב': אינדוקציה מבנית

שאלה 1:

1.1) להלן דקדוק חסר הקשר:

$$E_1 ::= \varepsilon \mid id \mid (E_1)$$

הוכיחו שבכל ביטוי בשפה של E_1 מספר הסוגריים הפותחים שווה למספר הסוגריים הסוגרים.

הוכחה:

נוכיח על ידי אינדוקציה מבנית:

יהי ביטוי $E \in L(E_1)$.

<u>בסיס</u>:

א. $E = \varepsilon$. מספר הסוגריים הפותחים הוא 0 וגם מספר הסוגריים הסוגרים.

ב. $E = id$. גם כאן כמות הסוגריים משני הסוגים היא 0.

<u>צעד</u>: $E = (F)$ עבור ביטוי כלשהו $F \in L(E_1)$, ונניח שכמות הסוגריים הפותחים והסוגרים ב-F שווה. כעת נוכיח שזה מתקיים גם עבור E: נסמן ב-a את כמות הסוגריים הפותחים ב-F. לכן מהנחת האינדוקציה a זו גם כמות הסוגריים הסוגרים ב-F. ב-E יש "(" אחד יותר מב-F, כלומר כמות הסוגריים הפותחים ב-E היא $a + 1$. באופן דומה זו גם כמות הסוגריים הסוגרים ב-E ולכן כמות הסוגריים הפותחים והסוגרים ב-E שווה, כנדרש.

■

1.2) להלן דקדוק חסר הקשר:

$$E_2 ::= \varepsilon \mid id \mid (R$$
$$R ::=) \mid E_2)$$

הוכיחו שבכל ביטוי בשפה של E_2 מספר הסוגריים הפותחים שווה למספר הסוגריים הסוגרים.

הוכחה:

נוכיח על ידי אינדוקציה מבנית:

יהי ביטוי $E \in L(E_2)$.

בסיס: שני המקרים הראשונים זהים לחלוטין לבסיס של הסעיף הקודם. המקרה השלישי הוא כאשר $E = (R$ וגם $R =)$. לכן $E = ()$ ויש בו בדיוק סוגר פותח אחד וסוגר סוגר אחד.

צעד: $E = (R$ עבור $R = F)$, $F \in L(E_2)$. נניח שכמות הסוגריים הפותחים והסוגרים ב-F שווה. נשים לב שמתקיים $E = (F)$, ולכן לפי אותו הסבר כמו בצעד של הסעיף הקודם נקבל שכמות הסוגריים הפותחים והסוגרים ב-E שווה (אחד יותר מב-F), כנדרש.

$\blacksquare$

1.3) הוכיחו שמתקיים $L(E_1) = L(E_2)$.

הוכחה:

נוכיח על ידי הכלה דו-כיוונית:

$\subseteq$: יהי ביטוי $E \in L(E_1)$, נוכיח שמתקיים $E \in L(E_2)$ על ידי אינדוקציה מבנית:

בסיס:

א. $E = \varepsilon$. הביטוי הזה כמובן שייך גם ל-$L(E_2)$ לפי הגדרת הדקדוק.
ב. $E = id$. גם הביטוי הזה שייך גם ל-$L(E_2)$ לפי הגדרת הדקדוק.

צעד: $E = (F)$ עבור ביטוי כלשהו $F \in L(E_1)$. נניח ש-$F \in L(E_2)$. נחלק למקרים:

א. $F = \varepsilon$. לכן $E = (\varepsilon) = ()$, ונשים לב שניתן לגזור את ביטוי זה על ידי כללי הגזירה של E_2:

$$E_2 \Rightarrow (R \Rightarrow (E_2) \Rightarrow (\varepsilon) = ()$$

ולכן מתקיים $E \in L(E_2)$.

ב. $F = id$. ההוכחה דומה למקרה א׳.
ג. מהנחת האינדוקציה קיימת גזירה של F עם כללי הגזירה של E_2, נסמן זאת כך: $E_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow F$. כעת נוכל לגזור את E:

$$E_2 \Rightarrow (R \Rightarrow (E_2) \Rightarrow \cdots \Rightarrow (F) = E$$

ושוב $E \in L(E_2)$.

$\supseteq$: יהי $E \in L(E_2)$, נוכיח שמתקיים $E \in L(E_1)$ על ידי אינדוקציה מבנית:

בסיס: שני המקרים הראשונים זהים לבסיס של ההכלה הקודמת. המקרה השלישי הוא כאשר $E = (R$ וגם $R =)$. לכן $E = ()$ וניתן לגזור את זה מכללי הגזירה של E_1 כך: $E_1 \Rightarrow (E_1) \Rightarrow (\varepsilon) = ()$. לכן $E \in L(E_1)$.

<u>צעד</u>: $E = (R, R = F)$ עבור ביטוי $F \in L(E_2)$. נניח שמתקיים $F \in L(E_1)$. $E = (F)$. מהנחת האינדוקציה קיימת גזירה של F עם כללי הגזירה של E_1, נסמן זאת כך: $E_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow F$. כעת נוכל לגזור גם את E:

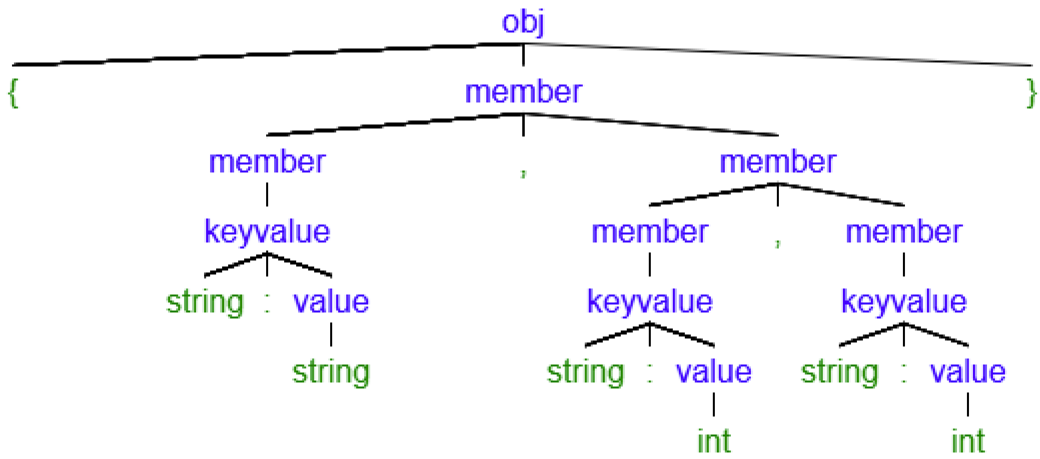
$$E_1 \Rightarrow (E_1) \Rightarrow \cdots \Rightarrow (F) = E$$

לכן $E \in L(E_1)$.

■

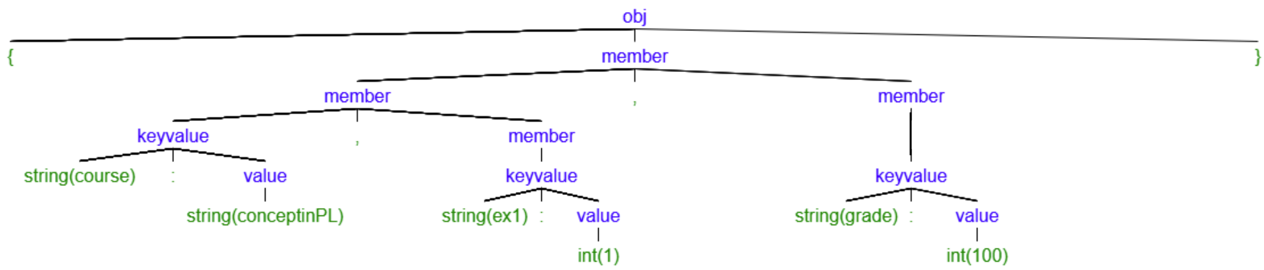
שאלה 2:

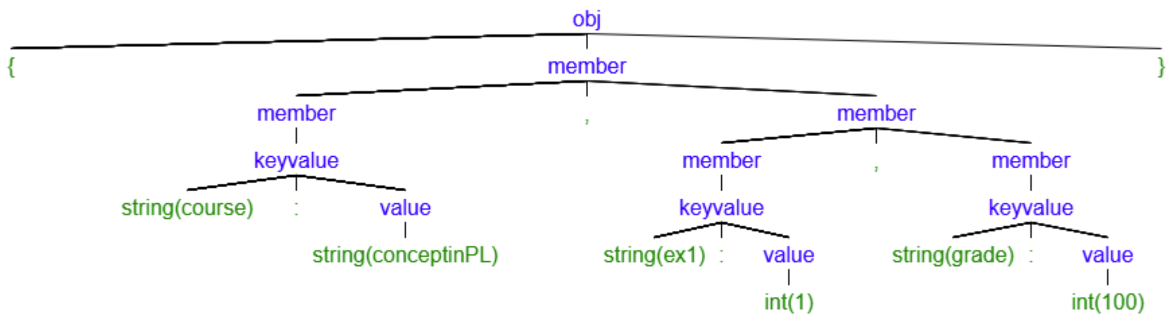
2.1) א. נמצא עץ גזירה עבור $\{\text{“}course\text{”} : \text{“}concept\ in\ PL\text{”}, \text{“}ex\text{”} : 1, \text{“}grade\text{”} : 100\}$:



ב. נוכיח כי ל-$\{\text{“}course\text{”} : \text{“}concept\ in\ PL\text{”}, \text{“}ex\text{”} : 1, \text{“}grade\text{”} : \{100\}\}$ אין עץ גזירה. נניח בשלילה שקיים עץ גזירה עבור מילה זו. קיימת חולייה $keyvalue$ הגוזרת את $\text{“}grade\text{”} : \{100\}$ משום שהביטוי מכיל נקודתיים ולכן מחייב גזירה מ-$keyvalue$. לכן הביטוי $\{100\}$ מתקבל על ידי גזירת $value$. האפשרויות היחידות מתוך $value$ שמאפשרות סוגריים מסולסלים היא obj ולכן נגזור אותו. מכאן נוכל לגזור או $\{\}$ או $member$ ובשני המקרים לא נוכל להגיע ל-int. לכן זו הפרכה.

2.2) להלן שני עצי גזירה עבור המילה בעלת עץ גזירה מסעיף קודם:





שאלה 3:

3.1) הוכיחו באינדוקציה מבנית או הפריכו באמצעות דוגמה נגדית: לכל ביטוי exp מטיפוס $bool\_expr$ מתקיים:

$$num\_of\_vars(exp) = num\_of\_connectives(exp) + 1$$

הפרכה:

נגדיר $exp = Not\big(Var("x")\big)$. כעת:

$$num\_of\_vars(exp) = num\_of\_vars\left(Not\big(Var("x")\big)\right) = num\_of\_vars\big(Var("x")\big) = 1$$

$$num\_of\_connectives(exp) = num\_of\_connectives\left(Not\big(Var("x")\big)\right) =$$
$$= num\_of\_connectives\big(Var("x")\big) + 1 = 0 + 1 = 1$$

אך $1 \neq 1 + 1$.

$$\blacksquare$$

3.2) הוכיחו באינדוקציה מבנית או הפריכו באמצעות דוגמה נגדית: לכל ביטוי exp מטיפוס $bool\_expr$ בו לא מופיע Not מתקיים:

$$num\_of\_vars(exp) = num\_of\_connectives(exp) + 1$$

הוכחה:

<u>בסיס</u>: $exp = Var(str)$ עבור str מחרוזת כלשהי.

$$num\_of\_vars(exp) = num\_of\_vars\big(Var(str)\big) = 1$$

$$num\_of\_connectives(exp) = num\_of\_connectives\big(Var(str)\big) = 0$$

ואכן $1 = 0 + 1$.

<u>צעד</u>: נחלק למקרים:

א. $exp = And(exp_1, exp_2)$ עבור שני ביטויים exp_1, exp_2 מטיפוס $bool\_expr$. נניח שהטענה מתקיימת עבור exp_1 ו-exp_2. כעת:

$$num\_of\_vars(exp) = num\_of\_vars\big(And(exp_1, exp_2)\big) =$$
$$= num\_of\_vars(exp_1) + number\_of\_vars(exp_2) \underset{induction\ hypothesis}{=}$$
$$= num\_of\_connectives(exp_1) + 1 + num\_of\_connectives(exp_2) + 1$$

$= num\_of\_connectives\big(And(exp_1, exp_2)\big) + 1 = num\_of\_connectives(exp) + 1$

ב. $exp = Or(exp_1, exp_2)$. הוכחת מקרה זה זהה להוכחת מקרה א'.

■