

## Numerik I – 5. Übungsblatt

### Aufgabe 13: (1 + 1 + 4 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie mit Hilfe des newtonschen dividierte-Differenzen-Schemas das Hermite-Interpolationspolynom  $p$  zu den Daten

$i$	0	1	2
$x_i$	1	0	-2
$p(x_i)$	4	5	-5

mit  $p'(x_1) = 1$ .

- (b) Werten das Interpolationspolynom  $p$  mit Hilfe des Hornerschemas an der Stelle  $x = 2$  aus.  
 (c) Bestimmen Sie mit Hilfe des newtonschen dividierte-Differenzen-Schemas das Polynom kleinsten Grades  $q$ , das die Daten  $x_1 = -1$ ,  $q(x_1) = 2$  und  $x_2 = 1$ ,  $q(x_2) = 4$  interpoliert und zusätzlich  $q''(x_2) = 2$  erfüllt. Geben Sie  $q'(x_2)$  an.

### Aufgabe 14: (3 + 3 Punkte)

- (a) Für welche Knotenwahl  $x_0 < x_1 < x_2$  mit zugehörigen Daten  $y_0, y_1, y_2$  gibt es genau ein Polynom vom Grad höchstens 2 mit

$$p(x_0) = y_0, \quad p'(x_1) = y_1, \quad p(x_2) = y_2?$$

Geben Sie für alle Fälle, in denen ein solches Polynom nicht (eindeutig) existiert Beispiele an.

- (b) Beweisen oder widerlegen Sie: Zu einem Knoten  $x_0 \in \mathbb{R}$  mit zugehörigen Daten  $y_0, \dots, y_n$  gibt es genau ein Polynom vom Grad höchstens  $n$  mit  $p^{(i)}(x_0) = y_i$  für  $0 \leq i \leq n$ .

### Aufgabe 15: (4 + 2 Punkte)

Zeigen Sie den Existenz- und Eindeutigkeitssatz der Hermite-Interpolation aus der Vorlesung (voraussichtlich Satz 2.15), d.h. zeigen Sie: Die Hermite-Interpolationsaufgabe

$$\begin{aligned} \text{gegeben:} \quad & \text{Knoten} & x_0 < x_1 < \dots < x_m, \quad m \geq 0 & \text{und} \\ & \text{Werte} & y_i^{(k)} \in \mathbb{R}, & i = 0, \dots, m, k = 1, \dots, \mu_i, \\ & & \mu_i \geq 0 \text{ für } 0 \leq i \leq m, \\ \text{finde} \quad & p \in \mathbb{P}_n, n = m + \sum_{i=0}^m \mu_i, & \text{mit } p^{(k)}(x_i) = y_i^{(k)} & i = 0, \dots, m, k = 1, \dots, \mu_i \end{aligned}$$

besitzt eine eindeutige Lösung.

**Programmieraufgabe 5:** (Hermite-Interpolation)

- (a) Schreiben Sie eine Funktion `dd = function hermite3(x, y, yp)`, die die Parameter  $\mathbf{x} = (x_0, x_1) = (x_0, x_1)$ ,  $\mathbf{y} = (y_0, y_1) = (y_0^{(0)}, y_1^{(0)})$ ,  $\mathbf{yp} = (y'_0, y'_1) = (y_0^{(0)}, y_1^{(0)})$  für eine Hermite-Interpolationsaufgabe wie in Aufgabe 15 erhält, also  $m = 1$ ,  $\mu_0 = \mu_1 = 1$ , bestimmt.
- (b) Schreiben Sie ein Skript, dass Ihre Funktion für  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 2$ ,  $y_i = f(x_i)$ ,  $y'_i = f'(x_i)$  mit den unten stehenden Funktionen testet. Stellen Sie dazu jeweils die Funktion und das Interpolationspolynom auf dem Intervall  $[x_0, x_1]$  in einer gemeinsamen Grafik dar und messen Sie  $\max_{x \in [x_0, x_1]} |f(x) - P_3(x)|$  numerisch.

Verwenden Sie die folgende Daten:

- (i)  $f(x) = \exp(-\lambda x)$ ,  $\lambda \in \{1, 10, 20, 40, 80\}$   
(ii)  $f(x) = x^k$ ,  $k \in \{3, 4, 10, 20, 40, 80\}$

**Abgabe der Übungsaufgaben am Mittwoch, 18. Mai zu Beginn der Vorlesung.  
Abgabe der Programmierübungen per E-Mail bis Freitag, 20. Mai, 23:59 Uhr an  
num1@hhu.de mit Betreff PA# Gr#, wobei # für die Nummer der Programmieraufgabe bzw.  
der Programmierübungsgruppe steht.**