MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
DR. GEORG JANSING
PAWEL BUCHMÜLLER
MAXIMILIAN SCHNEIDERS
25. MAI 2016

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

19	20	21	Σ

NAME: ____________
MAT-NR.: ____________
NAME: ____________
MAT-NR.: ____________
NAME: ____________
MAT-NR.: ____________
GRUPPE: ____________

Numerik I – 7. Übungsblatt

Aufgabe 19: (3 + 3 Punkte)

Es sei $a = x_0 < \ldots < x_N = b$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$, $h := \max_{j=1,\ldots,N}(x_j - x_{j-1})$, $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ und $s \in S_1(X)$ der f in den Punkten $x_0, \ldots, x_N$ interpolierende lineare Spline (d.h. ein stetiger Polygonzug).

Zeigen Sie:

(a) $\|f - s\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{1}{2}\|f^{(2)}\|_{\infty,[a,b]}h^2$

(b) $\|f' - s'\|_{\infty,[a,b]} := \max_{j=1,\ldots,N} \|f' - s'\|_{\infty,[x_{j-1},x_j]} \leq \|f^{(2)}\|_{\infty,[a,b]}h.$

Hinweis: Beweisen Sie die entsprechenden Abschätzungen zunächst für jedes Teilintervall $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \ldots, N$.

Aufgabe 20: (2+2+2 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Interpolationsaufgaben lösbar bzw. eindeutig lösbar sind und berechnen Sie gegebenenfalls die Lösungen:

(a) Finde $p \in \mathbb{P}_2$, so dass $p(-10) = p(10) = 0$ und $p'(0) = 0$ gilt.

(b) Finde $p \in \mathbb{P}_2$, so dass $p(-10) = p(10) = 0$ und $p'(0) = 1$ gilt.

(c) Finde $p \in \mathbb{P}_2$, so dass $p(0) = 1$, $p'(0) = 1$ und $\int_{-1}^{1} p(x)\,\mathrm{d}x = 1$ gilt.

Aufgabe 21: (2 + 1 + 3 Punkte)

Sei $I = [a, b]$ und $h = (b - a)/2$.

(a) Leiten Sie die Simpson-Regel

$$S(f) = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

als das Integral über das Interpolationspolynom in a, $\frac{a+b}{2}$ und b her.

(b) Zeigen Sie, dass die Simpson-Regel nicht nur Polynome 2. Grades sondern auch Polynome 3. Grades exakt integriert.

(c) Leiten Sie daraus für $f \in C^4([a, b], \mathbb{R})$ die Fehlerdarstellung

$$R(f) := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S(f) = -\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\xi), \qquad \xi \in [a, b]$$

her.

b.w.

Programmieraufgabe 7:

Schreiben Sie ein Programm

```
M = spline_natural(x, f)
```

zur Berechnung der Parameter M_i, $0 \leq i \leq n$ eines kubischen Splines s mit $s(x_i) = f(x_i)$, $0 \leq i \leq n$ und natürlichen Randbedingungen.

Schreiben Sie ein Programm

```
M = spline_not_a_knot(x, f)
```

zur Berechnung der Parameter M_i, $0 \leq i \leq n$ eines kubischen Splines s mit $s(x_i) = f(x_i)$, $0 \leq i \leq n$ und den not-a-knot Randbedingungen $s|_{[x_0,x_2]} \in C^3$ und $s|_{[x_{n-2},x_n]} \in C^3$.

Schreiben Sie weiterhin ein Programm

```
y = spline_eval(x, f, M, X)
```

welches einen kubischen Spline s mit den Parametern M_i, $0 \leq i \leq n$ auf vorgegebenen Punkten X_j, $0 \leq j \leq N \in \mathbb{N}$ auswertet.

Schreiben Sie ein Skript, welches Ihre Programme an der Funktion

$$f(x) = e^{-x^2/2}$$

testet. Stellen Sie jeweils die Funktion f zusammen mit den natürlichen und not-a-knot-Spline-Interpolierenden in den Knoten $x_i = -5 + 10i/n$, $0 \leq i \leq n$ für $n = 5, 10$ un 20 graphisch dar. Verwenden Sie zur Darstellung $N \geq 200$ Punkte.

Hinweis: Die `MATLAB`- bzw. `Ocate`-Funktion `spline` kann den not-a-knot-Spline auswerten. Sie können diese verwenden, um Ihr Ergebnis zu überprüfen. Beachten Sie, dass die Parameter, die die `spline`-Funktion zurückgibt, wenn Sie sie mit zwei Argumenten aufrufen, nicht mit dem Ergebnis vergleichbar ist, welches Ihre `spline_not_a_knot`-Funktion liefert. Nur die Auswertungen des Splines (d.h. `spline` mit drei Argumenten bzw. `spline_eval`) können verglichen werden.

Abgabe der Übungsaufgaben am Mittwoch, 1. Juni zu Beginn der Vorlesung.
Abgabe der Programmierübungen per E-Mail bis Freitag, 3. Juni, 23:59 Uhr an `num1@hhu.de` **mit Betreff** `PA# Gr#`**, wobei # für die Nummer der Programmieraufgabe bzw. der Programmierübungsgruppe steht.**