Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christiane Helzel
Dr. Georg Jansing
Pawel Buchmüller
Maximilian Schneiders
04. Mai 2016

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

10	11	12	Σ

Name: ____________
Mat-Nr.: ____________
Name: ____________
Mat-Nr.: ____________
Name: ____________
Mat-Nr.: ____________
Gruppe: ____________

Numerik I – 4. Übungsblatt

Aufgabe 10:

Sei $f(x) = g(x)h(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für die dividierten Differenzen von f, g und h die Beziehung

$$f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{j=0}^{n} g[x_0, \dots, x_j]h[x_j, \dots, x_n]$$

gilt.

Aufgabe 11:

Wir betrachten die Funktion $f(x) = \sin(\pi x)$ auf dem Intervall $I = [-1, 1]$.

(a) Berechnen Sie die Gewichte λ_j für die barycentrische Darstellung eines Interpolationspolynoms an äquidistanten Knoten $x_j, j = 0, ..., 3$.

(b) Berechnen Sie die Gewichte λ_j für die barycentrische Darstellung eines Interpolationspolynoms an Tschebyscheff Knoten erster Art $x_j, j = 0, ..., 3$.

(c) Werten Sie nun beide Polynome an der Stelle $x = \frac{1}{4}$ aus.

Aufgabe 12: (Zusatzaufgabe)

(a) Zeigen Sie: Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist durch $T_n(x) := \cos(n \arccos x)$ ein Polynom $T_n \in \mathbb{P}_n$ definiert, und es gilt

$$T_{n+1}(x) = 2^n(x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) \quad \text{mit } x_i := \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\right) \quad i = 0, \dots, n.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst mittels vollständige Induktion, dass $T_n \in \mathbb{P}_n$ gilt. Zeigen Sie danach, dass die x_i Nullstellen von T_n sind und folgern Sie daraus die angegebene Identität.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\|T_{n+1}\|_{\infty,[-1,1]} \leq 2^n \|(x - y_0) \cdot \ldots \cdot (x - y_n)\|_{\infty, x\in[-1,1]} \quad \text{für alle } y_0, \dots, y_n \in [-1, 1].$$

Anleitung: Machen Sie zunächst die Annahme, dass für $y_0, \dots, y_n \in [-1, 1]$ die behauptete Ungleichung nicht gilt. Wieviele Nullstellen hat dann das Polynom $T_{n+1}(x) - 2^n \prod_{i=0}^{n}(x - y_i)$?

(c) Die Funktion $f \in C^{n+1}([-1, 1], \mathbb{R})$ soll in den paarweise verschiedenen Stützstellen $x_0, \dots, x_n \in [-1, 1]$ durch ein Polynom aus $\mathbb{P}_n$ interpoliert werden. Welches Vorgehen wird durch Aufgabenteil (b) dafür im Hinblick auf den Interpolationsfehler nahegelegt?

b.w.

Programmieraufgabe 4:

(a) Schreiben Sie eine Methode `lam = baryGew(x)` zur Bestimmung der barycentrische Gewichte λ_i.
`baryGew`: erwartet als Eingabe die Stützstellen $x_0, \dots, x_n$. Als Ausgabe liefert die Funktion die Gewichte $\lambda_0, \dots, \lambda_n$.

(b) Schreiben Sie eine Methode `y = bary(X,x,f,lam)` zur Auswertung des Polynoms.
`bary`: erwartet als Eingabe einen Vektor X an dessen Einträgen das Polynom P_n ausgewertet werden soll, die Stützstellen $x_0, \dots, x_n$, die zugehörigen Funktionswerte $f_0, \dots, f_n$ und die Gewichte $\lambda_0, \dots, \lambda_n$. Ausgabe ist dann $\mathtt{y} = P_n(X)$.

(c) Testen Sie ihren Algorithmus mit Hilfe eines Skriptes:
Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = sin(100x),\ x \in [-1, 1].$$

- Verwenden Sie obigen Methoden um für die Funktion an den Stützstellen $x_i = \frac{2i}{n} - 1$ bzw. den Tschebyscheff Knoten $x_j = \cos\frac{(2j+1)\pi}{2n+2}$ zu interpolieren.
- Verwenden Sie auch die Methoden aus Programmieraufgabe 3.
(Methoden sind auf der Website verfügbar.)
- Stellen Sie die Ergebnisse für $n = 500$, $x \in [0, 0.5]$ graphisch dar.
Verwenden Sie 400 Punkte für die Darstellung.

Abgabe der Übungsaufgaben am Mittwoch, 11. Mai zu Beginn der Vorlesung.
Abgabe der Programmierübungen per E-Mail bis Freitag, 13. Mail, 23:59 Uhr an `num1@hhu.de` **mit Betreff** `PA# Gr#`**, wobei # für die Nummer der Programmieraufgabe bzw. der Programmierübungsgruppe steht.**