

Numerik I – 5. Übungsblatt

Aufgabe 13: (1 + 1 + 4 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie mit Hilfe des newtonschen dividierte-Differenzen-Schemas das Hermite-Interpolationspolynom p zu den Daten

i	0	1	2
x_i	1	0	-2
$p(x_i)$	4	5	-5

mit $p'(x_1) = 1.$

- (b) Werten das Interpolationspolynom p mit Hilfe des Hornerschemas an der Stelle $x = 2$ aus.
- (c) Bestimmen Sie mit Hilfe des newtonschen dividierte-Differenzen-Schemas das Polynom kleinsten Grades q , das die Daten $x_1 = -1$, $q(x_1) = 2$ und $x_2 = 1$, $q(x_2) = 4$ interpoliert und zusätzlich $q''(x_2) = 2$ erfüllt. Geben Sie $q'(x_2)$ an.

Aufgabe 14: (3 + 3 Punkte)

- (a) Für welche Knotenwahl $x_0 < x_1 < x_2$ mit zugehörigen Daten y_0, y_1, y_2 gibt es genau ein Polynom vom Grad höchstens 2 mit

$$p(x_0) = y_0, \quad p'(x_1) = y_1, \quad p(x_2) = y_2?$$

Geben Sie für alle Fälle, in denen ein solches Polynom nicht (eindeutig) existiert Beispiele an.

- (b) Beweisen oder widerlegen Sie: Zu einem Knoten $x_0 \in \mathbb{R}$ mit zugehörigen Daten y_0, \dots, y_n gibt es genau ein Polynom vom Grad höchstens n mit $p^{(i)}(x_0) = y_i$ für $0 \leq i \leq n$.

Aufgabe 15: (4 + 2 Punkte)

Zeigen Sie den Existenz- und Eindeutigkeitssatz der Hermite-Interpolation aus der Vorlesung (vorausichtlich Satz 2.15), d.h. zeigen Sie: Die Hermite-Interpolationsaufgabe

gegeben:	Knoten	$x_0 < x_1 < \dots < x_m, \quad m \geq 0$	und
	Werte	$y_i^{(k)} \in \mathbb{R}, \quad i = 0, \dots, m, k = 1, \dots, \mu_i,$ $\mu_i \geq 0$ für $0 \leq i \leq m,$	
finde	$p \in \mathbb{P}_n, n = m + \sum_{i=0}^m \mu_i,$	mit $p^{(k)}(x_i) = y_i^{(k)} \quad i = 0, \dots, m, k = 1, \dots, \mu_i$	

besitzt eine eindeutige Lösung.

Programmieraufgabe 5: (Hermite-Interpolation)

- (a) Schreiben Sie eine Funktion `dd = function hermite3(x, y, yp)`, die die Parameter $\mathbf{x} = (x_0, x_1) = (x_0, x_1)$, $\mathbf{y} = (y_0, y_1) = (y_0^{(0)}, y_1^{(0)})$, $\mathbf{yp} = (y'_0, y'_1) = (y_0^{(0)}, y_1^{(0)})$ für eine Hermite-Interpolationsaufgabe wie in Aufgabe 15 erhält, also $m = 1$, $\mu_0 = \mu_1 = 1$, bestimmt.
- (b) Schreiben Sie ein Skript, dass Ihre Funktion für $x_0 = 0$, $x_1 = 2$, $y_i = f(x_i)$, $y'_i = f'(x_i)$ mit den unten stehenden Funktionen testet. Stellen Sie dazu jeweils die Funktion und das Interpolationspolynom auf dem Intervall $[x_0, x_1]$ in einer gemeinsamen Grafik dar und messen Sie $\max_{x \in [x_0, x_1]} |f(x) - P_3(x)|$ numerisch.

Verwenden Sie die folgende Daten:

- (i) $f(x) = \exp(-\lambda x)$, $\lambda \in \{1, 10, 20, 40, 80\}$
- (ii) $f(x) = x^k$, $k \in \{3, 4, 10, 20, 40, 80\}$

Abgabe der Übungsaufgaben am Mittwoch, 18. Mai zu Beginn der Vorlesung.
Abgabe der Programmierübungen per E-Mail bis Freitag, 20. Mai, 23:59 Uhr an
num1@hhu.de mit Betreff PA# Gr#, wobei # für die Nummer der Programmieraufgabe bzw.
der Programmierübungsgruppe steht.