Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christiane Helzel
Dr. Georg Jansing
Pawel Buchmüller
Maximilian Schneiders
6. Juli 2016

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

# Numerik I – 12. Übungsblatt

**Aufgabe 38:** (2 + 2 + 2 Punkte)

(a) Bestimmen Sie eine Cholesky-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 11 \end{bmatrix}.$$

(b) Lösen Sie mit Hilfe dieser Zerlegung das Gleichungssystem

$$Ax = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 12 \end{bmatrix}$$

durch Vorwärts- und Rückwärtssubstitution.

(c) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie: $A$ ist symmetrisch, positiv definit genau dann, wenn $A$ eine Cholesky-Zerlegung besitzt.

**Aufgabe 39:** (4+2 Punkte)

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$ mit $n \geq 2$ und $a \geq 1$.

(a) Zeigen Sie, dass die Folge

$$x_{k+1} = \frac{n-1}{n} x_k + \frac{a}{n x_k^{n-1}}, \quad k \geq 0,$$

für jeden Startwert $x_0 \geq 1$ gegen $\sqrt[n]{a}$ konvergiert.

(b) Sei nun speziell $n = 2$, $a = 2$ und $x_0 = 2$. Berechnen Sie unter Ausnutzen der a posteriori Abschätzung des Banachschen Fixpunktsatzes mit obiger Rekursion eine Näherung $y$ für $\sqrt{2}$ mit $|y - \sqrt{2}| \leq 10^{-4}$. Vergleichen Sie die Anzahl der benötigten Iterationen mit der Zahl, die man aufgrund der a priori Abschätzung des Banachschen Fixpunktsatzes erwartet.

**Aufgabe 40:** (4+2 Punkte)

Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 &= 4, \\ x_1^3 - x_2^3 &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

(a) Finden Sie eine Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ deren Nullstellen genau die Lösungen des Gleichungssystems (**??**) sind. Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von $F$ für jeden Startwert $x_0 \in [1,2] \times [1,2]$ konvergiert. Der $\mathbb{R}^2$ sei dabei mit der Maximumsnorm versehen.

(b) Führen Sie zwei Schritte des Newton-Verfahrens mit dem Startwert $x_0 = [1,1]^T$ aus. Bestimmen Sie die Maximumsnorm des Fehlers.

**Hinweis:** In der kommenden Woche wird das Newton-Verfahren für Systeme von Gleichungen eingeführt. Sie dürfen hier ohne Beweis verwenden, dass es von der Form

$$x_k = x_{k-1} - \mathrm{D}f(x_{k-1})^{-1} f(x_{k-1})$$

ist, wobei

$$x_k \in \mathbb{R}^n, \quad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \mathrm{D}f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n} \text{ die Jacobi-Matrix von } f \text{ bezeichnet.}$$

**Programmieraufgabe 13:**

(a) Implementieren Sie das Newton-Verfahren als eine Funktion mit der Signatur

$$\texttt{x = Newton(}x_0\texttt{,}f\texttt{,}Df\texttt{,}N_{\text{it}}\texttt{).}$$

Hierbei soll $x_0 \in \mathbb{R}^n$ der Startwert sein, $f$ und D!$f$ Funktionen, die zu einer Eingabe $x \in \mathbb{R}^n$ den Wert $f(x) \in \mathbb{R}^n$ bzw. die Jacobi-Matrix $\mathrm{D}f(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zurückgeben. Zuletzt sei $N_{\text{it}} \in \mathbb{N}$ eine festgelegte Anzahl an Iterationen, Sie müssen also kein Abbruchkriterium implementieren.

(b) Testen Sie Ihre Funktion anhand des Beispiels $f(x) = x^2 - 1$, für den Fall $n = 1$.

(c) Das Problem, einen Schnittpunkt der Parabel $y = x^2$ mit dem Einheitskreis zu finden, lässt sich schreiben als

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} y - x^2 \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{2}$$

Approximieren Sie eine Lösung von (**??**) mit Hilfe Ihres Newton-Verfahrens für den Startwert $[x_0, y_0]^T = [1,0]^T$ und $N_{\text{it}} = 2,3,4,5$ und vergleichen Sie das Resultat mit der exakten Lösung.

**Abgabe der Übungsaufgaben am Mittwoch, 13. Juli zu Beginn der Vorlesung.**
**Abgabe der Programmierübungen per E-Mail bis Freitag, 15. Juli, 23:59 Uhr an** `num1@hhu.de` **mit Betreff** `PA# Gr#`**, wobei # für die Nummer der Programmieraufgabe bzw. der Programmierübungsgruppe steht.**