

Numerik I – 12. Übungsblatt

Aufgabe 35: (3+3 Punkte)

Bestimmen Sie die QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} -7 & 5 & 12 \\ 15 & 51 & 90 \\ 7 & 31 & 6 \\ -1 & -25 & 12 \end{pmatrix}$$

und lösen Sie damit das lineare Ausgleichsproblem $\|b - Ax\|_2^2 \rightarrow \min$ mit $b = (1, 1, 0, 0)^T$.

Aufgabe 36: (2+3+1 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $1 \leq n \leq m$. Zeigen Sie:

- (a) Das lineare Ausgleichsproblem

$$F(x) = \|Ax - b\|_2^2 = \langle Ax - b, Ax - b \rangle \rightarrow \min \quad (1)$$

besitzt eine Lösung $x^* \in \mathbb{R}^n$.

- (b) $x^* \in \mathbb{R}^n$ löst das lineare Ausgleichsproblem (1) genau dann, wenn x^* die sogenannten Normalengleichungen

$$A^T A x = A^T b \quad (2)$$

löst.

- (c) Falls $\text{Rang}(A) = n$, so besitzen die Normalengleichungen (1) genau eine Lösung.

Aufgabe 37: (2+2+2 Punkte)

Die Messung eines Signals der Form

$$f(t) = \alpha \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \beta \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$$

liefere folgende Tabelle

t_i	1	2	3
f_i	1	0	1

Die Parameter α und β sollen im Sinne der Methode der kleinsten Fehlerquadrate optimal bestimmt werden. Geben Sie das entsprechende lineare Ausgleichsproblem an, stellen Sie die Normalengleichungen auf und lösen Sie diese.

Programmieraufgabe 12:

- (a) Schreiben Sie eine Funktion $[Q, R] = \text{MyQR}(A)$, die für eine gegebene Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $1 \leq n \leq m$ die Matrizen Q und R der QR-Zerlegung berechnet.
- (b) Schreiben Sie eine Funktion $x = \text{loeseQR}(A, b)$, die für eine gegebene Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $1 \leq n \leq m$ und einen gegebenen Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2^2 \rightarrow \min$ löst.
Diese Funktion soll die MyQR-Funktion aus (a) verwenden. Interne Routinen wie der “\”-Operator sollen hier nicht verwendet werden.
- (c) Testen Sie Ihre Routinen in einem Skript p12 für das Gleichungssystem aus Aufgabe 35. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit einem internen Löser (z.B. $x = A \setminus b$).
- (d) **Zusatzaufgabe:** Testen Sie Ihre Routinen an zehn Zufällig generierten Ausgleichsproblemen $\|Ax - b\|_2^2 \rightarrow \min$. Dabei soll auch die Größe $1 \leq m \leq 10, m \leq n \leq 11$ zufällig gewählt sein. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit einem internen Löser (z.B. $x = A \setminus b$).

Hinweis: Die in ihrer Programmiersprache möglicherweise vorgefertigte Routinen zur Berechnung einer QR-Zerlegung (z.B. qr in Octave/MATLAB) soll hier höchstens zur Vergleichszwecken benutzt werden.

Abgabe der Übungsaufgaben am Mittwoch, 6. Juli zu Beginn der Vorlesung.

Abgabe der Programmierübungen per E-Mail bis Freitag, 8. Juli, 23:59 Uhr an num1@hhu.de mit Betreff PA# Gr#, wobei # für die Nummer der Programmieraufgabe bzw. der Programmierübungsgruppe steht.