

Numerik I – 11. Übungsblatt

Aufgabe 32: (3 + 3 Punkte)

Wir betrachten die euklidische Norm $\| \cdot \| = \| \cdot \|_2$ auf \mathbb{R}^2 .

- Berechnen Sie die Kondition $\kappa_2(A)$ der Matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ bezüglich dieser Norm.
- Die Vektoren x und \tilde{x} mögen die Gleichungssysteme $Ax = b$ und $A\tilde{x} = \tilde{b}$ mit $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ und $\tilde{b} = \begin{bmatrix} 3+\epsilon \\ 4 \end{bmatrix}$ lösen. Wie groß darf ϵ höchstens sein, damit der relative Fehler $\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|}$ in der Euklidischen Norm höchstens 1% beträgt? Dabei sollen die Vektoren x und \tilde{x} nicht berechnet werden.

Aufgabe 33: (3 + 3 Punkte)

Bestimmen Sie die *LR*-Zerlegung ohne Pivotisierung der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

und lösen Sie anschließend mit Hilfe der *LR*-Zerlegung das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 34: (3 + 3 Punkte)

Seien $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$ und L_i eine elementare Matrix aus dem Gauß'schen Eliminationsalgorithmus, d.h.

$$L_i = \text{Id} + l_i e_i^T = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & l_{i+1,i} & 1 \\ & \vdots & & & \ddots \\ & & l_{n,i} & & 1 \end{bmatrix}, \quad l_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ l_{i+1,i} \\ \vdots \\ l_{n,i} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

Zeigen Sie:

(a)

$$L_i^{-1} = \text{Id} - l_i e_i^T = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -l_{i+1,i} & 1 \\ & \vdots & & & \ddots \\ & & -l_{n,i} & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und}$$

(b)

$$L := (L_{n-1} \cdots L_1)^{-1} = \text{Id} - \sum_{i=1}^{n-1} l_i e_i^T = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -l_{2,1} & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ -l_{n,1} & \cdots & -l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}.$$

b.w.

Programmieraufgabe 11:

- (a) Schreiben Sie eine Funktion $[L, R] = \text{lr}(A)$, die für eine gegebene quadratische Matrix A die Matrizen L und R der LR-Zerlegung berechnet.

Die Routine soll mit einer entsprechenden Fehlermeldung abbrechen, falls Division durch Null auftritt.

- (b) Schreiben Sie eine Funktion $x = \text{loeseLGS}(A, b)$, die für eine gegebene quadratische Matrix A und einen gegebenen Vektor b passender Länge das Gleichungssystem $Ax = b$ löst.

Diese Funktion soll Ihre lr -Funktion aus (a) verwenden und dann das Gleichungssystem $Ly = b$ durch Vorwärtselimination und das Gleichungssystem $Rx = y$ durch Rückwärtssubstitution lösen.

- (c) Testen Sie Ihre Routinen in einem Skript $p11$ für das Gleichungssystem und die rechten Seiten aus Aufgabe 33.

Hinweis: Die in Ihrer Programmiersprache möglicherweise vorgefertigten Routinen zur Berechnung einer LR-Zerlegung (z.B. `lu` in OCTAVE/MATLAB) oder zum Lösen linearer Gleichungssysteme (`\`-Operator o.ä.) dürfen höchstens zu Vergleichszwecken verwendet werden.

**Abgabe der Übungsaufgaben am Mittwoch, 29. Juni zu Beginn der Vorlesung.
Abgabe der Programmierübungen per E-Mail bis Freitag, 1. Juli, 23:59 Uhr an
num1@hhu.de mit Betreff PA# Gr#, wobei # für die Nummer der Programmieraufgabe bzw.
der Programmierübungsgruppe steht.**