MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
DR. GEORG JANSING
PAWEL BUCHMÜLLER
MAXIMILIAN SCHNEIDERS
20. APRIL 2016

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

4	5	6	Σ

NAME: ____________________
MAT-NR.: ____________________
NAME: ____________________
MAT-NR.: ____________________
NAME: ____________________
MAT-NR.: ____________________
GRUPPE: ____________________

Numerik I – 2. Übungsblatt

Aufgabe 4: (1+2+3)

Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$, wobei $I \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ ein Intervall mit $0 \in I$ ist.

(a) Es gelte $f \in \mathcal{O}(h^p)$ und $g \in \mathcal{O}(h^q)$ für $h \to 0$ und geeignete $p, q \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: $(f \cdot g) \in \mathcal{O}(h^{p+q})$ für $h \to 0$.

(b) Die Funktion g habe keine Nullstellen nahe 0. Zeigen Sie:

$$f \in o(g) \Rightarrow f \in \mathcal{O}(g) \text{ für } h \to 0.$$

(c) Welche der folgenden Aussagen sind für $h \to 0$ korrekt? Begründen Sie Ihre Antworten.

1. $h^3 = o(h^3)$
2. $\sin(h) = \mathcal{O}(h)$
3. $\sin(h) = h + o(h)$

Aufgabe 5:

Die Größe $x = 2$ sei mit einem relativen Fehler von 5% gemessen worden. Wie groß ist der relative Fehler von

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}?$$

Wie groß darf der relative Messfehler für x höchstens sein, damit der relative Fehler von $f(x)$ nicht größer als 1% ist?

Aufgabe 6:

Formen Sie die folgenden Ausdrücke so um, dass bei ihrer Berechnung Auslöschungen in dem jeweils angegebenen Argumentbereich vermieden werden:

(a) $\dfrac{1}{1+2x} - \dfrac{1-x}{1+x}$ für $|x| \ll 1$

(b) $\sqrt{x + \dfrac{1}{x}} - \sqrt{x - \dfrac{1}{x}}$ für $|x| \gg 1$,

(c) $\dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$ für $x \neq 0$ und $|x| \ll 1$.

b.w.

Programmieraufgabe 2: (Approximationsgüte)

(a) Schreiben Sie zwei Funktionen `[ res, m, err ] = logln2_A(eps)` und `[ res, m, err ] = logln2_B(eps)`, die log(2) mit den beiden Vorschriften

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = A_n + R_m, \qquad A_n = \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

und

$$\ln(2) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{1-2n}}{2n-1} = B_n + \widetilde{R}_m, \quad B_n = 2\sum_{n=1}^{m} \frac{3^{1-2n}}{2n-1}$$

approximieren. Dabei soll m so gewählt werden, dass $|A_n - A_{n-1}| < \texttt{eps}$ bzw. $|B_n - B_{n-1}| < \texttt{eps}$ gelten. Der Rückgabewert `res` enthalte das Ergebnis der Approximation, `m` sei die Anzahl der benötigten Iterationen und $\texttt{err} = |A_n - A_{n-1}|$ bzw. $\texttt{err} = |B_n - B_{n-1}|$ der geschätze Fehler.

(b) Schreiben Sie ein Skript `p2.m`, welches für $\texttt{eps} = 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}$ obige Funktionen benutzt um log(2) zu diesen Genauigkeiten zu approximieren. Stellen Sie die Ergebnisse, Iterationszahlen, geschätze und tatsächliche Fehler übersichtlich dar. Den tatsächlichen Fehler können Sie mit Hilfe der `MATLAB`-Internen `log`-Funktion berechnen.

Abgabe der Übungsaufgaben am Mittwoch, 27. April zu Beginn der Vorlesung.
Abgabe der Programmierübungen per E-Mail bis Freitag, 29. April, 23:59 Uhr an `num1@hhu.de` **mit Betreff** `PA# Gruppe#`, **wobei # für die Nummer der Programmieraufgabe bzw. der Programmierübungsgruppe steht.**