

NAME: \_\_\_\_\_  
 MAT-NR.: \_\_\_\_\_  
 NAME: \_\_\_\_\_  
 MAT-NR.: \_\_\_\_\_  
 NAME: \_\_\_\_\_  
 MAT-NR.: \_\_\_\_\_  
 GRUPPE: \_\_\_\_\_

## Numerik I – 11. Übungsblatt

### Aufgabe 32: (3 + 3 Punkte)

Wir betrachten die euklidische Norm  $\| \cdot \| = \| \cdot \|_2$  auf  $\mathbb{R}^2$ .

- (a) Berechnen Sie die Kondition  $\kappa_2(A)$  der Matrix  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  bezüglich dieser Norm.
- (b) Die Vektoren  $x$  und  $\tilde{x}$  mögen die Gleichungssysteme  $Ax = b$  und  $A\tilde{x} = \tilde{b}$  mit  $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$  und  $\tilde{b} = \begin{bmatrix} 3+\epsilon \\ 4 \end{bmatrix}$  lösen. Wie groß darf  $\epsilon$  höchstens sein, damit der relative Fehler  $\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|}$  in der Euklidischen Norm höchstens 1% beträgt? Dabei sollen die Vektoren  $x$  und  $\tilde{x}$  nicht berechnet werden.

### Aufgabe 33: (3 + 3 Punkte)

Bestimmen Sie die  $LR$ -Zerlegung ohne Pivotisierung der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

und lösen Sie anschließend mit Hilfe der  $LR$ -Zerlegung das Gleichungssystem  $Ax = b$  mit

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

### Aufgabe 34: (3 + 3 Punkte)

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq i \leq n$  und  $L_i$  eine elementare Matrix aus dem Gauß'schen Eliminationsalgorithmus, d.h.

$$L_i = \text{Id} + l_i e_i^T = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & l_{i+1,i} & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ & & l_{n,i} & & & 1 \end{bmatrix}, \quad l_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ l_{i+1,i} \\ \vdots \\ l_{n,i} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

Zeigen Sie:

(a)

$$L_i^{-1} = \text{Id} - l_i e_i^T = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -l_{i+1,i} & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ & & -l_{n,i} & & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und}$$

(b)

$$L := (L_{n-1} \cdots L_1)^{-1} = \text{Id} - \sum_{i=1}^{n-1} l_i e_i^T = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -l_{2,1} & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ -l_{n,1} & \cdots & -l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}.$$

b.w.

### **Programmieraufgabe 11:**

- (a) Schreiben Sie eine Funktion  $[L, R] = \text{lr}(A)$ , die für eine gegebene quadratische Matrix  $A$  die Matrizen  $L$  und  $R$  der LR-Zerlegung berechnet.

Die Routine soll mit einer entsprechenden Fehlermeldung abbrechen, falls Division durch Null auftritt.

- (b) Schreiben Sie eine Funktion  $x = \text{loeseLGS}(A, b)$ , die für eine gegebene quadratische Matrix  $A$  und einen gegebenen Vektor  $b$  passender Länge das Gleichungssystem  $Ax = b$  löst.

Diese Funktion soll Ihre  $\text{lr}$ -Funktion aus (a) verwenden und dann das Gleichungssystem  $Ly = b$  durch Vorwärtselimination und das Gleichungssystem  $Rx = y$  durch Rückwärtssubstitution lösen.

- (c) Testen Sie Ihre Routinen in einem Skript `p11` für das Gleichungssystem und die rechten Seiten aus Aufgabe 33.

**Hinweis:** Die in Ihrer Programmiersprache möglicherweise vorgefertigten Routinen zur Berechnung einer LR-Zerlegung (z.B. `lu` in OCTAVE/MATLAB) oder zum Lösen linearer Gleichungssysteme (`\`-Operator o.ä.) dürfen höchstens zu Vergleichszwecken verwendet werden werden.

Abgabe der Übungsaufgaben am Mittwoch, 29. Juni zu Beginn der Vorlesung.  
Abgabe der Programmierübungen per E-Mail bis Freitag, 1. Juli, 23:59 Uhr an `num1@hhu.de` mit Betreff `PA# Gr#`, wobei `#` für die Nummer der Programmieraufgabe bzw. der Programmierübungsgruppe steht.