MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
DR. GEORG JANSING
PAWEL BUCHMÜLLER
MAXIMILIAN SCHNEIDERS
27. APRIL 2016

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

7	8	9	Σ

NAME: ____________________
MAT-NR.: ____________________
NAME: ____________________
MAT-NR.: ____________________
NAME: ____________________
MAT-NR.: ____________________
GRUPPE: ____________________

Numerik I – 3. Übungsblatt

Aufgabe 7: (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Vandermonde-Matrix

$$V_n := \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

die Beziehung

$$\det(V_n) = \prod_{i=0}^{n} \prod_{j=i+1}^{n} (x_j - x_i)$$

gilt.

Aufgabe 8: (2+2+2 Punkte)

Berechnen Sie das Interpolationspolynom zu den Stützstellen und Funktionswerten

x_i	-1	1	0	-2
$f(x_i)$	2	4	5	-5

(a) in der Lagrange-Darstellung, d.h. bestimmen Sie für die Darstellung

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{3} f_j l_{jn}(x)$$

die Koeffizienten f_i und die Polynome l_{jn}

(b) in der Newton-Darstellung, d.h. bestimmen Sie für die Darstellung

$$\begin{aligned} P_n(x) &= a_0 + (x - x_0)\left[a_1 + (x - x_1)\left[a_2 + (x - x_2)\left[\cdots\left[a_{n-1} + (x - x_{n-1})a_n\right]\dots\right]\right]\right] \\ &= \sum_{j=0}^{n} a_j w_j(x) \end{aligned}$$

die Koeffizienten $a_j = [x_0, \dots, x_j]f$ und

(c) bzgl. der Monombasis, d.h. bestimmen Sie für die Darstellung

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$$

die Koeffizienten b_j.

Aufgabe 9: (2+2+2 Punkte)

Bestimmen Sie die Kondition der Auswertung des durch die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ gegebenen Polynoms

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

an der Stelle x zum einen bezüglich Störungen $a_i \to \widetilde{a}_i = a_i(1+\epsilon_i)$ der Koeffizienten und zum anderen bezüglich Störungen $x \to \widetilde{x} = x(1+\epsilon)$ von x.

Betrachten Sie insbesondere das Polynom

$$p(x) = 8118x^4 - 11482x^3 + x^2 + 5741x - 2030 = 8118\big(x - \tfrac{70}{99}\big)\big(x - \tfrac{29}{41}\big)\big(x - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\big)\big(x + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\big)$$

an der Stelle $x = 0{,}7071067810$.

Das "exakte" Resultat ist

$$p(x) \approx 1{,}6246884330861257219478 \cdot 10^{-14}.$$

Ein Programm in Gleitkommaarithmetik liefert

$$p(x) \approx 1{,}624688701158355 \cdot 10^{-14}.$$

Beurteilen Sie die Lösung anhand der Kondition des Problems.

Programmieraufgabe 3: (Polynominterpolation)

Berechnen Sie zu gegebenen Stützstellen und Daten $x_i, f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$ das Interpolationspolynom

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j w_j(x)$$

in der Newton-Basis.

(a) Schreiben Sie eine Methode `a = coeff(x, f)` zur Bestimmung der Newton Koeffizienten.
`coeff`: erwartet als Eingabe die Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ und die zugehörigen Funktionswerte $f_0, \ldots, f_n$. Als Ausgabe liefert die Funktion die Newton-Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ des Interpolationspolynoms.

(b) Schreiben Sie eine Methode `y = horner(x, a, X)` zur Auswertung des Newton-Polynoms unter Verwendung der Horner-Schemas.
`horner`: erwartet als Eingabe die Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$, die Newton-Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ und einen Vektor X, an dessen Einträgen das Polynom P_n ausgewertet werden soll. Ausgabe ist dann $\mathtt{y} = P_n(X)$.

(c) Testen Sie ihren Algorithmus mit Hilfe eines Skriptes:
Verwenden Sie obige Methoden um für die Funktionen $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ und $g(x) = \sin(4x) + 4\cos(x)$ die jeweiligen Newton-Interpolierenden an den Stützstellen $x_i = \frac{2i}{n} - 1$ und Funktionswerten $f_i = f(x_i), g_i = g(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$ zu bestimmen. Werten Sie weiter $f(x) - P_n(x)$ bzw. $g(x) - P_n(x)$ jeweils and den Stellen $x = \frac{i}{5n} - 1$, $i = 0, \ldots, 10n$ aus und stellen Sie die Ergebnisse für $n = 5, 10, 18, 24$ graphisch dar. Beschreiben Sie Ihre Beobachtungen und interpretieren Sie diese.

Abgabe der Übungsaufgaben am Mittwoch, 4. Mai zu Beginn der Vorlesung.
Abgabe der Programmierübungen per E-Mail bis Freitag, 6. Mail, 23:59 Uhr an `num1@hhu.de` **mit Betreff** `PA# Gr#`**, wobei # für die Nummer der Programmieraufgabe bzw. der Programmierübungsgruppe steht.**