MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
DR. GEORG JANSING
PAWEL BUCHMÜLLER
MAXIMILIAN SCHNEIDERS
8. JUNI 2016

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

25	26	27	Σ

NAME: ______________
MAT-NR.: ______________
NAME: ______________
MAT-NR.: ______________
NAME: ______________
MAT-NR.: ______________
GRUPPE: ______________

Numerik I – 9. Übungsblatt

Aufgabe 25: (1+2+3 Punkte)

Berechnen Sie die Stützstellen und Gewichte der Gauß-Quadraturformeln mit einer, zwei, drei Stützstellen auf dem Grundintervall $[0, 1]$.

Hinweis: Es genügt nicht, die Daten einfach anzugeben, sie müssen Ihre Angaben begründen. Auch Formeln für (ggf. skalierte) Legendre-Polynome müssen nachgewiesen werden.

Aufgabe 26: (4 + 2 Punkte)

Sei $Q_n(f) = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$ eine interpolatorische Quadraturformel auf dem Grundintervall [0, 1].

(a) Sei $m = x \mapsto \prod_{i=0}^n (x - x_i)$ das Knotenpolynom.

Zeigen Sie: Die Quadraturformel hat genau dann Ordnung $n + 1 + k$, wenn

$$\int_0^1 m(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{für alle} \qquad g \in \mathbb{P}_{k-1}.$$

(b) Die Knoten a_i erfüllen das lineare Gleichungsystem

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_0 & \dots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_0^n & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{bmatrix}.$$

Ist der Vektor der a_i immer die eindeutige Lösung dieses Systems?

Aufgabe 27: (3 + 3 Punkte)

(a) Sei die Folge $\phi_k \in \mathbb{P}_k$, $k \geq 0$ von Polynomen, die der Beziehung

$$x\phi_k(x) = \beta_k\phi_{k-1}(x) + \alpha_k\phi_k(x) + \beta_{k+1}\phi_{k+1}(x), \quad k \geq 0, \qquad \beta_k \neq 0, \quad 1 \leq k \leq n$$

genügen. Sei

$$T_n = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_1 & & \\ \beta_1 & \alpha_1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ & & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie:

$\lambda \in \mathbb{R}$ ist genau dann eine Nullstelle von ϕ_n, wenn λ ein Eigenwert der Tridiagonalmatrix T_n ist. Wie sieht ein passender Eigenvektor aus?

(b) Wie könnte man damit die Knoten einer Gauß-Quadraturformel auf dem Grundintervall $[-1, 1]$ numerisch berechnen?

b.w.

Verwenden Sie ohne Beweis: Die Legendre-Polynome $P_n(x)$ aus der Vorlesung – d.h. die Polynome, die bzgl. des Skalarproduktes

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

orthogonal stehen mit $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ und mit der Skalierung $P_n(1) = 1$ – erfüllen die Rekursionsformel

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x).$$

Hinweis: Welche Rekursionsformel erfüllen die skalierten Polynome $\widetilde{P}_n := \sqrt{2n+1}P_n$?

Programmieraufgabe 9:

(a) Schreiben Sie eine Funktion `[ A, X ] = gauss(n)`, die die Knoten und Gewichte einer Gauß-Quadraturformel mit $\mathtt{n}+1$ Stützstellen auf dem Intervall $[-1, 1]$ bestimmt.

Hinweis:: `MATLAB/Octave: eig`.

(b) Schreiben Sie eine Funktion `[ At, Xt ] = transformQF(A, X, a, b, at, bt)`, die eine gegebene Quadraturformel mit den Stützstellen $\mathtt{X}_i$ und Gewichten $\mathtt{A}_i$, $i = 0, ..., n$ auf dem Grundintervall $[\mathtt{a}, \mathtt{b}]$ auf das Intervall $[\mathtt{at}, \mathtt{bt}]$ transformiert.

(c) Schreiben Sie eine Funktion `v = quadApply(f, A, X)` die eine Quadraturformel mit den Stützstellen $\mathtt{X}_i$ und Gewichten $\mathtt{A}_i$, $i = 0, ..., n$ für eine Funktion $\mathtt{f} : [\mathtt{a}, \mathtt{b}] \to \mathbb{R}$ auswertet.

(d) Schreiben Sie eine Funktion `v = gaussInt(f, a, b, n, N)`, die das Integral über die Funktion $\mathtt{f} : [\mathtt{a}, \mathtt{b}] \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall $[\mathtt{a}, \mathtt{b}]$ mit einer Gauß-Quadraturformel mit $\mathtt{n}+1$ Stützstellen auf `N` Intervallen approximiert.

(e) Schreiben Sie ein Skript `p9`, welches Ihre Routine testet: Verwenden Sie $f = t \mapsto \exp(t)$ und das Intervall $[a, b] = [-3, 3]$.

Erstellen Sie doppelt-logarithmische Plots des Fehlers für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ Stützstellen und $N = 2, 4, 8, \ldots, 1024$ Intervalle. Plotten Sie dieselben Fehler in einem zweiten Bild auch gegen die Anzahl der Funktionsauswertungen.

Abgabe der Übungsaufgaben am Mittwoch, 15. Juni zu Beginn der Vorlesung.
Abgabe der Programmierübungen per E-Mail bis Freitag, 17. Juni, 23:59 Uhr an `num1@hhu.de` **mit Betreff** `PA# Gr#`**, wobei # für die Nummer der Programmieraufgabe bzw. der Programmierübungsgruppe steht.**